Feuille 8 (Probabilités 2)
Espace probabilisé

Les feuilles d'exercices sont découpées en trois types d'exercice :
- Les *indispensables* : à savoir faire en autonomie.
- Les *exercices d'application* : pour mieux maîtriser et comprendre le cours.
- *Pour aller plus loin* : exercices présentant des développements mathématiques ou des études de modélisations de phénomènes issues d'autres disciplines.

Indispensables

Exercice 1 (Vrai ou Faux ?)**.**

1. Deux événements incompatibles sont indépendants.
2. Deux événements indépendants sont incompatibles.
3. Deux événements de probabilité non nulle et incompatibles ne sont jamais indépendants.
4. Si A et B sont deux événements indépendants, alors $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$.

Solution :

1. FAUX, considérons A un événement tel que $0 < \mathbb{P}(A) < 1$. Alors $\mathbb{P}(A^c) = 1 - \mathbb{P}(A) > 0$ de sorte que $\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(A^c) > 0$, alors que $\mathbb{P}(A \cap A^c) = 0$, donc A et A^c ne sont pas indépendants, alors qu'ils sont incompatibles (puisque, justement, $\mathbb{P}(A \cap A^c) = 0$).
2. FAUX, si je lance un dé équilibré les événements $A =$"résultat pair" et $B =$"résultat strictement plus grand que 2" sont indépendants mais pas incompatibles.
3. VRAI, si A et B sont tels que $\mathbb{P}(A) > 0$, $\mathbb{P}(B) > 0$ et $\mathbb{P}(A \cap B) = 0$, alors nécessairement $\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) > 0$ qui n'est donc pas égal à $\mathbb{P}(A \cap B)$, ce qui implique que les événements ne sont pas indépendants.
4. FAUX, en reprenant l'exemple de la question 2, A et B sont deux événements indépendants et $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(\{2, 3, 4, 5, 6\}) = 5/6$ alors que $\mathbb{P}(A) = 1/2$ et $\mathbb{P}(B) = 2/3$ de sorte que $\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) = 7/6$.

Exercice 2.

1. On truque un dé cubique de telle sorte que la probabilité de chaque face soit proportionnelle au numéro qu'elle porte. Quelle est la probabilité d'obtenir un 6 pour un seul lancer ?

Solution : Notons p_i la probabilité d'avoir i pour i entre 1 et 6. Par hypothèse, il existe $\alpha > 0$ tel que $p_i = \alpha i$ pour tout i. Comme la somme des probabilités doit faire 1, on a

$$1 = \sum_{i=1}^{6} p_i = \alpha \sum_{i=1}^{6} i = 21\alpha \qquad \Rightarrow \qquad \alpha = \frac{1}{21}$$

et donc $p_6 = 6/21 = 3/7$.

2. On lance une pièce équilibrée n fois, les lancers étant indépendants. Quelle est la probabilité d'obtenir au moins une fois pile ? Quelle est la probabilité d'obtenir exactement une fois pile ?

Solution : Pour la première question, évaluons plutôt la probabilité de l'événement complémentaire, à savoir de n'avoir fait aucun pile, c'est-à-dire de n'avoir fait que face. Notons A_i l'événement "face obtenu au i^{eme} lancer". Par indépendance,

$$\mathbb{P}(A_1 \cap \cdots \cap A_n) \;=\; \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i) \;=\; \frac{1}{2^n}\,.$$

La probabilité d'avoir eu au moins un pile est donc $1 - 1/2^n$.

