[SOT_SUM25] Combinatorics & Graph Theory

Vo Ngoc Tram Anh

July 12, 2025

https://github.com/vntanh1406/Graph_SUM2025/blob/main/VNTA_GraphSUM25.pdf
— **Update *12/07/2025*** —
1.11, 7
— **Update *08/06/2025*** —
Bài tập làm thêm ở nhà: 1.1.1, 1.1.2, 1.4.2, 1.7.1, 1.7.2, 6.1.9 -> 6.1.12
— **Update *21/05/2025*** —
Bài tập làm thêm ở nhà: 1.10.1 (Code), 1.10.2 (Code), 5.1
— **Update *20/05/2025*** —
Bài tập làm thêm ở nhà: 1.8.4, 3.1.1
— **Update *12/05/2025*** —
Bài tập làm thêm ở nhà: subsection 2.1, subsection 2.2, 4.1.8
— **Update *07/05/2025*** —
Bài tập đã làm trên lớp: 2.1, 2.2
Bài tập làm thêm ở nhà: 1.3.1, 1.4.1, 1.8.1, 1.8.2, 1.8.3

Contents

1 Basic Combinatorics

1.1 Inclusion-Exclusion Principle

1.1.1 Problem 35

- **Note: Derangement or Inclusion-exclusion principle ? :(**
- Tổng số cách gửi email: $n! = 10!$
- Tổng số cách sao cho không ai nhận đúng email của mình: $!n = n! \sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i}{i!}$
- Vậy xác suất là:

$$P_n = \frac{!n}{n!} = \sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i}{i!} = \sum_{i=0}^{10} \frac{(-1)^i}{i!}$$

- Xét khai triển Taylor:

$$e^x = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!}, \quad \forall x \in R$$

Thay $x = -1$, ta có:

$$\frac{1}{e} = e^{-1} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{i!}$$

Vậy

$$\lim_{n\to\infty} P_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i}{i!} = \frac{1}{e}$$

Tức khi n càng lớn (ví dụ: 10000), thì P_n càng tiến đến $\frac{1}{e}$

1.1.2 Problem 36

- Let:
  - A: set of people who like latte, $|A| = 250$
  - B: set of people who like cappuccino, $|B| = 200$
  - $|A \cap B| = 80$: number of people who like both latte and cappuccino
  - $\overline{A \cup B}$: set of people who like neither, $|\overline{A \cup B}| = 100$
- Using the Inclusion–Exclusion Principle:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = 250 + 200 - 80 = 370$$

- Total number of people interviewed:

$$|A \cup B| + |\overline{A \cup B}| = 370 + 100 = 470$$

- Total cost:

$$470 \times 10 \text{ cents} = 4700 \text{ cents}$$

1.2 Problems on inclusion-exclusion principle

1.3 Problems on counting

1.3.1 Bài toán 2. Số cách đặt dấu ngoặc đúng

https://github.com/vntanh1406/Graph_SUM2025/blob/main/Combinatorics/ValidParentheses.cpp

- Số Catalan thỏa mãn hệ thức truy hồi sau:
  - $C_0 = 1$
  - $C_{n+1} = \sum_{i=0}^{n} C_i \cdot C_{n-i}$ *(Ref: Wikipedia: Catalan number / Properties)*
- Gọi D_n là số chuỗi đúng đắn gồm n dấu ngoặc mở và n dấu ngoặc đóng. Ta cần chứng minh $D_n = C_n = \frac{1}{n+1} \cdot \binom{2n}{n}$.
- Với $n = 0$, chỉ có 1 cách (chuỗi rỗng): $D_0 = C_0 = \frac{1}{0+1} \cdot \binom{0}{0} = 1$
- Giả sử $D_k = C_k = \frac{1}{k+1} \cdot \binom{2k}{k}$ đúng $\forall k \leq n, k \in N$. Ta cần chứng minh rằng điều này cũng đúng với D_{n+1}.
- Thật vậy, mỗi chuỗi ngoặc đúng có thể viết thành dạng $(S_1)S_2$, trong đó:
  - S_1 là chuỗi ngoặc đúng với i cặp ngoặc.
  - S_2 là chuỗi ngoặc đúng với $n - i$ cặp ngoặc.

  Khi đó, tổng số cặp ngoặc trong chuỗi $(S_1)S_2$ là: $i + (n - i) + 1 = n + 1$ cặp ngoặc.

  Vậy số chuỗi ngoặc đúng có thể được biểu diễn thành: $D_{n+1} = \sum_{i=0}^{n} D_i \cdot D_{n-i}$

  Áp dụng giả thiết quy nạp, ta có: $D_{n+1} = \sum_{i=0}^{n} C_i \cdot C_{n-i} = C_{n+1}$
- Do đó, ta đã chứng minh được rằng $D_{n+1} = C_{n+1}$, hoàn thành chứng minh quy nạp.

1.3.2 Bài toán 3: Code tính P_n, A_n^k, C_n^k, số catalan thứ n

https://github.com/vntanh1406/Graph_SUM2025/blob/main/Combinatorics/CalculateP_A_C_Catalan.cpp

1.3.3 Code in $n + 1$ dòng đầu tiên của tam giác Pascal và khai triển nhị thức Newton của $(a + b)^n, (a + b + c)^n, (\sum_{i=1}^{m} a_i)^n$

https://github.com/vntanh1406/Graph_SUM2025/blob/main/Combinatorics/PascalTriaAndMultinomial.cpp

1.4 Method of mathematical induction & recurrence

1.4.1 Problem 3

- Gọi $f(n)$ là số vùng mà các đường thẳng tạo ra.
- Với $n = 0$, không có đường thẳng nào, hình vuông là một vùng duy nhất.

  $f(0) = 1 + \frac{0 \cdot 1}{2} = 1$

- Với $n = 1$, 1 đường thẳng chia hình vuông thành 2 vùng.
  $f(1) = 1 + \frac{1 \cdot 2}{2} = 2$
- Với $n = 2$, 2 đường thẳng cắt nhau chia hình vuông thành 4 vùng.
  $f(2) = 1 + \frac{2 \cdot 3}{2} = 4$
- Giả sử $f(k) = 1 + \frac{k \cdot (k+1)}{2}$ đúng, ta cần chứng minh điều này đúng với $k + 1$.
- Thật vậy, khi thêm đường thẳng thứ $(k + 1)$ vào hình vuông đã có k đường thẳng, thì đường thẳng thứ $(k + 1)$ này:
  - Cắt tất cả các đường thẳng trước đó (vì mọi cặp đường thẳng đều giao nhau)
  - Không có 3 đường thẳng nào đồng quy
  - Tạo ra k giao điểm mới, các giao điểm này chia đường thẳng thứ $(k+1)$ thành $k+1$ đoạn
    * 1 đoạn từ điểm bắt đầu trên cạnh đến giao điểm đầu tiên
    * $k - 1$ đoạn giữa các giao điểm
    * 1 đoạn từ giao điểm cuối đến điểm kết thúc trên cạnh
  - Số vùng mới tạo ra là:
    * Mỗi đoạn của đường thẳng thứ $k + 1$ nằm trong một vùng hiện có (do đường thẳng đi qua các vùng được tạo từ k đường thẳng trước đó)
    * Khi đường thẳng $(k+1)$ đi qua một vùng, nó chia vùng đó thành hai vùng mới.
    * Vì đường thẳng $(k+1)$ có $k+1$ đoạn, mỗi đoạn chia một vùng thành hai (tức là thêm một vùng mới), nên đường thẳng này tạo ra $k + 1$ vùng mới so với $f(k)$.
  - Do đó: $f(k + 1) = f(k) + (k + 1)$
  - Áp dụng giả thiết quy nạp, ta có:
    $f(k + 1) = 1 + \frac{k \cdot (k+1)}{2} + (k + 1) = 1 + \frac{k(k+1)+2(k+1)}{2} = 1 + \frac{(k+1)(k+2)}{2}$ *(đpcm)*

1.4.2 Problem 6

- Ta chứng minh $\forall n \geq 1$, nếu vali n không chứa tiền, thì ta không thể kết luận chắc chắn rằng vali số $n + 3$ (nếu $n + 3 \leq 100$) phải không chứa tiền dựa trên quy tắc trong giả thiết.
- Với $n = 1$:
  - Giả sử vali 1 không chứa tiền.
  - Theo quy tắc, nếu vali 1 chứa tiền thì vali 4 cũng chứa tiền, nhưng vì vali 1 không chứa tiền, quy tắc không áp dụng theo hướng ngược lại.
  - Do đó, vali 4 có thể chứa tiền hoặc không chứa tiền, và ta không thể kết luận chắc chắn vali 4 có chứa tiền hay không.
  - Mệnh đề đúng cho $n = 1$.
- Giả sử mệnh đề đúng với $n = k \geq 1$, tức là: nếu vali k không chứa tiền, thì ta không thể kết luận chắc chắn rằng vali $k + 3$ (nếu $k + 3 \leq 100$) phải không chứa tiền.
  - Ta cần chứng minh mệnh đề đúng với $n = k + 1$, nghĩa là: nếu vali $k + 1$ không chứa tiền, thì ta không thể kết luận chắc chắn rằng vali $(k + 1) + 3 = k + 4$ (nếu $k + 4 \leq 100$) phải không chứa tiền.

  - Giả sử vali $k+1$ không chứa tiền.
  - Theo quy tắc, nếu vali $k+1$ chứa tiền thì vali $k+4$ cũng chứa tiền. Tuy nhiên, vì vali $k+1$ không chứa tiền, quy tắc không yêu cầu $k+4$ phải không chứa tiền.
  - Dựa trên giả thiết quy nạp, với k, nếu vali k không chứa tiền, thì trạng thái của $k+3$ không bị ràng buộc. Tương tự, trạng thái của $k+4$ (là $k+3+1$) cũng không bị ràng buộc bởi vali $k+1$ không chứa tiền.
  - Do đó, vali $k+4$ có thể chứa tiền hoặc không chứa tiền, và ta không thể kết luận chắc chắn.

- Kiểm tra với điều kiện vali 55:
  - Vali 55 không chứa tiền, thuộc lớp dư 1 khi chia cho 3.
  - Theo chuỗi $55, 58, 61, \ldots, 100$, quy tắc không cấm các vali sau 55 (như 58, 61, ...) chứa tiền.
  - Điều này phù hợp với kết luận quy nạp: trạng thái của các vali $58, 61, \ldots$ không bị ràng buộc phải không chứa tiền.

- Do đó, với vali 55 không chứa tiền, ta chỉ có thể kết luận rằng vali 55 không chứa tiền, nhưng không thể suy ra chắc chắn về trạng thái của bất kỳ vali nào khác.

1.5 Principle of strong induction

1.6 Fibonacci & Lucas numbers

1.7 Pigeonhole principle & Ramsey theory

1.7.1 Problem 23

- Gọi $a_1, a_2, \ldots, a_{100}$ là 100 số nguyên dương, với tổng:

$$\sum_{i=1}^{100} a_i = 152.$$

- Định nghĩa tổng tích lũy:

$$S_0 = 0, \quad S_k = \sum_{i=1}^{k} a_i, \quad k = 1, 2, \ldots, 100.$$

  Vì $a_i > 0 \quad \forall i$, dãy S_k là dãy tăng ngặt:

$$0 = S_0 < S_1 < S_2 < \cdots < S_{100} = 152.$$

- Tổng của đoạn con từ i đến j (với $1 \le i \le j \le 100$) là:

$$S_j - S_{i-1}.$$

- Mục tiêu: tìm $1 \le i \le j \le 100$ sao cho

$$S_j - S_{i-1} = 47.$$

- Xét số dư của các tổng tích lũy khi chia cho 47:

$$R_k = S_k \mod 47, \quad k = 0, 1, \ldots, 100.$$

Vì $0 \le S_k \le 152$ và $152 \div 47 \approx 3.23$ (dư tối đa 46), có 47 giá trị dư khả dĩ (từ 0 đến 46). Tuy nhiên, có 101 giá trị R_k (từ $k = 0$ đến $k = 100$).

- Theo pigeonhole principle, với 101 tổng tích lũy và chỉ 47 giá trị dư, tồn tại ít nhất hai chỉ số $0 \le p < q \le 100$ sao cho $R_p = R_q$, tức là:

$$S_q \equiv S_p \pmod{47} \implies 47 \mid (S_q - S_p).$$

Vì $S_q > S_p$ (do dãy S_k tăng), ta có:

$$S_q - S_p = 47m, \quad m \in N^+.$$

- Với $S_{100} = 152$, ta có:

$$S_q - S_p \le 152.$$

Do $47 \times 1 = 47$, $47 \times 2 = 94$, $47 \times 3 = 141$, $47 \times 4 = 188 > 152$, nên $m \le 3$, tức $m \in \{1, 2, 3\}$.

