Về bài toán chia kẹo Euler

Biên soạn: PimaX

Hướng tới kì thi Học sinh giỏi, TSA, THPT Quốc Gia

Thời gian làm bài: *90 phút*

Bài toán chia kẹo Euler là một trong những phần kiến thức quan trọng của tổ hợp, đóng vai trò then chốt trong việc hình thành tư duy xử lý các bài toán về tổ hợp. Trước đây bài toán này hay xuất hiện trong các đề thi học sinh giỏi từ cấp địa phương tới quốc gia, tuy nhiên dạo gần đây cũng bắt đầu "len lỏi"vào các kì thi thử tuyển sinh đại học, đánh giá tư duy,... Và đấy cũng chính là lí do mà tài liệu bạn đang đọc ra đời. Bài viết là tuyển tập các bài toán, các kĩ thuật mà tác giả đã được tiếp thu trong quá trình dạy và học tập từ thời học sinh tới lúc ra trường. Các kiến thức trong tài liệu được mình sưu tầm và soạn lại từ các quyển sách và các tài liệu trên mạng, có những vấn đề mình tự giải quyết tự gõ lại, cũng có những bài toán được LaTeX và chỉnh sửa lại dựa theo ý tưởng của người khác, vì thế rất mong nếu tác giả của những lời giải hoặc những bài toán xuất hiện trong tài liệu, có đọc được thì có thể bỏ qua những thiếu sót vì chưa xin phép được đầy đủ. Chuyên đề không thể tránh khỏi những thiếu sót về mặt ý tưởng, trình bày, hay tính toán, rất mong nhận được sự thông cảm và góp ý từ phía các bạn đọc. Bây giờ chúng ta cùng bắt đầu!

1 Mở đầu về bài toán chia kẹo Euler

Trước hết, ta đếm số cách chia kẹo mà mỗi em đều có kẹo: Xếp n viên kẹo lên một đường thẳng.

$$\odot\odot\odot\odot\odot\odot\odot\odot\odot\odot\odot\odot\odot\odot\odot$$

Giữa các viên kẹo có đúng $n-1$ khoảng trống, ta tìm cách đặt các thanh chắn vào giữa chúng để chia các viên kẹo thành k phần. Ta lấy phần đầu tiên chia cho em bé thứ nhất, phần thứ hai chia cho em bé thứ hai và cứ thế, phần cuối cùng chia cho em bé thứ k. Như thế thì rõ ràng số cách chia kẹo cũng chính là số cách đặt các thanh chắn ở trên.

$$\odot\odot|\odot\odot\odot|\odot\odot\odot\odot\odot|\odot\odot\odot\odot\odot$$

Chọn $k-1$ khoảng trống trong $n-1$ khoảng trống để đặt các thanh chắn, có

$$\binom{n-1}{k-1}$$

[1] cách để đặt. Đây cũng chính là đáp số cho bài toán.
Từ kết quả của bài toán này, ta có các dạng phát biểu dưới dạng số học khác như sau.

Ví dụ 1 (Bài toán gốc).
Phương trình $x_1+x_2+\cdots+x_k=n, n\geqslant k$ có bao nhiêu nghiệm nguyên dương?

LỜI GIẢI

Coi x_i là phần kẹo của em nhỏ thứ i trong bài toán chia kẹo thì số nghiệm của phương trình chính là số cách chia n chiếc kẹo cho k em nhỏ. Vậy phương trình có

$$\binom{n-1}{k-1}$$

[1]Ở trong tài liệu này tác giả dùng kí hiệu $\binom{n}{k}$ thay cho C_n^k.

nghiệm nguyên dương.

Ví dụ 2. Phương trình $x_1 + x_2 + \cdots + x_k = n, n \geqslant k$ có bao nhiêu nghiệm nguyên không âm?

LỜI GIẢI

Vấn đề của bài toán này đó là điều kiện của các biến x_i không giống như với bài toán gốc, khi đó ta có một thủ thuật nho nhỏ để biến nó về bài toán gốc như sau.

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_k = n \Leftrightarrow (x_1+1) + (x_2+1) + \cdots + (x_k+1) = n + k.$$

Đặt $x_i' = x_i + 1$ thì x_i' là các số nguyên dương. Như vậy ta có tất cả

$$\binom{n+k-1}{k-1}$$

nghiệm nguyên không âm của phương trình.

Trong bài toán này chúng ta sẽ cần nhớ cách giải và kết quả của 2 bài toán gốc này, đây là nền tảng cho các bài toán phía sau, trong quá trình làm bài các bạn đưa các bài toán của mình về bài toán 1 hay 2 đều được cả nhé.

2 Các ví dụ minh họa

Ví dụ 1. Xét khai triển $P = (2022a + 2023b + 2024c + 2025d)^{2025}$, hỏi có tất cả bao nhiêu số hạng trong khai triển này?

LỜI GIẢI

Bài toán này thật ra rất đơn giản, ta chú ý số hạng tổng quát khi khai triển thì sẽ có dạng như sau

$$[\text{hệ số}] \times a^{x_1} \cdot b^{x_2} \cdot c^{x_3} \cdot d^{x_4},$$

trong đó x_i là các số tự nhiên thỏa mãn $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2025$. Từ đây theo bài toán chia kẹo Euler ta có ngay kết quả của bài toán.

Ví dụ 2. Có bao nhiêu bộ số tự nhiên x_i, $i = \overline{1,5}$ thỏa mãn

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 2016,$$

với $x_1 \geqslant 5$, $x_2 \geqslant 4$, $x_3 \geqslant 3$, $x_4 \geqslant 2$, $x_5 \geqslant 1$.

LỜI GIẢI

Bài này rất đơn giản thôi, ta đặt $y_1 = x_1 - 5$, $y_2 = x_2 - 4$, $y_3 = x_3 - 3$, $y_4 = x_4 - 2$, $y_5 = x_5 - 1$ thì

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y + 5 = 2001, y_i \geqslant 0.$$

Khi đó số bộ số thỏa mãn là $\dbinom{2001+5-1}{5-1} = \dbinom{2005}{4}$.

Bài tập tương tự 1. Bà Lan ra cửa hàng hoa quả, bà lấy ngẫu nhiên 7 quả trong số các loại quả: cam, xoài, na, mít (có thể có loại quả bà không chọn). Tính xác suất trong số quả bà Lan mua, số quả xoài lớn hơn hoặc bằng 2?

Tổng quát. Phương trình $\sum\limits_{i=1}^{k} x_i = n$ thỏa mãn đồng thời 2 điều kiện

$$x_i \geqslant d_i\,(d_i \geqslant 0)\,, n \geqslant \sum_{i=1}^{k} d_i\,(k \geqslant 1)$$

có tất cả $\dbinom{n+k-D-1}{k-1}$ nghiệm, trong đó $D = \sum\limits_{i=1}^{k} d_i$.

Chứng minh. Tương tự bài toán trên, ta đặt $x_i{}' = x_i - d_i + 1 \Rightarrow \begin{cases} x_i{}' \geqslant 1 \\ \sum\limits_{i=1}^{k} x_i{}' = n + k - \sum\limits_{i=1}^{k} d_i \end{cases}.$

Đến đây áp dụng kết quả của bài toán chia kẹo Euler ta có ngay điều phải chứng minh.

Ví dụ 3. Có bao nhiêu bộ số tự nhiên $x_i, i = \overline{1,6}$ thỏa mãn
$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 100,$$
với x_i là bội của 5.

LỜI GIẢI

Đặt $x_i = 5y_i, i = \overline{1,6}$ thì $y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 + y_6 = 20$. Khi đó số nghiệm là
$$\binom{20+6-1}{6-1} = \binom{25}{5}.$$

Ví dụ 4. Có bao nhiêu bộ số tự nhiên x_i thỏa mãn
$$x_1 + x_2 + x_3 = 1000,$$
với $x_1 \leqslant 100$.

LỜI GIẢI

Với bài toán này ta sẽ sử dụng phần bù để giải quyết, ta sẽ đếm theo các bước sau

1. đếm các bộ số tự nhiên thỏa mãn yêu cầu bài toán;
2. đếm các bộ số tự nhiên thỏa mãn yêu cầu bài toán nhưng với điều kiện $x_1 \geqslant 101$.

Trước tiên, số nghiệm không âm của phương trình $x_1 + x_2 + x_3 = 1000$ là
$$\binom{1000+3-1}{3-1} = \binom{1002}{2}.$$
Tiếp theo với $x_1 \geqslant 101$ thì đặt $y_1 = x_1 - 101$, đưa về phương trình
$$y_1 + x_2 + x_3 = 899,$$
số nghiệm là $\binom{901}{2}$. Do đó, số bộ số thỏa mãn yêu cầu bài toán là $\binom{1002}{2} - \binom{901}{2}$.

Ví dụ 5. Có bao nhiêu bộ số tự nhiên x_i thỏa mãn
$$x_1 + x_2 + x_3 = 10,$$
với $x_3 \neq 3$.

LỜI GIẢI

Bài này sẽ tiếp tục dùng nguyên lý bù trừ giống bài toán trên, trước tiên ta thấy số nghiệm của phương trình $x_1 + x_2 + x_3 = 10$ là
$$\binom{10+3-1}{3-1} = \binom{12}{2} = 66.$$
Nếu $x_3 = 3$ thì ta đưa về xét $x_1 + x_2 = 7$ với số nghiệm là
$$\binom{7+2-1}{2-1} = \binom{8}{1} = 8.$$
Khi đó số bộ số tự nhiên thỏa mãn là $66 - 8 = 58$.

Ví dụ 6 (Đề thi thử Sở Phú Thọ 2025). Có bao nhiêu số tự nhiên có 4 chữ số mà tổng tất cả các chữ số của số đó bằng 7?

LỜI GIẢI

Đây là một bài toán mới đây đã xuất hiện trong đề thi của sở Phú Thọ, nhìn chung ý tưởng khá là dễ. Trước tiên ta giả sử rằng số thỏa mãn có dạng

$$\overline{abcd}.$$

Khi đó theo giả thiết ta sẽ có $a+b+c+d=7$, ở đây $a \geqslant 1$ và $b,c,d \geqslant 0$. Chú ý rằng bài toán gốc của chúng ta xét có điều kiện các biến đều lớn hơn hoặc bằng 1, như vậy để đưa về bài toán Euler thì ta cần áp dụng thủ thuật giống như ví dụ 2 ở phần trước. Ta có

$$\underbrace{a}_{\geqslant 1}+\underbrace{(b+1)}_{\geqslant 1}+\underbrace{(c+1)}_{\geqslant 1}+\underbrace{(d+1)}_{\geqslant 1}=10.$$

Tới đây thì quá đơn giải rồi, số bộ số thỏa mãn sẽ là $\dbinom{10-1}{4-1}=84$.

Ví dụ 7 (Chọn đội tuyển lớp 11 Bình Dương 2020–2021).
Có 5 con xúc xắc được đánh 5 số thứ tự $1,2,3,4,5$. Gieo đồng thời cả 5 xúc xắc đó. Tính xác suất để tổng của 5 số trên mặt xuất hiện của 5 xúc xắc bằng 14.

LỜI GIẢI

Gọi con số xuất hiện trên con xúc sắc thứ i $(1 \leqslant i \leqslant 5)$ là x_i $(1 \leqslant x_i \leqslant 6)$. Khi này ta cần tìm số nghiệm nguyên dương của phương trình

$$x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=14, 1 \leqslant x_i \leqslant 6.$$

Ở đây chú ý rằng không thể có 2 giá trị x_j và x_k nào cùng lớn hơn hoặc bằng 7 cả nên để đếm số nghiệm của bài toán ta sẽ thực hiện theo 2 bước sau

Bước 1. Đếm số bộ nghiệm nguyên dương của phương trình $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=14$;

Bước 2. Trừ đi các trường hợp mà có một giá trị x_k nào đó lớn hơn hoặc bằng 7.

Đầu tiên, theo bài toán chia kẹo Euler thì số nghiệm nguyên dương của phương trình

$$x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=14$$

là $\dbinom{13}{4}$. Tiếp theo ta đếm các trường hợp mà có một giá trị x_k nào đó lớn hơn hoặc bằng 7. Giả sử

$$x_1 \geqslant 7,$$

khi đó ta đổi biến $y_1=x_1-6 \geqslant 1$, phương trình trở thành

$$y_1+x_2+x_3+x_4+x_5=9,$$

theo bài toán chia kẹo số nghiệm nguyên dương của phương trình này là

$$\binom{8-1}{5-1}=\binom{7}{4}.$$

Vì các trường hợp gieo xúc xắc là độc lập nhau hay nên số nghiệm của trường hợp này sẽ là

$$5\times\binom{7}{4}.$$

Như vậy nếu ta gọi A là biến cố để tổng 5 số bằng 14 thì
$$n(A) = \binom{13}{4} - 5 \times \binom{7}{4} = 540.$$
Cuối cùng ta có $n(\Omega) = 6^5 = 7776$ nên xác suất cần tính
$$\mathscr{P}(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{540}{7776} = \frac{5}{72}.$$

Bài tập tương tự 2 (Đề chọn học sinh giỏi Tuyên Quang 2021). Nhân dịp khai giảng năm học mới, thầy giáo chủ nhiệm dự định tặng 20 quyển vở cho 6 bạn học sinh là Việt, Nam, Quyết, Tâm, Chiến, Thắng. Hỏi thầy giáo có bao nhiêu cách tặng hết 20 quyển vở cho 6 bạn học sinh trên sao cho mỗi bạn đều nhận được ít nhất 1 quyển vở và không nhiều hơn 9 quyển vở (hai cách tặng là khác nhau khi và chỉ khi có ít nhất một em học sinh nhận được số vở khác nhau trong 2 lần tặng).

Ví dụ 8. Có bao nhiêu bộ số nguyên dương $(a; b; c)$ thỏa mãn $a < b < c$ và $a + b + c = 222$?

LỜI GIẢI

Trước tiên ta thấy chưa quan tâm vội tới điều kiện $a < b < c$, khi đó số bộ số thỏa mãn điều kiện là
$$\binom{222-1}{3-1} = \binom{221}{2} = 24310.$$
Tới đây ta sẽ sử dụng phần bù cho bài toán này, xét các trường hợp sau.

1. Nếu $a = b = c = \frac{222}{3}$ thì ở đây có 1 bộ số duy nhất.
2. Nếu $a = b \neq c$ thì $2a + c = 222$, từ đây suy ra c chẵn, hay
$$c \in \{2; 4, 6; \ldots; 220\} \backslash \left\{\frac{222}{3}\right\}.$$
Trường hợp này có tất cả $110 - 1 = 109$ bộ số thỏa mãn. Tương tự như vậy với các trường hợp $a = c \neq b$ và $b = c \neq a$, tổng hợp 3 trường hợp này ta sẽ có tất cả
$$3 \times 109,$$
bộ số thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Do đó số cách chọn các bộ số a, b, c phân biệt thỏa mãn sẽ là $24310 - (3 \times 109 + 1) = 23982$, tuy nhiên nếu ta chỉ xét $a < b < c$ thì cần chia cho số lần lặp của a, b, c, tức là số bộ số thỏa mãn yêu cầu bài toán sẽ là $\frac{23982}{3!} = 3997$ bộ.

Bài tập tương tự 3. Có bao nhiêu cách chọn ra bộ 3 số tự nhiên (a, b, c) phân biệt có tổng bằng 91?

Ví dụ 9. Gọi S là tập tất cả các số tự nhiên có 3 chữ số được lập từ tập $X = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. Rút ngẫu nhiên một một số thuộc tập S. Tính xác suất để rút được số mà trong đó chữ số đứng sau luôn lớn hơn hoặc bằng chữ số đứng trước.

