Feuille 3
Inversion et déterminants

Les feuilles d'exercices sont découpées en trois types d'exercice :
- Les *indispensables* : à savoir faire en autonomie.
- Les *exercices d'application* : pour mieux maîtriser et comprendre le cours.
- *Pour aller plus loin* : exercices présentant des développements mathématiques ou des études de modélisations de phénomènes issues d'autres disciplines.

Indispensables

Exercice 1. Soit $A = \begin{pmatrix} -3 & 5 & 6 \\ -1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

1. En utilisant la méthode du pivot de Gauss, effectuer des opérations sur les lignes jusqu'à obtenir la matrice identité.

Solution :
On prend le 1 de la troisième ligne pour pivot et l'on effectue $L_1 \leftarrow L_1 + 3L_3$ et $L_2 \leftarrow L_2 + L_3$ pour obtenir

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

On prend maintenant le 1 de la deuxième colonne pour pivot en faisant $L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2$ et$L_3 \leftarrow L_3 + L_2$ pour obtenir

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On termine en faisant $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$ puis $L3 \leftrightarrow L_1$.

2. Réaliser les mêmes opérations que précédemment sur la matrice identité. Noter A' la matrice obtenue.

Solution : On trouve $A' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

3. Quel est le lien entre A et A' ? Justifier que la méthode permet de trouver l'inverse d'une matrice (si elle existe).

Solution : On a $A.A' = I_3$ donc $A' = A^{-1}$. Réaliser des opérations élémentaires sur les lignes revient à multiplier par une matrice inversible. Appelons $P_1, P_2, ..., P_6$ les matrices correspondant aux opérations sur A.

$P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $P_3 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $P_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $P_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,

$$P_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

On trouve

$$P_6 P_5 ... P_1 A = I_3$$

donc

$$P_6 .... P_2 P_1 = A^{-1}$$

Appliquer les mêmes opérations sur la matrice identité revient à calculer

$$P_k ... P_2 P_1 I_3 = A^{-1}$$

Exercice 2. (déterminant 2x2) Soit $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Pour $(e_1, e_2) \in \mathbb{R}^2$, on définit $(\mathcal{S}_{(e_1,e_2)})$: $\left\{ \begin{array}{l} ax + by = e_1 \\ cx + dy = e_2 \end{array} \right.$

1. À quelle condition $(\mathcal{S}_{(e_1,e_2)})$ admet des solutions quel que soit $(e_1, e_2) \in \mathbb{R}^2$?

Solution : Par le théorème du cours, il faut que $rang A = 2$. Alors, si $a = 0$, on a besoin d'avoir $b, c \neq 0$. Si $a \neq 0$ on peut prend a comme pivot. Pour avoir le deuxième pivot il faut que $d \neq b\frac{c}{a}$.

2. Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. À quelle condition les lignes de A ne sont-elles pas colinéaires ? Montrer que sous cette condition, A est inversible et trouver son inverse.

Solution : les lignes de A sont colinéaires ssi $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ tq $a = \lambda c$ et $b = \lambda d$. (ou l'inverse). Si $\lambda = 0$ on a une ligne nulle. Sinon, on a $ad = cb$. Réciproquement, si $ad = bc$ soit tout le monde est nul (et les deux lignes sont bien colinéaires), soit on a par exemple $d \neq 0$ et alors en posant $\lambda = \frac{b}{d}$ on a $a = \lambda c$ et $b = \lambda d$, La condition est donc $ad \neq bc$, c.a.d., dét $= ad - bc \neq 0$. Sous cette condition on peut inverser la matrice :

$$A^{-1} = \frac{1}{\text{dét } A} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Exercice 3. Soient $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer $\text{dét}\, B$, $\text{dét}\, C$, $\text{dét}(BC)$ et $\text{dét}(B + C)$. Que remarquez-vous ? Cette formule est-elle générale ?

Solution :

$$\text{dét}\, B = -1 - 4 = -5 \ , \text{dét}\, C = 3 + 2 = 5.$$

$$BC = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 5 & -5 \end{pmatrix}.$$

$$\text{dét}(BC) = -25 = \text{dét}(B)\,\text{dét}(C)$$

Par contre,

$$\text{dét}(B + C) = \text{dét}\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = 0 \neq -25$$

La formule du produit est toujours vrai par le théorème du cours.

