Feuille 6
Diagonalisation [1]

Les feuilles d'exercices sont découpées en trois types d'exercice :
- Les *indispensables* : à savoir faire en autonomie.
- Les *exercices d'application* : pour mieux maîtriser et comprendre le cours.
- *Pour aller plus loin* : exercices présentant des développements mathématiques ou des études de modélisations de phénomènes issues d'autres disciplines.

Indispensables

Exercice 1. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$. Trouver les valeurs propres de A et les sous-espaces propres correspondant. En déduire une matrice inversible P telle que $P^{-1}AP$ soit diagonale.

Solution : On calcule le polynôme caractéristique de A :

$$p(x) = (1-x)(3-x) - 8 = 3 - 4x + x^2 - 8 = -x^2 - 4x - 5 = (x+1)(x-5)$$

donc A est diagonalisable car elle a 2 valeurs propres distinctes : -1 et 5.

Un vecteur (x, y) est un vector propre de A associé à la valeur propre -1 si

$$\begin{pmatrix} 1-(-1) & 4 \\ 2 & 3-(-1) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Par pivot de Gauss, le système est équivalent à

$$x + 2y = 0$$

C'est à dire, un sous-espace vectoriel de dimension 1. Un vecteur de base est par exemple $\vec{u}_1 = (-2, 1)$.

Un vecteur (x, y) est un vector propre de A associé à la valeur propre -1 si

$$\begin{pmatrix} 1-(5) & 4 \\ 2 & 3-(5) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Par pivot de Gauss, le système est équivalent à

$$x = y$$

C'est à dire, un sous-espace vectoriel de dimension 1. Un vecteur de base est par exemple $\vec{u}_1 = (1, 1)$.

Prenons

$$P = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

avec

1. Version du 10 février 2020

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Exercice 2. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 6 & -1 \\ 6 & 0 & 6 \\ -1 & 6 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ -1 & 3 & -1 \\ 3 & -3 & 1 \end{pmatrix}$,

Pour chaque matrice :

1. Trouver les valeurs propres et montrer que la matrice est diagonalisable.

Solution :

— On calcule de polynôme caratéristique de A

$$p(\lambda) = \text{dét}\begin{pmatrix} 0-\lambda & 6 & -1 \\ 6 & 0-\lambda & 6 \\ -1 & 6 & 0-\lambda \end{pmatrix} = -\lambda^3 - (36+36+1)(-\lambda) + (-36-36) = -(\lambda-1)(\lambda-8)(\lambda+9)$$

donc A est diagonalisable car elle a 3 valeurs propres distinctes.

— On calcule de polynome caratéristique de B

$$p(x) = \text{dét}\begin{pmatrix} 0-x & 1 & 1 \\ -1.\frac{1}{2} & 3.\frac{1}{2}-x & -1.\frac{1}{2} \\ 3.\frac{1}{2} & -3.\frac{1}{2} & \frac{1}{2}-x \end{pmatrix}$$

Pour calculer ce déterminant on effectue $C_1 \leftrightarrow C_1 + C_2$

$$p(x) = \text{dét}\begin{pmatrix} 1-x & 1 & 1 \\ 1-x & 3.\frac{1}{2}-x & -1.\frac{1}{2} \\ 0 & -3.\frac{1}{2} & \frac{1}{2}-x \end{pmatrix}$$

On peut metre en facteur $(1-x)$ dans la première colonne

$$p(x) = (1-x)\,\text{dét}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3.\frac{1}{2}-x & -1.\frac{1}{2} \\ 0 & -3.\frac{1}{2} & \frac{1}{2}-x \end{pmatrix}$$

En suite, $L_2 \leftrightarrow L_2 - L_1$

$$p(x) = (1-x)\,\text{dét}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2}-x & \frac{-3}{2} \\ 0 & -3.\frac{1}{2} & \frac{1}{2}-x \end{pmatrix}$$

et on développe par raport à la première colonne :

$$p(x) = (1-x)\,\text{dét}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} - x & \frac{-3}{2} \\ -3.\frac{1}{2} & \frac{1}{2} - x \end{pmatrix} = (1-x)[(\frac{1}{2} - x)^2 - (\frac{3}{2})^2] = (1-x)(-1-x)(2-x)$$

La matrice admet 3 valeurs propres distinctes et donc est diagonalisable.

2. Trouver une base de vecteur propres pour chaque matrice

Solution :

— A admet 3 valeurs propres distinctes : $1, 8$ et -9.