- Nếu $m = 1$, thì $S_q - S_p = 47$, và đoạn con từ $p + 1$ đến q có tổng chính xác 47, thỏa mãn yêu cầu.

- Xét trường hợp $m > 1$ ($m = 2$ hoặc $m = 3$):
  - Giả sử không tồn tại đoạn con có tổng 47, nghĩa là mọi cặp S_q, S_p với $R_q = R_p$ đều có hiệu $S_q - S_p$ là bội số 47 lớn hơn hoặc bằng 94.
  - Mỗi giá trị dư modulo 47 xuất hiện ít nhất 3 lần trong dãy R_k (vì $\lceil 101/47 \rceil = 3$).
  - Với mỗi giá trị dư, có ít nhất 3 chỉ số k tương ứng, tạo thành ít nhất 3 tổng tích lũy $S_{k_1} < S_{k_2} < S_{k_3}$ có cùng dư.
  - Từ 3 tổng tích lũy đó, ta có 3 hiệu là $S_{k_2} - S_{k_1}$, $S_{k_3} - S_{k_2}$, $S_{k_3} - S_{k_1}$, tất cả đều chia hết cho 47.
  - Theo giả thiết, không có hiệu nào bằng 47, nên các hiệu này phải là 94 hoặc 141.
  - Tuy nhiên, tổng của ba hiệu này bằng $S_{k_3} - S_{k_1} + S_{k_2} - S_{k_1} + S_{k_3} - S_{k_2} = 2(S_{k_3} - S_{k_1})$, vượt quá 152 hoặc gây mâu thuẫn về thứ tự tăng dần của S_k.
  - Do đó, giả thiết không tồn tại đoạn con tổng 47 dẫn đến mâu thuẫn.

- Vậy luôn tồn tại một đoạn con liền kề có tổng đúng bằng 47.

1.7.2 Problem 24

- Ta cần đảm bảo ít nhất có 12 quả cùng loại.

- Giả sử ngược lại, không có loại nào đủ 12 quả. Nghĩa là, ở tất cả 4 loại quả, số quả lấy được 11 quả / loại. Tổng số quả lấy được khi đó tối đa là: $11 \cdot 4 = 44$ (quả).

- Vậy nếu lấy thêm 1 quả nữa, thì theo pigeonhole principle, phải có ít nhất 1 loại có ít nhất 12 quả.

- Vậy cần hái 45 quả trong 45 phút sẽ chắc chắn hái được ít nhất 1 tá quả cùng loại.

1.8 Counting rules & Stirling number of type 1 & type 2

1.8.1 Problem 6

https://github.com/vntanh1406/Graph_SUM2025/blob/main/Combinatorics/ValidSequences.cpp

- Vì không có hai số 0 đứng cạnh nhau, nên:
  - Mỗi cặp số 0 phải được ngăn cách bởi ít nhất một số 1.
  - Có m số 0, vậy có ít nhất $m-1$ số 1 để ngăn cách chúng.
  - Có $n-m$ số 1, nên để tồn tại dãy hợp lệ thì $n-m \geq m-1 \Leftrightarrow n \geq 2m-1$
- Đặt $n-m$ số 1 vào dãy, chiếm $n-m$ vị trí. Còn lại m vị trí cần điền bằng số 0.
- $n-m$ số 1 tạo ra $n-m+1$ khoảng trống để có thể đặt số 0 vào:
  - 1 khoảng trống trước số 1 đầu tiên
  - 1 khoảng trống sau số 1 cuối cùng
  - $n-m-1$ khoảng trống giữa các số 1 (nếu có ít nhất hai số 1)
- Để đặt m số 0 sao cho không có hai số 0 nào liên tiếp, ta đặt tối đa một số 0 vào mỗi khoảng trống. Vậy ta cần chọn ra m trong số $n-m+1$ khoảng trống để đặt số 0.
- Vậy tổng số cách chọn là: $\binom{n-m+1}{m}$

1.8.2 Problem 7: Prove that the number of subsets of $[n] = 2^n, \forall n \in N^*$

https://github.com/vntanh1406/Graph_SUM2025/blob/main/Combinatorics/SubsetsOf%5Bn%5D.cpp

==Cách 1: Quy nạp==

- Với n=1, khi đó $[n] = \{1\}$. Các tập con của [1] là: $\emptyset, \{1\} \Rightarrow$ Có $2 = 2^1$ tập con.
- Giả sử $[k]$ có 2^k tập con đúng $\forall k \leq n, k \in N^*$. Ta cần chứng minh điều này đúng với $n+1$.
- Xét $[n+1] = \{1, 2, \ldots, n, n+1\}$
  Mỗi tập con của $[n+1]$ có 2 khả năng với phần tử $n+1$:
  - Không chứa $n+1$: Chính là các tập con của $[n]$, có tổng cộng 2^n tập.
  - Có chứa $n+1$: Chính là các tập con của $[n]$ có thêm phần tử $n+1$ vào, có tổng cộng 2^n tập.
- Vậy tổng số tập con của $[n+1]$ là: $2 \cdot 2^n = 2^{n+1}$, hoàn thành chứng minh quy nạp.

==Cách 2: Nguyên lý đếm==

- Xét $[n] = \{1, 2, \ldots, n\}$ có tổng cộng n phần tử.
- Mỗi phần tử có 2 lựa chọn khi tạo tập con: Chọn hoặc Không chọn.
- Vậy theo quy tắc nhân, tổng số cách chọn các tập con là: 2^n

1.8.3 Problem 8

https://github.com/vntanh1406/Graph_SUM2025/blob/main/Combinatorics/Derangement.cpp

a)

- Bài toán có thể phát biểu thành:
  - Xét $M = \{1, 2, \ldots, n\}$ gồm n phần tử. Một hoán vị $M' = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, $x_i \in M, i = \overline{1,n}$ được gọi là có k điểm bất động nếu có đúng k phần tử $x_i \in M'$ sao cho $x_i = i$.
  - Gọi $f(n)$ là số hoán vị không có phần tử nào bất động.

    Chứng minh $f(n) = n! \cdot \sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i}{i!}$
- Tổng số cách hoán vị n phần tử: $n!$
- Gọi A_i là tập các hoán vị mà phần tử thứ i nằm đúng vị trí i. Khi đó, tập các hoán vị có ít nhất một điểm cố định là $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$
- Áp dụng nguyên lý bù trừ, số hoán vị có ít nhất một điểm bất động là:

  $|\bigcup_{i=1}^{n} A_i| = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_k \le n} |A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}|$

  Nhận thấy, $A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}$ hay $\bigcap_1^k A_{i_k}$ là tập các hoán vị mà tất cả những phần tử $i_1, i_2, \ldots, i_k$ đều bất động.

  Với mỗi tập hợp có k điểm bất động, $n-k$ phần tử còn lại hoán vị tự do: $\left|\bigcap_1^k A_{i_k}\right| = (n-k)!$

  Số cách chọn k phần tử bất động: $\binom{n}{k}$

  Do đó tổng số tập hợp là:

  $|\bigcup_{i=1}^{n} A_i| = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \binom{n}{k} (n-k)! = \sum_{k=1}^{n} (-1)^n \cdot \frac{n!}{k!}$
- Vậy số các hoán vị không có điểm bất động nào là:

  $f(n) = n! - \frac{n!}{1!} + \frac{n!}{2!} - \ldots + \frac{(-1)^n \cdot n!}{n!} = \sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^n}{i!}$ *(đpcm)*

b)

- Khai triển Taylor: $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$
- Tại $x = -1$: $e^{-1} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{i!}$
- Vậy:
  - $n!(\frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \ldots + \frac{(-1)^n}{n!}) > n! \cdot e^{-1}$ nếu n chẵn
  - $n!(\frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \ldots + \frac{(-1)^n}{n!}) < n! \cdot e^{-1}$ nếu n lẻ

  Hay:

  - $n!(\frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \ldots + \frac{(-1)^n}{n!}) + e^{-1} > (n! + 1) \cdot e^{-1}$ nếu n chẵn
  - $n!(\frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \ldots + \frac{(-1)^n}{n!}) + e^{-1} < (n! + 1) \cdot e^{-1}$ nếu n lẻ

  Suy ra: $f(n) = n!(\frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \ldots + \frac{(-1)^n}{n!}) = \left\lfloor \frac{n!+1}{e} \right\rfloor$ *(đpcm)*

1.8.4 Problem 9

a)

- $f(1) = 2 : \emptyset, \{1\}$
- $f(2) = 3 : \emptyset, \{1\}, \{2\}$
- $f(3) = 5 : \emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 3\}$
- $f(4) = 8 : \emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{1, 3\}, \{2, 4\}, \{1, 4\}$

b)
Xét tập $[n] = \{1, \ldots, n\}$. Gọi $f(n)$ là số tập con của $[n]$ không chứa hai số nguyên liên tiếp.

- Chia các tập con thỏa điều kiện thành 2 tập:
  - Tập không chứa n, tức các tập con thỏa mãn sẽ có thể có các giá trị từ 1 đến $(n-1)$: Khi đó, các tập con thỏa điều kiện của $[n]$ cũng chính là các tập con thỏa điều kiện của $[n-1] \Rightarrow$ Có $f(n-1)$ tập.
  - Tập chứa n, tức các tập con thỏa mãn sẽ có thể có các giá trị từ 1 đến $(n-2)$ và n: Khi đó, ta có thể chọn các tập con thỏa điều kiện của $[n-2]$ và thêm n vào $\Rightarrow$ Có $f(n-2)$ tập.
- Vậy $f(n) = f(n-1) + f(n-2)$ *(đpcm)*

c)

$$f(n) = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n+2} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n+2} \right]$$

$$\tau = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \qquad \overline{\tau} = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

- Đầu tiên, ta chứng minh $f(n) = F_{n+2}$, trong đó F_n là dãy Fibonacci được định nghĩa bởi:

$$F_0 = 0, \quad F_1 = 1, \quad F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, \quad \text{với } n \geq 2$$

  - Xét dãy Fibonacci: $F_1 = 1, F_2 = 1, F_3 = 2, F_4 = 3, F_5 = 5, F_6 = 8, \ldots$
    Còn $f(1) = 2 = F_3, f(2) = 3 = F_4, f(3) = 5 = F_5, f(4) = 8 = F_6$
  - Giả sử $f(n-1) = F_{n+1}, f(n) = F_{n+2}$ đúng với $n = k$. Ta chứng minh điều này cũng đúng cho $f(k+1)$, tức $f(k+1) = F_{k+3}$
  - Thật vậy, theo kết quả ở câu b: $f(k+1) = f(k) + f(k-1) = F_{k+2} + F_{k+1} = F_{k+3}$ *(Tính chất dãy Fibonacci)*
  - Vậy theo nguyên lý quy nạp, $f(n) = F_{n+2}$
- Xét phương trình truy hồi $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$
- Phương trình đặc trưng: $x^2 - x - 1 = 0$ có 2 nghiệm phân biệt là $\tau = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ và $\overline{\tau} = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Vậy ta có thể viết $F_n = \alpha\tau^n + \beta\overline{\tau}^n$.
- Thay $F_0 = 0 \Rightarrow \alpha + \beta = 0$

- Thay $F_1 = 1 \Rightarrow \alpha\tau + \beta\overline{\tau} = 1$
- Suy ra $\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}, \qquad \beta = -\frac{1}{\sqrt{5}}$.
- Vậy $F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\tau^n - \overline{\tau}^n\right)$.
- Vậy $f(n) = F_{n+2} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\tau^{n+2} - \overline{\tau}^{n+2}\right) \qquad$ *(đpcm)*

1.9 Permutation & Combination

1.9.1 Consecutive 2 Dice Rolls

https://github.com/vntanh1406/Graph_SUM2025/blob/main/Combinatorics/Consecutive2DiceRolls.cpp

Let the sample space be denoted by Ω.