Exercice 4 (Systèmes linéaires et déterminant)**.** On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $\text{dét}(A)$ et rang A. En déduire que le système $AX = B$ a une unique solution, quel que soit $B \in \mathbb{R}^3$.

Solution : Faisons $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$. On obtient $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ puis en développant par rapport à la première colonne :

$$\text{dét}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = 3 - 4 = -1$$

A est donc inversible avec rang $A = 3$ et le système à l'unique solution $X = A^{-1}.B$.

2. Mêmes questions avec la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Solution : En faisant $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$ et $L3 \leftarrow L_3 - L_4$ on a

$$\text{dét}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \text{dét}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

En développant par rapport à la troisième ligne, on obtient =

$$1.\,\text{dét}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

et en développant par rapport à la première ligne =

$$1.1.\,\text{dét}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 1$$

Donc la matrice est inversible, de rang = 4.

3. En utilisant la même méthode, déterminer l'ensemble des $x \in \mathbb{R}$ tel que $A_x X = B$ a une solution pour tout $B \in \mathbb{R}^3$, où $A_x = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 16 \\ 1 & x & x^2 \\ 1 & 5 & 25 \end{pmatrix}$

Solution :
Développons A_x par rapport à la deuxième ligne. On obtient le polynôme en x :

$$-1.\,\text{dét}\begin{pmatrix} 4 & 16 \\ 5 & 25 \end{pmatrix} + x\,\text{dét}\begin{pmatrix} 1 & 16 \\ 1 & 25 \end{pmatrix} - x^2\,\text{dét}\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} = -20 + 9x - x^2 = -(x-4)(x-5)$$

L'ensemble $\{x \in \mathbb{R} : x \neq 4 \; et \; x \neq 5\}$ est la solution do problème.

Exercice 5. Calculer le déterminant des matrices suivantes, puis en effectuant des opérations sur les lignes du couple $(A \mid I)$, calculer leur inverse. Que se passe-t-il, si avec cette méthode, on essaie de calculer l'inverse d'une matrice non inversible ?

$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 6 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$; $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 4 & 4 \end{pmatrix}$; $A_3 = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

Solution :

— $\text{dét}\,A_1 = -0.\,\text{dét}\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} + 2\,\text{dét}\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} - 6\,\text{dét}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = 2(2-8) - 6(4-6) = 0$
donc A_1 n'est pas inversible.

— $\text{dét}\,A_2 = -(-1).\,\text{dét}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} + 1\,\text{dét}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} - 0.\,\text{dét}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} = 8 - 12 + 4 + 3 \neq 0$
donc A_2 est inversible. Par pivot de gauss en faisant

$$L_1 \leftarrow L_1 + L_2 \;, L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \;, L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \;, L_1 \leftarrow L_1 - 3L_3 \;, L_1 \leftarrow \frac{1}{3}L_1 \;, L_2 \leftarrow -L2 + L_1 \;, L2 \leftrightarrow L_1$$

On obtient

$$A_2^{-1} = \begin{pmatrix} 4/3 & 4/3 & -1 \\ 4/3 & 7/3 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

— En développant par rapport à la première colonne,
$\text{dét}\,A_3 = 2\,\text{dét}\begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} - 1.\,\text{dét}\begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 2 & -3 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$
Ensuite :
$\text{dét}\begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 0 & -6 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = 2.\,\text{dét}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -6 & 1 \end{pmatrix} = 18$
$\text{dét}\begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 2 & -3 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = 3.\,\text{dét}\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} - 2.\,\text{dét}\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} + 2\,\text{dét}\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} = -27 + 28 + 34 = 35$

Donc dét $A_3 = 2 \times 18 - 35 = 1 \neq 0$. On doit trouver

$$A_3^{-1} = \begin{pmatrix} 18 & -35 & -28 & 1 \\ 9 & -18 & -14 & 1 \\ -2 & 4 & 3 & 0 \\ -12 & 24 & 19 & -1 \end{pmatrix}$$

Exercice 6. On se place dans $M_n(\mathbb{R})$ et l'on considère la matrice suivante, disons pour $n = 4$:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. En calculant dét(A), déterminer si A est inversible et si oui, calculer son inverse.

Solution :

On trouve dét $A = -3$ et $A^{-1} = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

2. Écrire la matrice $A + I_4$ et calculer son carré.