Un vecteur (x, y, z) est un vecteur propre de A associé à la valeur propre 1 *si*

$$\begin{pmatrix} -1 & 6 & -1 \\ 6 & -1 & 6 \\ -1 & 6 & -1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Par pivot de Gauss, le système est équivalent à

$$x + z = 0 \quad \wedge \quad y = 0$$

C'est à dire, un sous-espace vectoriel de dimension 1. Un vecteur de base est par exemple $\vec{u}_1 = (1, 0, -1)$.

Un vecteur (x, y, z) est un vecteur propre de A associé à la valeur propre 8 *si*

$$\begin{pmatrix} -8 & 6 & -1 \\ 6 & -8 & 6 \\ -1 & 6 & -8 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Par pivot de Gauss, le système est équivalent à

$$x = z = \frac{2}{3}y$$

c'est à dire, un sous-espace vectoriel de dimension 1. Un vecteur de base est par exemple $\vec{u}_8 = (2, 3, 2)$.

Un vecteur (x, y, z) est un vecteur propre de A associé à la valeur propre -9 *si*

$$\begin{pmatrix} 9 & 6 & -1 \\ 6 & 9 & 6 \\ -1 & 6 & 9 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Par pivot de Gauss, le système est équivalent à

$$x = z = -\frac{3}{4}y$$

C'est à dire, un sous-espace vectoriel de dimension 1. Un vecteur de base est par exemple $\vec{u}_{-9} = (-3, 4, -3)$.

Une base de vecteurs propres est donnée par $\{\vec{u}_1, \vec{u}_8, \vec{u}_{-9}\}$

— B admet 3 valeurs propres distinctes : $1, -1$ et 2.

Un vecteur (x, y, z) est un vecteur propre de B associé à la valeur propre 1 *si*

$$\begin{pmatrix} 0-1 & 1 & 1 \\ -1.\frac{1}{2} & 3.\frac{1}{2}-1 & -1.\frac{1}{2} \\ 3.\frac{1}{2} & -3.\frac{1}{2} & \frac{1}{2}-1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Par pivot de Gauss, le système est équivalent à

$$x = y \quad \wedge \quad z = 0$$

C'est à dire, un sous-espace vectoriel de dimension 1. Un vecteur de base est par exemple $\vec{v}_1 = (1, 1, 0)$.

Un vecteur (x, y, z) est un vecteur propre de B associé à la valeur propre -1, *si*

$$\begin{pmatrix} 0+1 & 1 & 1 \\ -1.\frac{1}{2} & 3.\frac{1}{2}+1 & -1.\frac{1}{2} \\ 3.\frac{1}{2} & -3.\frac{1}{2} & \frac{1}{2}+1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Par pivot de Gauss, le système est équivalent à

$$x = -z \quad \wedge \quad y = 0$$

C'est à dire, un sous-espace vectoriel de dimension 1. Un vecteur de base est par exemple $\vec{v}_{-1} = (-1, 0, 1)$.

Un vecteur (x, y, z) est un vecteur propre de B associé à la valeur propre 2, *si*

$$\begin{pmatrix} 0-2 & 1 & 1 \\ -1.\frac{1}{2} & 3.\frac{1}{2}-2 & -1.\frac{1}{2} \\ 3.\frac{1}{2} & -3.\frac{1}{2} & \frac{1}{2}-2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Par pivot de Gauss, le système est équivalent à

$$y = -z \quad \wedge \quad x = 0$$

C'est à dire, un sous-espace vectoriel de dimension 1. Un vecteur de base est par exemple $\vec{v}_2 = (0, 1, -1)$.

3. Montrer que les sous-espaces propres de A sont orthogonaux.

Solution : Il suffit de calculer le produit scalaire :

$$< \vec{u}_1, \vec{u}_8 >= 2 - 2 = 0$$

$$< \vec{u}_1, \vec{u}_{-9} >= -3 + 3 = 0$$

$$< \vec{u}_8, \vec{u}_{-9} >= -6 + 12 - 6 = 0$$

4. Pour chaque matrice, trouver une matrice P de passage de la base canonique à une base de vecteurs propres. Calculer P^{-1} et $P^{-1}.(-).P$ pour chaque exemple.

Solution :

— Pour A :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

$$P^{-1} = \frac{1}{34} \begin{pmatrix} 17 & 0 & -17 \\ 4 & 6 & 4 \\ -3 & 4 & -3 \end{pmatrix}$$

$$P^{-1}A.P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & -9 \end{pmatrix}$$

— Pour B :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$P^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$P^{-1}A.P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Exercice 3.