LỜI GIẢI

Trước tiên ta tính được không gian mẫu là $|\Omega| = 7 \cdot 8 \cdot 8 = 448$. Xét một số $\overline{abc}$ thỏa mãn đề bài thì
$$1 \leqslant a \leqslant b \leqslant c \leqslant 7.$$
Để xử lý điều kiện này ta sẽ có một phép đổi biến như sau. Đặt $x = a-1; y = b-a; z = c-b; t = 7-c$ ta có $x, y, z, t \geqslant 0, x, y, z, t \in \mathbb{Z}$ và
$$x + y + z + t = 6. \tag{*}$$
Vậy số nghiệm nguyên không âm của phương trình (*) chính là số các số $\overline{abc}$ thỏa mãn đề bài. Theo bài toán chia kẹo Euler thì số bộ số thỏa mãn là
$$\binom{6+4-1}{4-1} = \binom{9}{3} = 84.$$
Do đó có 84 số thỏa mãn biến cố xảy ra, vậy xác suất cần tính là $P = \dfrac{84}{448} = \dfrac{3}{16}$.

Bài tập tương tự 4. Có bao nhiêu cách chọn ra số tự nhiên có 3 chữ số $\overline{abc}$ thỏa mãn điều kiện $a \leqslant b \leqslant c$.

Ví dụ 10 (Đề chọn đội tuyển HSG Hà Nội 2020 – 2021).
Tìm số bộ nguyên dương $(a_1, a_2, \cdots, a_{15})$ thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau

1. $1 \leqslant a_1 < a_2 < \cdots < a_{15} \leqslant 2020$;
2. $a_i \equiv i^2 \pmod 5, \forall i = 1, 2, \ldots, 15$.

LỜI GIẢI

Ta có phép đặt như sau
$$\begin{aligned} a_1 &= 5k_1 - 4 \\ a_2 - a_1 &= 5k_2 - 2 \\ a_3 - a_2 &= 5k_3 \\ a_4 - a_3 &= 5k_4 - 3 \\ a_5 - a_4 &= 5k_5 - 1 \\ a_6 - a_5 &= 5k_6 - 4 \\ &\ldots \\ a_{15} - a_{14} &= 5k_{15} - 1 \\ 2020 - a_{15} &= 5k_{16} - 5, \end{aligned}$$
ở đây k_i là các số nguyên dương. Cộng vế theo vế ta được
$$2020 = 5(k_1 + k_2 + \cdots + k_{16}) - 35 \Rightarrow k_1 + k_2 + \cdots + k_{16} = 411.$$
Như vậy tới đây, theo kết quả của bài toán chia kẹo Euler thì phương trình trên có
$$\binom{410}{15}$$
bộ nghiệm nguyên dương. Đây cũng chính là kết quả của bài toán.

Ví dụ 11. Một tập hợp $S \neq \varnothing$ chứa hữu hạn các số nguyên dương được gọi là *tập anh em* nếu S là tập hợp gồm 2 số nguyên dương liên tiếp, hoặc tồn tại các tập hợp $S_1, S_2, \ldots, S_k$ sao cho

$$S = S_1 \cup S_2 \cup \cdots \cup S_k, S_i \cap S_j = \varnothing, \forall 1 \leqslant i < j \leqslant k$$

và mỗi tập hợp $S_i (i = 1, 2, \ldots, k)$ đều là tập hợp gồm 2 số nguyên dương liên tiếp. Hỏi có bao nhiêu *tập anh em* là tập hợp con gồm 4 phần tử của tập hợp $\{1; 2; \ldots; 2024\}$?

LỜI GIẢI

Một tập thỏa mãn yêu cầu bài toán có dạng $A = \{a; b; c; d\}$. Giả sử

$$1 \leqslant a < b < c < d \leqslant 2024.$$

Theo giả thiết ta có

$$\begin{cases} b = a + 1 \\ c = b + 1 \\ d = c + 1. \end{cases}$$

Tới đây ta sẽ thực hiện phép đổi biến như sau

$$(a - 1, b - a, c - b, d - c, 2024 - d) \to (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5).$$

Như vậy ta được $x_1 + x_2 + \cdots + x_5 = 2023$, hay

$$x_1 + x_3 + x_5 = 2021.$$

Đặt $x_6 = x_3 - 1 = 1$, phương trình trên trở thành

$$x_1 + x_5 + x_6 = 2020.$$

Theo bài toán kéo Euler thì bài trên có $\dbinom{2022}{2}$ nghiệm, đây cũng chính là kết quả của bài toán.

Ví dụ 12. Có bao nhiêu bộ số tự nhiên x_i thỏa mãn

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \leqslant 44.$$

LỜI GIẢI

Từ giả thiết ta thấy rằng sẽ tồn tại một số tự nhiên k nào đó để

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + k = 44,$$

rõ ràng số nghiệm của phương trình này bằng với số nghiệm của phương trình ban đầu. Do đó, số nghiệm cần tìm là $\dbinom{44 + 6 - 1}{6 - 1} = \dbinom{49}{5}$.

Chú ý. Như vậy một cách tổng quát ta sẽ thu được 2 kết quả sau

1. Bất phương trình $\sum\limits_{i=1}^{k} x_i < n \, (n \geqslant k + 1)$ có $\dbinom{n-1}{k}$ nghiệm nguyên dương;
2. Bất phương trình $\sum\limits_{i=1}^{k} x_i \leqslant n \, (n \geqslant k)$ có $\dbinom{n}{k}$ nghiệm nguyên dương.

Mở rộng bài toán này, ta có ví dụ sau.

Ví dụ 13 (Đề chọn HSG thành phố Hà Nội 2023–2024).
Xét tập hợp S gồm tất cả các bộ số $(x, y; z)$ với $x, y, z \leqslant 30$ là các số nguyên dương.

a) Hỏi có bao nhiêu bộ số $(x, y; z)$ thuộc tập hợp S thỏa mãn $x + y + z = 5$?

b) Lấy ngẫu nhiên một bộ số $(a; b; c)$ từ tập hợp S. Tính xác suất để lấy được bộ số thỏa mãn
$$a + b + c < 30.$$

LỜI GIẢI

a) Ta có $5 = 1 + 2 + 2 = 1 + 1 + 3$. Do vai trò x, y, z như nhau nên mỗi bộ $(x; y; z)$ tương ứng như vậy sẽ có 3 hoán vị lặp (trừ khi $x = y = z$ thì chỉ có 1). Do đó có 6 bộ $(x; y; z)$ thỏa mãn
$$x + y + z = 6.$$

b) Không gian mẫu có số phần tử là $30^3 = 27000$. Do $a + b + c < 30$ nên tồn tại $d \in \mathbb{Z}^+$ sao cho
$$a + b + c + d = 30.$$
Suy ra số bộ $(a; b; c)$ thỏa mãn đề bài là $\binom{29}{3} = 3654$, suy ra xác suất cần tìm bằng $\dfrac{3654}{27000}$.

Bài tập tương tự 5 (Đề chọn đội tuyển HSG An Giang 2023).
Tính theo n số các điểm trên mặt phẳng tọa độ Oxy có tọa độ $(x; y)$ với $x; y$ đều là số nguyên thỏa mãn $|x| + |y| \leqslant n$ với n là số tự nhiên cho trước.

Ví dụ 14. Có bao nhiêu bộ số nguyên dương x_i thỏa mãn
$$100 \leqslant x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 \leqslant 200.$$

LỜI GIẢI

Thật ra bài này chỉ là nguyên lý bù trừ thôi, ta có số nghiệm của bất phương trình
$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 \leqslant 200$$
là $\binom{206}{6}$. Ngoài ra, số nghiệm của bất phương trình
$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 \leqslant 99$$
là $\binom{105}{6}$. Vậy số nghiệm của bất phương trình đã cho là $\binom{206}{6} - \binom{105}{6}$.

Bài tập tương tự 6. Tìm số nghiệm của phương trình
$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 14$$
và $|x_i| \leqslant 5, i = \overline{1, 4}$.

Ví dụ 15. Rút gọn tổng sau
$$A = \binom{9}{9} + \binom{10}{9} + \binom{11}{9} + \cdots + \binom{99}{9}.$$

LỜI GIẢI

Chú ý rằng $\binom{k}{9}$ có thể viết thành $\binom{k+1-1}{10-1}$, đây chính là số nghiệm của phương trình

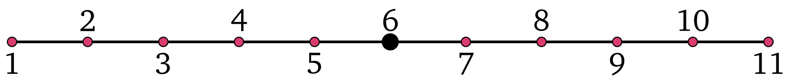
$$x_1 + x_2 + \cdots + x_{10} = k+1.$$

Do đó, A chính là số nghiệm nguyên dương của bất phương trình $10 \leqslant x_1 + x_2 + \cdots + x_{10} \leqslant 100$. Bài toán này giống bài toán trên.

Ví dụ 16. Trên một đoạn đường, có 11 địa điểm bao gồm một trung tâm ở chính giữa và 10 nơi để tham quan, mua sắm; hai địa điểm cạnh nhau thì cách nhau 100 mét. Những người khách xuất phát từ trung tâm và muốn đi tham quan tổng cộng 3 lượt, mỗi đi một nơi khác nhau (họ đến địa điểm đó tham quan sau đó quay về trung tâm và chuẩn bị cho lần đi tiếp theo). Hỏi có bao nhiêu cách chọn ra ba địa điểm, có thứ tự và không nhất thiết phân biệt, sao cho tổng quãng đường cả đi lẫn về không vượt quá 1 km?

LỜI GIẢI

Ta có sơ đồ sau



Giả sử tọa độ của trung tâm là 0 thì tọa độ các điểm tham quan là -5, -4, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 4, 5. Gọi x, y, z là tọa độ của các nơi họ đến thì theo đề bài, ta có

$$2(|x|+|y|+|z|) \leqslant 10 \Leftrightarrow |x|+|y|+|z| \leqslant 5$$

Theo bài toán trên thì bất phương trình này có $\binom{5}{3}$ nghiệm nguyên dương. Tuy nhiên, với mỗi giá trị $|x|$, $|y|$, $|z|$ ta đều có hai cách chọn là $-x$ hay x. Vì thế tổng số cách chọn là $2^3 \cdot 10 = 80$ cách.

Ví dụ 17. Trong mặt phẳng (Oxy) cho hình chữ nhật $OMNP$ với $M(0;10)$; $N(100;10)$ và $P(100;0)$. Gọi S là tập hợp tất cả các điểm $A(x,y), x, y \in \mathbb{N}$ nằm bên trong (kể cả trên cạnh) của $OMNP$. Lấy ngẫu nhiên 1 điểm $A(x,y) \in S$. Tính xác suất để $x+y \leqslant 90$.

LỜI GIẢI

Đầu tiên ta tính không gian mẫu, ta được $n(\Omega) = 101 \times 11 = 1111$. Khi đó ta cần đếm bộ các nghiệm không âm của

$$x + y \leqslant 90 \qquad (*)$$

với $0 \leqslant x \leqslant 100$ và $0 \leqslant y \leqslant 10$. Ở đây điều kiện của x thì không phải vấn đề, tuy nhiên với điều kiện của y ta cần sử dụng phần bù để đếm.

1. Tính số nghiệm nguyên không âm của (*). Đổi biến $x' = x+1 \geqslant 1; y' = y+1 \geqslant 1$ ta được

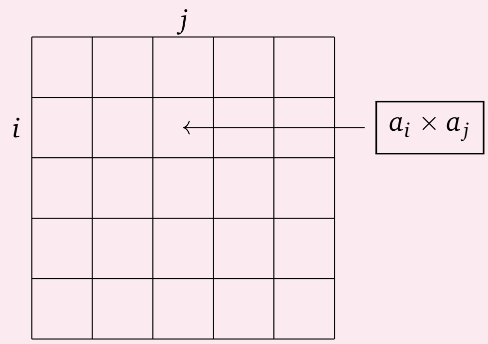
$$x' + y' \leqslant 92.$$

Khi đó theo kết quả của bài toán chia kẹo ta có số nghiệm là $\binom{92}{2}$.

2 Tính số nghiệm nguyên không âm của (*) với $y \geqslant 11$. Đổi biến $x' = x + 1; y' = y - 10$ ta được
$$(x+1) + (y-10) \leqslant 81 \Leftrightarrow x' + y' \leqslant 81.$$
Khi đó theo kết quả của bài toán chia kẹo ta có số nghiệm là $\binom{81}{2}$.

Vậy số nghiệm của (*) thỏa mãn yêu cầu bài toán là
$$\binom{92}{2} - \binom{81}{2} = 946.$$
Vậy xác suất cần tính của bài toán là $P = \dfrac{946}{1111} = \dfrac{86}{101}$.

Ví dụ 18. Xét các số tự nhiên a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 và một bảng ô vuông có kích thước 5×5.



Người ta điền vào ô ở hàng i cột j của bảng này số $a_i \times a_j$ với mọi $1 \leqslant i, j \leqslant 5$. Gọi m là tổng các số điền trên bảng. Hỏi có bao nhiêu dãy các số như trên sao cho $0 \leqslant m \leqslant 2017$?

LỜI GIẢI

Trước tiên ta thấy rằng tổng các số trên bảng là
$$m = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant 5, i=j} a_i a_j + \sum_{1\leqslant i,j\leqslant 5, i\neq j} a_i a_j = \sum_{1\leqslant i\leqslant 5} a_i^2 + 2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 5} a_i a_j = (a_1+a_2+a_3+a_4+a_5)^2.$$
Như vậy m là số chính phương không vượt quá 2017. Ta có $44^2 < 2017 < 45^2$ nên $m \leqslant 44^2$, suy ra
$$0 \leqslant a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 \leqslant 44.$$
Tới đây áp dụng kết quả bài toán ở trên ta có ngay số bộ nghiệm của bất phương trình trên cũng chính là số dãy số thỏa mãn yêu cầu bài toán là
$$\binom{44+6-1}{6-1} = \binom{49}{5}.$$

Ví dụ 19. Cho dãy số tự nhiên (a_n) được xác định bởi $\begin{cases} a_n = a_{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor} + a_{\lceil \frac{n}{2} \rceil}, n > 3 \\ a_n \in \mathbb{N} \end{cases}$. Hỏi có bao nhiêu dãy số như trên thỏa mãn điều kiện $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 = 15$.[a].

[a] $\lfloor x \rfloor$ là số nguyên lớn nhất lớn nhất không vượt quá x, còn $\lceil x \rceil$ là số nguyên nhỏ nhất không nhỏ hơn x

LỜI GIẢI

Thay lần lượt $n = 4, 5, 6$ vào giả thiết ta được
$$a_4 = a_1 + a_2, a_5 = a_1 + a_3, a_6 = a_2 + a_3.$$
Khi đó giả thiết trở thành
$$3(a_1 + a_2 + a_3) = 15 \Leftrightarrow a_1 + a_2 + a_3 = 5.$$
Theo bài toán chia kẹo Euler thì phương trình này có
$$\binom{5+3-1}{3-1} = 21$$
nghiệm nguyên không âm, tức là có 21 dãy số thỏa mãn.

Ví dụ 20. Có bao nhiêu bộ số tự nhiên x_i và y_i thỏa mãn
$$(x_1 + x_2 + x_3)(y_1 + y_2 + y_3 + y_4) = 2017.$$

</> LỜI GIẢI

Do 2017 là số nguyên tố nên ta chỉ có 2 trường hợp

- Nếu $x_1 + x_2 + x_3 = 1, y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 2017$ có
$$\binom{1+3-1}{3-1}\binom{2017+4-1}{4-1} = \binom{3}{2}\binom{2020}{3}.$$
- Nếu $x_1 + x_2 + x_3 = 2017, y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 1$ có
$$\binom{2017+3-1}{3-1}\binom{1+4-1}{4-1} = \binom{2019}{2}\binom{4}{3}.$$

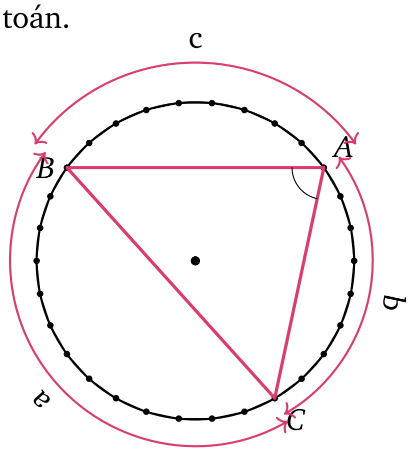
Vậy số nghiệm của phương trình là $\binom{3}{2}\binom{2020}{3} + \binom{2019}{2}\binom{4}{3}$.

