Feuille 6
Diagonalisation

Les feuilles d'exercices sont découpées en trois types d'exercice :

— Les *indispensables* : à savoir faire en autonomie.

— Les *exercices d'application* : pour mieux maîtriser et comprendre le cours.

— *Pour aller plus loin* : exercices présentant des développements mathématiques ou des études de modélisations de phénomènes issues d'autres disciplines.

Indispensables

Exercice 1. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$. Trouver les valeurs propres de A et les sous-espaces propres correspondant. En déduire une matrice inversible P telle que $P^{-1}AP$ soit diagonale.

Exercice 2. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 6 & -1 \\ 6 & 0 & 6 \\ -1 & 6 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ -1 & 3 & -1 \\ 3 & -3 & 1 \end{pmatrix}$,

Pour chaque matrice :

1. Trouver les valeurs propres et montrer que la matrice est diagonalisable.
2. Trouver une base de vecteur propres pour chaque matrice.
3. Montrer que les sous-espaces propres de A sont orthogonaux.
4. Pour chaque matrice, trouver une matrice P de passage de la base canonique à une base de vecteurs propres. Calculer P^{-1} et $P^{-1}.(-).P$ pour chaque exemple.

Exercice 3.

1. Montrer sans calcul que la matrice
$$\begin{pmatrix} \pi & 1 & 1 \\ 0 & \pi & 1 \\ 0 & 0 & \pi \end{pmatrix}$$
n'est pas diagonalisable.
2. Montrer sans calcul que la matrice
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$
est diagonalisable.
3. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a \neq b$. Est-ce que les matrices
$$C = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 0 & b & 1 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix} \quad et \quad D = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$$
sont diagonalisables ?

4. Montrer que la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

n'est pas diagonalisable.

Exercice 4. Soit

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que C est diagonalisable
2. Trouver une matrice P de passage de la base canonique à une base de vecteurs propres de C.
3. Calculer P^{-1} et $P^{-1}.C.P$.

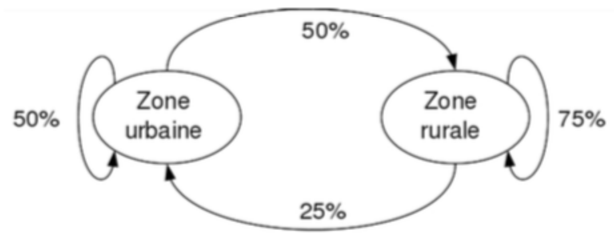
Exercice 5. Soit

$$A = \begin{pmatrix} -4 & -6 & 0 \\ 3 & 5 & 0 \\ 3 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

1. Diagonaliser A.
2. Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Applications

Exercice 6. On considère le problème de migration de population entre les zones urbaines et les zones rurales. Chaque année, un mouvement de population entre ces deux zones s'opère de la façon suivante :
— la moitié des habitants en zone urbaine partent habiter en zone rurale, alors que l'autre moitié reste résidante en zone urbaine,
— un quart des habitants en zone rurale rejoignent une zone urbaine, les trois quarts restant en zone rurale.
Le mouvement de population est indiqué par la figure suivante :



Notons r_0 et u_0 la répartition initiale de la population en proportion. Notons r_k la proportion de la population totale qui habite en zone rurale à la fin de la k-ième année et u_k la proportion de population qui habite en zone urbaine pour la même année. S'agissant de proportion de population, on a, pour toute année k,

$$r_k + u_k = 1$$

.

1. Écrire r_{k+1} et u_{k+1} en fonction r_k et u_k

2. Déterminer la matrice A qui permet d'écrire la relation de la question précédente sous la forme matricielle suivante :
$$\begin{pmatrix} u_{k+1} \\ r_{k+1} \end{pmatrix} = A. \begin{pmatrix} u_k \\ r_k \end{pmatrix}$$
A est appelée la matrice de transition du système.
3. Montrer que
$$\begin{pmatrix} u_k \\ r_k \end{pmatrix} = A^k. \begin{pmatrix} u_0 \\ r_0 \end{pmatrix}$$
4. Calculer les valeurs propres de A.
5. Est-ce que A est diagonalisable ?
6. Est-ce que la répartition de la population se stabilise, c.à.d, est-ce que la limite
$$\lim_{k\to\infty} \begin{pmatrix} u_k \\ r_k \end{pmatrix}$$
existe ?

Exercice 7 (Espèces en compétition, équilibre instable)**.** On considère une population de rats R_k et de serpents S_k à un instant k donné où k progresse par mois. On suppose que les populations évoluent selon les lois suivantes :

$$S_{k+1} = 0,5S_k + 0,4R_k$$

$$R_{k+1} = -pS_k + 1,1R_k$$

— le facteur $0,5S_k$ dans la première équation signifie que s'il n'y a pas de rats, seulement la moitié des serpents survivront le mois prochain.
— le facteur $1,1R_k$ signifie que s'il n'y a pas de serpents, la population des rats augmente de 10% par mois.
— le $0,4R_k$ explique comment la population de rats aide la population de serpents à croître.
— le paramètre $p > 0$ c'est le taux de mortalité des rats, tués par les serpents

1. Écrire la matrice A qui décrit l'évolution du système en fonction de p.
2. Calculer les valeurs propres réelles de A en fonction de p.
3. Décrire l'évolution du système, i.e., $\lim_{k\to+\infty} \begin{pmatrix} S_k \\ R_k \end{pmatrix}$ lorsque :
   (a) $p = 0,104$;
   (b) $p = 0,2$;
   (c) $p = 0,125$;

Exercice 8. On considère une population d'animaux sauvages divisée en deux classes d'âge, (les jeunes et les adultes), et l'on appelle $j(n)$ et $a(n)$ les effectifs dans la classe d'âge au temps n. Soient f_j et m_j (resp. f_a et m_a) le taux de natalité et de mortalité des individus de la classe, et enfin p la proportion d'individus passant de la classe jeune à la classe adulte.