1. Montrer sans calcul que la matrice

$$\begin{pmatrix} \pi & 1 & 1 \\ 0 & \pi & 1 \\ 0 & 0 & \pi \end{pmatrix}$$

n'est pas diagonalisable.

Solution : La matrice est triangulaire supérieure et donc ses valeurs propres sont données par les elements de la diagonale. Donc, le seule valeur propre c'est π.

Si la matrice était diagonalisable, il existerait une matrice inversible P telle que $A = P(\pi.I)P^{-1}$. Comme la matrice identité commute avec toutes les matrices, on aurait $A = \pi.IP.P^{-1} = \pi I$ ce qui n'est pas le cas. La matrice A n'est donc pas diagonalisable.

2. Montrer sans calcul que la matrice
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$
est diagonalisable.

Solution : La matrice admet 3 valeurs propres distinctes 1,2,et 3 et donc est diagonalisable.

3. Soit $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a \neq b$. Est-ce que les matrices
$$C = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 0 & b & 1 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix} \quad et \quad D = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$$
song diagonalisables ?

Solution : Les matrices C et D ont chacune une valeur propre double : Déterminons la dimension des espaces propres associés :

— Pour C on résoudre le système $(C - bI)X = 0$, c'est à dire :
$$\begin{pmatrix} a-b & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
ce qui donne $z = 0$ et $(a-b)x + y = 0$. C'est donc un espace vectoriel de dimension 1 ($< 2 =$ multiplicité du valeur propre b). Donc la matrice C n'est pas diagonalisable.

— Pour D on résoudre le système $(D - aI)X = 0$, c'est à dire :
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & b-a \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
ce qui donne $z = 0$ et $y = 0$. C'est un espace vectoriel de dimensio 1 et donc la matrice n'est pas non plus diagonalisable.

4. Montrer que la matrice
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$
n'est pas diagonalisable.

Solution : Déterminons les valeurs propres en calculant le polynôme caractéristique :
$$p(\lambda) = \text{dét} \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ -1 & -\lambda & -1 \\ 0 & -1 & 1-\lambda \end{pmatrix}$$

En développant selon la premiére colonne :

$$= (1-\lambda)\,\text{dét}\begin{pmatrix} -\lambda & -1 \\ -1 & 1-\lambda \end{pmatrix} + (-1).\,\text{dét}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1-\lambda \end{pmatrix} = -\lambda(1-\lambda)^2$$

La matrice admet donc une valeur simple 0 est une valeur double 1. Chechons l'espace propre associè à la valeur propre double :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

On trouve $x = -zety = 0$. Le espace propre est de dimension $1 < 2 =$multiplicité. Donc la matrice n'est pas diagonalisable.

Exercice 4. Soit

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que C est diagonalisable

Solution : On calcule de polynome caratéristique de C

$$p(x) = \text{dét}\begin{pmatrix} -x & 0 & 1 \\ 0 & 1-x & 0 \\ 1 & 0 & -x \end{pmatrix} = -x\,\text{dét}\begin{pmatrix} (1-x) & 0 \\ 0 & -x \end{pmatrix} + 1.\,\text{dét}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1-x & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= -x(.x(1.x)) - (1.x) = -(1-x)^2(1+x)$$

la matrice a donc une valeur propre double 1. Il faut donc déterminer la dimension du sous-espace propre associée a 1.

On résoudre le système

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \underbrace{\leftrightarrow}_{L_3 \leftrightarrow L_3 + L_1} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

donc le système est de rang 1 et le sous-espace propre de du valeur propre $\lambda = 1$ est de dimension $3 - 1 = 2$ avec par exemple, pour base $(0, 1, 0)$ et $(0, 0, 1)$. Donc la matrice est diagonalisable.

2. Trouver une matrice P de passage de la base canonique à une base de vecteurs propres de C.

Solution : Pour la valeur propre $\lambda = -1$, le vecteur propre associée est la solution du système

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ce qui donne $x = -z, y = 0$. Un vecteur propre est par exemple $(1, 0, -1)$.
Une matrice de passage de la base canonique à la base de vecteurs propres définie à la question 1) est

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

3. Calculer P^{-1} et $P^{-1}C.P$.

Solution :

$$P^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$P^{-1}.C.P = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = I$$

Exercice 5. Soit

$$A = \begin{pmatrix} -4 & -6 & 0 \\ 3 & 5 & 0 \\ 3 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

1. Diagonaliser A ;

Solution : On cherche le polynôme caractéristique de A :

$$p(x) = \text{dét} \begin{pmatrix} -4-x & -6 & 0 \\ 3 & 5-x & 0 \\ 3 & 6 & 5-x \end{pmatrix}$$