Qua các ví dụ vừa rồi phần nào đó ta đã hình dung ra cách để giải quyết một lớp các bài toán đếm nghiệm nguyên dương sử dụng phương pháp chia kẹo Euler, tiếp theo ta sẽ ứng dụng những thứ vừa tìm hiểu để mô hình hóa một số bài toán đếm hình học khác, cùng tìm hiểu ví dụ sau.

Ví dụ 21. Cho một đa giác đều (H) gồm có 30 đỉnh. Hỏi có tất cả bao nhiêu tam giác có 3 đỉnh là các đỉnh của (H) sao cho có một góc lớn hơn 133°?

</> LỜI GIẢI

Đầu tiên ta quan sát hình vẽ mô tả đa giác đều như sau, ở đây ta coi góc BAC là góc tù lớn hơn 133° của tam giác thỏa mãn yêu cầu bài toán.



Ý tưởng câu này ta sẽ xử lý như sau, ta đặt số lượng các cạnh nằm trên các cung là a, b, c như hình vẽ trên, như vậy ta có ngay

$$a + b + c = 30.$$

Tới đây ta sẽ đi tìm xem rằng với một cung tròn cần chứa ít nhất bao nhiêu cạnh để số đo góc cung này lớn hơn $133 \times 2 = 266^\circ$, đây là điều kiện của a. Ta có sơ đồ sau.

$$\begin{aligned} 30 \text{ cạnh } &\rightarrow 360^\circ \\ \frac{30 \times 266}{360} \approx 22,1 \text{ cạnh } &\rightarrow 133^\circ \end{aligned}$$

Như vậy ta có được điều kiện $a \geqslant 23$ và $b, c \geqslant 1$. Lúc này áp dụng kết quả của bài toán chia kẹo Euler là bài toán đã được giải quyết trọn vẹn.

Bài tập tương tự 7. Cho một đa giác đều (H) có 48 đỉnh. Hỏi có tất cả bao nhiêu tam giác có 3 đỉnh là các đỉnh của đa giác (H) và là tam giác tù?

Lưu ý. *Bài này giống bài trên.*

Bài tập tương tự 8. Cho một đa giác đều (H) có 48 đỉnh. Hỏi có tất cả bao nhiêu tam giác có 3 đỉnh là đỉnh của đa giác (H) và là tam giác nhọn?

Lưu ý. *Ta cần lấy số các tam giác tạo thành từ 48 đỉnh, trừ số tam giác vuông và tam giác tù.*

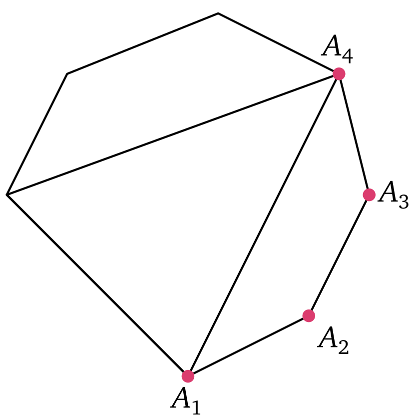
Bài tập tương tự 9. Cho một đa giác đều (H) có 48 đỉnh. Hỏi có tất cả bao nhiêu tam giác có 3 đỉnh là các đỉnh của đa giác (H) và không có góc nào nhỏ hơn 45°?

Lưu ý. *Vì các tam giác có số đo các góc không nhỏ hơn 45° sẽ bao gồm cả các tam giác đều, mà các tam giác đều bị lặp lại 3 lần do vị trí của 3 đỉnh là như như. Khi đó ta cần lấy kết quả trừ đi $2 \times \frac{48}{3}$ số tam giác bị lặp thì kết quả bài toán sẽ đúng.*

Bài tập tương tự 10. Cho một đa giác đều (H) có 48 đỉnh. Hỏi có tất cả bao nhiêu tam giác có 3 đỉnh là các đỉnh của đa giác (H) đồng thời có một góc lớn hơn 45° và một góc nhỏ hơn 110°?

Ví dụ 22. Cho đa giác lồi $A_1A_2\ldots A_n$ có n đỉnh với $n > 5$. Từ các đỉnh của đa giác trên ta có thể tạo ra được bao nhiêu tam giác mà cạnh của tam giác không là cạnh của đa giác?

LỜI GIẢI



Xét tam giác $A_1A_iA_j$ theo một chiều quay đồng hồ là một tam giác thỏa yêu cầu bài. Gọi x_1 là số đỉnh của đa giác nằm giữa hai đỉnh A_1 và A_i (không trùng với hai đỉnh đó), x_2 là số đỉnh của đa giác nằm giữa hai đỉnh A_i và A_j (không trùng với hai đỉnh đó), x_3 là số đỉnh của đa giác nằm giữa hai đỉnh A_j và A_i (không trùng với hai đỉnh đó). Khi đó ta có phương trình

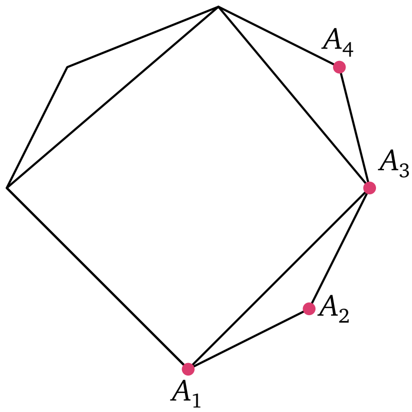
$$x_1 + x_2 + x_3 = n - 3,$$

với x_i là các số nguyên dương. Ta thấy ngay, mỗi bộ nghiệm của phương trình tương ứng với một tam giác như thế thỏa yêu cầu đề. Nên số tam giác như thế là $\binom{n-4}{2}$. Bây giờ ta thay đỉnh A_1 bởi lần lượt $n-1$ đỉnh khác của đa giác, ta sẽ có đáp án tương tự. Tuy nhiên, với cách làm này ta thấy một tam giác bị đếm lặp 3 lần. Vậy số tam giác thỏa yêu cầu bài là

$$\frac{n}{3} \cdot \binom{n-4}{2}.$$

Ví dụ 23. Cho đa giác lồi $A_1A_2\ldots A_n$ có n đỉnh với $n > 10$. Từ các đỉnh của đa giác trên ta có thể tạo ra được bao nhiêu tứ giác mà cạnh của tứ giác không là cạnh của đa giác?

LỜI GIẢI



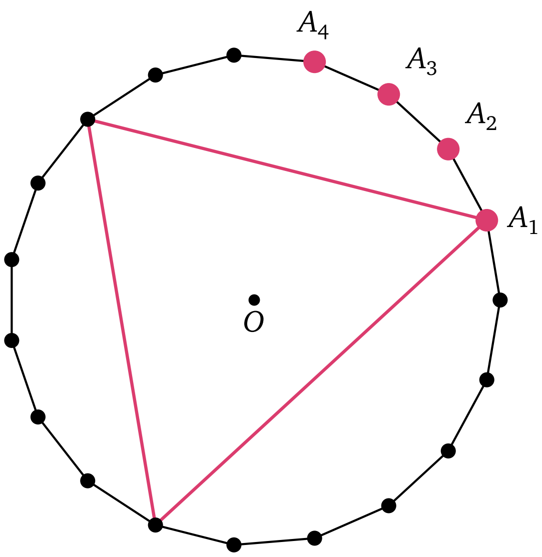
Xét tứ giác $A_1A_iA_jA_k$ theo chiều quay kim đồng hồ, ta gọi x_1 là số đỉnh nằm giữa hai đỉnh A_1 và A_i (không trùng với hai đỉnh đó); x_2 là số đỉnh nằm giữa hai đỉnh A_i và A_j (không trùng với hai đỉnh đó); x_3 là số đỉnh nằm giữa hai đỉnh A_j và A_k (không trùng với hai đỉnh đó); x_4 là số đỉnh nằm giữa hai đỉnh A_k và A_1 (không trùng với hai đỉnh đó). Khi đó ta có phương trình

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = n - 4$$

với x_i là các số nguyên dương. Ta thấy ngay, mỗi bộ nghiệm của phương trình là một tứ giác thỏa yêu cầu đề. Ta tiếp tục thay thứ tự điểm A_1 bởi các điểm tương ứng khác và mỗi tứ giác bị đếm lặp 4 lần, nên ta có số tứ giác cần tìm là $\frac{n}{4} \cdot \binom{n-5}{3}$.

Ví dụ 24. Cho đa giác đều $A_1A_2\ldots A_{19}$ có 19 đỉnh. Từ các đỉnh của đa giác trên ta có thể tạo ra được bao nhiêu tam giác nhọn mà cạnh của tam giác không trùng với cạnh đa giác?

LỜI GIẢI



Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp đa giác. Khi đó $\angle A_iOA_{i+1} = \frac{360^\circ}{19}$. Xét tam giác $A_1A_iA_j$ theo một chiều quay đồng hồ là một tam giác thỏa yêu cầu bài. Gọi x_1 là số đỉnh của đa giác nằm giữa hai đỉnh A_1 và A_i (không trùng với hai đỉnh đó), x_2 là số đỉnh của đa giác nằm giữa hai đỉnh A_i và A_j (không trùng với hai đỉnh đó), x_3 là số đỉnh của đa giác nằm giữa hai đỉnh A_j và A_i (không trùng với hai đỉnh đó). Để góc $\angle A_iA_1A_j < 90^\circ$ thì $1 \leqslant x_2 \leqslant 9$, tương tự cho các số khác. Khi đó ta có phương trình

$$x_1 + x_2 + x_3 = 16$$

với x_i là các số nguyên dương thỏa $1 \leqslant x_i \leqslant 9$. Ta thấy ngay, mỗi bộ nghiệm của phương trình tương ứng với một tam giác như thế thỏa yêu cầu đề. Bây giờ, ta đi tìm số bộ nghiệm của phương trình trên theo cách loại trừ. Số bộ nghiệm nguyên dương của phương trình là

$$\binom{15}{2}.$$

Ta đếm số bộ nghiệm mà tồn tại $x_i > 9$. Ta có

$$x_1 + x_2 + x_3 = 16 \Leftrightarrow (x_1 - 9) + x_2 + x_3 = 16 - 9$$
$$\Leftrightarrow y_1 + x_2 + x_3 = 5$$

Số bộ nghiệm nguyên dương của phương trình này là $\binom{4}{2}$. Vậy số bộ nghiệm mà tồn tại $x_i > 9$ là

$$3\binom{4}{2}.$$

Vậy số bộ nghiệm thỏa điều kiện ban đầu là $\binom{15}{2} - 3\binom{4}{2}$. Hay số tam giác thỏa yêu cầu đề là

$$\frac{16}{3}\left(\binom{15}{2} - 3\binom{4}{2}\right).$$

Ví dụ 25. Robinson Crusoe lạc trên đảo hoang hơn 28 năm. Trong chừng ấy quãng thời gian, mỗi năm, ông ta tìm một cái cây nào đó rồi khắc lên thân nó một hình đa giác lồi thật lớn để kỷ niệm. Biết rằng tổng tất cả các góc của các đa giác lồi ấy vừa đúng 1687π, năm mà ông ấy được cứu thoát, đưa trở về thế giới loài người. Bạn hãy cho biết có bao nhiêu cách ông khắc các đa giác lên cây thỏa mãn yêu cầu trên, biết rằng trong 10 năm đầu tiên, mỗi năm, ông ấy khắc lên cây một đa giác có ít nhất 100 cạnh.

LỜI GIẢI

Đa giác có n cạnh thì có tổng các góc trong là $(n-2)\pi$. Do đó, ta cần đếm số nghiệm của

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{28}(x_i-2)\pi = 1687\pi, x_i \in \mathbb{N} \\ x_i \geqslant 100, i=\overline{1,10}, x_i \geqslant 3, i=\overline{11,28}. \end{cases}$$

Biến đổi phương trình trên để đưa về dạng chuẩn ta được

$$\sum_{i=1}^{28}(x_i-2)\pi = 1687\pi \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{28} x_i = 1743.$$

Đặt $x_i = y_i + 100, i=\overline{1,10}$ và $x_i = y_i + 3, i=\overline{11,28}$, ta có phương trình

$$\sum_{i=1}^{10} y_i + 10\cdot 100 + \sum_{i=11}^{28} +18\cdot 3 = 1743 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{28} y_1 = 689.$$

Vậy số nghiệm nguyên không âm của phương trình là $\dbinom{689+28-1}{28-1} = \dbinom{716}{27}$.

Ví dụ 26. Cho đa giác đều 20 đỉnh. Lấy ngẫu nhiên 3 đỉnh. Tính xác suất để 3 đỉnh đó tạo thành một tam giác vuông không cân.

LỜI GIẢI

Gọi (O) là đường tròn ngoại tiếp đa giác đều 20 đỉnh và gọi số đo mỗi cung chắn bởi 1 cạnh của đa giác là 1 đơn vị, ta có 20 cung như vậy. Xét 1 tam giác vuông tại một đỉnh của đa giác, gọi m,n là số đo hai cung căng bởi hai cạnh bên của tam giác, ta có

$$m+n=10, n,m \geqslant 1; m,n \in \mathbb{Z}.$$

Do đó số tam giác vuông tạo thành từ 1 đỉnh là

$$\binom{9}{1} = 9$$

trong đó có 1 tam giác vuông cân khi $m=n=5$ nên có 8 tam giác vuông không cân từ 1 đỉnh. Vậy có tất cả $20\times 8 = 160$ tam giác vuông không cân thỏa mãn.

Vậy xác suất cần tính là $P = \dfrac{160}{\binom{20}{3}} = \dfrac{8}{57}$.

Ví dụ 27. Cho $n \geqslant 4$ giác đều nội tiếp đường tròn (O). Có bao nhiêu hình thang (không là hình chữ nhật) mà 4 đỉnh là các đỉnh của đa giác đều đã cho?

LỜI GIẢI

Gọi mỗi cung chứa một cạnh của đa giác đều trên đường tròn là 1 đơn vị (có n cung như vậy). Xét một hình thang thỏa mãn mà đỉnh đầu tiên chứa đáy nhỏ là A_i, các đỉnh tiếp theo theo thứ tự thuận chiều kim đồng hồ. Gọi x, y, z lần lượt là số đo các cung chứa đáy nhỏ, hai cạnh bên và đáy lớn của hình thang, ta có

$$x + 2y + z = n, 1 \leqslant x, y, z \in \mathbb{Z}, x < z.$$

Ta có phương trình (*) tương đương với

$$x + z = n - 2y \tag{**}$$

với mỗi y thỏa mãn $1 \leqslant y < \frac{n-2}{2}$. Theo bài toán chia kẹo Euler, phương trình (**) có $n - 2y - 1$ nghiệm nguyên dương. Bây giờ ta đếm các nghiệm nguyên dương của (**) mà $x < z$.

