Feuille de TD 3 : indications

Exercice 1. Les fonctions suivantes admettent-elles une limite au point indiqué ? Laquelle ?

(a) $f(x) = x\cos(1/x)$ quand $x \to 0$.

(b) $g(x) = e^{\frac{1}{x}}$ quand $x \to 0^-$.

(c) $h(x) = \sin(x)\ln(x)$ quand $x \to +\infty$.

(d) $i(x) = \dfrac{\sin(x^2)}{\cos(x) - 1}$ quand $x \to 0$.

Indications : (a) Encadrer f. (c) On pourra montrer que h n'a pas de limite en $+\infty$ en trouvant deux suites de valeurs (x_n) et (y_n) tendant vers $+\infty$ et le long desquelles h prend des valeurs très différentes (à cause du sinus). (d) DL.

Exercice 2. Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ telle que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(2x) = f(x)$.

(a) Démontrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad f(x) = f(x/2^n)$.

(b) En déduire que f est constante.

Indications : (a) Récurrence. (b) Faire tendre n vers $+\infty$.

Exercice 3. Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{Z}$. Prouver que f est constante.

Indication : Supposer que f n'est pas constante et prouver que f atteint une valeur non entière à l'aide d'un théorème fondamental sur les fonctions continues.

Exercice 4. Soit f une fonction continue de $[a, b]$ dans $[a, b]$. Démontrer qu'il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = c$.

Indication : Introduire la fonction $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = f(x) - x$ et étudier le signe de $g(a)$ et $g(b)$.

Exercice 5. Soit f une fonction strictement positive sur un segment $[a, b]$.

(a) Existe-t-il un nombre $\epsilon > 0$ tel que pour tout $x \in [a, b]$, $f(x) \geq \epsilon$?

(b) Et si f est continue ?

Indications : (a) Dessiner une fonction positive qui s'annule en un seul point et la modifier brutalement en ce point pour qu'elle reste maintenant strictement positive. (b) Vérifier que f atteint un minimum en un certain point.

Exercice 6. Les formules suivantes définissent des fonctions sur $\mathbb{R}$. En quels points sont-elles continues ? Dérivables ?

(a) $f(x) = \dfrac{x}{1+|x|}$.

(b) $g(x) = \cos(\sqrt{|x|})$.

(c) $h(x) = \dfrac{\sin x}{\ln|x|}$ si $x \notin \{0, 1, -1\}$ et $h(0) = h(\pm 1) = 0$.

Indications : Commencer par observer que la réponse est claire en la plupart des points. (a) En 0, regarder le taux de variation. (b) Idem, avec un DL, en faisant attention aux signes.

Exercice 7. Dériver.

(a) $a(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}} - \dfrac{1}{\sqrt{x^3}}$, pour $x \in \mathbb{R}_+^*$.

(b) $b(x) = x \tan x$ pour $x \in]-\pi/2, \pi/2[$.

(c) $c(x) = \dfrac{2x+3}{x-4}$, pour $x \in \mathbb{R}\backslash\{4\}$.

(d) $d(x) = \cos(\sin x) + e^{x^2}$, pour $x \in \mathbb{R}$.

(e) $e(x) = (\cos x)^{\sin x}$ pour $x \in]-\pi/2, \pi/2[$.

Indications : (a) Se ramener à des fonctions du type $x \mapsto x^a$. (e) $a^b = e^{b \ln a}$.

Exercice 8. Calculer la dérivée de $f : x \mapsto \arctan(x) + \arctan(1/x)$ sur $\mathbb{R}^*$. En déduire la valeur de $f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$.

Indication : $\mathbb{R}^*$ n'est pas un intervalle.

Exercice 9. Utiliser le théorème des accroissement finis pour majorer $\sqrt[3]{1001}$.

Indication : Estimer la différence avec $\sqrt[3]{1000} = 10$.

Exercice 10. Etant donnés des réels a et b, ainsi qu'un entier $n \geq 2$, on considère l'équation $x^n + ax + b = 0$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$. Prouver qu'elle admet au plus 2 solutions si n est pair et au plus 3 solutions si n est impair.

Indications : Raisonner par l'absurde. Appliquer plusieurs fois le théorème de Rolle pour trouver « trop » de racines pour la dérivée de l'équation.

Exercice 11. On dit qu'une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est uniformément continue si

$$\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x, y \in I, \quad |x-y| < \eta \implies |f(x) - f(y)| < \epsilon.$$

(a) Prouver que $f : x \mapsto |x|$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

(b) On suppose que f est dérivable et que sa dérivée f' est bornée sur l'intervalle I. Prouver que f est uniformément continue.

