Feuille 1
Calcul matriciel

Les feuilles d'exercices sont découpées en trois types d'exercice :
- Les *indispensables* : à savoir faire en autonomie.
- Les *exercices d'application* : pour mieux maîtriser et comprendre le cours.
- *Pour aller plus loin* : exercices présentant des développements mathématiques ou des études de modélisations de phénomènes issues d'autres disciplines.

Indispensables

Exercice 1 (Produits de matrices)**.** On considère :

$$X = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \ , \ Z = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \ , \ A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \ , \ D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Quels sont les produits matriciels possibles ? Les calculer.

Solution : En regardant les tailles (m, n) des matrices, les produits que l'on peut former sont AX, BX, DZ, AB, BA, AA, BB, DD ; en effet il faut que le nombre de lignes de la seconde matrice soit égal au nombre de colonnes de la première.

Le calcul donne $AX = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $BX = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $DZ = \begin{pmatrix} 13 \\ 7 \\ 11 \end{pmatrix}$;

puis $AB = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$, $BA = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $AA = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$, $BB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$;

enfin $DD = \begin{pmatrix} 13 & 9 & 14 \\ 11 & 11 & 14 \\ 11 & 9 & 16 \end{pmatrix}$.

Exercice 2 (Identités remarquables)**.** Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Calculer AB et BA.
2. Calculer $(A + B)^2$.
3. Calculer $A^2 + 2AB + B^2$ et $A^2 + AB + BA + B^2$ et conclure.
4. Calculer, s'ils existent, les inverses de A et de B.

Solution :

1. On a $AB = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ et $BA = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$.
2. On a $(A + B)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$.

3. On a $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. On calcule donc $A^2 + 2AB + B^2 = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$ et $A^2 + AB + BA + B^2 = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} = (A+B)^2$.
   Bilan : les identités remarquables ne sont plus vraies avec des matrices. De fait, elles ne sont vérifiées que si $AB = BA$.
4. Pour l'inverse de A, on cherche une matrice $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ telle que $M.A$ (ou $A.M$! seul cas de commutativité avérée) $= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. On a

$$M.A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & a+b \\ c & c+d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   Donc, on a $M = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = A^{-1}$

   Pour l'inverse de B, on cherche une matrice $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ telle que $M.B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. On a

$$M.B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b & a \\ -d & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   Donc, on a $M = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = B^{-1}$.

Exercice 3 (La transposée)**.** Soit M une matrice dans $M_{n,m}(\mathbb{R})$, $M = (m_{ij})$. La matrice transposée de M, M^t, est par définition la matrice où la coordonnée ij est la coordonnée m_{ji} de M. Dans $M_{3,4}(\mathbb{R})$ soient $A = \begin{pmatrix} -5 & -4 & -3 & -2 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. Écrire la matrice A^t puis calculer $B\,A^t$.

Solution : On a $A^t = \begin{pmatrix} -5 & -1 & 3 \\ -4 & 0 & 4 \\ -3 & 1 & 5 \\ -2 & 2 & 6 \end{pmatrix}$, puis $B\,A^t = \begin{pmatrix} -2 & 6 & 14 \\ -12 & -4 & 4 \\ -6 & 2 & 10 \end{pmatrix}$

Applications

Exercice 4 (Matrices de rotation)**.** Soit θ un nombre réel. On considère la matrice

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

1. On considère un vecteur non nul $v = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}^2$. Montrer qu'il existe $r > 0$ et $\phi \in \mathbb{R}$ tel que $v = \begin{pmatrix} r\cos(\phi) \\ r\sin(\phi) \end{pmatrix}$.

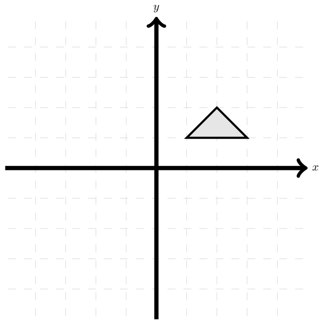
2. Calculer $R_\theta \cdot v$ en fonction de r, ϕ et θ.
3. Montrer que l'application $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, donnée par $v \to R_\theta v$, est la rotation de centre 0 et d'angle θ.
4. On considère un autre nombre réel θ'. Calculer $R_\theta R_{\theta'}$. Quelle est l'application de $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ correspondante ?