Pour la seconde question, notons B_i l'événement "tous les lancers ont donné face sauf le i^{eme} qui a donné pile". Autrement dit, $B_i = A_1 \cap \cdots \cap A_{i-1} \cap A_i^c \cap A_{i+1} \cap \cdots \cap A_n$. Les événements $B_1, \ldots, B_n$ sont incompatibles et leur union est exactement l'événement "il y a eu exactement un pile". D'autre part, pour tout i entre 1 et n, par indépendance des A_k,

$$\mathbb{P}(B_i) = \mathbb{P}(A_1 \cap \cdots \cap A_{i-1} \cap A_i^c \cap A_{i+1} \cap \cdots \cap A_n) \;=\; \mathbb{P}(A_i^c) \prod_{k \neq i}^{n} \mathbb{P}(A_k) \;=\; \frac{1}{2^n}\,.$$

Donc, finalement, la probabilité d'avoir eu exactement un pile est

$$\mathbb{P}(B_1 \cup \cdots \cup B_n) \;=\; \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(B_i) \;=\; \frac{n}{2^n}\,.$$

3. L'examen final d'un cours de géographie est un simple QCM avec trois questions, deux réponses proposées par question. Une erreur au maximum est acceptée : deux ou trois erreurs sont éliminatoires. Un étudiant qui ne connaît pas son cours décide de répondre au hasard (uniformément) à chacune des questions (indépendamment les unes des autres). Il estime qu'il a alors une chance sur trois de réussir l'examen. Est-il meilleur en probabilités qu'en géographie ?

Solution : Notons A_i l'événement "bonne réponse à la question i" pour $i = 1, 2, 3$, et E l'événement "examen réussi". Alors, en faisant une distinction de cas selon que l'étudiant a répondu aux trois questions correctement, ou seulement à deux d'entre elles et auquel cas lesquelles, en utilisant que ces 4 cas sont incompatibles, on obtient :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(E) &= \mathbb{P}\left((A_1 \cap A_2 \cap A_3) \cup (A_1^c \cap A_2 \cap A_3) \cup (A_1 \cap A_2^c \cap A_3) \cup (A_1 \cap A_2 \cap A_3^c)\right) \\
&= \mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3) + \mathbb{P}(A_1^c \cap A_2 \cap A_3) + \mathbb{P}(A_1 \cap A_2^c \cap A_3) + \mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3^c)\,.
\end{aligned}$$

En utilisant l'indépendance des A_i, et le fait qu'ils sont de probabilité $1/2$, toutes ces probabilités sont égales à $1/2^3 = 1/8$, et en les sommant on obtient $\mathbb{P}(E) = 4/8 = 1/2$. L'étudiant n'est donc pas très bien parti non plus pour son examen de probabilités.

Donnons également une démonstration alternative, sans aucun calcul, basé sur un argument de symétrie. Considérons un deuxième étudiant qui décide de regarder la copie du premier étudiant mais de répondre sur sa propre copie exactement les réponses contraires. Les réponses du premier étant indépendantes d'une question à l'autre et ayant à chaque fois une chance sur deux d'être correct, ce sera également le cas pour le second étudiant. Donc la probabilité de réussir l'examen est la même pour les deux étudiants. D'autre part, la réussite de l'un est exactement équivalente à l'échec de l'autre puisque si le premier étudiant a au plus une erreur cela signifie que le second en au moins deux, et vice-versa. Autrement dit, l'événement "le second étudiant réussit l'examen", qui a la même probabilité que E comme on l'a déjà dit, est en fait exactement E^c. On a donc $\mathbb{P}(E) = \mathbb{P}(E^c)$ et, comme $\mathbb{P}(E) + \mathbb{P}(E^c) = 1$, on en déduit $\mathbb{P}(E) = 1/2$.

Exercice 3 (Théorème de Bayes)**.** On s'intéresse à un test Covid. On suppose que ce test est sensible à 95% : si l'on est porteur du virus, on a 95% de chance d'avoir un test positif. On suppose également qu'il est spécifique à 99% : si l'on n'est pas porteur, on a 99% de chance d'avoir un test négatif. On suppose enfin que la prévalence du virus est de 6% : 6% de la population est porteuse. Sur la base de ces hypothèses :

1. Quelle est la probabilité d'être porteur du virus si l'on a un test positif ?
2. Quelle est la probabilité de ne pas être porteur si l'on a un test négatif ?