1. Nếu n lẻ thì (**) không có nghiệm $x = z$ nên số nghiệm thỏa mãn $x < z$ là $\frac{n-2y-1}{2}$.

2. Nếu n chẵn thì (**) có đúng 1 nghiệm $x = z$ nên số nghiệm thỏa mãn $x < z$ là $\frac{n-2y-2}{2}$.

Vậy số nghiệm của (*) thỏa mãn các ràng buộc đã cho là

$$\sum_{y=1}^{\frac{n-3}{2}} \frac{n-2y-1}{2} = \frac{1}{8}(n-1)(n-3) \text{ với } n \text{ lẻ ;}$$
$$\sum_{y=1}^{\frac{n-4}{2}} \frac{n-2y-2}{2} = \frac{1}{8}(n-2)(n-4) \text{ với } n \text{ chẵn .}$$

Với mỗi bộ số x, y, z thỏa mãn (*) xuất phát từ 1 đỉnh đa giác là đỉnh đầu tiên của đáy nhỏ hình thang (ứng với cạnh x) theo chiều thuận kim đồng hồ ta có 1 hình thang thỏa mãn. Vậy tổng số hình thang thỏa mãn là

$$\begin{cases} \dfrac{1}{8}n(n-1)(n-3) \text{ với } n \text{ lẻ ;} \\ \dfrac{1}{8}n(n-2)(n-4) \text{ với } n \text{ chẵn .} \end{cases}$$

Ví dụ 28 (Saudi Arabian Mathematical Competitions 2017).
Có bao nhiêu cách điền một hoặc nhiều dấu $+$ vào giữa 30 số 1 trong dãy bên dưới

$$111111111111111111111111111111$$

sao cho tổng thu được chia hết cho 30?

LỜI GIẢI

Trước tiên ta chú ý rằng số ban đầu là một số chia hết cho 3 (vì có 30 chữ số 1), mặt khác ta lại có nhận xét rằng

$$S(x) \equiv x \pmod 3,$$

trong đó $S(x)$ là tổng các chữ số của x thì. Do đó, tổng sau quá trình ta điền dấu $+$ luôn chia hết cho 3. Giả sử ta điền k dấu $+$ thì sẽ chia các số 1 thành $k+1$ phần. Mỗi phần có tận cùng là 1 nên tổng của chúng có tận cùng là $k+1 \pmod{10}$. Suy ra để tổng thu được chia hết cho 30 thì ta phải có $k+1 \equiv 0 \pmod{10}$ hay $k \in \{9, 19, 29\}$. Gọi $a_1, a_2, \ldots, a_{k+1}$ là số chữ số của mỗi phần được chia từ k dấu cộng, khi đó

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{k+1} = 30$$

Phương trình này có $\binom{29}{k}$ nghiệm. Do đó, số cách chèn các dấu cộng là

$$\binom{29}{9}+\binom{29}{19}+\binom{29}{29}.$$

Ví dụ 29 (AIME, 2011). Một học sinh có 5 quả cầu màu xanh giống nhau và một số quả cầu màu đỏ giống nhau. Bạn ấy muốn xếp các quả cầu thành một dãy và nếu đặt a là số quả cầu mà quả bên phải nó cùng màu với nó, b là số quả cầu mà quả cầu bên phải nó khác màu với nó thì $a=b$. Gọi m là số lớn nhất các quả cầu màu đỏ có thể dùng sao cho tồn tại cách xếp $m+5$ quả cầu thành một dãy thỏa mãn điều kiện nêu trên.

1. Xác định m.
2. Ứng với m ở trên, tìm số cách xếp các quả cầu để có $a=b$.

LỜI GIẢI

1. Do có 5 quả cầu màu xanh và mỗi quả sẽ đặt cạnh không quá hai quả cầu đỏ (khác màu với nó) nên số cặp quả cầu khác màu nhau là $b\leqslant 10$. Suy ra $a\leqslant 10$. Kí hiệu quả cầu màu xanh, đỏ lần lượt là X, D thì có thể xây dựng dãy thỏa mãn đề bài từ dãy gốc như sau
$$DXDXDXDXDXD.$$
Sau đó thêm vào không quá 10 quả cầu màu đỏ nữa (vì mỗi quả sẽ làm tăng giá trị a lên 1 đơn vị). Từ đó suy ra $m=10+6=16$.

2. Để đếm số cách xếp thỏa mãn, xét dãy 16 quả cầu đỏ. Ta cần xếp vào đây 5 quả cầu xanh sao không có hai quả nào cạnh nhau. Gọi $x_1,x_2,\ldots,x_6$ là số lượng quả cầu đỏ bị chia ra bởi các quả cầu xanh thì
$$\begin{cases}x_1+x_2+\cdots+x_6=16\\ x_1,x_2,\ldots,x_6\in\mathbb{Z}^+.\end{cases}$$
Khi đó, số cách xếp cần tìm là $\binom{16-1}{6-1}=\binom{15}{5}$.

Ví dụ 30. Có bao nhiêu bộ số nguyên dương x_i thỏa mãn
$$x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=2016$$
với x_i không chia hết cho $3, i=\overline{1,5}$.

LỜI GIẢI

Đây là một bài toán có chút yêu tố số học, theo giả thiết thì ta sẽ đặt
$$x_i=3y_i+r_i$$
với $i=\overline{1,5}$ và $1\leqslant r_i\leqslant 2, i=\overline{1,5}$. Ta có
$$2016=x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=3(y_1+y_2+y_3+y_4+y_5)+r_1+r_2+r_3+r_4+r_5.$$
Chú ý rằng 2016 là số chia hết cho 3 nên tổng $r_1+r_2+r_3+r_4+r_5$ cũng chia hết cho 3, tuy nhiên chú ý tới điều kiện của r_i thì ta sẽ có
$$5\leqslant r_1+r_2+r_3+r_4+r_5\leqslant 10.$$

Như vậy $r_1 + r_2 + r_3 + r_4 + r_5$ sẽ nhận 1 trong 2 giá trị là 6 hoặc 9. Đến đây quá đơn giản, ta sẽ xét hai trường hợp

- Nếu $r_1 + r_2 + r_3 + r_4 + r_5 = 6$ thì có 4 số 1 và 1 số 2, chọn 4 số trong 5 số, có $\binom{5}{4}$ cách chọn. Bên cạnh đó ta có
$$3(y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5) = 2010 \Leftrightarrow y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 = 670.$$
Theo bài toán Euler thì số nghiệm của phương trình trên là
$$\binom{670+5-1}{5-1} = \binom{674}{4}.$$
Theo quy tắc nhân thì trường hợp này có $\binom{5}{4}\binom{674}{4}$ nghiệm.

- Nếu $r_1 + r_2 + r_3 + r_4 + r_5 = 9$ thì có 4 số 2 và 1 số 1 nên tương tự, ta cũng có $\binom{5}{4}$ cách chọn. Bên cạnh đó ta có
$$3(y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5) = 2007 \Leftrightarrow y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 = 669.$$
Theo bài toán Euler thì số nghiệm của phương trình trên là
$$\binom{669+5-1}{5-1} = \binom{673}{4}.$$
Theo quy tắc nhân thì trường hợp này có $\binom{5}{4}\binom{673}{4}$ nghiệm.

Vậy số nghiệm của phương trình ban đầu là $\binom{5}{4}\binom{674}{4} + \binom{5}{4}\binom{673}{4}$.

Ví dụ 31. Có 10 cái hộp khác nhau được đánh số từ 1 đến 10 và 10 viên bi giống nhau (mỗi hộp không nhất thiết có bi).

$$\underbrace{\boxed{1}\ \boxed{2}\ \boxed{3}}_{\text{tổng là số chẵn}}\ \boxed{4}\ \boxed{5}\ \boxed{6}\ \boxed{7}\ \underbrace{\boxed{8}\ \boxed{9}\ \boxed{10}}_{\text{tổng là số lẻ}}$$

Hỏi có bao nhiêu cách sắp xếp 10 viên bi vào 10 hộp sao cho tổng số viên bi trong các hộp số 1, 2, 3 là số chẵn, còn tổng các viên bi trong các hộp 8, 9, 10 là số lẻ?

LỜI GIẢI

Lần đầu tiên làm bài này mình đã làm theo cách liệt kê như sau. Trước tiên ta thấy rằng tổng các viên bi ở hộp 1,2,3 và 8,9,10 là số lẻ, mà có tất cả là 10 (số chẵn) viên bi cho nên tổng các viên bi ở hộp 4,5,6,7 phải là một số lẻ. Ta xét 5 trường hợp có thể có cho tổng số bi của 3 hộp $1, 2, 3$.

Trường hợp 1. Tổng số bi của 3 hộp $1, 2, 3$ là 8. Số cách chọn thỏa mãn là
$$A_1 = \binom{3+8-1}{3-1}\binom{3+1-1}{3-1}\binom{4+1-1}{4-1} = 540.$$

Trường hợp 2. Tổng số bi của 3 hộp $1, 2, 3$ là 6. Số cách chọn thỏa mãn là
$$A_2 = \binom{8}{2}\left(\binom{6}{3}\binom{3}{2} + \binom{4}{3}\binom{5}{2}\right) = 2800.$$

Trường hợp 3. Tổng số bi của 3 hộp 1, 2, 3 là 4. Số cách chọn thỏa mãn là
$$A_3 = \binom{6}{2}\left(\binom{8}{3}\binom{3}{2} + \binom{6}{3}\binom{5}{2} + \binom{4}{3}\binom{7}{2}\right) = 6780.$$

Trường hợp 4. Tổng số bi của 3 hộp 1, 2, 3 là 2. Số cách chọn thỏa mãn là
$$A_4 = \binom{4}{2}\left(\binom{10}{3}\binom{3}{2} + \binom{8}{3}\binom{5}{2} + \binom{6}{3}\binom{7}{2} + \binom{4}{3}\binom{9}{2}\right) = 8904.$$

Trường hợp 5. Tổng số bi của 3 hộp 1, 2, 3 là 0. Số cách chọn thỏa mãn là
$$A_5 = \binom{2}{2}\left(\binom{12}{3}\binom{3}{2} + \binom{10}{3}\binom{5}{2} + \binom{8}{3}\binom{7}{2} + \binom{6}{3}\binom{9}{2} + \binom{4}{3}\binom{11}{2}\right) = 3976.$$

Vậy tổng số cách sắp xếp thỏa mãn là $A = \sum_{i=1}^{5} A_i = 23000$.

Ở bài này ta còn có thể giải quyết bằng 1 cách khác như sau. Đặt y là số bi có trong các hộp $1, 2, 3, 8, 9, 10$ thì y phải là số lẻ. Gọi x_1, x_2, x_3, x_4 lần lượt là số bi có trong các hộp $4, 5, 6, 7$ thì ta có
$$y + x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10 \Leftrightarrow x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10 - y.$$
Theo bài toán chia kẹo Euler thì số nghiệm của phương trình trên sẽ là
$$\binom{10 - y + 4 - 1}{4 - 1} = \binom{13 - y}{3}.$$
Tuy nhiên ta cần đếm thêm xem có bao nhiêu cách chọn số bi cho các hộp $1, 2, 3, 8, 9, 10$. Ta gọi $z_i, i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$, lần lượt là số bi được đặt vào các hộp $1, 2, 3, 8, 9, 10$, như vậy
$$z_1 + z_2 + z_3 + z_4 + z_5 + z_6 = y, z_i \geqslant 0.$$
Tới đây theo bài toán chia kẹo Euler thì số bộ số thỏa mãn là
$$\binom{y + 6 - 1}{6 - 1} = \binom{y + 5}{5}.$$
Chú ý rằng cần chia cho số trường hợp lặp ở các bộ $1, 2, 3$ và $8, 9, 10$. Số cách chọn là
$$\frac{1}{2} \times \sum_{i \in \{1,3,5,7,9\}} \binom{13 - y}{3}\binom{y + 5}{5} = 23000.$$

Bài tập tương tự 11. Có 8 viên giống nhau và 12 hộp bi khác nhau. Hỏi có bao nhiêu cách sắp xếp 8 viên bi đó vào các hộp sao cho tổng số bi trong hộp 1,2,3 là chẵn?

Ví dụ 32. Gọi S là tập hợp các số tự nhiên có 7 chữ số mà tổng các chữ số của nó bằng 59. Chọn ngẫu nhiên một số từ tập hợp S. Tính xác suất để số được chọn chia hết cho 11.

LỜI GIẢI

Gọi A là biến cố: Số được chọn có tổng các chữ số bằng 59 và chia hết cho 11.
Số tự nhiên được chọn có dạng $\overline{abcdefg}$, như vậy theo giả thiết ta có ngay
$$a + b + c + d + e + f + g = 59. \tag{1}$$

Do $a, b, c, d, e, g, f \leqslant 9$ đồng thời số này chia hết cho 11 nên tổng đan dấu phải chia hết cho 11, hay

$$|(a+c+e+g)-(b+d+f)| \in \{0; 11; 22\}. \tag{2}$$

Tới đây xét các trường hợp ở trên và ta giải hệ phương trình theo ẩn

$$\begin{cases} u = a+c+e+g \\ v = b+d+f \end{cases}$$

ta tìm được trường hợp duy nhất thỏa mãn là

$$\begin{cases} 35 = a+c+e+g \\ 24 = b+d+f \end{cases},$$

vì $b+d+f \leqslant 27$ nên không thể bằng 35 được. Tới đây chính là bài toán chia kẹo Euler rồi, điều kiện chặn dưới của các biến thì không phải vấn đề, tuy nhiên xử lý chặn trên (nhỏ hơn hoặc bằng 9) thì sao? Ở đây biến a thì không thể bằng 0 được do nếu $a = 0$ thì $c+e+g = 35$, vô lý. Do vậy các biến của ta đều sẽ có điều kiện lớn hơn hoặc bằng 1. Quay lại vấn đề ban đầu, ta sẽ dùng một thủ thuật nhỏ, ta biến đổi như sau

$$\begin{cases} \underbrace{10-a}_{x_1 \geqslant 1} + \underbrace{10-c}_{x_2 \geqslant 1} + \underbrace{10-e}_{x_3 \geqslant 1} + \underbrace{10-g}_{x_4 \geqslant 1} = 5 \\ \underbrace{10-b}_{y_1 \geqslant 1} + \underbrace{10-d}_{y_2 \geqslant 1} + \underbrace{10-f}_{y_3 \geqslant 1} = 6. \end{cases}$$

Như vậy số bộ số thỏa mãn yêu cầu của bài toán là

$$\binom{4}{3} \times \binom{5}{2}.$$

Cuối cùng ta đi tìm không gian mẫu, áp dụng kỹ thuật tương tự như trên, ta có

$$\underbrace{10-a}_{x_1 \geqslant 1} + \underbrace{10-c}_{x_2 \geqslant 1} + \underbrace{10-e}_{x_3 \geqslant 1} + \underbrace{10-g}_{x_4 \geqslant 1} + \underbrace{10-b}_{y_1 \geqslant 1} + \underbrace{10-d}_{y_2 \geqslant 1} + \underbrace{10-f}_{y_3 \geqslant 1} = 11$$

Như vậy $n(\Omega) = \binom{10}{6}$. Suy ra xác suất cần tính là

$$\mathscr{P}(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{4}{21}.$$

Ví dụ 33. Từ các số $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$ lập được bao nhiêu số tự nhiên có 5 chữ số (các chữ số không nhất thiết khác nhau) và chia hết cho 9.

LỜI GIẢI

Giả sử số cần tìm có dạng $\overline{a_1 a_2 \ldots a_5}$, khi đó theo giả thiết ta có

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = \{9; 18; 27\}.$$

Ta xét các trường hợp sau.

Trường hợp 1. Nếu $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 9$ với $1 \leqslant a_1 \leqslant 6; 0 \leqslant a_i \leqslant 6 (i = 2, \ldots, 5)$, khi đó ta đổi biến $x_i = a_i + 1, i = 2, \ldots, 5$ thì $1 \leqslant a_i \leqslant 6$ và $1 \leqslant x_i \leqslant 7$ đồng thời

$$a_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 13. \tag{1}$$

Tới đây ta sẽ sử dụng phần bù để giải quyết nó.

- Số bộ số nguyên dương thỏa mãn (1) là $\binom{12}{4} = 495$.