Solution :

1. Posons $z = a + ib$. En posant $r = |z|$ et $\phi = \arg(z)$, on a $z = re^{i\phi}$, puis $a = \mathrm{Re}(z) = r\cos(\phi)$ et $b = \mathrm{Im}(z) = r\sin(\phi)$.
2. On calcule
$$R_\theta v = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r\cos(\phi) \\ r\sin(\phi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r(\cos(\phi)\cos(\theta) - \sin(\phi)\sin(\theta)) \\ r(\cos(\phi)\sin(\theta) + \sin(\phi)\cos(\theta)) \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} r\cos(\phi+\theta) \\ r\sin(\phi+\theta) \end{pmatrix}$$
On remarque qu'il est bon de connaître ses formules de trigonométrie.
3. Revenons à la notation complexe. En posant $\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = R_\theta v$ et $w = c + id$, d'après les questions 1 et 2 nous avons que $z = re^{i\phi}$ et $w = re^{i(\phi+\theta)} = e^{i\phi}z$. La distance entre v et 0, qui vaut r, est donc la même que celle entre $R_\theta v$ et 0, et l'angle entre v et $R_\theta v$ est égal à ϕ. L'application $v \to R_\theta v$ est donc la rotation de centre 0 et angle θ.
4. Option 1 : On calcule :
$$R_\theta R_{\theta'} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\theta') & -\sin(\theta') \\ \sin(\theta') & \cos(\theta') \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \cos(\theta')\cos(\theta) - \sin(\theta')\sin(\theta) & -(\cos(\theta')\sin(\theta) + \sin(\theta')\cos(\theta)) \\ \cos(\theta')\sin(\theta) + \sin(\theta')\cos(\theta) & \cos(\theta')\cos(\theta) - \sin(\theta')\sin(\theta) \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \cos(\theta+\theta') & -\sin(\theta+\theta') \\ \sin(\theta+\theta') & \cos(\theta+\theta') \end{pmatrix} = R_{\theta+\theta'}$$
Option 2 : la rotation de centre 0 et d'angle θ suivie de la rotation de centre 0 et d'angle θ' est la rotation de centre 0 et d'angle $\theta + \theta'$. Donc $R_\theta R_{\theta'} = R_{\theta+\theta'}$.

Exercice 5 (Traitement d'images)**.** On considère le triangle dont les coordonnées des sommets sont :

x	1	2	3
y	1	2	1



Soient

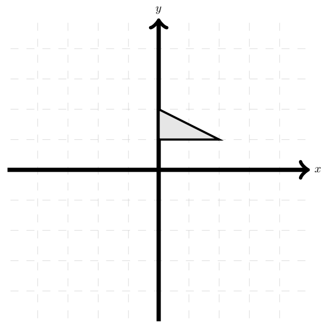
$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ D = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix},$$

Quelles sont les figures géométriques obtenues en appliquant respectivement les matrices A, B, C et D aux sommets du triangle ? Quelles sont les images de l'intérieur du triangle ?

Solution :

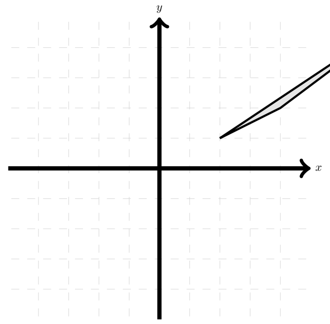
1. Il faut calculer le produit de matrices

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$



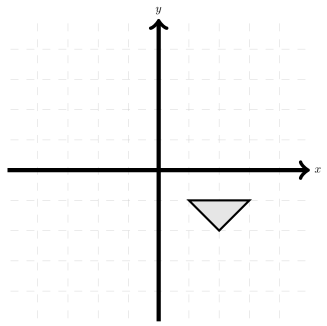
2. Il faut calculer le produit de matrices

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 8 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$



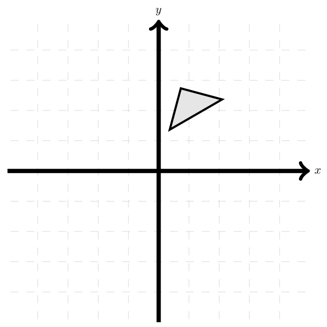
3. Il faut calculer le produit de matrices

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$



4. Il faut calculer le produit de matrices

$$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.366025 & 0.732051 & 2.09808 \\ 1.36603 & 2.73205 & 2.36603 \end{pmatrix}$$



Exercice 6 (La suite de Fibonacci)**.** On considère la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $f_0 = 0$, $f_1 = 1$ et pour tout $n \geq 0$, $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$. On note $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Soit k un entier naturel.

