Feuille 2
Systèmes linéaires

Les feuilles d'exercices sont découpées en trois types d'exercice :
- Les *indispensables* : à savoir faire en autonomie.
- Les *exercices d'application* : pour mieux maîtriser et comprendre le cours.
- *Pour aller plus loin* : exercices présentant des développements mathématiques ou des études de modélisations de phénomènes issues d'autres disciplines.

Indispensables

Exercice 1.

1. Écrire chaque système sous forme matricielle :

$$a)\begin{cases} x=-y \\ 2x=3y \end{cases}, \quad b)\begin{cases} -3z=1+2y \\ 3y=2x+2 \\ 3=3x+2z \end{cases}, \quad c)\begin{cases} x+y+z=0 \\ x+y+t=-1 \\ z+2t=1 \end{cases}, \quad d)\begin{cases} x+y=1 \\ y+z=2 \\ z+t=3 \\ t+w=4 \end{cases}$$

2. Écrire chaque égalité matricielle sous forme de système linéaire :

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \\ w \\ u \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

Exercice 2. On considère le système linéaire suivant :

$$(\mathcal{S})\begin{cases} y-x=1 \\ y+x=2 \end{cases}$$

1. Résoudre le système.
2. Écrire la matrice A du système $\mathcal{S}$, puis la matrice augmentée.
3. En réalisant des opérations sur les lignes de la matrice augmentée, déterminer à nouveau l'ensemble de solutions.
4. Quel est le rang de $\mathcal{S}$?

Exercice 3. Résoudre les systèmes suivants et calculer leurs rangs.

$$(\mathcal{S}_1)\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x & + & 2y & - & z & + & t & = & 1 \\ x & + & 3y & + & z & - & t & = & 2 \\ -x & + & y & + & 7z & + & 2t & = & 3 \\ 2x & + & y & - & 8z & + & t & = & 4 \end{array}\right. \qquad (\mathcal{S}_2)\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x & + & y & - & 3z & - & 4t & = & -1 \\ 2x & + & 2y & + & 2z & - & 3t & = & 2 \\ 3x & + & 6y & - & 2z & + & t & = & 8 \\ 2x & + & y & + & 5z & + & t & = & 5 \end{array}\right.$$

$$(\mathcal{S}_3)\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x & - & y & + & z & + & t & = & 3 \\ 5x & + & 2y & - & z & - & 3t & = & 5 \\ -3x & - & 4y & + & 3z & + & 2t & = & 1 \\ 6x & + & y & & & - & 2t & = & 8 \end{array}\right.$$

Exercice 4. Proposons une solution (erronnée) du système suivant

$$\begin{cases} 2x + 2y + z = 0 \\ x + 2y + 2z = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$$

On remplace la ligne L_1 par $L_1 - L_2$ pour éliminer y, L_2 par $L_2 - L_3$ pour éliminer x et L_3 par $L_3 - L_1$ pour éliminer z. On obtient

$$\begin{cases} x - z = 0 \\ y + z = 0 \\ -x - y = 0 \end{cases}$$

Ce système équivaut à $x = -y = z$. Donc $(x, y, z) = (1, -1, 1)$ est solution. Mais ce triplet n'est pas solution du système initial... Où est l'erreur ?

Exercice 5. Soit $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$. On considère le système linéaire :

$$(\mathcal{S}) \begin{cases} -x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 = b_1 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 = b_2 \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 3x_4 = b_3 \end{cases}$$

1. Écrire la matrice A du système $\mathcal{S}$, puis la matrice augmentée.
2. En effectuant des opérations sur les lignes de la matrice augmentée, déterminer les conditions sur b_1, b_2 et b_3 pour que le système admette une solution.
3. Résoudre le système en fonction de b_1, b_2 et b_3.
4. Quel est le rang de $\mathcal{S}$?

Exercice 6. Soit A une matrice échelonnée de taille $n \times m$. Considérons les quatre cas suivants :

1. $n = 3$, $m = 3$ et A admet 3 pivots.
2. $n = 4, m = 4$ et A admet 3 pivots.
3. $n = 2, m = 5$ et A admet 2 pivots.
4. $n = 3, m = 2$ et A admet 2 pivots.

a) Pour quel(s) cas le système $A\vec{x} = \vec{0}$ admet-il une solution non-triviale ?
b) Pour quel(s) cas, quel que soit le vecteur $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$, le système $A\vec{x} = \vec{b}$ admet-il une solution ?
c) Pour quel(s) cas, quel que soit le vecteur $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$, le système $A\vec{x} = \vec{b}$ admet-il une unique solution ?
d) Comment se généralisent les résultats précedents pour une matrice A quelconque ?

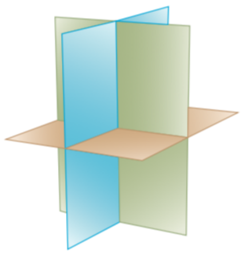
Exercice 7. Une équation à trois inconnues est l'équation cartésienne d'un plan dans l'espace. Un système de trois équations décrit donc l'intersection de trois plans. Pour les quatre possibilités géométriques ci-dessous, retrouver le système qui lui correspond :

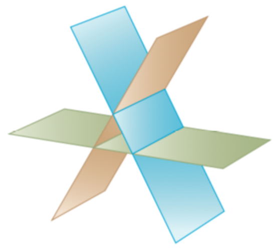
$$a)\ \begin{cases} z = -1 \\ y = 0 \\ z = 1 \end{cases}$$

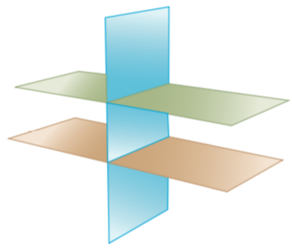
$$b)\ \begin{cases} z = 0 \\ y = 0 \\ x = 0 \end{cases}$$

$$c)\ \begin{cases} z - y = 0 \\ z + y = 0 \\ z = -1 \end{cases}$$

$$d)\ \begin{cases} z - y = 0 \\ z + y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$


1.