(c) Prouver que $f : x \mapsto x^2$ n'est pas uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

Indications : (a) Vérifier qu'on peut choisir $\eta = \epsilon$. (b) Accroissements finis. (c) Si on fixe $a > 0$, que dire de $(x+a)^2 - x^2$ quand $x \to +\infty$?

Exercice 12. (théorème de Heine) Soit f une fonction continue sur un segment $[a, b]$. On veut montrer que f est uniformément continue. Par l'absurde, on suppose que non.

(a) Vérifier qu'il existe $\epsilon > 0$ et des suites (x_n) et (y_n) dans $[a, b]$ telles que $(x_n - y_n)$ tend vers 0 et $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \epsilon$.

(b) Pourquoi peut-on supposer que les suites (x_n) et (y_n) sont convergentes ?

(c) Conclure.

Indications : (a) Ecrire la négation de l'expression quantifiée en tête de l'exercice 11. (b) Quel théorème du cours sur les suites permet de construire des suites convergentes ? (c) Passer à la limite quand $n \to +\infty$ pour trouver une contradiction.

Exercice 13. Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}_+$ telle que f' tend vers un réel ℓ en $+\infty$.

(a) Soit $\epsilon > 0$. Prouver qu'il existe un réel $A > 0$ tel que

$$\forall x > A, \quad \ell - \epsilon \leq \frac{f(x) - f(A)}{x - A} \leq \ell + \epsilon.$$

(b) En déduire que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \ell$.

Indications : (a) Accoissements finis. (b) Utiliser (a) pour encadrer $f(x)/x$ quand x est assez grand.

Exercice 14. Soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. On suppose que $f'' \geq 0$. (Une telle fonction est dite *convexe*.)

(a) Vérifier que f' est croissante et en déduire que pour $a, b \in I$ et $a < x < b$,

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq \frac{f(b) - f(x)}{b - x}.$$

(b) Une corde du graphe de f est par définition un segment reliant deux points $(a, f(a))$ et $(b, f(b))$ du graphe de f. Donner l'équation d'une telle corde, puis montrer que le graphe de f est situé au-dessous de chacune de ses cordes.

(c) Soient $a, b \in I$ tels que $a < b$. Démontrer les inégalités

$$f'(a) \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq f'(b).$$

(d) En déduire que le graphe de f est situé au-dessus de chacune de ses tangentes.

(e) Qu'en déduit-on pour les fonctions dont la dérivée seconde est négative ? (Une telle fonction est dite *concave*.)

(f) Application : démontrer les inégalités suivantes et les illustrer par un dessin.
- $\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \exp(x) \geq 1 + x.$
- $\forall x \in]-1, +\infty[, \qquad \ln(1+x) \leq x.$
- $\forall x \in [0, \pi/2], \qquad \frac{2}{\pi} x \leq \sin(x) \leq x.$

Indications : (a) et (c) Accroissements finis.

Exercice 15. (sinus et cosinus hyperboliques) Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose

$$\mathrm{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \qquad \mathrm{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

(a) Etudier les variations et tracer le graphe des deux fonctions ainsi définies.

(b) Etablir la formule : $\qquad \forall x \in \mathbb{R}, \qquad \mathrm{ch}(x)^2 - \mathrm{sh}(x)^2 = 1.$

(c) Quel est le développement limité de sh et ch en 0 ?

(d) Vérifier que sh : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ admet une réciproque dérivable Argsh : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Calculer Argsh$'$.

(e) Etablir la formule : $\qquad \forall x \in \mathbb{R}, \qquad \mathrm{Argsh}(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right).$

(f) Vérifier que la fonction ch : $\mathbb{R}_+ \to [1, +\infty[$ admet une réciproque continue Argch : $[1, +\infty[\to \mathbb{R}_+$. Déterminer en quels points la fonction Argch est dérivable et calculer sa dérivée.

(g) Etablir la formule : $\qquad \forall x \in [1, +\infty[, \qquad \mathrm{Argch}(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right).$

Exercice 16. On considère la fonction tangente hyperbolique $\mathrm{th} = \frac{\mathrm{sh}}{\mathrm{ch}}$.

(a) Etablir les formules : $\qquad \forall x \in \mathbb{R}, \qquad \mathrm{th}'(x) = 1 - \mathrm{th}(x)^2 = \frac{1}{\mathrm{ch}(x)^2}.$

(b) Etudier les variations et tracer le graphe de th.

(c) Démontrer que th : $\mathbb{R} \to]-1, 1[$ admet une réciproque Argth $:]-1, 1[\to \mathbb{R}$ donnée par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \mathrm{Argth}(x) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right).$$