- Nếu $a_1 \geqslant 7$ thì $x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \leqslant 6$, suy ra $x_i < 7$, do đó trường hợp này sẽ không lặp lại các kết quả khi $x_i \geqslant 8$. Lúc này bất phương trình có tất cả
$$\binom{6}{4} = 15$$
bộ nghiệm nguyên dương.
- Nếu giá trị x_i nào đó lớn hơn hoặc bằng 8, giả sử $x_2 \geqslant 8$ thì
$$a_1 + x_3 + x_4 + x_5 \leqslant 5,$$
suy ra $a_1, x_3, x_4, x_5 < 6$ nên trường hợp này cũng không lặp lại các kết quả với trường hợp trên. Lúc này theo bài toán chia kẹo Euler, bất phương trình sẽ có
$$\binom{5}{4} = 5$$
bộ nghiệm nguyên dương, mà ta lại có 4 giá trị x_i có nên sẽ có tất cả
$$4 \times \binom{5}{4} = 20$$
bộ nghiệm nguyên dương.

Trường hợp 2. Các trường hợp còn lại ta xử lý tương tự trường hợp này.

Như vậy tổng kết lại ta có tất cả
$$\binom{12}{4} + \binom{16}{4} + \binom{7}{4} - \binom{6}{4} - \binom{10}{4} - 4\binom{5}{4} - 4\binom{9}{4} = 1601$$
cách chọn.

Ví dụ 34. Xâu nhị phân là một chuỗi kí tự chỉ bao gồm chữ số 0 và 1. Hỏi có bao nhiêu xâu nhị phân có độ dài 20 sao cho sau mỗi số 0, có ít nhất 3 chữ số 1?

LỜI GIẢI

Đầu tiên để ý thấy rằng nếu có k số 0 trong xâu thì phải có thêm ít nhất $3k$ số 1. Mặt khác độ dài của xâu này là 20 nên $k + 3k \leqslant 20$, hay $k \leqslant 5$. Giả sử có k số 0 thì đặt $a_0, a_1, \ldots, a_k$ lần lượt là số các số 1 nằm trước số 0 thứ nhất, giữa số 0 thứ nhất và thứ hai,..., sau số 0 cuối cùng.
$$\underbrace{\cdots\cdots\cdots}_{a_0\geqslant 0}\boxed{0}\underbrace{\cdots\cdots\cdots}_{a_1\geqslant 3}\boxed{0}\underbrace{\cdots\cdots\cdots}_{a_2\geqslant 3}\boxed{0}\underbrace{\cdots\cdots\cdots}_{a_3\geqslant 3}\cdots\boxed{0}\underbrace{\cdots\cdots\cdots}_{a_k\geqslant 3}$$
Ta phải có $a_0 + a_1 + \cdots + a_k = 20 - k$ và $a_1, a_2, \ldots, a_k \geqslant 3$. Đặt $b_i = a_i - 3, i = \overline{1, k}$ khi đó
$$a_0 + b_1 + \cdots + b_k = 20 - 4k.$$
Theo bài toán chia kẹo Euler thì số nghiệm nguyên của phương trình này là
$$\binom{20 - 4k + k}{k} = \binom{20 - 3k}{k}.$$
Do đó, số xâu nhị phân cần tìm là $\displaystyle\sum_{k=1}^{5} \binom{20-3k}{k} = 344.$

Ví dụ 35. Có bao nhiêu cách chọn từ 2016 số nguyên dương đầu tiên ra 10 số $a_1, a_2, \ldots, a_{10}$ sao cho $|a_i - a_j| > 1$ với mọi $i \neq j$?

LỜI GIẢI

Ta giả sử $a_1 < a_2 < \cdots < a_{10}$, lúc này giả thiết tương đương

$$a_{i+1} - a_i \geqslant 2, i = \overline{1,9}.$$

Các số a_i này không liên tiếp nhau. Gọi x_1 là số các số trước a_1, x_{11} là các số sau a_{10}, còn lại x_k là số các số nằm giữa a_{k-1} và a_k.

$$\boxed{1}\underbrace{\cdots\cdots\cdots}_{x_1}\boxed{a_1}\underbrace{\cdots\cdots\cdots}_{x_2}\boxed{a_2}\underbrace{\cdots\cdots\cdots}_{x_3}\boxed{a_3}\underbrace{\cdots\cdots\cdots}_{\ldots}\boxed{a_{10}}\underbrace{\cdots\cdots\cdots}_{x_{11}}\boxed{2016}$$

Khi đó ta có

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_{11} = 2006, x_1 \geqslant 0, x_{11} \geqslant 0, x_i \geqslant 1, i = \overline{2,10}.$$

Tới đây đổi biến $y_i = x_i - 1 \geqslant 0, i = \overline{2,10}$ ta được

$$x_1 + y_2 + \cdots + y_{10} + x_{11} = 1997.$$

Lúc này áp dụng kết quả của bài toán chia kẹo Euler thì số các cách chọn thỏa mãn cũng chính là số bộ nghiệm của phương trình và là $\dbinom{1997+11-1}{11-1} = \dbinom{2007}{10}$.

Ví dụ 36. Trong vòng loại một cuộc thi chạy 1000 m có 9 bạn tham gia trong đó có 2 bạn lớp A_1, 3 bạn lớp A_2 và 4 bạn đến từ các lớp khác nhau. Thầy giáo xếp ngẫu nhiên các bạn kể trên thành một hàng ngang để xuất phát. Có bao nhiêu cách xếp sao cho không có học sinh nào cùng lớp đứng kề nhau.

LỜI GIẢI

Gọi 3 bạn lớp A_2 là M_2, N_2, P_2, hai bạn lớp A_1 là M_1, N_1. Số cách xếp ngẫu nhiên 9 bạn vào cùng một hàng ngang là 9! cách. Ta có nhận xét sau.

> Số cách xếp sao cho không có bạn nào cùng lớp bằng số cách xếp sao cho ba bạn M_2, N_2, P_2 không đứng cạnh nhau trừ đi số cách xếp sao cho ba bạn M_2, N_2, P_2 không đứng cạnh nhau và hai bạn M_1, N_1 đứng cạnh nhau.

Khi đó ta sẽ chia bài toán đếm làm 2 bước như sau.

1. Đếm số cách xếp sao cho ba bạn M_2, N_2, P_2 không đứng cạnh nhau.
   Đầu tiên ta xếp ba bạn M_2, N_2, P_2 đứng cạnh nhau, có $3! = 6$ cách. Xét trường hợp ba bạn này được xếp theo thứ tự M_2, N_2, P_2. Tiếp theo, ta xếp các bạn còn lại vào sao cho ba bạn M_2, N_2, P_2 không đứng cạnh nhau.

$$\underbrace{\cdots\cdots\cdots}_{x_1}\boxed{M_2}\underbrace{\cdots\cdots\cdots}_{x_2}\boxed{N_2}\underbrace{\cdots\cdots\cdots}_{x_3}\boxed{P_2}\underbrace{\cdots\cdots\cdots}_{x_4}$$

   Gọi $x_1; x_2; x_3; x_4$ lần lượt là số bạn xếp phía bên trái M_2, giữa M_2, N_2, giữa N_2, P_2 và bên phải P_2. Khi đó ta có $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 6$, trong đó $x_2 \geqslant 1, x_3 \geqslant 1, x_1 \geqslant 0, x_4 \geqslant 0$, ta chuyển bài toán về đếm số nghiệm nguyên của phương trình

$$x_1 + x_2' + x_3' + x_4 = 4,$$

   trong đó $x_1 \geqslant 0, x_4 \geqslant 0, x_2' = x_2 - 1 \geqslant 0, x_3' = x_3 - 1 \geqslant 0$. Theo bài toán chia kẹo Euler ta có

$$\binom{4+4-1}{4-1} = 35$$

   số bộ nghiệm nguyên. Khi đó tính cả hoán vị thì số cách sắp xếp các bạn M_2, N_2, P_2 không đứng cạnh nhau là $6 \times 35 \times 6! = 151200$ cách.

2. Đếm số cách xếp sao cho ba bạn M_2, N_2, P_2 không đứng cạnh nhau và hai bạn M_1, N_1 đứng cạnh nhau. Đầu tiên ta xếp ba bạn M_2, N_2, P_2 đứng cạnh nhau, có $3! = 6$ cách. Xét trường hợp ba bạn này được xếp theo thứ tự M_2, N_2, P_2. Vì M_1, N_1 đứng ở vị trí liên tiếp nên ta có thể coi M_1, N_1 là một bạn P_1 nào đó. Ta sẽ xếp P_1 và 4 bạn khác lớp còn lại vào sao cho M_2, N_2, P_2 không đứng cạnh nhau.

$$\underbrace{\cdots\cdots}_{y_1}\boxed{M_2}\underbrace{\cdots\cdots}_{y_2}\boxed{N_2}\underbrace{\cdots\cdots}_{y_3}\boxed{P_2}\underbrace{\cdots\cdots}_{y_4}$$

Gọi $y_1; y_2; y_3; y_4$ lần lượt là số bạn xếp phía bên trái M_2, giữa M_2, N_2, giữa N_2, P_2 và bên phải P_2. Khi đó ta có $y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 5$, trong đó $y_2 \geqslant 1, y_3 \geqslant 1, y_1 \geqslant 0, y_4 \geqslant 0$, ta chuyển bài toán về đếm số nghiệm nguyên của phương trình
$$y_1 + y_2' + y_3' + y_4 = 3,$$
trong đó $y_1 \geqslant 0, y_4 \geqslant 0, y_2' = x_2 - 1 \geqslant 0, y_3' = y_3 - 1 \geqslant 0$. Theo bài toán chia kẹo Euler ta có
$$\binom{3+4-1}{4-1} = 20$$
số bộ nghiệm nguyên. Khi đó tính cả hoán vị thì số cách sắp xếp các bạn M_2, N_2, P_2 không đứng cạnh nhau và hai bạn M_1, N_1 đứng cạnh nhau là $6 \times 20 \times 2! \times 5! = 28800$ cách.

Vậy, xác xuất sao cho không có học sinh nào cùng lớp đứng kề nhau là
$$P = \frac{151200 - 28800}{9!} = \frac{85}{252}.$$

Nhận xét. Qua ví dụ này ta đã thấy ứng dụng của bài toán chia kẹo Euler cho các bài toán xếp người *cùng loại và không đứng nhau*, ta có thể áp dụng cách làm này vào bài toán sau.

Ví dụ 37 (VMO 2012). Cho một nhóm gồm 5 cô gái, kí hiệu là G_1, G_2, G_3, G_4, G_5, và 12 chàng trai. Có 17 chiếc ghế được xếp thành một hàng ngang. Người ta xếp nhóm người đã cho ngồi vào các chiếc ghế đó sao cho các điều kiện sau được đồng thời thỏa mãn

1. Mỗi người ngồi đúng 1 ghế.
2. Các cô gái xếp theo đúng thứ tự 1,2,3,4,5.
3. Giữa G_1, G_2 có ít nhất 3 chàng trai.
4. Giữa G_4, G_5 có ít nhất 1 chàng trai và nhiều nhất là 4 chàng trai.

Hỏi có tất cả bao nhiêu cách xếp như vậy? (Hai cách xếp được coi là khác nhau nếu tồn tại một chiếc ghế mà người ngồi ở chiếc ghế đó trong hai cách xếp là khác nhau).

LỜI GIẢI

Đánh số thứ tự các ghế từ trái sang phải là $1, 2, \ldots, 17$. Gọi x_1 là số chàng trai được xếp bên trái G_1, x_2 là số chàng trai ở giữa G_1 và G_2, x_3 là số chàng trai ở giữa G_2 và G_3, x_4 là số chàng trai ở giữa G_3 và G_4, x_5 là số chàng trai ở giữa G_4 và G_5, x_6 là số chàng trai được xếp ở bên phải G_5.

$$\underbrace{\cdots\cdots}_{x_1}\boxed{G_1}\underbrace{\cdots\cdots}_{x_2}\boxed{G_2}\underbrace{\cdots\cdots}_{x_3}\boxed{G_3}\underbrace{\cdots\cdots}_{x_4}\boxed{G_4}\underbrace{\cdots\cdots}_{x_5}\boxed{G_5}\underbrace{\cdots\cdots}_{x_6}$$

Khi đó bộ số $(x_1, x_2, \ldots, x_6)$ hoàn toàn xác định vị trí các cô gái và ta có
$$x_1 + x_2 + \cdots + x_6 = 12, \quad 3 \leqslant x_2, 1 \leqslant x_5 \leqslant 4.$$

Đầu tiên ta cần phải biến đổi cận dưới về đúng chuẩn của bài toán chia kẹo bằng cách đổi biến

$$(x_1, x_2 - 3, x_3, x_4, x_5 - 1, x_6) \to \left(\underbrace{y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6}_{y_i \geqslant 0, y_5 \leqslant 3}\right).$$

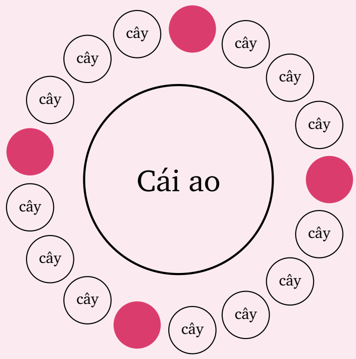
Tới đây xét các trường hợp của y_5 và áp dụng kết quả của bài toán chia kẹo Euler ta được kết quả là

$$\binom{12}{4} + \binom{11}{4} + \binom{10}{4} + \binom{9}{4} = 1161.$$

Vì còn có 12 chàng trai có thể hoán đổi vị trí ở 12 chiếc ghế dành cho họ nên số cách xếp thỏa mãn yêu cầu bài toán là $1161 \times 12!$.

Bài tập tương tự 12. Có bao nhiêu cách chọn ra bộ 4 số tự nhiên $(a; b; c; d)$ có tổng bằng 30, biết $a \leqslant 7 \leqslant b$?

Ví dụ 38 (Quảng Trị TST 2014). Có 17 cây cau trồng xung quanh một cái ao hình tròn.



Người ta muốn chặt đi 4 cây. Hỏi có mấy cách chặt sao cho không có 2 cây kề nhau bị chặt.

LỜI GIẢI

Ta đánh số thứ tự các cây từ 1 đến 17 và chia ra hai trường hợp như sau.

1. Giả sử cây số 1 bị chặt. Lúc này, các cây ở vị trí số 2 và 17 sẽ không bị chặt. Như vậy, ta sẽ chặt đi 3 cây ở vị trí số 3 đến số 16 sao cho không có 2 cây kề nhau bị chặt. Ta xem các cây từ số 3 đến số 16 nằm trên một hàng dọc theo thứ tự từ trái qua phải. Gọi x_1 là số cây bên trái cây thứ nhất bị chặt; x_2 là số cây giữa cây thứ nhất và thứ hai bị chặt; x_3 là số cây giữa cây thứ hai và thứ ba bị chặt; x_4 là số cây bên phải cây thứ ba bị chặt. Lúc đó, ta có
$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 11, \quad x_2 \geqslant 1; x_3 \geqslant 1.$$
Đổi biến $y_2 = x_2 - 1; y_3 = x_3 - 1$, ta được phương trình
$$x_1 + y_2 + y_3 + x_4 = 9$$
Tới đây đơn giản rồi, ta có $\binom{12}{3}$ cách.

2. Giả sử cây số 1 không bị chặt. Lúc này, các cây ở vị trí số 2 và 17 có thể được chặt. Bây giờ, ta xem các cây từ số 2 đến số 17 như trên một hàng dọc.
$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 12, \quad x_2 \geqslant 1; x_3 \geqslant 1; x_4 \geqslant 1.$$
Đổi biến $y_2 = x_2 - 1; y_3 = x_3 - 1; y_4 = x_4 - 1$, ta được phương trình
$$x_1 + y_2 + y_3 + y_4 + x_5 = 9.$$

Tới đây đơn giản rồi, ta có $\binom{13}{4}$ cách.

Vậy, số cách chặt đi 4 cây cau thỏa mãn bài toán là $\binom{12}{3} + \binom{13}{4} = 935$ cách.