Solution : Notons M l'événement "être porteur" et T l'événement "avoir un test positif". On peut résumer les hypothèses de l'énoncé par :
sensibilité : $\mathbb{P}(T|M) = 0{,}95$
spécificité : $\mathbb{P}(T^c|M^c) = 0{,}99$
prévalence : $\mathbb{P}(M) = 0{,}06$
Pour pouvoir appliquer la formule de Bayes, il nous faut calculer : $\mathbb{P}(T) = \mathbb{P}(T|M)\mathbb{P}(M)+\mathbb{P}(T|M^c)\mathbb{P}(M^c) = 0,95 \times 0,06 + (1 - 0,99) \times (1 - 0,06) = 0,0664$ Grâce à la formule de Bayes, on obtient :

1. $\mathbb{P}(M|T) = \mathbb{P}(T|M)\mathbb{P}(M)/\mathbb{P}(T) = 0,95 \times 0,06/0,0664 \simeq 0,858$. Un test positif indique une probabilité d'être porteur d'environ 86%
2. $\mathbb{P}(M^c|T^c) = \mathbb{P}(T^c|M^c)\mathbb{P}(M^c)/\mathbb{P}(T^c) = 0,99 \times (1 - 0,06)/(1 - 0,0664) \simeq 0,997$. Un test négatif indique une probabilité de ne pas être porteur d'environ 99,7%.

Exercice 4. Le poker se joue avec un jeu de 32 cartes [1]. Chaque joueur reçoit 5 cartes. Quelle est la probabilité qu'un joueur ait dans sa main. . .

1. un carré d'as (les quatre as) ?

Solution : Les cartes étant interchangeables, on considère que la main d'un joueur est tirée uniformément parmi toutes les combinaisons de 5 cartes. Il y a $\binom{32}{5}$ telles combinaisons. Pour déterminer une combinaison qui contient les quatre as, il suffit de dire quelle est la cinquième carte. Il y a $32 - 4 = 28$ possibilités pour cette cinquième carte, donc il y a 28 combinaisons qui contiennent les quatre as. La probabilité d'avoir un carré d'as est donc

$$\frac{28}{\binom{32}{5}} \simeq 1,4 \times 10^{-4}\,.$$

2. un carré (quatre cartes de la même valeur) ?

Solution : Les cartes étant interchangeables, un carré d'as a la même probabilité qu'un carré de 7 ou de valets. Il y a $32/4 = 8$ valeurs possibles, et donc autant de carrés possibles. D'autre part, avoir deux carrés de valeurs différentes sont deux événements incompatibles (puisqu'une main ne contient

1. Les cartes présentent quatre couleurs (appelées également "enseignes") dénommées carreau, trèfle, pique, cœur. Les cartes représentent soit des nombres (de 2 à 10) soit des "figures" (Valet, Dame, Roi, As). Un jeu de 32 [52] cartes contient, pour chaque couleur, une carte de chacune des valeurs suivantes : $[2, 3, ..., 6]$, 7, 8, 9, 10, Valet, Dame, Roi, As

que 5 cartes). La probabilité d'avoir un carré est donc la somme des probabilités d'avoir un carré de 7, ou de 8, etc. c'est-à-dire

$$8 \times \frac{28}{\binom{32}{5}} \simeq 1,1 \times 10^{-3} \,.$$

3. un full (trois cartes de la même valeur et une paire de cartes de la même valeur) ?