En développant par rapport à la dernière colonne :

$$= (5-x)\,\text{dét} \begin{pmatrix} -4-x & -6 \\ 3 & 5-x \end{pmatrix} = (5-x)(x+1)(x-2)$$

Donc on a 3 valeurs propres distinctes donc A est diagonalisable. Un calcul similaire à ceux des exercices précédents donne pour valeurs propres, par exemple :

- Pour la valeur propre -1 : $(2, -1, 0)$;
- Pour la valeur propre 2 : $(1, -1, 1)$;
- Pour la valeur propre 5 : $(0, 0, 1)$;

Donc

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

et

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

On a

$$D = P.A.P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

2. Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Solution :

$$A = P.D.P^{-1}$$

$$A^n = \underbrace{(P.D.P^{-1}).(P.D.P^{-1}).\cdots(P.D.P^{-1})}_{n\times} =$$

$$= P.D.\underbrace{P^{-1}.P}_{I}.D.\underbrace{P^{-1}.P}_{I}D\cdots D\underbrace{P^{-1}.P}_{I}.D.P^{-1}) = P.D^n.P^{-1}$$

$$A^n = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 5^n \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2(-1)^n - 2^n & 2(-1)^n - 2^{n+1} & 0 \\ (-1)^{n+1} + 2^n & (-1)^{n+1} + 2^{n+1} & 0 \\ -2^n + 5^n & -2^{n+1} + 2.5^n & 5^n \end{pmatrix}$$

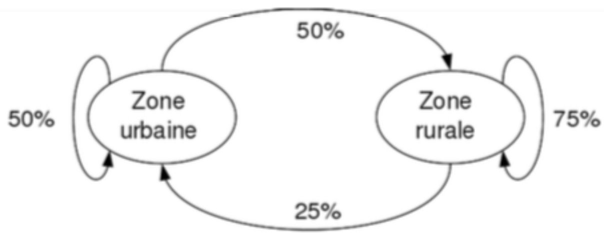
Applications

Exercice 6. On considère le problème de migration de population entre les zones urbaines et les zones rurales. Chaque année, un mouvement de population entre ces deux zones s'opère de la façon suivante :

— la moitié des habitants en zone urbaine partent habiter en zone rurale, alors que l'autre moitié reste résidante en zone urbaine,

— un quart des habitants en zone rurale rejoignent une zone hurbaine, les trois quarts restant en zone rurale.

Le mouvement de population est indiqué par la figure



Notons r_0 et u_0 la répartition initiale de la population en proportion. Notons r_k la proportion de la population totale qui habite en zone rurale à la fin de la k-ième année et u_k la proportion de population qui habite en zone urbaine pour la même année. S'agissant de proportion de population, on a, pour toute année k,

$$r_k + u_k = 1$$

.

1. Écrire r_{k+1} et u_{k+1} en fonction r_k et u_k

Solution : D'après le schéma de répartition, chaque année, on a

$$u_{k+1} = \frac{1}{2}u_k + \frac{1}{4}r_k$$

$$r_{k+1} = \frac{3}{4}r_k + \frac{1}{2}u_k$$

.

2. Déterminer la matrice A qui permet d'écrire la relation de la question précédente sous forme matricielle

$$\begin{pmatrix} u_{k+1} \\ r_{k+1} \end{pmatrix} = A. \begin{pmatrix} u_k \\ r_k \end{pmatrix}$$

A est appelée la matrice de transition du système.

Solution :

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$$

.

3. Montrer que

$$\begin{pmatrix} u_k \\ r_k \end{pmatrix} = A^k. \begin{pmatrix} u_0 \\ r_0 \end{pmatrix}$$

Solution :

$$\begin{pmatrix} u_k \\ r_k \end{pmatrix} = A. \begin{pmatrix} u_{k-1} \\ r_{k-1} \end{pmatrix} = A.A. \begin{pmatrix} u_{k-2} \\ r_{k-2} \end{pmatrix} = ... = A^k. \begin{pmatrix} u_0 \\ r_0 \end{pmatrix}$$

.

4. Calculer les valeurs propres de A.

Solution : Le polynôme caractéristique de A est

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda.\mathrm{Id}) = \det \begin{pmatrix} \frac{1}{2} - \lambda & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{4} - \lambda \end{pmatrix} = (\frac{1}{2} - \lambda).(\frac{3}{4} - \lambda) - \frac{1}{8} =$$

$$= \lambda^2 - \frac{5}{4}\lambda + \frac{1}{4} = (x-1)(x - \frac{1}{4})$$

Donc $\lambda = 1, \frac{1}{4}$.