We consider the experiment of rolling two distinguishable six-sided dice in sequence. Each die has 6 possible outcomes, and since the rolls are independent and ordered, the sample space consists of all ordered pairs (i, j) where $i, j \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Therefore, the total number of outcomes is: $|\Omega| = 6 \cdot 6 = 36$

a)

- Let A_1 be the event that both dice show the same number of dots. This corresponds to the set of outcomes: $A_1 = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6)\}$

  So, $P(A_1) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$
- Let A_2 be the event that both dice show different numbers of dots. Since there are 6 outcomes with the same number, there are: $36 - 6 = 30$ outcomes with different numbers

  So: $P(A_2) = \frac{30}{36} = \frac{5}{6}$

b)

Even numbers on a die: $\{2, 4, 6\}$

Odd numbers on a die: $\{1, 3, 5\}$

- Let B_1 be the event that both dice have the same parity:
  - Both even: $3 \cdot 3 = 9$ outcomes
  - Both odd: $3 \cdot 3 = 9$ outcomes

  Total favorable outcomes: $9 + 9 = 18$. So: $P(B_1) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$
- Let B_2 be the event that the two numbers have different parity:
  - First even, second odd: $3 \cdot 3 = 9$ outcomes
  - First odd, second even: $3 \cdot 3 = 9$ outcomes

  Total favorable outcomes: $9 + 9 = 18$. So: $P(B_2) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$

c)

Prime numbers on a die: $\{2, 3, 5\}$

Composite numbers on a die: $\{4, 6\}$

- Let C_1 be the event that the numbers on both dice are prime numbers:

  Both prime: $3 \cdot 3 = 9$ outcomes. So: $P(C_1) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$

- Let C_2 be the event that the numbers on both dice are composite numbers:

  Both composite: $2 \cdot 2 = 4$ outcomes. So: $P(C_2) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$

- Let C_3 be the event that at least one of the two dice shows a prime number.

  The number of outcomes where neither die shows a prime number, or both dice show non-prime numbers: $3 \cdot 3 = 9$ *(non-prime: {1, 4, 6})*

  Therefore, the number of favorable outcomes: $36 - 9 = 27$. So: $P(C_3) = \frac{27}{36} = \frac{3}{4}$

- Let C_4 be the event that at least one of the two dice shows a composite number.

  The number of outcomes where neither die shows a composite number, or both dice show non-composite numbers: $4 \cdot 4 = 16$ *(non-composite: {1, 2, 3, 5})*

  Therefore, the number of favorable outcomes: $36 - 16 = 20$. So: $P(C_4) = \frac{20}{36} = \frac{5}{9}$

d)
Let D be the event that one of the two numbers is a divisor or a multiple of the other.
Let each outcome be represented as an ordered pair (a, b), where $a, b \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
We are interested in counting the number of outcomes where: $a \mid b \quad \text{or} \quad b \mid a$
The valid pairs:

- When $a = 1$: $b = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ (6 outcomes)
- When $a = 2$: $b = 1, 2, 4, 6$ (4 outcomes)
- When $a = 3$: $b = 1, 3, 6$ (3 outcomes)
- When $a = 4$: $b = 1, 2, 4$ (3 outcomes)
- When $a = 5$: $b = 1, 5$ (2 outcomes)
- When $a = 6$: $b = 1, 2, 3, 6$ (4 outcomes)

Total favorable outcomes: $6 + 4 + 3 + 3 + 2 + 4 = 22$. So: $P(D) = \frac{22}{36} = \frac{11}{18}$

e)
Let E_n be the event that the sum of the two dice is equal to n.
For $n \in \{2, 3, \ldots, 12\}$, we define the function: $f(n) = \min\{n - 1, 6\} - \max\{n - 6, 1\} + 1$
This function counts the number of integer pairs $(a, b) \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}^2$ such that $a + b = n$.

- The smallest possible sum is $1 + 1 = 2$, and the largest is $6 + 6 = 12$, so $n \in \{2, 3, \ldots, 12\}$.
- For a fixed n, valid pairs (a, b) must satisfy: $a \in [\max(1, n - 6), \min(6, n - 1)]$, and then $b = n - a$.
- Therefore, the number of such values of a is: $f(n) = \min(n - 1, 6) - \max(n - 6, 1) + 1$
- This formula works because:
  - $\min(n - 1, 6)$ gives the largest possible value of a such that $b = n - a \geq 1$
  - $\max(n - 6, 1)$ gives the smallest possible value of a such that $b = n - a \leq 6$
  - The total number of integers a in that interval is: upper bound $-$ lower bound $+1$

So: $P(E_n) = \frac{f(n)}{36} \cdot \mathbf{1}_{\{2 \leq n \leq 12\}}$

1.9.2 Simultaneous 2 Dice Rolls

https://github.com/vntanh1406/Graph_SUM2025/blob/main/Combinatorics/Consecutive2DiceRolls.cpp

Let the sample space be denoted by Ω.

We consider the experiment of rolling two indistinguishable six-sided dice simultaneously. Each die has 6 possible outcomes, and since the dice are indistinguishable and rolled at the same time, the sample space consists of all unordered pairs (i, j) where $i, j \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ and $i \leq j$.

Therefore, the total number of outcomes is: $|\Omega| = 6 + \binom{6}{2} = 21$

a)

- Let A_1 be the event that both dice show the same number of dots. This corresponds to the set of outcomes: $A_1 = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6)\}$

  So, $P(A_1) = \frac{6}{21} = \frac{2}{7}$

- Let A_2 be the event that both dice show different numbers of dots. Since there are 6 outcomes with the same number, there are: $21 - 6 = 15$ outcomes with different numbers

  So: $P(A_2) = \frac{15}{21} = \frac{5}{7}$

b)

Even numbers on a die: $\{2, 4, 6\}$

Odd numbers on a die: $\{1, 3, 5\}$

- Let B_1 be the event that both dice have the same parity:
  - Both even: $3 + \binom{3}{2} = 6$ outcomes
  - Both odd: $3 + \binom{3}{2} = 6$ outcomes

  Total favorable outcomes: $6 + 6 = 12$. So: $P(B_1) = \frac{12}{21} = \frac{4}{7}$

- Let B_2 be the event that the two numbers have different parity:

  Total favorable outcomes: $3 \cdot 3 = 9$. So: $P(B_2) = \frac{9}{21} = \frac{3}{7}$

c)

Prime numbers on a die: $\{2, 3, 5\}$

Composite numbers on a die: $\{4, 6\}$

- Let C_1 be the event that the numbers on both dice are prime numbers:

  Both prime: $3 + \binom{3}{2} = 6$ outcomes. So: $P(C_1) = \frac{6}{21} = \frac{2}{7}$

- Let C_2 be the event that the numbers on both dice are composite numbers:

  Both composite: $2 + \binom{2}{2} = 3$ outcomes. So: $P(C_2) = \frac{3}{21} = \frac{1}{7}$

- Let C_3 be the event that at least one of the two dice shows a prime number.

  The number of outcomes where neither die shows a prime number, or both dice show non-prime numbers: $3 + \binom{3}{2} = 6$ *(non-prime: {1, 4, 6})*

  Therefore, the number of favorable outcomes: $21 - 6 = 15$. So: $P(C_3) = \frac{15}{21} = \frac{5}{7}$

- Let C_4 be the event that at least one of the two dice shows a composite number.

  The number of outcomes where neither die shows a composite number, or both dice show non-composite numbers: $4 + \binom{4}{2} = 10$ *(non-composite: {1, 2, 3, 5})*

  Therefore, the number of favorable outcomes: $21 - 10 = 11$. So: $P(C_4) = \frac{11}{21}$

d)
Let D be the event that one of the two numbers is a divisor or a multiple of the other.
Let each outcome be represented as an unordered pair (a, b), where $a, b \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
We are interested in counting the number of outcomes where: $a \mid b \quad \text{or} \quad b \mid a$
The valid pairs:

- When $a = 1$: $b = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ (6 outcomes)
- When $a = 2$: $b = 2, 4, 6$ (3 outcomes)
- When $a = 3$: $b = 3, 6$ (2 outcomes)
- When $a = 4$: $b = 4$ (1 outcome)
- When $a = 5$: $b = 5$ (1 outcome)
- When $a = 6$: $b = 6$ (1 outcome)

Total favorable outcomes: $6 + 3 + 2 + 1 + 1 + 1 = 14$. So: $P(D) = \frac{14}{21} = \frac{2}{3}$

e)
Let E_n be the event that the sum of the two dice is equal to n.
For $n \in \{2, 3, \ldots, 12\}$, we define the function: $f(n) = \left\lfloor \frac{\min\{n-1,6\} - \max\{n-6,1\}}{2} \right\rfloor + 1$
This function counts the number of unordered integer pairs $(a, b) \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}^2$ such that $a + b = n$ and $a \leq b$.

- The smallest possible sum is $1+1 = 2$, and the largest is $6+6 = 12$, so $n \in \{2, 3, \ldots, 12\}$.
- For a fixed n, valid unordered pairs (a, b) must satisfy:

$$a \in \left[\max(1, n-6), \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right], \quad b = n - a, \quad \text{and } a \leq b$$

- Therefore, the number of such values of a is given by:

$$f(n) = \left\lfloor \frac{\min(n-1, 6) - \max(n-6, 1)}{2} \right\rfloor + 1$$

- This formula works because:
  - $\min(n-1, 6)$ gives the largest possible value of a such that $b = n - a \in [1, 6]$
  - $\max(n-6, 1)$ gives the smallest possible value of a such that $b = n - a \in [1, 6]$
  - We divide the range by 2 and take floor to count only unordered pairs (i.e., $a \leq b$)
  - Adding 1 accounts for inclusive bounds

So: $P(E_n) = \frac{f(n)}{21} \cdot \mathbf{1}_{\{2 \leq n \leq 12\}}$.

1.9.3 Consecutive n Dice Rolls

https://github.com/vntanh1406/Graph_SUM2025/blob/main/Combinatorics/ConsecutiveNDiceRolls.ipynb

Let the sample space be denoted by Ω.

We consider the experiment of rolling `n` distinguishable six-sided dice in sequence. Each die has 6 possible outcomes, and since the rolls are independent and ordered, the sample space consists of all ordered pairs (i, j) where $i, j \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Therefore, the total number of outcomes is: $|\Omega| = 6^n$

a) Let A be the event that all dice show the same number of dots.
This corresponds to the set of outcomes where $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.
There are exactly 6 such outcomes (all 1's, all 2's, ..., all 6's), so: $P(A) = \frac{6}{6^n}$

b) Let B be the event that all dice show different numbers of dots.
This is only possible when $1 \leq n \leq 6$ *(since there are only 6 distinct values from 1 to 6).*

- If $n > 6$ or $n < 2$, then clearly: $P(B) = 0$
- For $2 \leq n \leq 6$: The number of favorable outcomes as the number of one-to-one mappings from n dice to 6 values, i.e., number of permutations: $P(6, n) = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdots (6 - n + 1)$. So: $P(B) = \frac{P(6,n)}{6^n} = \frac{6!}{(6-n)! \cdot 6^n}$

c) Let C be the event that all dice have the same parity.

- All even: 3^n outcomes
- All odd: 3^n outcomes

Total favorable outcomes: $2 \cdot 3^n$. So: $P(C) = \frac{2 \cdot 3^n}{6^n} = \frac{1}{2^{n-1}}$

1.9.4 Simultaneous n Dice Rolls

https://github.com/vntanh1406/Graph_SUM2025/blob/main/Combinatorics/ConsecutiveNDiceRolls.ipynb

Let the sample space be denoted by Ω.
We consider the experiment of rolling n indistinguishable six-sided dice simultaneously.
Each die has 6 possible outcomes, and the order of dice does not matter.
So the sample space consists of all multisets of n values chosen from $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
Therefore, the total number of outcomes is: $|\Omega| = \binom{n+5}{5}$

a) Let A be the event that all dice show the same number of dots.
This corresponds to the set of outcomes where $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.
There are exactly 6 such outcomes (all 1's, all 2's, ..., all 6's), so: $P(A) = \frac{6}{6^n}$

1.9.5 Prime and Composite

https://github.com/vntanh1406/Graph_SUM2025/blob/main/Combinatorics/PrimeAndComposite.ipynb

Let $A_n = \{1, 2, \ldots, n\} \subset N^*$ be the set of the first n positive integers.
Let $m \in N^*$, and suppose we randomly select m distinct elements from A_n.
Let $T = \binom{n}{m}$ be the total number of ways to choose m distinct elements from A_n.
Suppose $k \in \{0, 1, \ldots, m\}$

a)
Let:

- $d_e = \left\lfloor \dfrac{n}{2} \right\rfloor$ be the number of even numbers in A_n,
- $d_o = n - d_e$ be the number of odd numbers in A_n,

We have the following probabilities:

- $P_{\text{All even}} = \frac{\binom{d_e}{m}}{T}$
- $P_{\text{All odd}} = \frac{\binom{d_o}{m}}{T}$
- $P_{\text{At least one even}} = 1 - P_{\text{All odd}} = 1 - \frac{\binom{d_o}{m}}{T}$
- $P_{\text{At least one odd}} = 1 - P_{\text{All even}} = 1 - \frac{\binom{d_e}{m}}{T}$
- $P_{\text{Exactly k even}} = \frac{\binom{d_e}{k} \cdot \binom{d_o}{m-k}}{T}$
- $P_{\text{Exactly k odd}} = \frac{\binom{d_o}{k} \cdot \binom{d_e}{m-k}}{T}$
- $P_{\text{At least k even}} = \frac{1}{T} \sum_{i=k}^{m} \binom{d_e}{i} \cdot \binom{d_o}{m-i}$
- $P_{\text{At least k odd}} = \frac{1}{T} \sum_{i=k}^{m} \binom{d_o}{i} \cdot \binom{d_e}{m-i}$

b)
Let:

- $p = \pi(n)$: the number of prime numbers less than or equal to n
- $c = n - 1 - \pi(n)$: the number of composite numbers in A_n

We have the following probabilities:

- $P_{\text{All prime}} = \frac{\binom{p}{m}}{T}$
- $P_{\text{All composite}} = \frac{\binom{c}{m}}{T}$
- $P_{\text{At least one prime}} = \frac{1}{T} \sum_{i=1}^{m} \binom{p}{i} \cdot \binom{n-p}{m-i} = 1 - \frac{\binom{c}{m} + \binom{c}{m-1}}{T}$
- $P_{\text{At least one composite}} = \frac{1}{T} \sum_{i=1}^{m} \binom{c}{i} \cdot \binom{n-c}{m-i} = 1 - \frac{\binom{p}{m} + \binom{p}{m-1}}{T}$
- $P_{\text{Exactly k prime}} = \frac{\binom{p}{k} \cdot \binom{n-p}{m-k}}{T}$
- $P_{\text{Exactly k composite}} = \frac{\binom{c}{k} \cdot \binom{n-c}{m-k}}{T}$
- $P_{\text{At least k prime}} = \frac{1}{T} \sum_{i=k}^{m} \binom{p}{i} \cdot \binom{n-p}{m-i}$
- $P_{\text{At least k composite}} = \frac{1}{T} \sum_{i=k}^{m} \binom{c}{i} \cdot \binom{n-c}{m-i}$

1.9.6 Even and Odd

https://github.com/vntanh1406/Graph_SUM2025/blob/main/Combinatorics/EvenAndOdd.ipynb

Let $a, b \in Z$ with $a < b$, and let $n, k \in N^*$ such that $n \geq 2$ and $k \leq n$.
Define the set $A = \{a, a+1, a+2, \dots, b\} \subset Z$ with total size $N = |A| = b - a + 1$.
Let:

- $d_o = \left\lfloor \frac{b-a}{2} \right\rfloor + 1$ be the number of odd numbers in A_n
- $d_e = N - d_o$
- T be the total number of possible selections.

a)

- **Distinct** $(T = \binom{N}{2})$:
  - Probability that both numbers have the same parity: $P_{\text{same parity}} = \frac{\binom{d_e}{2}+\binom{d_o}{2}}{T}$
  - Probability that the two numbers have different parity: $P_{\text{different parity}} = \frac{d_e \cdot d_o}{T}$
- **With replacement** $(T = N^2)$:
  - Probability that both numbers have the same parity: $P_{\text{same parity}} = \frac{{d_e}^2+{d_o}^2}{T}$
  - Probability that the two numbers have different parity: $P_{\text{different parity}} = \frac{2 \cdot d_e \cdot d_o}{T}$

b)
Suppose $d_e, d_o \geq n$

- **Distinct** $(T = \binom{N}{n})$:
  - $P_{\text{all even}} = \dfrac{\binom{d_e}{n}}{T}$
  - $P_{\text{all odd}} = \dfrac{\binom{d_o}{n}}{T}$
  - $P_{\text{same parity}} = \dfrac{\binom{d_e}{n} + \binom{d_o}{n}}{T}$
  - $P_{\text{exactly } k \text{ even}} = \dfrac{\binom{d_e}{k} \cdot \binom{d_o}{n-k}}{T}$
  - $P_{\text{exactly } k \text{ odd}} = \dfrac{\binom{d_o}{k} \cdot \binom{d_e}{n-k}}{T}$
  - $P_{\text{at least } k \text{ even}} = \dfrac{1}{T} \sum_{i=k}^{n} \binom{d_e}{i} \cdot \binom{d_o}{n-i}$
  - $P_{\text{at least } k \text{ odd}} = \dfrac{1}{T} \sum_{i=k}^{n} \binom{d_o}{i} \cdot \binom{d_e}{n-i}$
- **With replacement** $(T = N^n)$:
  - $P_{\text{all even}} = \dfrac{{d_e}^n}{T}$

– $P_{\text{all odd}} = \dfrac{{d_o}^n}{T}$

– $P_{\text{same parity}} = \dfrac{{d_e}^n + {d_o}^n}{T}$

– $P_{\text{exactly } k \text{ even}} = \dfrac{\binom{n}{k} \cdot {d_e}^k \cdot {d_o}^{n-k}}{T}$

– $P_{\text{exactly } k \text{ odd}} = \dfrac{\binom{n}{k} \cdot {d_o}^k \cdot {d_e}^{n-k}}{T}$

– $P_{\text{at least } k \text{ even}} = \dfrac{1}{T} \sum_{i=k}^{n} \binom{n}{i} \cdot {d_e}^i \cdot {d_o}^{n-i}$

– $P_{\text{at least } k \text{ odd}} = \dfrac{1}{T} \sum_{i=k}^{n} \binom{n}{i} \cdot {d_o}^i \cdot {d_e}^{n-i}$

1.10 Set Theory

1.10.1 Bài toán 1

https://github.com/vntanh1406/Graph_SUM2025/blob/main/Combinatorics/Baitoan1_phanhoach.cpp

Note: Code chứng minh bằng phản chứng (giả sử xét trên 10^4 phần tử đầu tiên trong tập N^*), còn phần chứng minh bằng toán học chưa hoàn thiện ạ :(

- $a + b$ lẻ, giả sử a chẵn, b lẻ
- Giả sử tồn tại một phân hoạch $N^* = A \cup B, \quad A \cap B = \emptyset$ sao cho mọi cặp số cách nhau đúng a hoặc b đơn vị thì không nằm trong cùng một tập, tức là:
  - $\forall x, y \in A, \quad |x - y| \notin \{a, b\}$
  - $\forall x, y \in B, \quad |x - y| \notin \{a, b\}$
- Xét dãy số tự nhiên: $x_0, x_1 = x_0 + a, x_2 = x_1 + b, x_3 = x_2 + a, x_4 = x_3 + b, \ldots$

  Tức: $x_0, x_0 + a, x_0 + a + b, x_0 + 2a + b, x_0 + 2a + 2b, \ldots$
- Gọi $S = \{x_0, x_1, x_2, \ldots\}$. Chọn $x_0 = 1$.
- Giả sử:
  - $x_0 \in A$
  - $x_1 = x_0 + a \Rightarrow x_1 \in B$
  - $x_2 = x_1 + b \Rightarrow x_2 \in A$
  - Tương tự, $x_{2k} = (1 + ka + kb) \in A, \quad x_{2k+1} = (1 + (k+1)a + kb) \in B, \quad \forall k \in N$
- Xét các phần tử thuộc A: $|x_{2k+2} - x_{2k}| = a + b, \quad \forall k \in N$. Mà $(a + b)$ lẻ.

  Theo giả thiết phản chứng, $a + b \notin \{a, b\}$ hay $a + b \neq a$ và $a + b \neq b$.
- Xét các phần tử thuộc B: $|x_{2k+3} - x_{2k+1}| = a + b, \quad \forall k \in N$

1.10.2 Bài toán 3

https://github.com/vntanh1406/Graph_SUM2025/blob/main/Combinatorics/Baitoan3.cpp

a)

- *Nhận xét: Số chính phương khi phân tích thừa số nguyên tố thì mọi số mũ đều chẵn. Vậy để chọn tập A gồm 10 phần tử sao cho tích 3 phần tử bất kì không tạo ra số chính phương, ta có thể chọn các số không có nhiều thừa số nguyên tố lặp lại để tạo thành số chính phương.*

- Tập A có 10 phần tử thỏa đề bài:
  - $A = \{1, 3, 4, 5, 6, 7, 10, 11, 13, 14\}$
  - $A = \{1, 3, 5, 6, 7, 9, 10, 11, 13, 14\}$
  - $A = \{1, 4, 5, 6, 7, 10, 11, 12, 13, 14\}$
  - $A = \{1, 5, 6, 7, 9, 10, 11, 12, 13, 14\}$
  - $A = \{3, 4, 5, 6, 7, 9, 10, 11, 13, 14\}$
  - $A = \{4, 5, 6, 7, 9, 10, 11, 12, 13, 14\}$

b) Ans C++: 10

1.11 Chứng minh công thức chia kẹo Euler có 2 chặn trên và dưới

Mô tả bài toán: Giả sử có tổng cộng $m \in N$ viên kẹo, cần chia cho $n \in N$ người.

Người thứ i (với $i = 1, 2, \ldots, n$) nhận được x_i viên kẹo sao cho:

$$l_i \leq x_i \leq u_i \quad \text{với } l_i, u_i \in N, l_i \leq u_i$$

a) Phương pháp bao hàm - loại trừ

- Đặt:
$$y_i = x_i - \ell_i \Rightarrow x_i = y_i + \ell_i$$

- Khi đó:
$$0 \leq y_i \leq b_i = u_i - \ell_i \quad \text{và} \quad \sum_{i=1}^{n} y_i = m' = m - \sum_{i=1}^{n} \ell_i$$

- Bài toán trở thành: Đếm số bộ nghiệm nguyên không âm $(y_1, \ldots, y_n)$ thỏa:
$$\sum_{i=1}^{n} y_i = m', \quad 0 \leq y_i \leq b_i$$

- Áp dụng nguyên lý bao hàm – loại trừ để xử lý các ràng buộc $y_i \leq b_i$.
  - Gọi A là tập tất cả các bộ nghiệm nguyên không âm $(y_1, \ldots, y_n)$ thỏa $\sum_{i=1}^{n} y_i = m'$.
  - Với mỗi $i = 1, \ldots, n$, định nghĩa tập vi phạm:
$$A_i = \{(y_1, \ldots, y_n) \in A \mid y_i > b_i\}$$

– Khi đó, tập các nghiệm thỏa tất cả ràng buộc $y_i \le b_i$ là:

$$A \setminus \bigcup_{i=1}^{n} A_i$$

– Áp dụng nguyên lý bao hàm – loại trừ cho $|A \setminus \bigcup_{i=1}^{n} A_i|$, ta được:

$$|A \setminus \cup A_i| = |A| - \sum_i |A_i| + \sum_{i<j} |A_i \cap A_j| - \cdots + (-1)^k \sum_{i_1<\cdots<i_k} |A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}| + \cdots$$

– Với mỗi tập con $S \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$, ký hiệu:

$$A_S = \bigcap_{i \in S} A_i = \{(y_1, \ldots, y_n) \in A \mid y_i > b_i, \quad \forall i \in S\}$$

– Ta có:

$$\left| A \setminus \bigcup_{i=1}^{n} A_i \right| = \sum_{S \subseteq \{1,\ldots,n\}} (-1)^{|S|} |A_S|$$

– Với mỗi S, số phần tử trong A_S (tức số nghiệm thỏa $y_i > b_i$ với $i \in S$, còn lại $y_j \ge 0$) là:

$$|A_S| = \binom{m' - \sum_{i \in S}(b_i + 1) + n - 1}{n - 1} \quad \text{(với quy ước tổ hợp bằng 0 nếu tử số} < 0)$$

– Do đó:

$$\boxed{\sum_{S \subseteq \{1,\ldots,n\}} (-1)^{|S|} \binom{m' - \sum_{i \in S}(b_i + 1) + n - 1}{n - 1}}$$

chính là số bộ nghiệm nguyên không âm $(y_1, \ldots, y_n)$ thỏa:

$$\sum_{i=1}^{n} y_i = m', \quad 0 \le y_i \le b_i$$

– Trong đó:
  * $S \subseteq \{1, \ldots, n\}$ là tập con các chỉ số tại đó biến y_i vi phạm ràng buộc $y_i \le b_i$, tức là $y_i > b_i$ với $i \in S$.
  * $|S|$ là số phần tử trong tập S, dùng để xác định dấu cộng/trừ trong công thức bao hàm - loại trừ.
  * $\sum_{i \in S}(b_i + 1)$ là tổng lượng vi phạm tối thiểu tại các chỉ số trong S, vì mỗi $y_i > b_i$ nghĩa là $y_i \ge b_i + 1$.
  * $\binom{m' - \sum_{i \in S}(b_i+1) + n - 1}{n-1}$ là số bộ nghiệm không âm của phương trình:

$$\sum_{i=1}^{n} y_i = m' - \sum_{i \in S}(b_i + 1)$$

    với $y_i \ge 0$ (không giới hạn trên) $\forall i$, tức đã trừ đi lượng vi phạm.
  * Nếu $m' - \sum_{i \in S}(b_i + 1) < 0$ thì quy ước tổ hợp bằng 0, vì không tồn tại nghiệm.