Solution : Comptons les combinaisons qui donnent un full. On choisit d'abord la valeur des trois cartes (il y a 8 choix) puis la valeur des deux autres cartes (il reste 7 autres choix, pour chacun des choix fait pour les trois cartes), donc $8 \times 7 = 56$ choix pour les valeurs du full. Ensuite, une fois qu'on a fixé ces valeurs, il reste à voir combien de combinaisons donne un full de valeurs donnés. Pour se fixer les idées, disons qu'on se demande le nombre de combinaisons qui donnent un full aux as par les 7 (c'est-à-dire trois as et deux 7). Il faut choisir les trois as parmi 4, il y a donc 4 possibilités, et les deux 7 parmi 4, il y a donc $\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} = 6$ possibilités, donc en tout $6 \times 4 = 24$ possibilités (et c'est la même chose pour tout autre choix de valeurs). Au total, il y a donc 56×24 combinaisons qui forment un full, et la probabilité d'avoir un full est donc

$$\frac{56 \times 24}{\binom{32}{5}} \simeq 6,7 \times 10^{-3} \,.$$

4. un brelan (trois cartes de la même valeur et deux cartes de valeurs différentes) ?

Solution : Comme avant, on commence par choisir les valeurs : 8 choix pour le brelan, puis choisir les deux autres valeurs parmi les 7 restantes revient à choisir un arrangement de 2 éléments parmi 7 (car les valeurs doivent être différentes, et l'ordre n'importe pas), il y a donc $7 \times 6/2$ possibilités pour ces deux valeurs, et donc au total $8 \times 7 \times 6/2 = 168$ valeurs possibles pour un brelan. Ensuite, une fois fixées ces valeurs, pour les cartes seules il y a 4 possibilités, et pour le brelan également (comme dans la question précédente), donc il y a 4^3 façons d'avoir un brelan d'as avec un roi et une dame (par exemple ; mais c'est la même chose avec toutes les valeurs). La probabilité d'avoir un brelan est donc

$$\frac{168 \times 4^3}{\binom{32}{5}} \simeq 0,05 \,.$$

Exercice 5 (Des "paradoxes" classiques)**.**

1. Dans un jeu télévisé, un candidat doit choisir entre trois portes. Une seule de ces portes mène à une victoire (disons une somme d'argent), les deux autres cachent chacune une chèvre et font repartir le candidat bredouille. La porte gagnante a été tirée au hasard équiprobablement parmi les trois portes. Le candidat désigne dans un premier temps l'une des portes. Le présentateur ouvre, parmi les deux portes qui ne sont pas désignées par le candidat, une porte qui cache une chèvre. Le candidat doit, au choix, confirmer son premier choix et ouvrir la porte qu'il avait désignée, ou bien changer d'avis et ouvrir la porte qu'il n'avait pas désignée et qui n'est pas encore ouverte. Que doit faire le candidat ?

Solution : Sans réfléchir, on pourrait croire que, puisque les portes ont toutes la même chance d'être la porte gagnante, le fait que le présentateur en ait ouverte une ne change rien au fait que les deux autres ont une chance sur deux d'être gagnante. Ce raisonnement est faux, car il ne tient pas en compte le fait que, si le candidat avait désigné une mauvaise porte, alors le présentateur n'avait pas le choix dans la porte qu'il ouvrait.
Reprenons tranquillement. On considère l'événement $A = \{\text{le candidat désigne la porte gagnate}\}$. Par équiprobabilité, $\mathbb{P}(A) = 1/3$. Maintenant, sous l'événement A, si le candidat change d'avis, il perd, et sinon il gagne. Au contraire, sous l'événement A^c, nécessairement la porte qui n'a été ni désignée par le candidat ni ouverte par le présentateur est la porte gagnante, de sorte que le candidat gagne s'il change d'avis et perd sinon. En ne changeant pas d'avis, la probabilité de gagner est $\mathbb{P}(A) = 1/3$, alors qu'en changeant d'avis, la probabilité de gagner est $\mathbb{P}(A^c) = 2/3$. Pour maximiser ses chances de succès, le candidat a donc intérêt à changer d'avis.