5. Est-ce que A est diagonalisable ?

Solution : Oui car d'après le théorème du cours, si A admet des valeurs propres réels distinctes, A est diagonalisable et il existe une matrice inversible P tel que

$$A = P^{-1}.\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}.P$$

6. Est-ce que la répartition de la population stabilise, c.à.d, est-ce que la limite

$$\lim_{k\to\infty} \begin{pmatrix} u_k \\ r_k \end{pmatrix}$$

existe ?

Solution : D'après la question précèdent,

$$A^k = P^{-1}.\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}^k.P = P^{-1}.\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4^k} \end{pmatrix}.P = P^{-1}.\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.P + \underbrace{\frac{1}{4^k}P^{-1}.\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.P}_{\to 0 \text{ pour } k>>0}$$

$$\lim_{k\to\infty} A^k = P^{-1}.\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.P$$

Soit $U = P^{-1}.\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.P$ et $V = P^{-1}.\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.P$.

On a un système

$$\begin{cases} U + V = \mathrm{Id} \\ U + \frac{1}{4}V = A \end{cases}$$

d'où :

$$\frac{3}{4}U = A - \frac{1}{4}\mathrm{Id}$$

$$U = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Donc, quand $k \to \infty$, on a

$$\lim_{k\to\infty} \begin{pmatrix} u_k \\ r_k \end{pmatrix} = \lim_{k\to\infty} A^k.\begin{pmatrix} u_0 \\ r_0 \end{pmatrix} = U.\begin{pmatrix} u_0 \\ r_0 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} u_0 \\ r_0 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} u_0 + r_0 \\ 2u_0 + 2r_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

A terme, il y aura donc un tiers de la population totale en zone urbaine et deux tiers en zone rurale. Notons que cette proportion est indépendante de la répartition initiale des populations entre les deux zones.

Exercice 7 (Espèces en compétition, équilibre instable)**.** On considère une population de rats R_k et de serpents S_k à un instant k donné où k progresse par mois. On suppose que les populations évoluent selon les lois suivantes :

$$S_{k+1} = 0.5S_k + 0.4R_k$$

$$R_{k+1} = -pS_k + 1.1R_k$$

— le facteur $0.5S_k$ dans la première équation signifie que s'il n'y a pas de rats, seulement la moitié des serpents survivront le mois prochain.
— le facteur $1.1R_k$ signifie que s'il n'y a pas de serpents, la population des rats augmente de 10% par mois.
— le $0.4R_k$ explique comment la population de rats aide la population de serpents à croître ;
— le paramètre $p > 0$ c'est le taux de mortalité des rats, tués par les serpents

1. Écrire la matrice A qui décrit l'évolution du système en fonction de p.

Solution :

$$\begin{pmatrix} S_{k+1} \\ R_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.4 \\ -p & 1.1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_k \\ R_k \end{pmatrix}$$

2. Calculer les valeurs propres réels de A en fonction de p.

Solution :

$$\det(\begin{pmatrix} 0.5 & 0.4 \\ -p & 1.1 \end{pmatrix} - \lambda.Id) = \det \begin{pmatrix} 0.5-\lambda & 0.4 \\ -p & 1.1-\lambda \end{pmatrix} = (0.5-\lambda).(1.1-\lambda)+0.4p = \lambda^2 - 1.6\lambda + 0.55 + 0.4p$$

$$\Delta = (-1.6)^2 - 4.(0.55 + 0.4p) = 0.36 - 1.6p$$

Donc pour avoir des valeurs propres réels il faut que

$$0.36 - 1.6p > 0 \Leftrightarrow 1.6p < 0.36 \Leftrightarrow p < 0.225$$

Donc $\lambda_1 = \dfrac{1.6 + \sqrt{0.36 - 1.6p}}{2}$ et $\lambda_2 = \dfrac{1.6 - \sqrt{0.36 - 1.6p}}{2}$.