Nhận xét. Bài toán này giống với bài toán hiệp sĩ được phát biểu như sau: *Vua Arthur muốn chọn ra k hiệp sĩ trong số n hiệp sĩ đang ngồi trên bàn tròn để đi ra trận, tìm số cách chọn sao cho không có 2 hiệp sĩ nào ngồi cạnh nhau. Kết quả bài toán này sẽ là*

$$\binom{n-k-1}{k-1} + \binom{n-k}{k} = \frac{n}{k}\binom{n-k-1}{k-1}.$$

Ví dụ 39. Cho tam giác ABC có 3 cạnh là $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$ và điểm P gọi là *good* nếu tìm được 27 tia chung gốc P cắt tam giác thành 27 tam giác con có diện tích bằng nhau. Đếm số điểm *good*.

LỜI GIẢI

Giả sử P là một điểm good. Gọi l, m, n lần lượt là số phần mà các cạnh BC, CA, AB bị chia bởi các tia xuất phát từ P. Lưu ý rằng mỗi tia phải đi qua mỗi đỉnh của tam giác ABC, nếu không sẽ tạo thành một số tứ giác. Gọi h_1 là khoảng cách từ P đến BC. Khi đó, h_1 là độ dài đường cao của tất cả các tam giác có đáy nằm trên BC. Vì các tam giác tạo ra có diện tích bằng nhau nên tất cả các đáy này có độ dài bằng nhau. Nếu ta ký hiệu độ dài này là x, thì ta có $lx = a$ Tương tự, lấy y và z là độ dài của các đáy của các tam giác trên cạnh CA và AB tương ứng, ta có $my = b$ và $nz = c$. Gọi h_2 và h_3 lần lượt là khoảng cách từ P đến CA và AB. Do các tam giác có diện tích bằng nhau nên

$$h_1x = h_2y = h_3z = \frac{2\Delta}{27},$$

trong đó Δ là diện tích của tam giác ABC. Từ đó suy ra

$$h_1 = \frac{2\Delta \cdot l}{27a}, \quad h_2 = \frac{2\Delta \cdot m}{27b}, \quad h_3 = \frac{2\Delta \cdot n}{27c}.$$

Ta cũng có

$$\frac{2\Delta}{a} = h_a, \quad \frac{2\Delta}{b} = h_b, \quad \frac{2\Delta}{c} = h_c,$$

trong đó h_a, h_b, h_c lần lượt là độ dài đường cao tương ứng của tam giác ABC hạ từ các đỉnh A, B, C. Suy ra

$$\frac{h_1}{h_a} = \frac{l}{27}, \quad \frac{h_2}{h_b} = \frac{m}{27}, \quad \frac{h_3}{h_c} = \frac{n}{27}.$$

Mặt khác, ta có

$$\frac{h_1}{h_a} = \frac{[PBC]}{\Delta}, \quad \frac{h_2}{h_b} = \frac{[PCA]}{\Delta}, \quad \frac{h_3}{h_c} = \frac{[PAB]}{\Delta},$$

trong đó $[PBC]$, $[PCA]$, $[PAB]$ là diện tích của các tam giác con tương ứng. Cộng ba phương trình trên, ta được

$$\frac{h_1}{h_a} + \frac{h_2}{h_b} + \frac{h_3}{h_c} = 1.$$

Do đó

$$\frac{l}{27} + \frac{m}{27} + \frac{n}{27} = \frac{h_1}{h_a} + \frac{h_2}{h_b} + \frac{h_3}{h_c} = 1.$$

Như vậy $l + m + n = 27$. Do đó, mỗi điểm good P xác định một phân hoạch (l, m, n) của 27 sao cho có l, m, n đoạn bằng nhau lần lượt trên BC, CA, AB. Bây giờ ta đi chứng minh tính duy nhất của nó. Ta xét một phân hoạch bất kỳ (l, m, n) của 27. Chia BC, CA, AB thành l, m, n phần bằng nhau tương ứng. Ta đặt

$$h_1 = \frac{2l\Delta}{27a}, \quad h_2 = \frac{2m\Delta}{27b}.$$

Vẽ một đường thẳng song song với BC và cách BC một khoảng h_1; vẽ một đường thẳng song song với CA và cách CA một khoảng h_2. Hai đường thẳng này cắt nhau tại một điểm P nằm trong tam giác ABC. Khi đó

$$[PBC] = \frac{1}{2}ah_1 = \frac{l\Delta}{27}, \quad [PCA] = \frac{m\Delta}{27},$$

suy ra $[PAB] = \frac{n\Delta}{27}$. Điều này cho ta thấy khoảng cách từ P đến AB bằng

$$h_3 = \frac{2n\Delta}{27c}.$$

Do đó, mỗi tam giác có đáy trên CA đều có diện tích bằng $\frac{\Delta}{27}$. Điều này chứng minh rằng tất cả các tam giác phân chia tam giác ABC đều có diện tích bằng nhau, nên P là một điểm good. Như vậy, lúc này theo bài toán chia kẹo Euler thì số điểm good bằng số nghiệm nguyên dương của phương trình

$$l + m + n = 27,$$

tức là bằng $\binom{26}{2} = 325$.

Ví dụ 40. Tìm số nghiệm không âm của phương trình

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = m,$$

với $x_1 \leqslant x_2 \leqslant \cdots \leqslant x_n$.

LỜI GIẢI

Lời giải bài toán này dựa trên ý tưởng của các bạn Nguyễn Long Nhật, Nguyễn Hùng Quang và thầy Nguyễn Vũ Lương – THPT Chuyên KHTN Hà Nội.

Ta sẽ chia nhỏ bài toán này ra như sau.

Bài toán phụ 1. Tìm số nghiệm không âm của phương trình $x + y = m$ với $x \leqslant y$.

Giải. Vì $x \leqslant y$ nên từ phương trình suy ra $x \leqslant \left[\frac{n}{2}\right]$, ta xét 2 trường hợp sau.

1. Nếu n chia hết cho 2 thì x có thể nhận $\frac{n}{2} + 1 = \left[\frac{n}{2}\right] + 1$ giá trị $0, 1, 2, \ldots, \left[\frac{n}{2}\right]$ và y tính được theo x (vì $y = n - x$), suy ra ta có $\left[\frac{n}{2}\right] + 1$ bộ (x, y) nguyên không âm thỏa mãn $x + y = n$ và $x \leqslant y$.
2. Nếu n không chia hết cho 2 suy ra $x \leqslant \left[\frac{n}{2}\right]$ và x có thể nhận $\left[\frac{n}{2}\right] + 1$ giá trị và có $\left[\frac{n}{2}\right] + 1$ bộ (x, y) nguyên không âm thỏa mãn bài toán.

Bài toán phụ 2. Tìm số nghiệm không âm của phương trình

$$x + y + z = n$$

thỏa mãn điều kiện $x \leqslant y \leqslant z$.

Giải. Trước tiên ta kí hiệu như sau

1. Kí hiệu r_{1xyz} là nghiệm số của phương trình thỏa mãn $x < y < z$. Tương tự có

$$r_{1xzy}, r_{1yzx}, r_{1yxz}, r_{1zxy}, r_{1zyx}.$$

Do vai trò của x, y, z hoàn toàn bình đẳng trong phương trình $x + y + x = n$. Ta có

$$r_{1xyz} = r_{1xzy} = r_{1yzx} = r_{1yxz} = r_{1zxy} = r_{1zyx} = r_1.$$

2. Kí hiệu r_{2xyz} là nghiệm số của phương trình thỏa mãn $x = y < z$. Tương tự có r_{2yzx}, r_{3zxy}. Ta có $r_{2xyz} = r_{2yzx} = r_{1zxy} = r_2$.

3. Kí hiệu r_{3xyz} là nghiệm số của phương trình thỏa mãn $x < y = z$. Tương tự có r_{3yzx}, r_{3zxy}. Ta có $r_{3xyz} = r_{3yzx} = r_{3zxy} = r_3$.

4. Kí hiệu r_4 là nghiệm số của phương trình thỏa mãn $x = y = z$.

Theo bài toán chia kẹo thì tất cả các bộ số nguyên không âm (x, y, z) thỏa mãn $x + y + z = n$ bằng
$$\binom{n+2}{2} = \frac{(n+2)(n+1)}{2}$$
mỗi bộ số sẽ thuộc một trong những trường hợp trên nên ta có
$$6r_1 + 3r_2 + 3r_3 + r_4 = \frac{(n+2)(n+1)}{2}.$$
Ta có $r_2+r_3+r_4$ chính là số nghiệm của phương trình $2u+v = n$ (vì từ phương trình $x+y+z = n$ ta có thể cho 2 số hạng $x = y$ hoặc $y = z$ hoặc $z = x$ và tất nhiên bao gồm cả trường hợp $x = y = z$). Giả sử $x = y$ sẽ bao gồm $x = y > z, x = y < z, x = y = z$. Phương trình
$$2u + v = n \Leftrightarrow u + (u + v) = n.$$
Đặt $t = u + v \geqslant u$ thu được $u + t = n$ với $u \leqslant t$. Theo như bài toán 1 số nghiệm của phương trình này là $\left[\frac{n}{2}\right] + 1$ hay $r_2 + r_3 + r_4 = \left[\frac{n}{2}\right] + 1$. Xét

1. Nếu n chia hết cho 3 thì $r_4 = 1$;

2. Nếu n chia hết cho 3 thì $r_4 = 0$;

Như vậy ta được $r_4 = \left[\frac{n}{3}\right] - \left[\frac{n-1}{3}\right]$. Vì $x \leqslant y \leqslant z$ bao gồm $x < y < z$ hoặc $x = y < z$ hoặc $x < y = z$ hoặc $x = y = z$. Vậy số nghiệm thỏa mãn yêu cầu của bài toán là
$$d = r_1 + r_2 + r_3 + r_4.$$
Từ những lập luận ở trên, ta tìm được công thức cho d là
$$\begin{aligned} d &= \frac{1}{6}\left[\frac{(n+2)(n+1)}{2} - 3r_2 - 3r_3 - r_4\right] + r_2 + r_3 + r_4. \\ &= \frac{(n+2)(n+1)}{12} + \frac{1}{2}(r_2 - r_3) + \frac{5}{6}r_4 \\ &= \frac{(n+2)(n+1)}{12} + \frac{1}{2}(r_2 + r_3 + r_4) + \frac{1}{3}r_4 \\ &= \frac{(n+2)(n+1)}{12} + \frac{1}{2}\left(\left[\frac{n}{2}\right] + 1\right) + \frac{1}{3}\left(\left[\frac{n}{3}\right] - \left[\frac{n}{2}\right]\right). \end{aligned}$$
Bài toán phụ 3. Tìm số nghiệm nguyên không âm của phương trình thỏa mãn
$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = n$$
với $x_1 \leqslant x_2 \leqslant x_3 \leqslant x_4$.

Giải. Trước tiên ta nhắc tới một bổ đề sau.
Bổ đề Burnside. Nếu ϕ là các tập thuộc tập X. Với mỗi φ thuộc ϕ với X^φ biểu thị các phần tử trong tập X được xác định bởi φ. Bổ đề Burnside xác định số quỹ đạo khác nhau của bài toán, khi đó
$$|X/\phi| = \frac{1}{|\phi|}\sum_{\varphi\in\phi} v(\varphi).$$
trong đó $v(\varphi)$ là số phần tử của từng tập.

1 Nếu $\varphi = id : v(\varphi)$ là số nghiệm của phương trình
$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = n$$
thì$v(\varphi) = \binom{n+3}{3}$ và có $1(\varphi)$.

2 Nếu $\varphi \in \phi : v(\varphi)$ là số nghiệm của phương trình $2x + y + z = n$ và $\binom{4}{2} = 6(\varphi)$.
Ta có $x \in \left\{0; 1; \ldots; \left[\frac{n}{2}\right]\right\}$ và phương trình có $n - 2x + 1$ với mỗi x. Suy ra
$$\begin{aligned} v(\varphi) &= \sum_{x=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} (n - 2x + 1) \\ &= \left(\left[\frac{n}{2}\right] + 1\right)(n+1) - \left[\frac{n}{2}\right]\left(\left[\frac{n}{2}\right] + 1\right) \\ &= \left(\left[\frac{n}{2}\right] + 1\right)\left(\left[\frac{n+1}{2}\right] + 1\right). \end{aligned}$$

3 Nếu $\varphi \in \phi : v(\varphi)$ là số nghiệm của phương trình $2x + 2y = n$ và $\frac{1}{2}\binom{4}{2} = 3(\varphi)$.

- Nếu n lẻ, phương trình vô nghiệm.
- Nếu n chẵn, phương trình có $\frac{n}{2} + 1$ nghiệm.

Như vậy $v(\varphi) = \left(\left[\frac{n}{2}\right] + 1\right)\left(\left[\frac{n}{2}\right] - \left[\frac{n-1}{2}\right]\right)$.

4 Nếu $\varphi \in \phi : v(\varphi)$ là số nghiệm của phương trình $3x + y = n$ và $2 \times 4 = 8(\varphi)$.
$$v(\varphi) = \left[\frac{n}{3}\right] + 1.$$

5 Nếu $\varphi \in \phi : v(\varphi)$ là số nghiệm của phương trình $4x = n$ và $\frac{4!}{4} = 6(\varphi)$. Suy ra
$$v(\varphi) = \left[\frac{n}{4}\right] - \left[\frac{n-1}{4}\right].$$

Tổng số các φ là $1 + 6 + 3 + 8 + 6 = 24$. Theo bổ đề Burnside số nghiệm của phương trình là
$$\frac{1}{24}\left(\binom{n+3}{3} + 6\left(\left[\frac{n}{2}\right]+1\right)\left(\left[\frac{n+1}{2}\right]+1\right) + 3\left(\left[\frac{n}{2}\right]+1\right)\left(\left[\frac{n}{2}\right] - \left[\frac{n-1}{2}\right]\right) + 8\left(\left[\frac{n}{3}\right]+1\right) + 6\left(\left[\frac{n}{4}\right] - \left[\frac{n-1}{4}\right]\right)\right).$$

Quay lại bài toán. Ta có thể áp dụng bổ đề Burnside hoặc dùng phương thức đệ quy như sau. Giả sử $M_{m,n}$ là tập hợp các kết quả của phương trình và $P(m,n)$ số tập thỏa mãn của các yếu tố của phương trình. Chúng ta dễ dàng thấy rằng $P(0,n) = 1$ với mọi $k, P(m,n) = P(m,m)$ cho tất cả các $k \geqslant n$. Do đó, ta giả định thêm rằng m cố định, chúng ta có $1 < n \leqslant m$. Ta chia nhỏ các tập $M_{m,n}$ vào thành các tập $T_i(i = 0, 1, \ldots, n-1)$, nên T_i chứa chính xác những kết quả của bài toán trong đó N_0 thoả mãn điều kiện
$$0 = x_1 = x_2 = \cdots = x_i < x_{i+1} < x_{i+2} < \cdots < x_n.$$
Ta có $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \to (x_{i+1} - 1, x_{i+2} - 1, \ldots, x_n - 1)$, định nghĩa một song ánh từ T_i đến $M_{m-n+i,n-i}$ từ $0 \leqslant x_{i+1} - 1 \leqslant x_{i+2} - 1 \leqslant \cdots \leqslant x_n - 1$, $(x_{i+1} - 1) + (x_{i+2} - 1) + \cdots + (x_n - 1) = m - n + i$, và ánh xạ
$$(y_1, y_2, \ldots, y_{n-i}) \to (0, 0, \ldots, 0, y_1 + 1, y_2 + 1, \ldots, y_{n-i} + 1)$$
Có nghĩa là $|T_i| = |M_{m-n+i,n-i}|$, và do đó có thể viết
$$P(m,n) = P(m-1,1) + P(m-2,2) + \cdots + P(m-n,n), 1 < n \leqslant m$$
và với phương trình cụ thể ta có thể tính được kết quả cụ thể.

Nhận xét. Ở trên ta cũng vừa tìm hiểu một số bài toán chia kẹo Euler có sử dụng phần bù, tuy nhiên chưa phải là các bài toán cần chia trường hợp phức tạp, tiếp theo ta sẽ tìm hiểu một số bài toán kết hợp giữa nguyên lý bù trừ và bài toán chia kẹo Euler. Trước tiên ta nhắc lại một chút về nguyên lý bù trừ tổng quát.