b) Phương pháp hàm sinh

- Đặt:
$$y_i = x_i - \ell_i \Rightarrow x_i = y_i + \ell_i$$

- Khi đó:
$$0 \le y_i \le b_i = u_i - \ell_i \quad \text{và} \quad \sum_{i=1}^{n} y_i = m' = m - \sum_{i=1}^{n} \ell_i$$

- Bài toán trở thành: Đếm số bộ nghiệm nguyên không âm $(y_1, \ldots, y_n)$ thỏa:
$$\sum_{i=1}^{n} y_i = m', \quad 0 \le y_i \le b_i$$

- Xét hàm sinh cho biến y_i:
$$G_i(x) = \sum_{k=0}^{b_i} x^k = 1 + x + x^2 + \cdots + x^{b_i} = \frac{1 - x^{b_i+1}}{1 - x}$$

- Vì các biến y_i độc lập, hàm sinh của tổng là tích:
$$G(x) = \prod_{i=1}^{n} G_i(x) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1 - x^{b_i+1}}{1 - x} = \frac{\prod_{i=1}^{n}(1 - x^{b_i+1})}{(1-x)^n}$$

- Số nghiệm thỏa yêu cầu chính là hệ số của $x^{m'}$ trong khai triển $G(x)$:
$$[x^{m'}]G(x)$$

- Khai triển tử số:
$$\prod_{i=1}^{n}(1 - x^{b_i+1}) = \sum_{S \subseteq \{1,\ldots,n\}} (-1)^{|S|} x^{\sum_{i \in S}(b_i+1)}$$

- Xét hệ số trong khai triển mẫu số:
$$\frac{1}{(1-x)^n} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n-1+k}{n-1} x^k,$$

  nên
$$[x^r]\frac{1}{(1-x)^n} = \begin{cases} \binom{n-1+r}{n-1}, & r \ge 0 \\ 0, & r < 0 \end{cases}$$

- Kết hợp lại, ta có
$$\boxed{\sum_{S \subseteq \{1,\ldots,n\}} (-1)^{|S|} \binom{m' - \sum_{i \in S}(b_i+1) + n - 1}{n-1}}$$

  chính là số nghiệm nguyên không âm $(y_1, \ldots, y_n)$ thỏa
$$\sum_{i=1}^{n} y_i = m', \quad 0 \le y_i \le b_i$$

- Trong đó:
  - $S \subseteq \{1, \ldots, n\}$ là tập con các chỉ số tại đó biến y_i vi phạm ràng buộc $y_i \le b_i$, tức là $y_i > b_i$ với $i \in S$.
  - $|S|$ là số phần tử trong tập S, dùng để xác định dấu cộng/trừ trong công thức bao hàm – loại trừ.
  - $\sum_{i\in S}(b_i + 1)$ là tổng lượng vi phạm tối thiểu tại các chỉ số trong S, vì mỗi $y_i > b_i$ nghĩa là $y_i \ge b_i + 1$.
  - $\binom{m' - \sum_{i\in S}(b_i+1)+n-1}{n-1}$ là số bộ nghiệm không âm của phương trình:

$$\sum_{i=1}^{n} y_i = m' - \sum_{i\in S}(b_i + 1)$$

    với $y_i \ge 0$ (không giới hạn trên) $\forall i$, tức đã trừ đi lượng vi phạm.
  - Nếu $m' - \sum_{i\in S}(b_i + 1) < 0$ thì quy ước tổ hợp bằng 0, vì không tồn tại nghiệm.

2 Nhị thức Newton & đa thức

2.1 Bài toán 27

2.1.1 Tính $(a + b + c)^n$

$$S_n = (a + b + c)^n = [(a + b) + c]^n = (A + c)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^{n-k} c^k$$

Xét: $(a + b)^{n-k} = \sum_{i=0}^{n-k} \binom{n-k}{i} a^i b^{n-k-i}$ *(1)*

Thay *(1)* vào S_n:

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \left[\binom{n}{k} c^k \sum_{i=0}^{n-k} \binom{n-k}{i} a^i b^{n-k-i} \right] = \sum_{k=0}^{n} \left[\sum_{i=0}^{n-k} \binom{n}{k} \binom{n-k}{i} a^i b^{n-k-i} c^k \right] \quad (2)$$

Đặt $j = n - k - i$. Ta có: $i + j + k = i + n - k - i + k = n$ *(3)*
Lại có: $\binom{n}{k}\binom{n-k}{i} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot \frac{(n-k)!}{i!(n-k-i)!} = \frac{n!}{i!\cdot j!\cdot k!}$ *(4)*

Từ *(2)*, *(3)*, *(4)* suy ra:

$$S_n = (a + b + c)^n = \sum_{i+j+k=n} \frac{n!}{i! \cdot j! \cdot k!} a^i b^j c^k \quad (i, j, k \ge 0)$$

2.1.2 Tính $(a + b + c + d)^n$

$$S_n = (a + b + c + d)^n = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} (a + b + c)^{n-r} d^r$$

Áp dụng cách tính $(a + b + c)^n$ đã chứng minh ở bài trước, với $i, j, k \ge 0$:

$$S_n = \sum_{r=0}^{n} \left\{ \binom{n}{r} \left[\sum_{i+j+k=n-r} \frac{(n-r)!}{i! \cdot j! \cdot k!} a^i b^j c^k \right] d^r \right\} = \sum_{r=0}^{n} \left[\sum_{i+j+k=n-r} \binom{n}{r} \frac{(n-r)!}{i! \cdot j! \cdot k!} a^i b^j c^k d^r \right]$$

Đặt $l = r$. Do $i+j+k = n-r$ nên $i+j+k+l = n$

Xét: $\binom{n}{r} \cdot \frac{(n-r)!}{i! \cdot j! \cdot k!} = \frac{n!}{r!(n-r)!} \cdot \frac{(n-r)!}{i! \cdot j! \cdot k!} = \frac{n!}{i! \cdot j! \cdot k! \cdot l!}$ *(do $l = r = n - (i+j+k)$)*

Thay vào S_n:

$$S_n = \sum_{i+j+k+l=n} \frac{n!}{i! \cdot j! \cdot k! \cdot l!} a^i b^j c^k d^l$$

2.2 Đẳng thức tổ hợp

2.2.1 Bài toán 28

https://github.com/vntanh1406/Graph_SUM2025/blob/main/Combinatorics/Baitoan28.cpp

$$\sum_{i=1}^{n} i C_n^i = n 2^{n-1} \quad \textit{(*)}$$

Một số công thức:

$$(C1) \quad \binom{n}{i} = \binom{n-1}{i} + \binom{n-1}{i-1}$$

$$(C2) \quad \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} = 2^n$$

a) Quy nạp toán học

- Với n=1: $C_1^1 = 1 \cdot 2^0 = 1$
- Giả sử *(*)* đúng với $n = k$. Ta chứng minh *(*)* đúng với $n = k+1$, tức $\sum_{i=1}^{k+1} = (k+1)2^k$

  Thật vậy:

$$\sum_{i=1}^{k+1} i\binom{k+1}{i} = \sum_{i=1}^{k} i\binom{k+1}{i} + (k+1)\binom{k+1}{k+1} = \sum_{i=1}^{k} i\binom{k+1}{i} + (k+1) \quad \textit{(1)}$$

  Thay $\binom{k+1}{i} = \binom{k}{i} + \binom{k}{i-1}$ vào *(1)*, ta được:

$$\sum_{i=1}^{k} i\left(\binom{k}{i} + \binom{k}{i-1}\right) + (k+1) = \sum_{i=1}^{k} i\binom{k}{i} + \sum_{i=1}^{k} i\binom{k}{i-1} + (k+1) \quad \textit{(2)}$$

  Xét $\sum_{i=1}^{k} i\binom{k}{i} = k2^{k-1}$ *(Giả thiết quy nạp) (3)*

  Xét

$$\sum_{i=1}^{k} i\binom{k}{i-1} = \sum_{j=0}^{k-1}(j+1)\binom{k}{j} = \sum_{j=0}^{k-1} j\binom{k}{j} + \sum_{j=0}^{k-1}\binom{k}{j} = \left(k2^{k-1} - k\binom{k}{k}\right) + \left(2^k - \binom{k}{k}\right)$$

$$= (\text{k } 2^{k-1} - k) + (2^k - 1) \quad \textit{(4)}$$

  Thay *(3)*, *(4)* vào *(2)*, ta được:

$$k2^{k-1} + k2^{k-1} - k + 2^k - 1 + k + 1 = 2k2^{k-1} + 2^k = (k+1)2^k$$

Vậy theo nguyên lý quy nạp, ta được đpcm.

b) Biến đổi số hạng tổng quát

- Ta có:

$$i\binom{n}{i} = i \cdot \frac{n!}{i!(n-i)!} = n \cdot \frac{n!}{n(i-1)!(n-i)!} = n \cdot \frac{(n-1)!}{(i-1)!(n-i)!} = n\binom{n-1}{i-1}$$

Thay vào *(*)*:

$$\sum_{i=1}^{n} i\binom{n}{i} = \sum_{i=1} n\binom{n-1}{i-1} = n \cdot \sum_{i=1}^{n} \binom{n-1}{i-1} = n \cdot \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} = n2^{n-1} \quad \textit{(đpcm)}$$

c) Khai triển $(1+x)^n$

- Áp dụng nhị thức Newton:

$$f(x) = (1+x)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^i \Rightarrow f'(x) = \sum_{i=0}^{n} i\binom{n}{i} x^{i-1} = \sum_{i=1}^{n} i\binom{n}{i} x^{i-1}$$

- Thay $x = 1$:

$$f'(1) = \sum_{i=1}^{n} i\binom{n}{i} = \frac{d}{dx}(1+x)^n\bigg|_{x=1} = n(1+x)^{n-1}\big|_{x=1} = n2^{n-1}$$

- Vậy

$$\sum_{i=1}^{n} i\binom{n}{i} = n2^{n-1} \quad \textit{(đpcm)}$$

d) Lý luận tổ hợp

- Gọi S là một tập gồm n phần tử. Ta cần đếm số cách chọn ra một tập con khác rỗng của S và chọn thêm một phần tử trong tập con đó.
- Vế trái: $\sum_{i=1}^{n} i\binom{n}{i}$
  - Với mỗi i từ 1 đến n: Có $\binom{n}{i}$ cách chọn tập con A có đúng i phần tử.
  - Từ tập A, số cách chọn 1 phần tử là i cách.
  - Tổng số cách: $\sum_{i=1}^{n} i\binom{n}{i}$
- Vế phải: $n2^{n-1}$
  - Bài toán tương đương với việc ta đếm số cách chọn 1 phần tử $x \in S$ rồi sau đó chọn tập con $A \subseteq S$ sao cho $x \in A$
  - Số cách chọn $x \in S$ là n cách.
  - Phần còn lại, ta có thể chọn bất cứ tập con nào của $S \backslash \{x\}$, số cách chọn là 2^{n-1}
  - Tổng số cách: $n2^{n-1}$
- Vậy vế trái = vế phải *(đpcm)*

2.2.2 Bài toán 29

https://github.com/vntanh1406/Graph_SUM2025/blob/main/Combinatorics/Baitoan29.cpp

$$\sum_{i=0}^{n} \frac{C_n^i}{i+1} = \frac{2^{n+1}-1}{n+1} \quad \textit{(*)}$$

a) Quy nạp toán học:

- Với $n = 1$:

$$\sum_{i=0}^{1} \frac{C_n^i}{i+1} = \frac{\binom{1}{0}}{0+1} + \frac{\binom{1}{1}}{1+1} = 1 + \frac{1}{2} = \frac{2^{1+1}-1}{1+1} = \frac{3}{2}$$