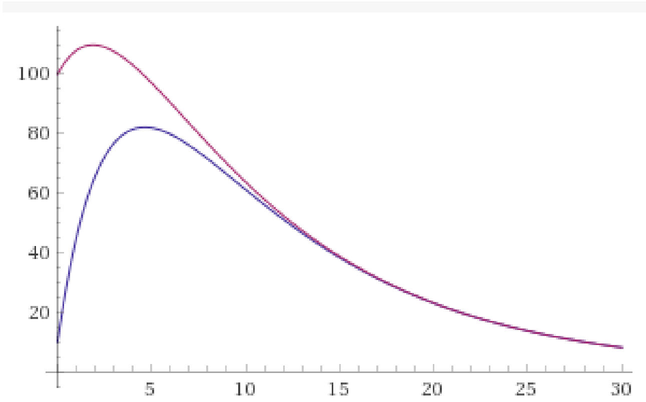
3. Décrire l'évolution du système, ie, $\lim\limits_{k \to +\infty} \begin{pmatrix} S_k \\ R_k \end{pmatrix}$ lorsque :

(a) $p = 0.104$;

Solution : Pour $p = 0.104$, on trouve $\lambda_1 = 1.02$ et $\lambda_2 = 0.58$. Vue que $\lambda_1 > 1 > \lambda_2 > 0$, la valeur propre $\lambda_2 = 0.58$ n'a pas de contribution asymptotique. Comme $\lambda_1 > 1$, le deux populations vont proliférer.

(b) $p = 0.2$;

Solution : Pour $p = 0.2$, on trouve $\lambda_1 = 0.9$ et $\lambda_2 = 0.7$. Comme les deux valeurs propres sont positives et inférieurs à 1, les deux espèces vont disparaître. Voir Lien Wolframalpha. Voici les résultats pour $S_0 = 10$ et $R_0 = 100$:



(c) $p = 0.125$;

Solution : Pour $p = 0.125$, on trouve $\lambda_1 = 1.0$ (avec vecteur propre $(\frac{4}{5}, 1)$) et $\lambda_2 = 0.6$ (avec vecteur propre $(4, 1)$).Comme $0 < \lambda_2 < 1$, il y a que la contribution de λ_1. Mais $\lambda_1 = 1$ implique que les deux populations seront en équilibre, c'est à dire, les effectifs de chaque population resteront constants. Voici les résultats pour une population iniciale de $S_0 = 10, R_0 = 100$:

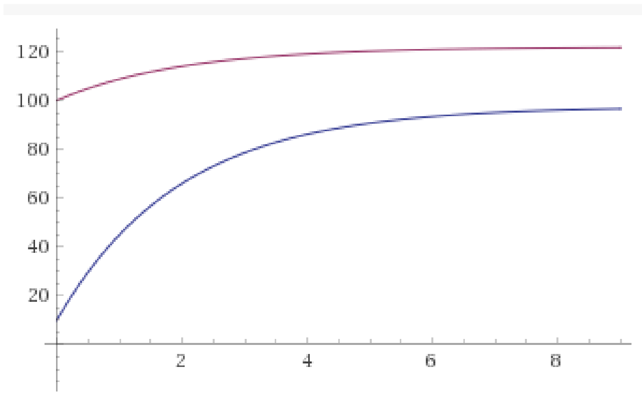


FIGURE 1 – Serpents

Cependant, c'est un équilibre instable, dans le sens où une petite variation du paramètre p (par exemple, par une nouvelle maladie des serpents), peut nous faire revenir soit à l'extinction (4), soit à la prolifération (1).

Exercice 8. On considère une population d'animaux sauvages divisée en deux classes d'âge, (les jeunes et les adultes), et l'on appelle $j(n)$ et $a(n)$ les effectifs dans la classe d'âge au temps n. Soient f_j et m_j (resp. f_a et m_a) le taux de natalité et de mortalité des individus de la classe, et enfin p la proportion d'individus passant de la classe jeune à la classe adulte.

Partie I

1. Exprimer $j(n+1)$ en fonction de $j(n)$ et $a(n)$.

Solution : $j(n+1) = j(n) + f_a.a(n) - m_j.j(n) - p.j(n)$.

2. Exprimer $a(n+1)$ en fonction de $a(n)$ et $j(n)$.

Solution : $a(n+1) = p.j(n) - m_a.a(n) + a(n)$

3. Posons $E(n) = \begin{pmatrix} j(n) \\ a(n) \end{pmatrix}$. Ecrire la matrice A telle que $E(n+1) = A.E(n)$.

Solution : $A = \begin{pmatrix} 1 - m_j - p & f_a \\ p & 1 - m_a \end{pmatrix}$.

Partie II

On prend $f_j = 0$, $p = \frac{1}{2}$, $m_j = \frac{1}{4}$, $f_a = 2$ et $m_a = \frac{3}{4}$.

1. Expliciter A.

Solution : Avec les valeurs numériques données, on a $A = \begin{pmatrix} 1/4 & 2 \\ 1/2 & 1/4 \end{pmatrix}$.