Định lý 1. Cho tập A và n tập con $A_1, A_2, \cdots, A_n$. Ta có

$$|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n| = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} A(n,k)$$

Trong đó $A(n,k) = \sum_{1 \leqslant i_1 < \cdots < i_k \leqslant n} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_k}|$.

Định lý hữu dụng tiếp theo ta có thể dùng nó.

Định lý 2. Giả sử $A_1, A_2, \ldots, A_m$ là các tập con của một tập hữu hạn X, kí hiệu $\overline{A_i}$ là phần bù của A_i trong X, $(i = 1, 2, \ldots, m)$ thì

$$\begin{aligned} |\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \cdots \cap \overline{A_m}| &= |\overline{A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_m}| \\ &= |X| + \sum_{k=1}^{m} (-1)^k \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 \cdots < i_k \leqslant m} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_k}| \\ &= |X| + \sum_{i=1}^{m} (-1)^i N_i. \end{aligned}$$

Ví dụ 41. Tìm số nghiệm nguyên không âm của phương trình

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 18 \qquad (*)$$

thỏa điều kiện $x_i \leqslant 7, \forall i = 1, \ldots, 4$.

LỜI GIẢI

Gọi $\mathscr{U}$ là tập hợp các nghiệm nguyên không âm của phương trình (*). Ta có

$$N = |\mathscr{U}| = \binom{4+18-1}{18} = 1330$$

Gọi A_i là tập hợp các nghiệm nguyên không âm của phương trình $(*)$ thỏa tính chất $x_i \geqslant 8$. Khi đó kết quả của bài toán là $N\left(\overline{A_1}\,\overline{A_2}\,\overline{A_3}\,\overline{A_4}\right)$. Bằng việc giải những bài toán tìm số nghiệm nguyên ta được

- $|A_i| = \binom{13}{10}$
- $|A_iA_j| = \binom{5}{2}$
- $|A_iA_jA_k| = 0$
- $|A_1A_2A_3A_4| = 0$

Vì vai trò của các $A_i (1 \leqslant i \leqslant 4)$ là như nhau nên ta có:

- $S_1 = \sum_i |A_i| = 4\binom{13}{10} = 1144;$
- $S_2 = \sum_{i \neq j} |A_iA_j| = \binom{4}{2}\binom{5}{2} = 60;$

- $S_3 = 0, S_4 = 0$.

Theo nguyên lý bù trừ ta có

$$\begin{aligned}|\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3\overline{A}_4| &= N - S_1 + S_2 - S_3 + S_4\\ &= 1330 - 1144 + 60 - 0 + 0 = 246.\end{aligned}$$

Bài tập tương tự 13. Tìm số nghiệm nguyên không âm của phương trình $x + y + z + t = 20$ thỏa mãn $x \leqslant 5, y \leqslant 6, z \leqslant 7, t \leqslant 8$.

Ví dụ 42. Một cửa hàng bán thức ăn sáng có bán 4 loại thức ăn gồm cơm, mì, bún và phở. Một đoàn khách 40 ngày vào cửa hàng, mỗi người gọi một loại thức ăn, biết mỗi loại thức ăn có ít nhất một người gọi và không có loại thức ăn nào có quá 15 người gọi. Hỏi có tất cả bao nhiêu cách gọi thức ăn.

LỜI GIẢI

Gọi x_1, x_2, x_3, x_4 lần lượt là số người gọi cơm, mì, bún và phở khi đó, bài toán trở thành tìm số nghiệm nguyên của phương trình

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 40. \quad (1)$$

với $1 \leqslant x_i \leqslant 15, i = 1,2,3,4$. Đầu tiên ta cần đưa về điều kiện không âm bằng cách đổi biến $y_i = x_i - 1$. Khi đó, phương trình (1) trở thành

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 36. \quad (2)$$

Ở đây $0 \leqslant y_i \leqslant 14$. Như vậy ta sẽ đếm bài này theo nguyên lý bù trừ như sau.

1. Đầu tiên ta đếm các bộ số nguyên thỏa mãn (2);
2. Sau đó ta đếm các bộ số nguyên thỏa mãn (2) thỏa mãn điều kiện $y_i \geqslant 15$.

Như vậy, ta thấy rằng theo bài toán chia kẹo Euler thì phương trình (2) có $\binom{39}{36}$ bộ nghiệm, tiếp theo ta đặt A_i là tập hợp các nghiệm nguyên của phương trình với $y_i \geqslant 15$.

1. Tính $|A_i|$, ta đặt $a_1 = y_1 - 15 \geqslant 0$, ta được phương trình (2) trở thành
$$a_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 21,$$
với $a_1 \geqslant 0, y_2 \geqslant 0, y_3 \geqslant 0, y_4 \geqslant 0$. Áp dụng bài toán chia kẹo Euler, ta được
$$|A_1| = \binom{24}{21}.$$
Tương tự, ta có $|A_2| = |A_3| = |A_4| = \binom{24}{21}$.

2. Tính $|A_j \cap A_k|$, ta đặt $a_1 = y_1 - 15 \geqslant 0, a_2 = y_2 - 15 \geqslant 0$, ta được phương trình (2) trở thành
$$a_1 + a_2 + y_3 + y_4 = 6,$$
với $a_1 \geqslant 0, a_2 \geqslant 0, y_3 \geqslant 0, y_4 \geqslant 0$. Khi đó, số nghiệm của phương trình trên là
$$|A_1 \cap A_2| = \binom{9}{6}.$$
Tương tự, ta có $|A_1 \cap A_3| = |A_1 \cap A_4| = |A_2 \cap A_3| = |A_2 \cap A_4| = |A_3 \cap A_4| = \binom{9}{6}$.

3. Tính $|A_i \cap A_j \cap A_k|$, ta thấy không thể có trường hợp nào 3 biến cùng lớn hơn hoặc bằng 15 được, vì tổng của các giá trị bằng 36. Nên $|A_i \cap A_j \cap A_k| = 0$ và $|A_i \cap A_j \cap A_k \cap A_n| = 0$.

Do đó $|A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4| = 4\binom{24}{21} - 6\binom{9}{9}$. Vậy số cách gọi thức ăn thỏa mãn bài toán là

$$|X| - |A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4| = \binom{39}{36} - \left(4\binom{24}{21} - 6\binom{9}{9}\right) = 1547.$$

Bài toán được giải quyết.

Ví dụ 43. Có bao nhiêu số nguyên dương nhỏ hơn 10^6 mà tổng các chữ số bằng 23?

LỜI GIẢI

Số cần tìm có dạng $\overline{a_1a_2a_3a_4a_5a_6}$ với

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 = 23, \tag{1}$$

và $0 \leqslant a_i \leqslant 9, i = \overline{1,6}$. Tới đây ta sẽ đếm bài toán theo 2 bước như sau.

1. Đầu tiên ta đếm các bộ số nguyên dương của phương trình (1) trước.
2. Sau đó ta sẽ đếm các bộ số nguyên dương của phương trình (1) mà có một số lớn hơn hoặc bằng 10.
3. Cuối cùng ta lấy 2 kết quả vừa tính được trừ đi là ra kết quả ta cần.

Để làm được điều này, ta sẽ sử dụng nguyên lý bù trừ, trước tiên ta đặt $|A_i|, i = \overline{1,6}$ là tập hợp các nghiệm không âm của (1) nhưng $a_i \geqslant 10$. Đầu tiên ta thấy số nghiệm của (1) là

$$\binom{23+6-1}{6-1} = \binom{28}{5}.$$

Bây giờ ta sẽ xét các trường hợp sau.

- Tính $|A_i|$, ta đổi biến $a_1' = a_1 - 10 \geqslant 0$, lúc này ta có
$$a_1' + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 = 13.$$
Theo bài toán chia kẹo thì số bộ nghiệm nguyên không âm của phương trình này sẽ là
$$\binom{13+6-1}{6-1} = \binom{18}{5}.$$
Tương tự với các trường hợp khác $|A_i|$, khi đó ta có tổng tất cả
$$6 \times \binom{18}{5} = 51408.$$

- Tính $|A_i \cap A_j|$. Ta đổi biến $a_1' = a_1 - 10 \geqslant 0$, $a_2' = a_2 - 10 \geqslant 0$ lúc này ta có
$$a_1' + a_2' + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 = 3.$$
Theo bài toán chia kẹo thì số bộ nghiệm nguyên không âm của phương trình này sẽ là
$$\binom{3+6-1}{6-1} = \binom{8}{5}.$$
Tương tự với các trường hợp $|A_i \cap A_j|$ mà $1 \leqslant i < j \leqslant 6$ khác. Vì ta đang lấy ra 2 tập hợp từ 6 tập hợp để xét, nên tổng số cách trong trường hợp này là
$$\binom{6}{2} \times \binom{8}{5} = 840.$$

- Tính $|A_i \cap A_j \cap A_k|$ với $1 \leqslant i < j < k \leqslant 6$. Vì tổng các chữ số là 23 nên không thể tồn tại 3 số cùng lớn hơn 10 trong trường hợp này được. Do đó $|A_i \cap A_j \cap A_k| = 0$.

Do đó theo nguyên lý bù trừ ta có

$$\left|\bigcup_{i=1}^{6} A_i\right| = \sum_{i=1}^{6} |A_i| - \sum_{1\leqslant i<j\leqslant 6} |A_i \cap A_j| = 50568.$$

Vậy số lượng các số cần tìm là

$$\binom{28}{5} - 50568 = 47712.$$

Bài toán được giải quyết.

Bài tập tương tự 14. Vé xe buýt có dạng $\overline{abcdef}$ với $a, b, c, d, e, f \in \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$. Một vé như trên thỏa mãn điều kiện $a + b + c = d + e + f$ được gọi là "vé hạnh phúc".

1. Chứng minh rằng số nghiệm của phương trình $a + b + c = d + e + f$ bằng số nghiệm của phương trình $a + b + c + d + e + f = 27$ với $0 \leqslant a, b, c, d, e, f \leqslant 9$.
2. Tính số vé hạnh phúc.

Ví dụ 44. Tìm số cách chọn ra 4 số nguyên phân biệt từ 24 số nguyên dương đầu tiên sao cho trong lựa chọn đó, không có hai số cùng số dư khi chia cho 3 liên tiếp.

LỜI GIẢI

Gọi $x_1, x_2, \ldots, x_5$ lần lượt là số các số nằm trước số thứ nhất được chọn, giữa số thứ nhất và số thứ hai, ..., sau số thứ tư. Ta có

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + \cdots + x_5 = 20 \\ x_1 \geqslant 0, x_5 \geqslant 0, x_i \neq 2, i = \overline{2, 4}. \end{cases}$$

Tới đây ta sẽ dùng nguyên lý bù trừ để xử lý điều kiện. Trước tiên theo bài toán chia kẹo Euler thì số bộ số nguyên không âm thỏa mãn điều kiện trên (không có ràng buộc) là

$$\binom{24}{4}.$$

Gọi A, B, C lần lượt là các cách chọn mà $x_2 = 2$, $x_3 = 2$, $x_4 = 2$ thì ta cần tính

$$\binom{24}{4} - |A \cup B \cup C|$$

1. Tính $|A| = \binom{20-2+4-1}{4-1} = \binom{21}{3}$ và tương tự với B, C.
2. Tính $|A \cap B| = \binom{20-4+3-1}{3-1} = \binom{18}{2}$, tương tự với $B \cap C$, $C \cap A$.
3. Tính $|A \cap B \cap C| = \binom{20-6+2-1}{2-1} = \binom{15}{1}$.

Do đó số cách chọn cần tìm là $\binom{24}{4} - \left[3\binom{21}{3} - 3\binom{18}{2} + \binom{15}{1}\right] = 7080.$

Ví dụ 45 (VMO 2022). Gieo 4 con súc sắc cân đối, đồng chất. Kí hiệu x_i $(1 \leqslant x_i \leqslant 6)$ là số chấm trên mặt xuất hiện của con súc sắc thứ $i (i = 1, 2, 3, 4)$.

a) Tính số các bộ (x_1, x_2, x_3, x_4) có thể có.

b) Tính xác suất để có một số trong x_1, x_2, x_3, x_4 bằng tổng của ba số còn lại.

c) Tính xác suất để có thể chia x_1, x_2, x_3, x_4 thành hai nhóm có tổng bằng nhau.

LỜI GIẢI

Đây là lời giải chính thức từ Bộ Giáo Dục.

a) Số bộ (x_1, x_2, x_3, x_4) có thể có là 6^4.

b) Kí hiệu A_i là tập hợp các bộ (x_1, x_2, x_3, x_4) sao cho x_i bằng tổng các số còn lại. Ta cần tính xác suất biến cố $A = \bigcup A_i$. Ta thấy $|A_i|$ có số phần tử bằng nhau và là số nghiệm $\in \{1, 2, \ldots, 6\}$ của phương trình $x_1 = x_2 + x_3 + x_4$. Biến đổi ta được
$$7 = x_1' + x_2 + x_3 + x_4, \quad x_1' = 7 - x_1.$$
Số nghiệm nguyên dương của phương trình này theo công thức chia kẹo Euler là
$$\binom{6}{3} = 20.$$
Dễ thấy $A_i \cap A_j = \varnothing$, cho nên $|A| = \sum |A_i| = 80$. Xác suất cần tính là $\dfrac{80}{1296}$.

c) Kí hiệu $B_i, i = 2, 3, 4$ là tập hợp (x_1, x_2, x_3, x_4) sao cho $x_1 + x_i$ bằng tổng của hai số còn lại, chúng có số phần tử bằng nhau. Ta có $|B_2|$ là số nghiệm thuộc $\{1, 2, \ldots, 6\}$ của phương trình nghiệm nguyên $x_1 + x_2 = x_3 + x_4$, cũng là phương trình
$$14 = x_1' + x_2' + x_3 + x_4, \quad x_1' = 7 - x_1, x_2' = 7 - x_2.$$
Số nghiệm của nó theo công thức Euler là $\binom{13}{3}$. Dễ thấy phương trình trên có tối đa một lần nhận giá trị lớn hơn 6. Ta cần loại trừ nghiệm này. Chẳng hạn, khi $x_1' \geqslant 7$ ta đưa về phương trình
$$8 = x_1'' + x_2' + x_3 + x_4, \quad x_1'' = x_1' - 6.$$
Số các nghiệm theo công thức Euler là $\binom{7}{3} = 35$. Vì có 4 trường hợp xảy ra với 4 biến, cho nên số nghiệm có ít nhất một ẩn nhận giá trị lớn hơn 6 là $4 \times 35 = 140$. Do đó
$$|B_2| = 286 - 140 = 146.$$
Dễ thấy $B_i \cap B_j$ có 36 phần tử, vì khi đó $x_1 = x_k, x_i = x_j$. Tương tự $|B_2 \cap B_3 \cap B_4| = 6$ (khi đó cả 4 số phải bằng nhau). Đặt $B = \bigcup B_i$ thì
$$|B| = \left|\bigcup B_i\right| = 3 \times 146 - 3 \times 36 + 6 = 336.$$

3 Bài tập tự luyện

Bài tập 3.1

Tìm số bộ số nguyên không âm (x, y, z, t) thỏa mãn $1 \leqslant x \leqslant y \leqslant z \leqslant t \leqslant 1000$.

Bài tập 3.2

Tiền giấy của Ngân hàng quốc gia Việt Nam lưu hành phổ biến trên thị trường có 10 loại: $200, 500, 1000, 2000, 5000, 10.000, 20.000, 50.000, 100.000, 500.000$. Hãy xác định số bộ khác nhau gồm 15 tờ giấy bạc của Ngân hàng quốc gia Việt Nam.

Bài tập 3.3

Tìm số nghiệm nguyên của phương trình $a + b + c + d = 17$ với $a \geqslant 1, b \geqslant 2, c \geqslant 3, d \geqslant 4$.