2. On suppose (pour simplifier) qu'à chaque naissance, un enfant a une chance sur deux d'être un garçon ou une fille, et ce indépendamment de toute autre naissance. Un couple a deux enfants. Sachant que le cadet est un garçon, quelle est la probabilité que l'aîné soit un garçon ? Sachant que l'un des deux est un garçon, quelle est la probabilité que l'autre soit un garçon ?

Solution : L'univers est $\{(F,F),(F,G),(G,F),(G,G)\}$, et d'après les hypothèses les quatre possibilités sont équiprobables, de probabilité 1/4. Il y a deux cas où le cadet est un garçon ((F,G) et (G,G)) et parmi ceux-ci, un seul pour lequel l'aîné est un garçon. La probabilité conditionnelle que l'aîné soit un garçon sachant que le cadet est un garçon est donc $(1/4)/(1/4+1/4) = 1/2$ (ce qui est normal puisque le sexe de l'aîné est indépend du sexe du cadet, par hypothèse). Quant à la deuxième question, il y a trois cas pour lequel l'un des enfants est un garçon ($(F,G),(G,F)$ et (G,G)), parmi lesquels un seul ((G,G)) est tel que le second est également un garçon. La probabilité conditionnelle que les deux enfants soient des garçons sachant que l'un est un garçon est donc égale à $(1/4)/(1/4+1/4+1/4) = 1/3$.

Exercice 6. Les Shadoks ont construit une fusée. Elle n'est pas très au point mais ils ont calculé qu'elle avait une chance sur un million de marcher, et ils décident donc de se dépêcher de bien rater les 999 999 premiers essais pour être sûrs que le millionième marche. Cependant…

1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, si une expérience aléatoire a une chance sur n de réussir, quelle est la probabilité qu'elle rate n fois de suite (en supposant les tentatives indépendantes) ?

Solution : Notons A_i l'événement "la i^{eme} experience a raté" pour i entre 1 et n. Les A_i sont indépendants et de probabilité $1-1/n$, donc la probabilité d'avoir raté n fois est

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i) = \left(1-\frac{1}{n}\right)^n$$

2. Que dire de cette probabilité quand n est grand ? *(on pourra utiliser le fait que* $x^n = (\exp(\ln x))^n = \exp(n \ln x)$ *pour tout* $x > 0$*, et le développement limité en* 0 *de* $\ln$*.)*

Solution : En suivant l'indication, on écrit que

$$\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = e^{n \ln\left(1-\frac{1}{n}\right)} = e^{n\left(-\frac{1}{n}+o_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n}\right)\right)} = e^{-1+o_{n\to+\infty}(1)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^{-1}.$$

Autrement dit, pour $n = 10^6$, les Shadoks ont environ une probabilité $e^{-1} \simeq 0,37$ de rater un million de fois de suite (soit plus d'une chance sur trois).

Exercice 7 (Equiprobabilité et ordres de grandeur)**.** Avant de commencer une partie de bridge, je mélange bien un jeu de 52 cartes. Y a-t-il une probabilité raisonnable (disons, supérieure à un sur mille) que des joueurs, un jour, dans toute l'histoire de l'humanité, aient déjà commencé une partie de cartes avec les cartes exactement dans le même ordre que moi ? (il suffit de faire une surestimation vague et très large du nombre de parties jouées dans l'histoire de l'humanité. Les cartes sont apparues aux alentours du VII^e siècle, la population mondiale a toujours été inférieure à 10 milliards, on pourra compter une moyenne d'au moins 5 minutes pour une partie, soit environ 100 000 parties de jeux de cartes en un an pour quelqu'un qui ne ferait que ça de sa vie (sans manger, dormir...). On pourra utiliser la donnée suivante $52! \geqslant 8 \times 10^{67}$).