3.


2.


4.

i) pas de solutions

ii) nombre infini de solutions

iii) solution unique

X) intersection réduite à un point unique

Y) intersection vide

Z) intersection contenant une infinité de points

Exercice 8 (Inversion d'une matrice carrée)**.** Calculer le rang de A et déterminer si A est inversible. Si c'est le cas, calculer l'inverse de A.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Applications

Exercice 9. Dans un magasin, tous les articles d'une même catégorie sont au même prix. Pierre et Marie décident d'y acheter des DVD et des bandes dessinées. Ils possèdent chacun 75 euros. Pierre achète un DVD et 4 bandes dessinées ; il lui reste 14,5 euros. Marie dépense 73,5 euros pour l'achat de 2 DVD et 3 bandes dessinées. Calculer le prix de chaque article.

Exercice 10. Pour suivre un certain régime amaigrissant, il faut manger par jour environ 33g de protéine, 45g de glucides et 3g de lipides. Malheureusement, dans le frigo, nous n'avons que du lait écrémé, du soja et du blé. Voici un tableau avec les informations nutritionnelles :

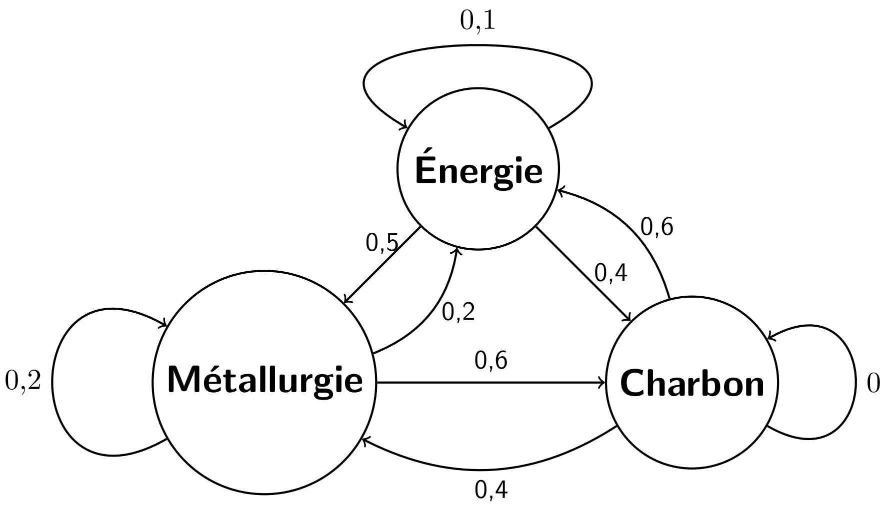
(par 100g)	Lait	Soja	Blé
Protéine	36g	51g	13g
Glucides	52g	34g	74g
Lipides	0g	7g	1,1g

Déterminer L, S et B les quantités de lait, soja et blé que nous devons manger ce jour-là pour faire le régime.

Exercice 11. Le CROUS veut construire une nouvelle résidence étudiante en utilisant des pré-fabriqués modulaires. Pour chaque étage, ils ont 3 modèles pré-conçus.
En utilisant ces modèles, est-il possible de concevoir un bâtiment de façon à avoir exactement 66 chambres triples, 74 chambres doubles et 136 chambres individuelles ?

	Chambres triples	Chambres doubles	Chambres individuelles
Étage Type A	3	7	8
Étage Type B	4	4	8
Étage Type C	5	3	9

Exercice 12. L'économie d'un certain pays est composée de trois secteurs : énergie E, métallurgie M et charbon C. Chaque secteur doit utiliser une partie de sa propre production et vendre la partie qui reste aux autres secteurs. Le schéma suivant résume ces informations en % de production :



On note que pour chaque secteur, la somme des portions sortantes est égale à 1. Notons p_E, p_M et p_C le chiffre d'affaires de chaque secteur.

1. Traduire par un système d'équations linéaires la condition d'équilibre budgétaire simultanée pour les trois secteurs.
2. Est-ce qu'une telle condition d'équilibre existe et est unique ?

Pour aller plus loin

Exercice 13. Résoudre en fonction du paramètre réel m les systèmes linéaires suivants :

$$(\mathcal{S}_1)\begin{cases} x+2y-3z=1 \\ x+3y-4z=2 \\ 2x+3y-5z=m \end{cases} \qquad (\mathcal{S}_2)\begin{cases} 2x+y-3z=1 \\ x+3y-2z=2 \\ 7x-4y-m^2z=m-4 \end{cases} \qquad (\mathcal{S}_3)\begin{cases} x+my+2z=m \\ -2x+y+(m-2)z=1 \\ mx+y+2z=2m-1 \end{cases}$$

Exercice 14. Soit $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, existe-t-il une matrice B telle que

$$B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ k & 0 \end{pmatrix} \ ?$$