Solution : $A + I_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $(A + I_4)^2 = 4(A + I_4)$

3. ($*$) Sachant que $(A + I_4)(A + I_4) = A^2 + 2A + I_4$, déduire de la question précédente une égalité $A(A + aI_4) = bI_4$ pour des réels a, b que l'on déterminera. Comparer avec le résultat de la question 1.

Solution : On a $A^2 + 2A + I_4 = 4A + 4I_4$ puis $A^2 - 2A = 3I_4$ puis $A(A - 2I_4) = 3I_4$. On en déduit que A est inversible d'inverse $A^{-1} = \dfrac{1}{3}(A - 2I_4)$

Applications

Exercice 7 (Aires et volumes)**.**

1. Calculer l'aire du parallélogramme construit sur les vecteurs : $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$.
2. Calculer le volume du parallélépipède construit sur les vecteurs $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

3. Montrer que le volume d'un parallélépipède dont les sommets sont des points de $\mathbb{R}^3$ à coefficients entiers est un nombre entier.

Solution :

1. L'aire $\mathcal{A}$ du parallélogramme construit sur les vecteurs $\vec{u} = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$ est la valeur absolue du déterminant $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ donc $\mathcal{A} = |ad - bc|$. Ici on trouve $\mathcal{A} = \text{abs} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = +5$ où abs désigne la fonction valeur absolue.
2. Le volume du parallélépipède construit sur trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$ est la valeur absolue du déterminant de la matrice des trois vecteurs. Ici

$$\mathcal{V} = \text{abs} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \text{abs}\Big(+1 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} \Big) = 4$$

ou l'on a développé par rapport à la première ligne.
3. Si un parallélépipède est construit sur trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$ dont les coefficients sont des entiers alors le volume correspond au déterminant d'une matrice à coefficients entiers. C'est donc un entier.

Exercice 8. On considère le parallèlogramme défini par les vecteurs suivants ($t \in [0, 1]$) :

$$U = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad V_t = \begin{pmatrix} t \\ -t^2 \end{pmatrix}$$

1. Calculer l'aire du parallèlogramme.
2. Pour quelle valeur de t obtient-on l'aire maximale ? Que vaut-elle ?

Solution : 1. L'aire recherchée est la valeur absolue du déterminant $\begin{vmatrix} 1 & t \\ -1 & -t^2 \end{vmatrix}$, c'est à dire $|-t^2 + t|$.
2. $t - t^2 = t(1 - t)$ est positif sur $[0, 1]$. Donc l'aire est égale à $t - t^2$. Une étude de fonction montre que la fonction $t - t^2$ est croissante sur $[0, \frac{1}{2}]$ et décroissante sur $[\frac{1}{2}, 1]$. Elle prend donc sa valeur maximale sur $t = \frac{1}{2}$. L'aire maximale est donc $\frac{1}{4}$.

Exercice 9. 1. En s'inspirant de l'exercice 4 du TD1, donner l'expression générale de la matrice 3×3 de la rotation autour de l'axe Oz et d'angle θ dans $\mathbb{R}^3$.

Solution :

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Calculer le déterminant de cette matrice et l'inverse de cette matrice.

Solution :

$$\text{dét}\, A = 1$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \cos(-\theta) & -\sin(-\theta) & 0 \\ \sin(-\theta) & \cos(-\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3. Donner l'expression générale de la matrice 3×3 correspondant à la symétrie par rapport au plan xOy.

Solution :

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

4. Calculer le déterminant de cette matrice et l'inverse de cette matrice.

Solution :

$$\text{dét}\, B = -1$$

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

5. Donner l'expression générale de la matrice 3×3 correspondant à la rotation autour de l'axe Oz et d'angle $\theta = \pi$ suivie par la symétrie par rapport au plan xOy. De quelle transformation s'agit-il ?

Solution :

$$B.A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} \cos\pi & -\sin\pi & 0 \\ \sin\pi & \cos\pi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

C'est la symétrie par rapport à l'origine.