Solution : Les cartes étant indistinguables, en mélangeant le paquet, on obtient un ordre aléatoire, et tous les ordres sont équiprobables. Donner un ordre des cartes, c'est donner une permutation de 52 éléments, il y a donc 52! possibilités. Notons A l'ensemble des ordres ayant déjà été joués dans l'histoire de l'humanité. La probabilité que je tombe sur un ordre déjà joué est donc $\text{card}(A)/52!$. On peut majorer $\text{card}(A)$ par le nombre de parties jouées, qu'on peut lui-même borner en supposant que pendant 2000 ans, 10 milliards d'humains ont joué (chacun dans son coin) non-stop des parties de cartes à raison de 100 000 par an. On obtient que $\text{card}(A)$ est inférieur à $2 \times 10^3 \times 10^5 \times 10^{10} = 2 \times 10^{18}$. La probabilité que je tombe sur un ordre déjà joué est donc inférieure à $2 \times 10^{18}/(8 \times 10^{67})$, donc de l'ordre de 10^{-59}, autrement dit virtuellement zéro (à titre de comparaison, il y a une chance sur 20 millions de gagner au loto, donc 10^{-59} est environ la probabilité de gagner 8 fois d'affilée au loto).

Applications

Exercice 8. On souhaite faire une étude sur la consommation de drogue illégale dans une population. Pour contrecarrer la potentielle réticence des consommateurs à déclarer une activité illégale, on met en place le protocole suivant : avant de répondre (à la question : "consommez-vous une drogue illégale ?"), chaque personne interrogée jette un dé (sans en communiquer le résultat à l'interrogateur, ni à qui que ce soit). Si le dé donne un 6, la personne répond qu'elle consomme de la drogue ; sinon, elle répond la vérité (de sorte qu'une personne qui a répondu "oui" ne peut pas être accusée d'une activité illégale). On note p la proportion (inconnue) de consommateurs de drogue dans la population.

1. En supposant qu'elle est choisie uniformément parmi la population, quelle est la probabilité qu'une personne interrogée réponde "oui" ?

Solution : On note respectivement D et O les événements "la personne consomme de la drogue" et "la personne a répondu oui". Une personne qui consomme de la drogue répondra oui quoi qu'il en soit, autrement dit $D \subset O$, ou $\mathbb{P}(O|D) = 1$. Inversement, une personne qui ne consomme pas de drogue a une probabilité $1/6$ de répondre oui, autrement dit $\mathbb{P}(O|D^c) = 1/6$. D'autre part, le sondé étant tiré uniformément dans la population, $\mathbb{P}(D) = p$ et $\mathbb{P}(D^c) = 1 - p$. La formule des probabilités totales donne

$$\mathbb{P}(O) \;=\; \mathbb{P}(D)\mathbb{P}(O|D) + \mathbb{P}(D^c)\mathbb{P}(O|D^c) \;=\; p + (1-p)\frac{1}{6} \;=\; \frac{5p+1}{6}\,.$$

2. Sachant qu'elle a répondu "oui", quelle est la probabilité qu'elle consomme effectivement de la drogue ?

Solution : On l'obtient par la formule de Bayes ou, ici, plus simplement puisqu'on a déjà calculé $\mathbb{P}(O)$,

$$\mathbb{P}(D|O) \;=\; \frac{\mathbb{P}(D\cap O)}{\mathbb{P}(O)} \;=\; \frac{\mathbb{P}(D)}{\mathbb{P}(O)} \;=\; \frac{p}{\frac{5p+1}{6}} \;=\; \frac{6p}{5p+1}\,.$$

3. Les événements "la personne a répondu oui" et "la personne a fait 6" sont-ils indépendants ?

Solution : Notons S l'événement "la personne a fait 6. Une personne qui fait 6 doit répondre "oui", autrement dit $S \subset O$, ou $\mathbb{P}(O|S) = 1$. Or $\mathbb{P}(O) \neq 1$, donc les événements ne sont pas indépendants.

Exercice 9 (Inégalité de Bonferroni)**.** On considère deux événements A et B sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathbb{P})$, et on note $a = \mathbb{P}(A)$ et $b = \mathbb{P}(B)$.