Partie I

1. Exprimer $j(n+1)$ en fonction de $j(n)$ et $a(n)$.
2. Exprimer $a(n+1)$ en fonction de $a(n)$ et $j(n)$.

3. Posons $E(n) = \begin{pmatrix} j(n) \\ a(n) \end{pmatrix}$. Ecrire la matrice A telle que $E(n+1) = A.E(n)$.

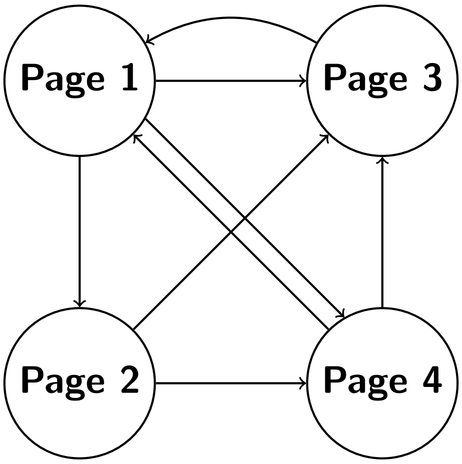
Partie II

On prend $f_j = 0$, $p = \frac{1}{2}$, $m_j = \frac{1}{4}$, $f_a = 2$ et $m_a = \frac{3}{4}$.

1. Expliciter A.
2. On pose $P = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Montrer que $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -3/4 & 0 \\ 0 & 5/4 \end{pmatrix}$.
3. En déduire $E(n)$ en fonction de n et de $E(0)$.
4. Calculer la limite du rapport $\frac{j(n)}{a(n)}$ lorsque n tend vers $+\infty$ et montrer qu'elle ne dépend pas de $E(0)$.

*R*emarque : Ce modèle matriciel de taille deux est tiré de "Mathématiques et statistique pour les sciences de la nature", G. Biau - J. Droniou -M. Herzlich.

Exercice 9 (L'algorithme de Google, Théorème de Perron–Frobenius)**.** On considère 4 pages web avec des liens



Les sommets du graphe représentent les pages web, et l'on relie deux sommets i et j par une arête s'il existe un lien (hypertexte) de la page i vers la page j.

Pour savoir dans quel ordre le moteur de recherche doit afficher ces pages dans un navigateur web, on aimerait pouvoir associer à chaque sommet i du graphe un nombre positif x_i qui représente la "pertinence/popularité" de la page i. Par exemple, la page 1 ne contient aucun lien vers elle-même et contient des liens vers la page 2, 3 et 4 et donc, la distribution des liens est donnée par le vecteur colonne $P_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$. De même pour les autres pages, on obtient une matrice

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Comme nous ne savons pas encore comment classer ces quatre pages, supposons que les pages Web sont également importantes et que leur vecteur de classement est $X_0 = (\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4})$. L'algorithme de Google établit le bon classement comme le résultat du processus de stabilisation

$$X_0, \quad M.X_0, \quad M^2.X_0, \quad M^3.X_0, \quad .... \quad \lim_{n\to\infty} M^k.X_0$$

1. Montrer que le polynôme caractéristique de M est $p(\lambda) = \frac{1}{12}(x-1)(12x^3 + 12x^2 + 6x + 1)$ et donc que 1 est valeur propre de M de multiplicité 1.
2. Calculer une base V du sous-espace propre associé à 1.
3. Montrer que $\lim_{n\to\infty} M^k = P^{-1}. \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} .P$
4. Montrer que $\lim_{n\to\infty} M^k X_0$ est un vecteur propre de valuer propre 1 et donc $\lim_{n\to\infty} M^k X_0 = \alpha V$ pour $\alpha \in \mathbb{R}$ unique.
5. Calculer le classement de Google.

Pour aller plus loin

Exercice 10. Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Trouver, sans calculer le polynôme caractéristique, les valeurs propres. Cette matrice est-elle diagonalisable ?

Exercice 11. Soient a et b deux nombres réels. On définit par récurrence $u_0 = a, u_1 = b$ et

$$u_{n+2} = u_{n+1} + 2u_n$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix}$$

1. Montrer que la suite de vecteurs $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie une relation de récurrence telle que $U_0 = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ et $U_{n+1} = A.U_n$ où A est une matrice 2×2 que l'on déterminera.
2. Montrer que A est diagonalisable et donner une matrice de passage P telle que $A = P^{-1}.D.P$ où D est une matrice diagonale.
3. En déduire une expression explicite de u_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.