- Giả sử *(*)* đúng với $n = k$. Ta chứng minh *(*)* cũng đúng với $n = k+1$

  Tức là $\sum_{i=0}^{k+1} \frac{\binom{k+1}{i}}{i+1} = \frac{2^{k+2}-1}{k+2}$

  Thật vậy:

$$\sum_{i=0}^{k+1} \frac{\binom{k+1}{i}}{i+1} = \sum_{i=0}^{k} \frac{\binom{k+1}{i}}{i+1} + \frac{\binom{k+1}{k+1}}{k+2} = \sum_{i=0}^{k} \frac{\binom{k+1}{i}}{i+1} + \frac{1}{k+2} \quad \textit{(1)}$$

  Thay $\binom{k+1}{i} = \binom{k}{i} + \binom{k}{i-1}$ vào *(1)*, ta được:

$$\sum_{i=0}^{k} \frac{\binom{k+1}{i}}{i+1} + \frac{1}{k+2} = \sum_{i=0}^{k} \frac{\binom{k}{i} + \binom{k}{i-1}}{i+1} + \frac{1}{k+2} = \sum_{i=0}^{k} \frac{\binom{k}{i}}{i+1} + \sum_{i=1}^{k} \frac{\binom{k}{i-1}}{i+1} + \frac{1}{k+2} \quad \textit{(2)}$$

  Xét $\sum_{i=0}^{k} \frac{\binom{k}{i}}{i+1} = \frac{2^{k+1}-1}{k+1}$ *(Giả thiết quy nạp) (3)*

  Xét $\sum_{i=1}^{k} \frac{\binom{k}{i-1}}{i+1} = \sum_{j=0}^{k-1} \frac{\binom{k}{j}}{j+2}$ *(4)*

  Thay *(3)*, *(4)* vào *(2)*, ta được:

$$\frac{2^{k+1}-1}{k+1} + \sum_{j=0}^{k-1} \frac{\binom{k}{j}}{j+2} + \frac{1}{k+2} = \frac{2^{k+1}-1}{k+1} + \sum_{j=0}^{k-1} \frac{\binom{k}{j}}{j+2} + \frac{\binom{k}{k}}{k+2} = \frac{2^{k+1}-1}{k+1} + \sum_{j=0}^{k} \frac{\binom{k}{j}}{j+2}$$

b) Biến đổi số hạng tổng quát

- Ta có

$$\frac{1}{i+1}\binom{n}{i} = \frac{1}{i+1} \cdot \frac{n!}{i!(n-i)!} = \frac{1}{n+1} \cdot \frac{(n+1)!}{(i+1)!(n+1-i-1)!} = \frac{1}{n+1}\binom{n+1}{i+1} \quad \textit{(1)}$$

- Thay *(1)* vào *(*)*, ta được:

$$\sum_{i=0}^{n} \frac{C_n^i}{i+1} = \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{n+1}\binom{n+1}{i+1} = \frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n}\binom{n+1}{i+1} \quad \textit{(2)}$$

- Xét

$$\sum_{i=0}^{n}\binom{n+1}{i+1} = \sum_{j=1}^{n+1}\binom{n+1}{j} = \sum_{j=0}^{n+1}\binom{n+1}{j} - \binom{n+1}{0} = 2^{n+1} - 1 \quad \textit{(3)}$$

- Thay *(3)* vào *(2)*, ta được:

$$\frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n}\binom{n+1}{i+1} = \frac{1}{n+1}\cdot(2^{n+1}-1) = \frac{2^{n+1}-1}{n+1} \quad \textit{(đpcm)}$$

c) Khai triển $(1+x)^n$

- Áp dụng nhị thức Newton: $(1+x)^n = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}x^i$
- Lấy tích phân từ 0 đến 1 hai vế:

$$\int_0^1 (1+x)^n dx = \int_0^1 \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}x^i dx = \sum_{i=0}^{n}\left[\binom{n}{i}\int_0^1 x^i dx\right] = \sum_{i=0}^{n}\frac{\binom{n}{i}}{i+1} \quad \textit{(Vế trái)}$$

- Đặt $u = 1+x$, ta được $du = d(1+x) = dx$. Xét:

$$\int_0^1 (1+x)^n dx = \int_1^2 u^n du = \left.\frac{u^{n+1}}{n+1}\right|_1^2 = \frac{2^{n+1}}{n+1} - \frac{1}{n+1} = \frac{2^{n+1}-1}{n+1} \quad \textit{(Vế phải)}$$

- Vậy

$$\sum_{i=0}^{n}\frac{C_n^i}{i+1} = \frac{2^{n+1}-1}{n+1} \quad \textit{(đpcm)}$$

d) Lý luận tổ hợp

2.2.3 Bài toán 30

https://github.com/vntanh1406/Graph_SUM2025/blob/main/Combinatorics/Baitoan30.cpp

$$\sum_{i=0}^{n}(C_n^i)^2 = C_{2n}^n$$

a) Khai triển nhị thức Newton

- Xét $(x+1)^{2n} = \sum_{i=0}^{2n}\binom{2n}{i}x^i$, hệ số của x^n là: $\binom{2n}{n}$
- Xét $(x+1)^{2n} = (x+1)^n(x+1)^n = (\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}x^i)\cdot(\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}x^j)$, hệ số của x^n là:

$$\sum_{\substack{i+j=n\\0\le i,j\le n}}\binom{n}{i}\cdot\binom{n}{j} = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\binom{n}{n-i} = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}^2$$

- Do hệ số của x^n từ cả hai cách tính phải bằng nhau nên ta được đpcm.

b) Lý luận tổ hợp

- Đếm số cách chọn n phần tử từ một tập hợp gồm $2n$ phần tử, ta có 2 cách đếm sau.
- Vế trái: Đếm trực tiếp, số cách chọn là $\binom{2n}{n}$
- Vế phải: Ta chia $2n$ phần tử thành 2 tập A và B, mỗi tập có n phần tử. Ta chọn i phần tử từ A và $(n-i)$ phần tử từ B, với $0 \le i \le n$. Với mỗi giá trị của i, số cách chọn là $\binom{n}{i}\binom{n}{n-i} = \binom{n}{i}^2$. Vậy tổng cộng có $\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}^2$.
- Với 2 cách đếm phải ra cùng một kết quả, nên vế trái bằng vế phải *(đpcm)*

2.2.4 Bài toán 31

a) Tìm hệ số của x^{26}

$$\left(\frac{1}{x^4}+x^7\right)^n=\sum_{i=0}^{n}C_n^i\frac{x^{7i}}{x^{4n-4i}}=\sum_{i=0}^{n}C_n^i x^{11i-4n} \quad \textit{(1)}$$

Lại có:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}C_{2n+1}^i=\sum_{i=n+1}^{2n}C_{2n+1}^i&=\frac{1}{2}\cdot\sum_{i=1}^{2n}C_{2n+1}^i\\&=\frac{1}{2}\cdot\left(\sum_{i=0}^{2n+1}C_{2n+1}^i-C_{2n+1}^0-C_{2n+1}^{2n+1}\right)\\&=\frac{1}{2}\cdot\left(2^{2n+1}-2\right)=2^{2n}-1=2^{20}-1\end{aligned}$$

Vậy $2n=20\Leftrightarrow n=10 \quad \textit{(2)}$
Thay *(2)* vào *(1)*, ta cần tìm i để $11i-4n=26\Leftrightarrow 11i=26+4\cdot 10=66\Leftrightarrow i=6$
Vậy hệ số của x^{26} là $C_{10}^6=210$

b) Tìm hệ số của x^k
Ta có:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}C_{2n+1}^i=\sum_{i=n+1}^{2n}C_{2n+1}^i&=\frac{1}{2}\cdot\sum_{i=1}^{2n}C_{2n+1}^i\\&=\frac{1}{2}\cdot\left(\sum_{i=0}^{2n+1}C_{2n+1}^i-C_{2n+1}^0-C_{2n+1}^{2n+1}\right)\\&=\frac{1}{2}\cdot\left(2^{2n+1}-2\right)=2^{2n}-1=2^{n_0}-1\end{aligned}$$

Vậy với n_0 là số chẵn, $2n=n_0\Leftrightarrow n=\frac{n_0}{2}$
Xét khai triển:

$$(x^a+x^n)^n=\sum_{i=0}^{n}C_n^i\cdot x^{ai}\cdot x^{n(n-i)}=\sum_{i=0}^{n}x^{n^2+i(a-n)}$$

Ta cần tìm i để $n^2+i(a-n)=k\Leftrightarrow i=\frac{k-n^2}{a-n}=\frac{k-\frac{n_0^2}{4}}{a-\frac{n_0}{2}}$, với $0\le i\le n$
Và $i\in N$ nên $\left(k-\frac{n_0^2}{4}\right)$ phải chia hết cho $\left(a-\frac{n_0}{2}\right)$

- Nếu $a>\frac{n_0}{2}$:

  $0\le\frac{k-\frac{n_0^2}{4}}{a-\frac{n_0}{2}}\le\frac{n_0}{2}\Leftrightarrow\frac{n_0^2}{4}\le k\le\frac{n_0^2}{4}+\frac{n_0}{2}\left(a-\frac{n_0}{2}\right)\Leftrightarrow\frac{n_0^2}{4}\le k\le\frac{n_0a}{2}$

- Nếu $a<\frac{n_0}{2}$:

  $0\le\frac{k-\frac{n_0^2}{4}}{a-\frac{n_0}{2}}\le\frac{n_0}{2}\Leftrightarrow\frac{n_0^2}{4}\ge k\ge\frac{n_0^2}{4}+\frac{n_0}{2}\left(a-\frac{n_0}{2}\right)\Leftrightarrow\frac{n_0^2}{4}\ge k\ge\frac{n_0a}{2}$

- Nếu $a = \frac{n_0}{2}$

  $(x^n + x^n)^n = (2x^n)^n = 2^n x^{n^2} = 2^n x^{\frac{n_0^2}{4}}$

  Hệ số của x^k là:

  - 2^n nếu $k = \frac{n_0^2}{4}$
  - 0 nếu $k \neq \frac{n_0^2}{4}$

Vậy hệ số của x^k là:

- Nếu $a \neq \frac{n_0}{2}$: $C^i_{\frac{n_0}{2}}$ với $i = \frac{k - \frac{n_0^2}{4}}{a - \frac{n_0}{2}}$, k thỏa:
  - $\left(k - \frac{n_0^2}{4}\right)$ phải chia hết cho $\left(a - \frac{n_0}{2}\right)$
  - $a > \frac{n_0}{2}$ thì $\frac{n_0^2}{4} \leq k \leq \frac{n_0 a}{2}$
  - $a < \frac{n_0}{2}$ thì $\frac{n_0^2}{4} \geq k \geq \frac{n_0 a}{2}$
- Nếu $a = \frac{n_0}{2}$ thì hệ số của x^k là:
  - 2^n nếu $k = \frac{n_0^2}{4}$
  - 0 nếu $k \neq \frac{n_0^2}{4}$

3 Graph Theory - Lý thuyết đồ thị

3.1 Trees & graphs: Some basic concepts

3.1.1 Problem 31

- $(a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n)$ là dãy bậc của đồ thị đơn G gồm n đỉnh $v_1, \ldots, v_n$.
- Với mỗi $k \in \{1, \ldots, n\}$, xét tập $S = \{v_1, \ldots, v_k\}$ gồm k đỉnh có bậc lớn nhất, và tập $T = V \setminus S = \{v_{k+1}, \ldots, v_n\}$.
- Tổng bậc của các đỉnh trong S là $\sum_{i=1}^{k} a_i$, chia thành hai phần:
  - Các cạnh nằm trong S: Mỗi cạnh giữa hai đỉnh trong S góp 2 đơn vị vào tổng bậc, nên phần này là $2|E(S)|$. Vì số cạnh trong tập S tối đa là $\binom{k}{2} = \frac{k(k-1)}{2}$, ta có: $2|E(S)| \leq k(k-1)$
  - Các cạnh từ S đến T: Gọi $|E(S,T)|$ là số cạnh nối giữa S và T, mỗi cạnh góp 1 đơn vị vào tổng bậc của S.

    Với mỗi đỉnh $v_i \in T$, số cạnh nối từ v_i đến S không vượt quá: $\min(a_i, k)$

    Vì:
    * v_i có tổng cộng a_i cạnh (bậc của v_i),
    * v_i chỉ có thể nối với tối đa k đỉnh thuộc S.