Bài tập 3.4

Tìm số nghiệm nguyên của phương trình $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 17$ với $3 \leqslant x_i \leqslant 5 (i = \overline{1, 4})$.

Bài tập 3.5

Tìm số nghiệm nguyên của phương trình $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 30$ với $5 \leqslant x_i \leqslant 10, i = \overline{1, 4}$.

Bài tập 3.6

Tìm số nghiệm nguyên không âm của bất phương trình $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leqslant 11$.

Bài tập 3.7

Tìm số nghiệm nguyên dương của bất phương trình $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leqslant 11$.

Bài tập 3.8

Tìm số nghiệm nguyên không âm của hệ $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leqslant 11 \\ x_1 \leqslant 3 \end{cases}$.

Bài tập 3.9

Cho phương trình $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 20, x_i \in \mathbb{N}$, thỏa mãn điều kiện x_1, x_2, x_3, x_4 chẵn. Hỏi phương trình có tất cả bao nhiêu nghiệm nguyên.

Bài tập 3.10

Có n vật giống hệt nhau và m hộp phân biệt. $(n \geqslant m, n, m \in N^*)$

1. Hỏi có bao nhiêu các khác nhau phân phối hết n vật vào m hộp.
2. Hỏi có bao nhiêu các khác nhau phân phối hết n vật vào m hộp sau cho mỗi hộp có ít nhất 1 vật.

Bài tập 3.11

Một câu lạc bộ thể thao có 4 môn là bơi lội, cầu lông, bóng bàn và cờ vua. Một lớp chuyên toán có 30 học sinh đến câu lạc bộ mỗi em đăng kí 1 môn trong 4 môn đó và tất cả các học sinh đều tham gia. Hỏi có tất cả bao nhiêu cách đăng kí khác nhau.

Bài tập 3.12

Một lớp học gồm 35 học sinh được xếp thành một hàng ngang. Giáo viên phụ trách lớp cần chọn 5 đội để tham gia một trò chở. Hỏi có bao nhiêu cách chọn biết rằng mỗi đội gồm 3 học sinh đứng liền kề nhau trong hàng ngang ban đầu?

Bài tập 3.13

Hai đội tuyển A và B tham gia giải bóng bàn. Mỗi đội có 7 người giao đấu với nhau theo một thứ tự nhất định. Đầu tiên, người thứ nhất của đội A, đấu với người thứ nhất của đội B và người thua sẽ bị loại. Sau đó, người chiến thắng chơi nữa với người thứ hai của đội kia, các bước tiếp theo người chơi tương tự. Cuộc thi đấu kết thúc cho đến khi tất cả người chơi của 1 đội đều bị loại và đội còn lại là chiến thắng. Hỏi số cách diễn ra cuộc thi đấu.

Bài tập 3.14

Một số tự nhiên A được gọi là số *Lucky* nếu tổng các chữ số của nó là 7. Sắp thứ tự tất cả các số *Lucky* theo thứ tự tăng dần và ta nhận được dãy số $a_1; a_2; \ldots$ biết $a_n = 2005$. Tính số hạng a_{5n}.

Bài tập 3.15

Cho hai tập hợp $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_{100}\}$ và $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_{50}\}$. Nếu có một ánh xạ $f : A \to B$ sao cho mỗi phần tử trong B có duy nhất một tạo ảnh, đồng thời $f(a_1) \leqslant f(a_2) \leqslant \ldots \leqslant f(a_{100})$. Số ánh xạ f bằng bao nhiêu?

Bài tập 3.16

Có 15 người xếp thành một hàng dọc (vị trí của mỗi ngıười trong hàng là cố định). Chọn ngẫu nhiên 4 người trong hàng. Tính xác suất để 4 người được chọn không có hai người nào đứng cạnh nhau.

Bài tập 3.17

Một lớp học có 21 học sinh nam và 22 học sinh nữ.

1. Hỏi có tất cả bao nhiêu cách xếp 43 học sinh thành một hàng dọc sao cho không có hai học sinh nam đứng cạnh nhau.
2. Hỏi có tất cả bao nhiêu cách xếp 43 học sinh đó thành một hàng dọc sao cho xuất hiện đúng một cặp nam-nữ thỏa mãn nam đứng trước nữ?

Bài tập 3.18

Xét 2021 điểm $A_1, A_2, \ldots, A_{2021}$ phân biệt thay đổi trên đường tròn. Đặt S là số tam giác nhọn có 3 đỉnh là 3 trong số các điểm đã cho.

1. Khi 2021 điểm trên tạo thành đa giác đều, tính S.
2. Với mọi cách cho các điểm, tìm giá trị lớn nhất của S.

Bài tập 3.19

Cho số nguyên $n \geqslant 2$. Xét các số hữu tỉ dương $x_1, x_2, \ldots, x_n$ thỏa mãn

$$x_1 + \frac{1}{p_1}, x_2 + \frac{1}{p_2}, \ldots, x_n + \frac{1}{p_n}$$

là các số nguyên dương (trong đó $p_i = \dfrac{x_1 x_2 \cdots x_n}{x_i}$ với mọi i).

1. Chứng minh rằng $x_1 x_2 \cdots x_n = 1$.
2. Có bao nhiêu bộ số $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ thỏa mãn bài toán.

Bài tập 3.20

Bạn Hào rất thích chơi với ánh sáng, cậu có một dãy gồm 10 bóng đèn xếp theo thứ tự từ 1 đến 10. Mỗi bóng đèn có một công tắc mà khi chạm vào nó, bóng đèn đang tắt sẽ chuyển sang trạng thái sáng và ngược lại. Ban đầu tất cả các bóng đèn đều đang tắt. Trò chơi của Hào bao gồm 15 lần chạm vào công tắc, mỗi lần chỉ chạm 1 công tắc. Gọi N là số cách thực hiện 15 lần chạm để được kết quả các bóng đèn $1, 2, 3, 4, 5$ sáng và các bóng đèn $6, 7, 8, 9, 10$ tắt. Gọi M là số cách thực hiện 15 lần chạm sao cho trong các lần chạm này chỉ được chạm vào các công tắc của các bóng đèn $1, 2, 3, 4, 5$ để được kết quả các bóng đèn $1, 2, 3, 4, 5$ sáng và các bóng đèn $6, 7, 8, 9, 10$ tắt. Hãy tính tỉ số $\dfrac{N}{M}$.

Bài tập 3.21

Cho 2024 viên bi được sắp xếp thành một hàng ngang. Tính số các cách đặt 29 chiếc thẻ vào giữa các viên bi thỏa mãn ở giữa hai viên bi bất kì có nhiều nhất một chiếc thẻ và các viên bi được chia thành 30 phần, mà mỗi phần có ít nhất 9 viên bi.

Bài tập 3.22

Cho 2024 viên bi giống nhau được đặt vào các đỉnh của hình đa giác đều có 2024 cạnh nnội tiếp trong đường tròn (O) mỗi đỉnh chỉ có 1 viên bi. Tính số các cách đặt 29 chiếc thẻ giống nhau vào trung điểm các cạnh của đa giác được cho thỏa mãn tại mỗi trung điểm có nhiều nhất một chiếc thẻ và các viên bi đã cho được chia thành 29 phần, mà mỗi phần có ít nhất 9 viên bi. (biết hai cách đặt thẻ được coi là nhu nhau nếu tồn tại một phép quay quanh tâm O biến cách chia này thành cách chia kia).

Bài tập 3.23

Có bao nhiêu cách lập một số tự nhiên có ba chữ số $\overline{abc}$ thỏa mãn $a \leqslant b \leqslant c$.

Bài tập 3.24

Có bao nhiêu chiếc vé xe buýt mà tổng ba số đầu bằng tổng ba số cuối?

Bài tập 3.25

Cho tập hợp $X = \{1, 2, 3, \ldots, 2022\}$.

1. Hỏi có bao nhiêu hoán vị $a = (a_1, a_2, \ldots, a_{2022})$ của X thỏa mãn với mỗi $k = \overline{1, 2022}$ thì $k - a_k \vdots 3$.
2. Hỏi có bao nhiêu cách chọn 10 số từ tập X sao cho bất kì hai trong 10 số được chọn có hiệu giữa số lớn và số nhỏ luôn lớn hơn hoặc bằng 3.

Bài tập 3.26

Cho xâu nhị phân 001101001111011 có 4 cặp 01, 3 cặp 10, 5 cặp 11 và 2 cặp 00 đứng cạnh nhau. Hỏi có tất cả bao nhiêu xâu nhị phân cùng tính chất như thế?

Bài tập 3.27

Số 20162017 khi viết trong hệ nhị phân có dạng 1001100111010010111100001. Đây là một dãy số nhị phân có các tính chất sau

- Có 6 cặp 00.
- Có 6 cặp 11.
- Có 6 cặp 10.
- Có 6 cặp 01.

Hỏi có tất cả bao nhiêu số tự nhiên khi viết trong hệ nhị phân cũng có các tính chất như trên?

Bài tập 3.28

Cho đa giác đều $A_1A_2 \ldots A_{2017}$. Có bao nhiêu tam giác nhọn có đỉnh là đỉnh của đa giác trên?

Bài tập 3.29

Có bao nhiêu cách chọn ra một tập con có k số phân biệt từ tập có n số tự nhiên đầu tiên sao cho tập được chọn ra không có hai số liên tiếp nhau.

Bài tập 3.30

Cho tập $A = \{1; 2; \ldots; 20\}$. Có bao nhiêu cách chọn ra 5 số trong tập A sao cho hiệu hai số bất kỳ trong 5 số đó không nhỏ hơn 2.

Bài tập 3.31

Một trường học có cách phát thưởng cho học sinh khá, giỏi vào cuối năm học khá đặc biệt. Theo đó, trường sẽ phát cho mỗi lớp 200 quyển vở và yêu cầu lớp phải phát thưởng cho 10 học sinh có thứ hạng cao nhất lớp theo quy tắc: Bạn học sinh đứng hạng i trong lớp phải nhận được ít nhất $15 - i$ quyển vở. Lớp $9A$ của trường này có đúng 1 bạn đứng hạng i, với $a \leqslant i \leqslant 10$. Hỏi giáo viên chủ nhiệm lớp này có bao nhiêu cách chia 200 quyển vở nói trên cho 10 bạn này?

Bài tập 3.32

Trên một bờ hồ, người ta muốn trồng các cây: hồng, cúc, lan, cau và tre. Biết rằng chu vi bờ hồ là 100 m và khoảng cách giữa các cây là các số nguyên dương. Giả sử kích thước của các gốc cây là không đáng kể. Hỏi có bao nhiêu cách sắp xếp các cây này trên bờ hồ?

Bài tập 3.33

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, xét điểm $M(a,b)$ với a, b là các số nguyên dương. Gọi một con đường đi từ O đến M là tốt nếu nó chỉ đi lên hoặc sang phải. Chứng minh rằng số đường đi tốt từ O đến M là số nghiệm của phương trình

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_{a+1} = b.$$

Bài tập 3.34

Trong không gian $Oxyz$, gọi S là tập hợp các điểm nguyên nằm phía trong hoặc ở trên đỉnh, cạnh và mặt của hình lập phương cạnh 999 , trong đó các cạnh song song hoặc vuông góc với trục tọa độ, một đỉnh là $(0;0;0)$ và một đỉnh đối với nó là $(999;999;999)$. Hỏi mặt phẳng $x + y + z = 2014$ đi qua bao nhiêu điểm trong tập hợp S?

Bài tập 3.35

Cho bốn điểm phân biệt $A(0,0)$, $B(p,0)$, $C(m,q)$, $D(m,n)$ với m, n, p, q là bốn số nguyên dương thỏa mãn $p < m$, $q < n$. Xét các đường đi tốt f từ A đến D và các đường đi tốt g từ B đến C. Gọi S là số các cặp đường đi (f,g) sao cho chúng không có điểm chung. Chứng minh rằng

$$S = \binom{m+n}{n}\binom{m+q-p}{q} - \binom{m+q}{q}\binom{m+n-p}{n}.$$

» Vietnam TST 2003

Bài tập 3.36

Cho đa giác đều 103 cạnh. Tô màu đỏ 79 đỉnh của đa giác và tô màu xanh các đỉnh còn lại. Gọi A là số các cặp đỉnh đỏ kề nhau và B là số cặp đỉnh xanh kề nhau.

1. Tìm tất cả các giá trị có thể nhận được của cặp (A,B).
2. Xác định số cách tô màu các đỉnh của đa giác để $B = 14$. Biết rằng hai cách tô màu được xem là như nhau nếu chúng có thể nhận được nhau qua một phép quay quanh tâm của đường tròn ngoại tiếp đa giác.

» VMO 2014

Bài tập 3.37

Cho $n \geqslant 2$ là một số nguyên dương. Xét tập hợp các đường đi ngắn nhất trên mạng lưới nguyên trong không gian vuông góc từ điểm $A(0;0;0)$ đến điểm $B(n;n;n)$ (từ điểm (x,y,z) có thể đến một trong các điểm $(x+1,y,z)$ hoặc $(x,y+1,z)$ hoặc $(x,y,z+1)$). Hỏi có bao nhiêu cách đi sao cho có tổng cộng 2 lần đổi hướng trong 2 mặt phẳng nằm ngang nào đó?

Bài tập 3.38

Cho $n \geqslant 2$ là một số nguyên dương. Xét tập hợp các đường đi ngắn nhất trên lưới nguyên từ điểm $A(0;0)$ đến điểm $B(n;n)$. Một đường đi như thế sẽ tương ứng với một dãy gồm n lệnh T (lên trên) và n lệnh P (sang phải). Trong dãy đó, một cặp lệnh (T,P) kề nhau được gọi là một bước chuyển (luuu ý, cặp (P,T) không được gọi là bước chuyển). Ví dụ dãy PTTPTPPT có 2 bước chuyển. Hãy tìm số các đường đi ngắn nhất từ A đến B sao cho trong đó có đúng:

1. 1 buớc chuyển.
2. 2 bước chuyển.

» Đề kiểm tra Trường Đông 2014

Bài tập 3.39

Vé xe buýt có dạng $\overline{abcdef}$ với $a,b,c,d,e,f \in \{0,1,2,\ldots,9\}$. Một vé như trên thỏa mãn điều kiện $a+b+c=d+e+f$ được gọi là "vé hạnh phúc".

1. Chứng minh rằng số nghiệm của phương trình $a+b+c=d+e+f$ bằng số nghiệm của phương trình $a+b+c+d+e+f=27$ với $0 \leqslant a,b,c,d,e,f \leqslant 9$.
2. Tính số vé hạnh phúc.

Bài tập 3.40

Ta nói một số nguyên dương n là **đặc biệt** nếu tồn tại một số nguyên dương m thỏa mãn đồng thời các điều kiện

1. $m > n$;
2. Tổng các chữ số của m bằng tổng các chữ số của n;
3. Tích các chữ số của m bằng tích các chữ số của n.

Hỏi có bao nhiêu số **đặc biệt** có 7 chữ số.

Tài liệu

[1] Lê Phúc Lữ, *Tổ hợp lặp và bài toán chia kẹo Euler*, Liên kết tải tài liệu.

[2] Chia kẹo Euler, *Kỉ yếu gặp gỡ toán học 2017*.

[3] Nguyễn Thị Ngọc Ánh, *Xung quanh bài toán chia kẹo Euler*, tạp chí Toán học và tuổi trẻ.

[4] Tạp chí và tư liệu toán học, *Các bài toán tổ hợp – xác suất hay và khó*, Liên kết tài liệu.

[5] Nhóm học sinh chuyên Lê Khiết, *Chuyên đề một số phương pháp đếm trong các bài toán tổ hợp*, Liên kết tài liệu.

[6] Tạp chí và tư liệu toán học, *Tuyển tập một số bài toán tổ hợp ôn thi HSG Toán*, Liên kết tài liệu.

[7] , Lục Trí Tuyên,*Bài toán chia kẹo Euler và ứng dụng*.

[8] Các nguồn tài liệu khác trên Internet.