1. On suppose que $a + b > 1$. Montrer que $\mathbb{P}(A \cap B) > 0$.

Solution : On a

$$\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) \;=\; \mathbb{P}(A\cup B) + \mathbb{P}(A\cap B) \;\leqslant\; 1 + \mathbb{P}(A\cap B)\,,$$

et donc $\mathbb{P}(A \cap B) \geqslant a + b - 1$.

2. Étant fixés a et b, quelle est la plus petite valeur que peut prendre $\mathbb{P}(A\cap B)$? La plus grande ? Donner dans les deux cas un exemple (de $\Omega, \mathbb{P}, A$ et B) où la valeur extrémale est atteinte (on pourra considérer pour Ω un ensemble à trois points, par exemple $\{1, 2, 3\}$).

Solution : On conseille de faire des dessins.

Puisque $A\cap B \subset A$, on a toujours $\mathbb{P}(A\cap B) \leqslant \mathbb{P}(A)$, et de même $A\cap B \subset A$ de sorte que $\mathbb{P}(A\cap B) \leqslant \mathbb{P}(B)$, autrement dit $\mathbb{P}(A \cap B) \leqslant \min(a, b)$. Cette borne supérieure peut toujours être atteinte : il suffit de considérer des ensembles A et B tels que l'un des deux soit inclus dans l'autre. Fixons $a, b \in [0, 1]$ et supposons par exemple que $a \leqslant b$ (si $a \geqslant b$ il suffit d'inverser les rôles, le problème est symétrique en A et B). Considérons sur $\Omega = \{1, 2, 3\}$ la probabilité $\mathbb{P}$ donnée par $\mathbb{P}(1) = a$, $\mathbb{P}(2) = b-a$ et $\mathbb{P}(3) = 1-b$ (qui est bien une probabilité). Posons $A = \{1\}$ et $B = \{1, 2\}$. Alors on a bien $\mathbb{P}(A) = a$, $\mathbb{P}(B) = b$ et $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) = a = \min(a, b)$. D'après le raisonnement précédent, on ne peut pas faire plus, c'est bien la valeur maximale.

Considérons le problème de la valeur minimale. Si $a+b \leqslant 1$, alors on peut trouver des cas où l'intersection est de probabilité nulle, ce qui est donc clairement minimal. En effet, prenons le cas $\Omega = \{1, 2, 3\}$ avec $\mathbb{P}(1) = a$, $\mathbb{P}(2) = b$ et $\mathbb{P}(3) = 1 - a - b$ (qui est bien une probabilité si $a + b \leqslant 1$). Posons $A = \{1\}$ et $B = \{2\}$. Alors $\mathbb{P}(A) = a$, $\mathbb{P}(B) = b$ et $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(\emptyset) = 0$.

Considérons enfin le cas de la valeur minimale, mais dans le cas $a+b > 1$. Dans la question précédente, on a montré que, nécessairement, $\mathbb{P}(A \cap B) \geqslant a + b - 1$. Montrons que cette valeur peut être atteinte (et donc que c'est bien la valeur minimale pour $\mathbb{P}(A\cap B)$). Sur $\Omega = \{1, 2, 3\}$ on considère la probabilité

$\mathbb{P}$ donnée par $\mathbb{P}(1) = a + b - 1$, $\mathbb{P}(2) = 1 - b$ et $\mathbb{P}(3) = 1 - a$ (qui est bien une probabilité si $a + b > 1$. Posons $A = \{1, 2\}$ et $B = \{1, 3\}$. Alors

$$\mathbb{P}(A) = a + b - 1 + 1 - b = a\,, \qquad \mathbb{P}(B) = a + b - 1 + 1 - a = b\,, \qquad \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(\{1\}) = a + b - 1\,.$$