    Do đó: $|E(S,T)| \leq \sum_{i=k+1}^{n} \min(a_i, k)$
- Suy ra tổng bậc của các đỉnh trong S không vượt quá:

$$\sum_{i=1}^{k} a_i = 2|E(S)| + |E(S,T)| \leq k(k-1) + \sum_{i=k+1}^{n} \min(a_i, k)$$

4 Basic Graph Theory _ Coding

Link to C++ Sources: https://github.com/vntanh1406/Graph_SUM2025/tree/main/BasicGraphTheory

4.1 Graph representation

- Adjacency Matrix to Edge List : https://github.com/vntanh1406/Graph_SUM2025/blob/main/BasicGraphTheory/AdjacencyMatrixToEdgeList.cpp
- Adjacency Matrix to Adjacency List: https://github.com/vntanh1406/Graph_SUM2025/blob/main/BasicGraphTheory/AdjacencyMatrixToAdjacencyList.cpp
- Edge List to Adjacency Matrix: https://github.com/vntanh1406/Graph_SUM2025/blob/main/BasicGraphTheory/EdgeListToAdjacencyMatrix.cpp
- Edge List to Adjacency List: https://github.com/vntanh1406/Graph_SUM2025/blob/main/BasicGraphTheory/EdgeListToAdjacencyList.cpp
- Adjacency List to Adjacency Matrix: https://github.com/vntanh1406/Graph_SUM2025/blob/main/BasicGraphTheory/AdjacencyListToAdjacencyMatrix.cpp
- Adjacency List To Edge List: https://github.com/vntanh1406/Graph_SUM2025/blob/main/BasicGraphTheory/AdjacencyListToEdgeList.cpp

4.2 Search Algorithm

4.2.1 Basic DFS & BFS

- Basic Depth First Search: https://github.com/vntanh1406/Graph_SUM2025/blob/main/BasicGraphTheory/BasicDFS.cpp
- Basic Breadth First Search: https://github.com/vntanh1406/Graph_SUM2025/blob/main/BasicGraphTheory/BasicBFS.cpp
- Counting Connected Components: https://github.com/vntanh1406/Graph_SUM2025/blob/main/BasicGraphTheory/CountingConnectedComponents.cpp
- Find Path From `s` to `e`: https://github.com/vntanh1406/Graph_SUM2025/blob/main/BasicGraphTheory/FindPath_Basic.cpp

4.2.2 DFS & BFS for grid

- Counting Connected Components and Checking Path Existence: https://github.com/vntanh1406/Graph_SUM2025/blob/main/BasicGraphTheory/BFS_DFS_OnGrid.cpp
- Find The Shortest Path: https://github.com/vntanh1406/Graph_SUM2025/blob/main/BasicGraphTheory/FindShortestPath.cpp

4.2.3 Important algorithms

- Topological Sort: https://github.com/vntanh1406/Graph_SUM2025/blob/main/BasicGraphTheory/TopologicalSort.cpp
- Detect Cycles in Undirected Graph: https://github.com/vntanh1406/Graph_SUM2025/blob/main/BasicGraphTheory/UndirectedGraphCycle.cpp

5 Lý thuyết đồ thị - Bài tập

5.1 PrimePath

https://github.com/vntanh1406/Graph_SUM2025/blob/main/GraphTheory_Prac/PrimePath.cpp

6 CSES Problem List

6.1 Graph Algorithms

6.1.1 Counting Rooms

Problem Description

- https://cses.fi/problemset/task/1192
- The task is to determine the number of rooms in a building.
- A room is defined as a maximal connected area of floor tiles (denoted by `'.'`) in a 2D map.
- We can move up, down, left, and right between adjacent floor tiles. Wall tiles are represented by `'#'` and cannot be walked through.
- **Input:**
  - The first line contains two integers n and m ($1 \leq n, m \leq 1000$), denoting the height and width of the map.
  - The next n lines each contain a string of m characters representing the map.
- **Output:** The number of distinct rooms.
- **Example**

Input	Output

`5 8`
`########`
`#..#...#`
`####.#.#`
`#..#...#`
`########`
	3

Algorithm Explanation

- https://cses.fi/paste/6fa005ccb9388ed1c2d9a9/
- Use DFS to find the number of connected components in a grid where we treat floor tiles `'.'` as nodes in a graph. (2 floor tiles are connected if they are adjacent: up/down/left-/right).
- Implementation:
  - `n, m`: the dimensions of the grid (height and width).

- `grid`: a vector of strings representing the map, where each character is either `'.'` (floor) or `'#'` (wall).
- `visited[n][m]`: a 2D boolean array used to track visited floor tiles.
- `dx[4], dy[4]`: Two arrays representing the relative movement in four directions:
  - Up: $(-1, 0)$
  - Down: $(+1, 0)$
  - Left: $(0, -1)$
  - Right: $(0, +1)$
- **void dfs(int x, int y)**
  - Given a starting floor tile at position (x, y):
    1. Mark `visited[x][y] = true`.
    2. For each of the 4 directions:
       - New coordinates $(nx, ny) = (x + dx[i], y + dy[i])$.
       - If (nx, ny) is within bounds, not visited, and is a floor tile, recursively call `dfs(nx, ny)`.
- **Main loop:**
  - Iterate over all grid cells.
  - For each unvisited floor tile:
    - Call DFS from that tile to explore its connected room.
    - Increment the room counter.

- **Time complexity:** The algorithm visits each cell at most once, and each DFS runs in time proportional to the number of floor tiles in a room. Hence, the overall complexity is $\mathcal{O}(n \cdot m)$.

- **Step-by-Step Example** (using the sample input): We visualize the grid and track DFS visits:

  Initial Grid:

#	#	#	#	#	#	#	#
#	.	.	#	.	.	.	#
#	#	#	#	.	#	.	#
#	.	.	#	.	.	.	#
#	#	#	#	#	#	#	#

—

Room 1: Start DFS at (1,1)

DFS visits: (1,1) → (1,2)

→ Room 1 completed. Total rooms = 1

Room 2: Start DFS at (1,4)

DFS visits: (1,4) → (2,4) → (3,4) → (3,5) → (3,6) → (2,6) → (1,6) → (1, 5)

→ Room 2 completed. Total rooms = 2

Room 3: Start DFS at (3,1)

DFS visits: (3,1) → (3,2)

→ Room 3 completed. Total rooms = 3

6.1.2 Labyrinth

Problem Description

- https://cses.fi/problemset/task/1193
- There is a map of a labyrinth, and we need to find the shortest path from a start point `A` to an endpoint `B`.
- Movement is allowed in four directions: up, down, left, right.
- The labyrinth is represented by a grid:
  - `'.'` denotes an empty tile (floor).
  - `'#'` denotes a wall.
  - `'A'` is the starting point.
  - `'B'` is the target.
- **Input:**
  - The first line contains two integers n and m ($1 \leq n, m \leq 1000$), the dimensions of the map.
  - The next n lines contain m characters each, describing the map.
- **Output:**
  - First print "YES" if a path exists, and "NO" otherwise.
  - If a path exists, print its length and then a string consisting of the steps: `L`, `R`, `U`, `D`.
- **Example**

Input	Output

`5 8`
`########`
`#.A#...#`
`#.##.#B#`
`#......#`
`########`
	`YES`
	`9`
	`LDDRRRRRU`

Algorithm Explanation:

- https://cses.fi/paste/261fd1d6d36a0c05c32743/
- **Initialize:**
  - `visited[i][j]` = false for all cells
  - `d[i][j]` = 0 (distance from 'A')
  - `parent[i][j]` = previous cell in path
- **BFS(start):**
  - Enqueue start cell, mark as visited
  - While queue not empty:

    * Dequeue (x, y)
    * For each direction (U, L, R, D): If neighbor (nx, ny) is valid and unvisited:
        · Mark visited, set parent, update distance
        · If cell is 'B': stop search

- **Trace Path:**
  - If distance to 'B' is 0: print "NO"
  - Else:
    * Backtrack from 'B' to 'A' using `parent`
    * Record directions (U, L, R, D)
    * Reverse the path and print "YES", distance, and path
- **Time Complexity:** $\mathcal{O}(n \cdot m)$

6.1.3 Building Roads

Problem Description

- https://cses.fi/problemset/task/1666
- Given n cities and m roads, determine the minimum number of new roads required to connect all cities, and specify which roads to build. Each existing road connects two different cities.
- **Input:**
  - The first line contains two integers n and m $(1 \le n \le 10^5, 1 \le m \le 2 \cdot 10^5)$ (the number of cities and existing roads).
  - The next m lines contain two integers a and b $(1 \le a, b \le n)$ (meaning there is a road between cities a and b).
- **Output:**
  - First, print an integer k (the minimum number of new roads needed).
  - Then print k lines, each containing two integers u and v, indicating a road to build between cities u and v.
  - Any valid solution is accepted.
  - **Example**

Input	Output
4 2 1 2 3 4	1 2 3

Algorithm Explanation

- https://cses.fi/paste/bdeee055189e59e5c2f5d8/
- Use DFS to find all connected components.
- For each new component found, save a representative city.

- To connect the components:
  - If there are k components, we need $k-1$ roads.
  - Connect representative cities linearly: $res[i]$ with $res[i+1]$.
- **Time Complexity:** $\mathcal{O}(n+m)$

6.1.4 Message Routes

Problem Description

- https://cses.fi/problemset/task/1667
- n computers and m connections.
- Each connection links two distinct computers directly.
- Check if there is a path exists from computer 1 to computer n, find the minimum number of computers on the route, and output one such route.
- **Input:**
  - The first line contains two integers n and m
  - Then follow m lines, each with two integers a and b: there is a connection between computers a and b.
- **Output:**
  - If there exists a route from computer 1 to computer n, first print k, then print k space-separated integers representing the computers along this path.
  - If no such route exists, print `IMPOSSIBLE`.
- **Example**

Input	Output
5 5 1 2 1 3 1 4 2 3 5 4	3 1 4 5

Algorithm Explanation

- https://cses.fi/paste/4e4274bd1cea72b6c2f69d/
- The problem is to find the shortest path from node `1` to node `n` in an undirected graph.
- Use BFS starting from node `1` to:
  - Mark visited nodes (`visited[i]`).
  - Record the parent of each node during traversal (`parent[i]`) to reconstruct the path.
  - Count the number of steps from the start node to each node (`d[i]`).

- After BFS:
  - If `visited[n]` is false, there is no path from `1` to `n`, so the output is `IMPOSSIBLE`.
  - Otherwise, we reconstruct the shortest path using the `parent[]` array starting from node `n` back to `1`.
  - Finally, we print the path length (`d[n] + 1`, because the path includes both endpoints), and the path in correct order.
- **Time Complexity:** $\mathcal{O}(n + m)$

6.1.5 Building Teams

Problem Description

- https://cses.fi/problemset/task/1668/

Algorithm Explanation

- https://cses.fi/paste/4ac88035ca891502c2f78e/

6.1.6 Round Trip

Problem Description

- https://cses.fi/problemset/task/1669

Algorithm Explanation

- https://cses.fi/paste/c716877ebfb8afaec307d9/

6.1.7 Monsters

Problem Description

- https://cses.fi/problemset/task/1194

Algorithm Explanation

- https://cses.fi/paste/1a35c0381d423f67c3084e/

6.1.8 Flight Routes

Problem Description

- https://cses.fi/problemset/task/1196/

Algorithm Explanation

- https://cses.fi/paste/c4a13f10d301c5ffc45604/

6.1.9 Round Trip II

Problem Description

- https://cses.fi/problemset/task/1678

Algorithm Explanation

- https://cses.fi/paste/96449e1f66b08727c9a516/

6.1.10 Course Schedule

Problem Description

- https://cses.fi/problemset/task/1679

Algorithm Explanation

- https://cses.fi/paste/b7853c88618baed9c9a483/
- Topological Sort

6.1.11 Longest Flight Route

Problem Description

- https://cses.fi/problemset/task/1680

Algorithm Explanation

- https://cses.fi/paste/46f0739636baeda9c9a4c3/
- Topological sort orders the cities so that every flight from u to v appears before v, ensuring no cycles and allowing dynamic programming to process nodes in a valid sequence.
- DP:
  - Let $dp[u]$ be the length of the longest path from the start city (city 1) to city u.
  - Initialization:

    $$dp[1] = 1 \quad \text{(starting city)}, \quad dp[u] = -1 \quad \text{for } u \neq 1 \quad \text{(unreachable initially)}$$

  - Recurrence:

    $$dp[v] = \max(dp[v], dp[u] + 1) \quad \text{for every flight } (u \to v)$$

    This means if we can reach u, then the longest path to v can be updated by extending the path to u by one flight.
  - We process the cities in topological order to ensure that when calculating $dp[v]$, all $dp[u]$ for predecessors u are already computed.
  - The answer is $dp[n]$

6.1.12 Game Routes

Problem Description

- https://cses.fi/problemset/task/1681/
- Given a game with n levels and m one-way teleporters forming a directed acyclic graph (DAG), find the number of ways to travel from level 1 to level n, modulo $10^9 + 7$.
  - **Input**:
    - First line: two integers n ($1 \leq n \leq 10^5$) and m ($1 \leq m \leq 2 \cdot 10^5$).
    - Next m lines: two integers a and b ($1 \leq a, b \leq n$), indicating a teleporter from level a to level b.