1. Calculer par récurrence, en fonction des éléments de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, la valeur de $M^k \begin{pmatrix} 0 \\ 1. \end{pmatrix}$

2. Exprimer les coefficients de M^k en fonction de f_{k-1}, f_k et f_{k+1}.

Solution :

1. Montrons, par récurrence sur $k \geq 0$, que $M^k \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_k \\ f_{k+1} \end{pmatrix}$

   Initialisation : Pour $k = 0$, on a bien $M^0 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \end{pmatrix}$

   Hérédité : Soit $k \geq 0$ tel que $M^k \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_k \\ f_{k+1} \end{pmatrix}$. On a alors $M^{k+1} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = M(M^k \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}) = M \begin{pmatrix} f_k \\ f_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{k+1} \\ f_k + f_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{k+1} \\ f_{k+2} \end{pmatrix}$.

2. D'après la question 1, $M^k \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_k \\ f_{k+1} \end{pmatrix}$, donc la deuxième colonne de M^k est $\begin{pmatrix} f_k \\ f_{k+1} \end{pmatrix}$. Or, puisque $M^{k+1} = M^k \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, la deuxième colonne de M^k est égale à la première colonne de M^{k+1}. On déduit que, si $k \geq 0$, on a $M^k = \begin{pmatrix} f_{k-1} & f_k \\ f_k & f_{k+1} \end{pmatrix}$.

Pour aller plus loin

Exercice 7 (Puissance n-ième)**.** On considère une matrice diagonale $D = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ (a et b réels) et la matrice $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Montrer par récurrence sur $n \geq 1$, que $D^n = \begin{pmatrix} a^n & 0 \\ 0 & b^n \end{pmatrix}$ et $T^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
2. Calculer la matrice $X = D + T - \mathrm{I}_2$.
3. Montrer que $X^n = \begin{pmatrix} a^n & c_n \\ 0 & b^n \end{pmatrix}$, avec $c_n = \sum_{i=0}^{n-1} a^i b^{n-i-1}$.

Solution :

1. Montrons, par récurrence sur $n \geq 1$, que $D^n = \begin{pmatrix} a^n & 0 \\ 0 & b^n \end{pmatrix}$ et $T^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

   Initialisation : Lorsque $n = 1$, on a bien $D = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ et $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

   Hérédité : Soit $n \geq 1$ tel que $D^n = \begin{pmatrix} a^n & 0 \\ 0 & b^n \end{pmatrix}$ et $T^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. On a alors $D^{n+1} = D^n D = \begin{pmatrix} a^n & 0 \\ 0 & b^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^{n+1} & 0 \\ 0 & b^{n+1} \end{pmatrix}$. De plus, $T^{n+1} = T^n T = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & n+1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2. On a $X = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & b \end{pmatrix}$.

3. Montrons, par récurrence sur $n \geq 1$, que $X^n = \begin{pmatrix} a^n & c_n \\ 0 & b^n \end{pmatrix}$, avec $c_n = \sum_{i=0}^{n-1} a^i b^{n-i-1}$.

   Initialisation : On a bien $X^1 = X = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & b \end{pmatrix}$. Donc $c_1 = 1$.

Hérédité : Soit $n \geq 1$ tel que $X^n = \begin{pmatrix} a^n & c_n \\ 0 & b^n \end{pmatrix}$ avec $c_n = \sum_{i=0}^{n-1} a^i b^{n-i-1}$.

On calcule alors $X^{n+1} = X^n X = \begin{pmatrix} a^n & c_n \\ 0 & b^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^{n+1} & a^n + bc_n \\ 0 & b^{n+1} \end{pmatrix}$. On a donc $c_{n+1} = a^n + b \sum_{i=0}^{n-1} a^i b^{n-i-1} = a^n + \sum_{i=0}^{n-1} a^i b^{n-i} = \sum_{i=0}^{(n+1)-1} a^i b^{(n+1)-i-1}$.

Exercice 8. On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Pour tout $n \geqslant 1$, calculer A^n.

<u>Solution</u> : On commence par

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} = 3.A$$

Donc,

$$A^3 = A.A^2 = A.3.A = 3.A^2 = 3.3.A = 3^2.A$$

Par récurrence,

$$A^n = 3^{n-1}.A$$