2. On pose $P = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Montrer que $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -3/4 & 0 \\ 0 & 5/4 \end{pmatrix}$.

Solution : Par la formule du cours, on a $P^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ et par le calcul on établit $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -3/4 & 0 \\ 0 & 5/4 \end{pmatrix}$.

3. En déduire $E(n)$ en fonction de n et de $E(0)$.

Solution : $A^n = (PDP^{-1})(PDP^{-1})\dots(PDP^{-1}) = PD^nP^{-1}$. Comme D est une matrice diagonale, $D^n = \begin{pmatrix} (-3/4)^n & 0 \\ 0 & (5/4)^n \end{pmatrix} P^{-1}$. D'où

$$A^n = PD^nP^{-1} = P\begin{pmatrix} (-3/4)^n & 0 \\ 0 & (5/4)^n \end{pmatrix} P^{-1}.$$

Après calcul, on trouve

$$A^n = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\left(\frac{-3}{4}\right)^n + \frac{1}{2}\left(\frac{5}{4}\right)^n & -\left(\frac{-3}{4}\right)^n + \left(\frac{5}{4}\right)^n \\ \frac{-1}{4}(\frac{-3}{4})^n + \frac{1}{4}\left(\frac{5}{4}\right)^n & \frac{1}{2}\left(\frac{-3}{4}\right)^n + \frac{1}{2}\left(\frac{5}{4}\right)^n \end{pmatrix}.$$

$$j(n) = j(0)\left[\frac{1}{2}\left(\frac{-3}{4}\right)^n + \frac{1}{2}\left(\frac{5}{4}\right)^n\right] + a(0)\left[-\left(\frac{-3}{4}\right)^n + \left(\frac{5}{4}\right)^n\right]$$
$$a(n) = j(0)\left[\frac{-1}{4}\left(\frac{-3}{4}\right)^n + \frac{1}{4}\left(\frac{5}{4}\right)^n\right] + a(0)\left[\frac{1}{2}\left(\frac{-3}{4}\right)^n + \frac{1}{2}\left(\frac{5}{4}\right)^n\right]$$

4. Calculer la limite du rapport $\dfrac{j(n)}{a(n)}$ lorsque n tend vers ∞ et montrer qu'elle ne dépend pas de $E(0)$.

Solution :

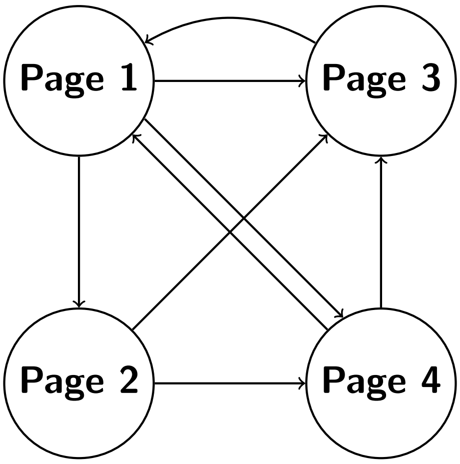
$$\frac{j(0)\left[\frac{1}{2}(\frac{-3}{4})^n+\frac{1}{2}(\frac{5}{4})^n\right]+a(0)\left[-(\frac{-3}{4})^n+(\frac{5}{4})^n\right]}{j(0)\left[\frac{-1}{4}(\frac{-3}{4})^n+\frac{1}{4}(\frac{5}{4})^n\right]+a(0)\left[\frac{1}{2}(\frac{-3}{4})^n+\frac{1}{2}(\frac{5}{4})^n\right]}=\frac{j(0)\left[\frac{1}{2}(\frac{-3}{5})^n+\frac{1}{2}\right]+a(0)\left[-(\frac{-3}{5})^n+1\right]}{j(0)\left[\frac{-1}{4}(\frac{-3}{5})^n+\frac{1}{4}\right]+a(0)\left[\frac{1}{2}(\frac{-3}{5})^n+\frac{1}{2}\right]}$$

et

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{j(n)}{a(n)}=\frac{\dfrac{j(0)}{2}+a(0)}{\dfrac{j(0)}{4}+\dfrac{a(0)}{2}}=2.$$

*R*emarque : Ce modèle matriciel de taille 2 est tiré de "Mathématiques et statistique pour les sciences de la nature", G. Biau-J. Droniou- M. Herzlich.

Exercice 9 (L'algorithme de Google, Théorème de Perron–Frobenius)**.** On considère 4 pages web avec des liens



Les sommets du graphe représentent les pages web, et on relie deux sommets i et j par une arête s'il existe un lien (hypertexte) de la page i vers la page j.