- **Output**: An integer representing the number of ways to complete the game, modulo $10^9 + 7$.
- **Example**:

Input	Output
4 5 1 2 2 4 1 3 3 4 1 4	3

Algorithm Explanation

- https://cses.fi/paste/1939fa565ba114f9c9a4d7/
- Topological Sort

7 Midterm

7.1 Bài 2

a) Chứng minh đẳng thức Vandermonde:

$$\sum_{i=0}^{r} \binom{m}{i}\binom{n}{r-i} = \binom{m+n}{r}$$

Cách 1: Phương pháp tổ hợp.

- Xét một tập hợp A có m phần tử và một tập hợp B có n phần tử. Khi đó $A \cup B$ có $m+n$ phần tử.
- Số cách chọn r phần tử từ $A \cup B$ là $\binom{m+n}{r}$.
- Mặt khác, để chọn r phần tử từ $A \cup B$, ta có thể chọn i phần tử từ A và $r-i$ phần tử từ B với $0 \le i \le r$.
- Với mỗi i, số cách chọn là $\binom{m}{i}\binom{n}{r-i}$.
- Cộng lại ta có:

$$\sum_{i=0}^{r} \binom{m}{i}\binom{n}{r-i} = \binom{m+n}{r}$$

Cách 2: Phương pháp đại số.

- Xét biểu thức:

$$(1+x)^m(1+x)^n = (1+x)^{m+n}$$

- Ta khai triển hai vế:
  - Vế trái:

$$(1+x)^m(1+x)^n = \left(\sum_{i=0}^{m}\binom{m}{i}x^i\right)\left(\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}x^j\right) = \sum_{r=0}^{m+n}\left(\sum_{i=0}^{r}\binom{m}{i}\binom{n}{r-i}\right)x^r$$

– Vế phải:

$$(1+x)^{m+n} = \sum_{r=0}^{m+n} \binom{m+n}{r} x^r$$

- So sánh hệ số của x^r ở hai vế, ta được:

$$\sum_{i=0}^{r} \binom{m}{i}\binom{n}{r-i} = \binom{m+n}{r}$$

b) Chứng minh đẳng thức Vandermonde tổng quát:

$$\binom{n_1+n_2+\cdots+n_p}{m} = \sum_{k_1+k_2+\cdots+k_p=m} \binom{n_1}{k_1}\binom{n_2}{k_2}\cdots\binom{n_p}{k_p}$$

Cách 1: Phương pháp tổ hợp.

- Gọi S là tập hợp gồm $n_1+n_2+\cdots+n_p$ phần tử, chia thành p nhóm rời nhau $S_1, S_2, \ldots, S_p$ với $|S_i| = n_i$.
- Số cách chọn m phần tử từ S là $\binom{n_1+n_2+\cdots+n_p}{m}$.
- Mặt khác, để chọn m phần tử, ta có thể chọn k_1 phần tử từ S_1, k_2 phần tử từ S_2, ..., k_p phần tử từ S_p sao cho $k_1+k_2+\cdots+k_p = m$. Số cách chọn như vậy là:

$$\sum_{k_1+\cdots+k_p=m} \binom{n_1}{k_1}\cdots\binom{n_p}{k_p}$$

- Vì hai cách đếm đều tính cùng một đại lượng, đẳng thức được chứng minh.

Cách 2: Phương pháp đại số.

- Xét khai triển của:

$$(1+x)^{n_1}(1+x)^{n_2}\ldots(1+x)^{n_p} = (1+x)^{n_1+n_2+\cdots+n_p}$$

- Vế trái:

$$\prod_{i=1}^{p}(1+x)^{n_i} = \prod_{i=1}^{p}\left(\sum_{k_i=0}^{n_i}\binom{n_i}{k_i}x^{k_i}\right) = \sum_{m=0}^{n_1+\cdots+n_p}\left(\sum_{k_1+\cdots+k_p=m}\binom{n_1}{k_1}\cdots\binom{n_p}{k_p}\right)x^m$$

- Vế phải:

$$(1+x)^{n_1+n_2+\cdots+n_p} = \sum_{m=0}^{n_1+\cdots+n_p}\binom{n_1+\cdots+n_p}{m}x^m$$

- So sánh hệ số của x^m, ta được:

$$\binom{n_1+n_2+\cdots+n_p}{m} = \sum_{k_1+\cdots+k_p=m}\binom{n_1}{k_1}\cdots\binom{n_p}{k_p}$$

7.2 Bài 3

Đẳng thức Hockey-stick:

$$\sum_{i=r}^{n}\binom{i}{r}=\sum_{j=0}^{n-r}\binom{j+r}{r}=\sum_{j=0}^{n-r}\binom{j+r}{j}=\binom{n+1}{r+1}=\binom{n+1}{n-r}\quad \forall n,r\in N,\ n\geq r$$

a) Chứng minh bằng phương pháp quy nạp

- **Cơ sở:** Với $n=r$ ta có:

$$\sum_{i=r}^{r}\binom{i}{r}=\binom{r}{r}=1,\quad \binom{r+1}{r+1}=1\Rightarrow \text{mệnh đề đúng.}$$

- **Giả thiết quy nạp:** Giả sử mệnh đề đúng với $n=k$:

$$\sum_{i=r}^{k}\binom{i}{r}=\binom{k+1}{r+1}$$

- **Bước quy nạp:** Xét $n=k+1$:

$$\sum_{i=r}^{k+1}\binom{i}{r}=\left(\sum_{i=r}^{k}\binom{i}{r}\right)+\binom{k+1}{r}=\binom{k+1}{r+1}+\binom{k+1}{r}=\binom{k+2}{r+1}$$

  (Công thức Pascal). Vậy mệnh đề đúng với $n=k+1$.

- **Kết luận:** Theo nguyên lý quy nạp, đẳng thức đúng với mọi $n\geq r$.

c) Chứng minh bằng phương pháp tổ hợp

- Xét tập hợp gồm $n+1$ phần tử. Ta đếm số cách chọn $r+1$ phần tử sao cho phần tử lớn nhất là tại vị trí $i+1$ $(r\leq i\leq n)$.
- Giả sử phần tử lớn nhất là phần tử thứ $i+1$, thì r phần tử còn lại phải chọn từ $\{1,2,...,i\}$.
- Số cách chọn là $\binom{i}{r}$. Cộng tất cả các khả năng từ $i=r$ đến n ta được:

$$\sum_{i=r}^{n}\binom{i}{r}=\text{số cách chọn } r+1 \text{ phần tử trong } n+1=\binom{n+1}{r+1}$$

d) Chứng minh bằng phương pháp hàm sinh

- Xét khai triển nhị thức Newton:

$$(1+x)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k$$

- Xét tổng:

$$\sum_{i=r}^{n}\binom{i}{r}=\text{ hệ số của } x^r \text{ trong } \sum_{i=r}^{n}(1+x)^i$$

- Biến đổi:

$$\sum_{i=r}^{n}(1+x)^i = \sum_{i=0}^{n}(1+x)^i - \sum_{i=0}^{r-1}(1+x)^i = \frac{(1+x)^{n+1}-1}{x} - \frac{(1+x)^r-1}{x}$$

- Gọi biểu thức trên là $f(x)$. Ta sẽ tìm hệ số của x^r trong $f(x)$ bằng cách:
  - Viết lại tổng với chỉ số mới:

$$f(x) = \sum_{j=0}^{n-r}(1+x)^{j+r}$$

  - Khai triển từng số hạng:

$$(1+x)^{j+r} = \sum_{k=0}^{j+r}\binom{j+r}{k}x^k$$

  - Hệ số của x^r trong $(1+x)^{j+r}$ là $\binom{j+r}{r}$
  - Do đó, hệ số của x^r trong $f(x)$ là:

$$\sum_{j=0}^{n-r}\binom{j+r}{r}$$

  - Mà:

$$\sum_{j=0}^{m}\binom{j+r}{r} = \binom{r+m+1}{r+1} \Rightarrow \sum_{j=0}^{n-r}\binom{j+r}{r} = \binom{n+1}{r+1}$$

7.3 Bài 4

Tìm hệ số của $\prod_{i=1}^{m} x_i^{k_i}$ trong khai triển $(\sum_{i=1}^{m} x_i)^n$

Đây là multinomial coefficient:

$$\frac{n!}{k_1!\,k_2!\,\ldots\,k_m!} = \binom{n}{k_1, k_2, \ldots, k_m}$$

7.4 Bài 9

b)

- Gọi G là simple graph với n đỉnh và dãy bậc là $(d_1, d_2, \ldots, d_n)$. Tức là, đỉnh thứ i có bậc d_i.

- Xét đồ thị bù của G, ký hiệu là $\bar{G}$. Trong $\bar{G}$, hai đỉnh nối nhau khi và chỉ khi chúng không nối trong G.

- Khi đó, bậc của đỉnh v_i trong $\bar{G}$ sẽ là:

$$\deg_{\bar{G}}(v_i) = (n-1) - \deg_G(v_i) = n - 1 - d_i$$

  Vì mỗi đỉnh có thể nối tối đa với $n-1$ đỉnh khác (trừ chính nó), nên bậc trong $\bar{G}$ chính là số đỉnh mà v_i không nối trong G.

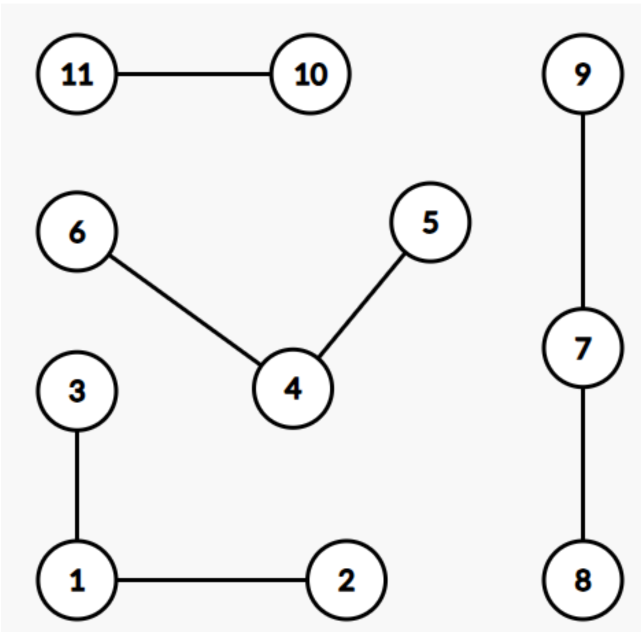
- Như vậy, nếu dãy bậc trong G là $(d_1, \ldots, d_n)$, thì dãy bậc trong $\bar{G}$ là $(n-1-d_1, \ldots, n-1-d_n)$.
- Nếu ta sắp dãy bậc này theo thứ tự giảm dần, ta thu được dãy:

$$(n-d_n-1, \ldots, n-d_1-1)$$

  vì $d_1 \geq d_2 \geq \cdots \geq d_n$, nên $n-1-d_1 \leq \cdots \leq n-1-d_n$, và dãy $(n-d_n-1, \ldots, n-d_1-1)$ chính là hoán vị giảm dần của bậc trong $\bar{G}$.
- Do đó, nếu dãy $(d_1, \ldots, d_n)$ là graphic (tức tồn tại đồ thị G), thì dãy $(n-d_n-1, \ldots, n-d_1-1)$ là bậc của một đồ thị đơn khác (chính là $\bar{G}$), nên cũng là graphic.
- Chiều ngược lại cũng đúng: nếu dãy $(n-d_n-1, \ldots, n-d_1-1)$ là graphic, thì tồn tại đồ thị $\bar{G}$ ứng với dãy này $\Rightarrow$ đồ thị bù của $\bar{G}$, tức G, cũng tồn tại và có dãy bậc ban đầu $(d_1, \ldots, d_n)$.
- Vậy ta có điều phải chứng minh:

$$(d_1, \ldots, d_n) \text{ là graphic } \Leftrightarrow (n-d_n-1, \ldots, n-d_1-1) \text{ là graphic.}$$

- Áp dụng với dãy 9,9,9,9,9,9,9,9,8,8,8:
  Ta kiểm tra dãy 2,2,2,1,1,1,1,1,1,1,1.



Đây là graphic sequence nên dãy ban đầu cũng là graphic sequence