6. Calculer le déterminant de cette matrice et l'inverse.

Solution : On a $\text{dét}(A.B) = \text{dét}(A).\,\text{dét}(B)$, donc $\text{dét}(AB) = 1.(-1) = -1$. Aussi, on a

$$(A.B)^{-1} = B^{-1}.A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(-\pi) & -\sin(-\pi) & 0 \\ \sin(-\pi) & \cos(-\pi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Pour aller plus loin

Exercice 10. Soit
$$A = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_p \end{pmatrix}$$
où a_1, a_2, a_3, $\cdots$, a_p sont p réels. A quelle condition A est-elle inversible ?

Solution : Par le théorème du cours, A inversible ssi dét $A \neq 0$ ssi $a_1.a_2....a_p \neq 0$. Pour qu'un produit fini soit non-nul, il faut que chaque $a_i \neq 0$.

Exercice 11. Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$.

1. Écrire une relation linéaire entre A^2, A et I_2 faisant intervenir les coefficients de la matrice A.

Solution : Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Alors
$$A^2 = \begin{pmatrix} a^2+bc & ba+bd \\ ca+cd & cb+d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+bc-da+da & ba+bd \\ ca+cd & cb+d^2-ad+ad \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} a(a+d) & b(a+d) \\ c(a+d) & d(a+d) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} bc-da & 0 \\ 0 & bc-da \end{pmatrix} = (a+d).A - \text{dét}\, A.Id_2$$
$$A^2 - (a+d).A + (\text{dét}\, A).I = 0$$
Ici, $a+d$ c'est la trace de A, trA,

2. En déduire une condition nécessaire et suffisante (sans utiliser le déterminant) pour que A soit inversible. Donner alors l'expression de A^{-1}.

Solution :
$$-A^2 + tr(A).A = (\text{dét}\, A).I$$
$$A.[\frac{1}{\text{dét}\, A}(tr(A).I - A)] = I$$

3. On suppose que la somme des éléments diagonaux de A est non nulle. Montrer que pour tout $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$, $A^2B = BA^2 \Longrightarrow AB = BA$.

Solution : Supposons $A^2B = BA$. Alors
$$(tr(A).A - \text{dét}\, A.I)B = B.(tr(A).A - \text{dét}\, A.I)$$
donc
$$tr(A).AB - (\text{dét}\, A).B) = tr(A).BA - (\text{dét}\, A)B$$
Alors :
$$tr(A).AB = tr(A).BA$$
par l'hypothèse $tr(A) \neq 0$, on a que $AB = BA$.

Exercice 12 (Déterminant de Vandermonde)**.** Soient $\mathbb{K}$ un corps et $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{K}$, on considère le déterminant :

$$V(a_1, \ldots, a_n) = \text{dét} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{pmatrix}.$$

Le but de l'exercice est de démontrer la formule : $\boxed{V(a_1, \ldots, a_n) = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (a_j - a_i).}$

1. Expliquer pourquoi la formule est vraie si deux des a_i sont égaux.

Solution : Le déterminant est nul car la matrice n'est pas inversible avec deux colonnes identiques. La formula est nulle aussi.

2. Vérifier le résultat pour $n = 2$ et $n = 3$.

Solution : Pour $n = 2$ on a dét $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ a_1 & a_2 \end{pmatrix} = a_2 - a_1$.
Pour $n = 3$ on a

$$\text{dét} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 \end{pmatrix} = 1\,\text{dét} \begin{pmatrix} a_2 & a_3 \\ a_2^2 & a_3^2 \end{pmatrix} - \text{dét} \begin{pmatrix} a_1 & a_3 \\ a_1^2 & a_3^2 \end{pmatrix} + \text{dét} \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_1^2 & a_2^2 \end{pmatrix} =$$

$$= a_2 a_3^2 - a_2^2 a_3 - a_1 a_3^2 + a_1^2 a_3 + a_1 a_2^2 - a_1^2 a_2$$

coïncide avec

$$\prod_{1 \leqslant i < j \leqslant 3} (a_j - a_i) = (a_2 - a_1).(a_3 - a_2).(a_3 - a_1)$$

3. En réalisant des opérations bien choisies sur les lignes, puis en développant par rapport à la première colonne, montrer que

$$(\dagger) \qquad V(a_1, \ldots, a_n) = V(a_2, \ldots, a_n) \prod_{i=2}^{n} (a_i - a_1).$$

Solution : On fait $L_i \leftarrow L_i - a_1 L_{i-1}$ avec$i = n$ puis $i = n - 1$ jusqu'à $i = 2$:

$$V(a_1, \ldots, a_n) = \text{dét} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & a_2 - a_1 & \cdots & a_n - a_1 \\ 0 & (a_2 - a_1)a_2 & \cdots & (a_n - a_1)a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & (a_2 - a_1)a_2^{n-2} & \cdots & (a_n - a_1)a_n^{n-2} \end{pmatrix}.$$

En factorisant chacune les lignes par $a_i - a_1$ et en développant par rapport à la première colonne on obtient le résultat.