Pour savoir dans quel ordre le moteur de recherche doit afficher ces pages dans un navigateur web, on aimerait pouvoir associer à chaque sommet i du graphe un nombre positif x_i qui représente la "pertinence/popularité" de la page i. Par exemple, la page 1 ne contient aucun lien vers elle-même et contient des liens vers la page 2, 3 et 4 et donc, la distribution des liens est donée par le vecteur colonne $P_1=\begin{pmatrix}0\\ \frac{1}{3}\\ \frac{1}{3}\\ \frac{1}{3}\end{pmatrix}$. De même pour les autres pages, on obtient une matrice

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Comme on a 4 pages et nous ne savons pas encore comment les classer, supossons que les pages Web sont également importantes et que leur vecteur de classement est $X_0 = (\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4})$. L'algorithme de Google établit le bon classement comme le résultat du processus de stabilisation

$$X_0, \quad M.X_0, \quad M^2.X_0, \quad M^3.X_0, \quad .... \quad \lim_{n\to\infty} M^k.X_0$$

1. Montrer que le polynôme characteristique de M est $p(\lambda) = \frac{1}{12}(x-1)(12x^3 + 12x^2 + 6x + 1)$ et donc que 1 est valuer propre de M de multiplicité 1.
2. Calculer une base V du sous-espace propre associée à 1.
3. Montrer que $\lim_{n\to\infty} M^k = P^{-1}. \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} .P$
4. Montrer que $\lim_{n\to\infty} M^k X_0$ est un vecteur propre de valuer propre 1 et donc $\lim_{n\to\infty} M^k X_0 = \alpha V$ pour $\alpha \in \mathbb{R}$ unique.
5. Calculer le classement de Google.

Solution : Si la limite existe et est non-nulle, il faut que M admet 1 comme valeur propre. C'est bien le cas car

$$\text{dét} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & -1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 0 & -1 \end{pmatrix} = 0$$

Dans ce cas, il est facile de voir que la limite existe, donnée par un vecteur propre associé $\vec{v} = (2, 2/3, 3/2, 1)$. Donc le classement est $P1, P3, P4, P2$.

Pour aller plus loin

Exercice 10. Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Trouver, sans calculer le polynôme caractéristique, les valeurs propres. Cette matrice est-elle diagonalisable ?

Solution :

1. On a vu pendant le TD 1 que $A.A = A^2 = 3A$. Donc, pour tout vecteur X, $A.X$ est un vector propre de A de valeur propre 3.
2. Le fait que les trois lignes sont identiques, implique que dét $A = 0$ et donc 0 est une valeur propre de A. Plus précisement, par Pivot de Gauss on voit que A est de rang 1 et donc 0 est valeur propre avec sous-espace propre de dimension 2.

Donc A est diagonalisable.

Exercice 11. Soit a et b deux nombres réels. On définit par récurrence $u_0 = a, u_1 = b$ et

$$u_{n+2} = u_{n+1} + 2u_n$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose

$$U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix}$$

1. Montrer que la suite de vecteurs $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifié une relation de récurrence telle que $U_0 = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ et $U_{n+1} = A.U_n$ où A est une matrice 2×2 que l'on déterminera.

Solution :

$$\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix}$$

2. Montrer que A est diagonalisable et donner une matrice de passage P telle que $A = P^{-1}D.P$ où D est une matrice diagonale.

Solution :

$$p(\lambda) = -\lambda.(1-\lambda) - 2 = -\lambda + \lambda^2 - 2 = (\lambda - 2)(\lambda + 1)$$

Donc A est diagonalisable avec valeurs propres distinctes 2 et -1.

Pour la valeur propre 2, le sous-espace propre est donnée par les solutions de

$$2x = y$$

donc un vecteur propre est $(1, 2)$.

Pour la valeur propre -1, le sous-espace propre est donnée par les solutions de

$$x + y = 0$$

donc un vecteur propre est $(1, -1)$.
Donc,

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

avec

$$P^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

3. En déduire une expresion explicite de u_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Solution :

$$\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^n .U_0 = P^{-1}.D^n P.U_0 =$$

$$= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & (-1)^n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 &) - 1)^n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a + b \\ 2a - 1b \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2^n a + 2^n b \\ (-1)^n (2a - b) \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2^n a + 2^n b + (-1)^n (2a - b) \\ 2^{n+1} a + 2^{n+1} b + (-1)^{n+1} (2a - b) \end{pmatrix}$$