4. Conclure alors par récurrence.

Solution : On raisonne sur n. L'initialisation a été faite à la question 2. Pour l'hérédité il suffit d'utiliser la formule précédente et d'appliquer l'hypothèse de récurrence.

Exercice 13. Soient $x_0, x_1, \cdots, x_p \in \mathbb{R}$. À quelle condition sur $x_0, x_1, ..., x_p$ telle que pour tout $y_0, y_1, \cdots, y_p \in \mathbb{R}$, il existe un polynôme P de degré $\leq p$ tel que $P(x_i) = y_i$ $(i \in \{0, 1, \cdots, p\})$?

Solution :
Notons $P(X) = c_0 + c_1 X + ...c_p X^p$. La condition s'écrit $VC = Y$ avec

$$C = \begin{pmatrix} c_0 \\ \vdots \\ c_p \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} y_0 \\ \vdots \\ y_p \end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} 1 & x_0 & \cdots & x_0^p \\ 1 & x_1 & \cdots & x_1^p \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & x_p & \cdots & x_p^p \end{pmatrix}$$

Donc le système a une solution pour tout Y ssi V est inversible et donc, par l'exercice précédent, ssi les x_i sont distincts.

Exercice 14. Soient X une valeur indéterminée et $A = \begin{pmatrix} 2-X & -3 & -6 \\ 0 & 5-X & 6 \\ -1 & -5 & -5-X \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R}[X])$. Calculer le polynôme $P = \text{dét}(A) \in \mathbb{R}[X]$ et déterminer ses racines. Si λ est racine de P, que peut-on dire sur A ?

Solution : On trouve dét $A = -X^3 + 2X^2 + X - 2 = -(X-1)(X^2 - X - 2) = -(X-1)(X-2)(X+1)$.
Si $P(\lambda) = 0$ alors

$$\begin{pmatrix} 2-\lambda & -3 & -6 \\ 0 & 5-\lambda & 6 \\ -1 & -5 & -5-\lambda \end{pmatrix}$$

est non-inversible.

Exercice 15. Soit A une matrice nilpotente de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ (il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $A^n = 0$).
En remarquant que $A = A - I_n + I_n$ et en utilisant la formule du binôme de Newton montrer que $A - I_n$ est inversible.

Solution : Par la formula du binôme de Newton, on a

$$A^N = [(A-I)+I]^N = \sum_{i=0}^{N} (A-I)^i . I^{N-i} \binom{N}{i} = \sum_{i=1}^{N} (A-I)^i \binom{N}{i} + I = (A-I)[\sum_{i=0}^{N-1} (A-I)^i \binom{N}{i}] + I$$

Donc, par hypothèse $A^N = 0$ on a

$$(A-I)[\sum_{i=0}^{N-1} (A-I)^i \binom{N}{i}] + I = 0$$

donc

$$(A-I)[\sum_{i=0}^{N-1}(A-I)^i\binom{N}{i}] = -I$$

donc

$$(A-I)[-\sum_{i=0}^{N-1}(A-I)^i\binom{N}{i}] = I$$

Exercice 16. Calculer les déterminants des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3456 & 1 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 3 & 4 & 7 \\ 9 & 1 & 5 & 9 & 5 \\ 5 & 4 & 6 & 5 & 4 \\ 3 & 9 & 9 & 3 & 5 \\ 3 & 7 & 2 & 3 & 6 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 6 & 8 & 10 \\ 6 & 12 & 5 & 0 & 2 \\ 1 & 14 & 11 & 3 & 18 \\ 1 & 2 & 6 & 1 & 11 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 3 & 8 & 3 & 7 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 8 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 8 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Solution : dét $A = 0$, dét $B = 0$, dét $C = 1$, dét $D = 0$, dét $E = 0$, dét $F = 2$, dét $G = 0$, dét $H = -24$ dét $M = 0$