3. Plus généralement, on considère $n \geqslant 2$ événements $A_1, \ldots, A_n$. Montrer que

$$\mathbb{P}\left(A_1 \cap \cdots \cap A_n\right) \;\geqslant\; \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(A_k) - n + 1\,.$$

Solution : On le fait par récurrence. On a déjà démontré le cas $n = 2$. Supposons le résultat vrai pour un certain $n \geqslant 2$, et considérons des événements $A_1, \ldots, A_{n+1}$. Notons $B = A_1 \cap \cdots \cap A_n$, et utilisons l'inégalité montrée dans le cas $n = 2$:

$$\mathbb{P}(A_1 \cap \cdots \cap A_{n+1}) \;=\; \mathbb{P}(B \cap A_{n+1}) \;\geqslant\; \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(A_{n+1}) - 1\,.$$

En utilisant l'hypothèse de récurrence pour minorer $\mathbb{P}(B)$,

$$\mathbb{P}(A_1 \cap \cdots \cap A_{n+1}) \;\geqslant\; \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(A_k) - n + 1 + \mathbb{P}(A_{n+1}) - 1 \;=\; \sum_{k=1}^{n+1} \mathbb{P}(A_k) - (n+1) + 1\,.$$

On a donc montré l'hérédité de la propriété ; elle est donc démontrée par récurrence pour tout $n \geqslant 2$.

Pour aller plus loin

Exercice 10. On s'intéresse à un caractère phénotypique donné dans une population, pour lequel il y a deux types possibles, qu'on note 1 et 2 (par exemple, on regarde la présence d'antigènes A à la surface des globules rouges chez une population humaine, de sorte que les individus de type 1 sont ceux qui ont un groupe sanguin A ou AB et ceux de type 2 de groupes O ou B). On suppose que la population est consitutée de N individus de type 1 et M de type 2.

1. On sélectionne une première personne dans la population, uniformément, puis une seconde personne uniformément parmi le reste de la population (de façon à être sûr de ne pas sélectionner la même personne). Les types des deux personnes sont-ils indépendants ?

Solution : Pour $i = 1$ ou 2 on note A_i l'événement "la i^{eme} personne sélectionnée est de type 1". Remarquons que, si la première personne est de type 1, alors la seconde personne est tirée uniformément parmi une population qui comporte $N - 1$ individus de type 1 et M de type 2, alors que si la première personne est de type 2 la seconde est tirée uniformément parmi une population qui comporte N individus de type 1 et $M - 1$ de type 2. En conséquence,

$$\mathbb{P}(A_2 | A_1) \;=\; \frac{N - 1}{N + M - 1} \qquad\qquad \mathbb{P}(A_2 | A_1^c) \;=\; \frac{N}{N + M - 1}\,.$$

Si A_1 et A_2 étaient indépendants (et donc si A_1^c et A_2 étaient indépendants), ces deux quantités devraient toutes les deux être égales à $\mathbb{P}(A_2)$, et donc égales entre elles. Ce n'est pas le cas, donc les types des deux personnes ne sont pas indépendants.

2. On recommence le procédé jusqu'à avoir sélectionné k personnes distinctes. Calculer, pour r entre 0 et k, la probabilité que, parmi ces k personnes, r soient de type 1.

Solution : D'abord, remarquons que cette probabilité est nulle si $r > N$. Donc, dans la suite, supposons $r \leqslant N$. Dans un premier temps, regardons la probabilité que les r premières personnes sélectionnées soient de type 1, puis les $k-r$ dernières soient de type 2. Comme dans la question précédente, la probabilité que le premier soit de type 1 est $N/(N+M)$ puis, sachant que la première est de type 1, la probabilité que la seconde le soit également est alors $(N-1)/(N+M-1)$. Ensute, sachant que les deux premiers sont de type 1, la probabilité que le troisième soit de type 1 est $(N-2)/(N+M-2)$ (puisqu'il ne reste $N-2$ personnes de type 1 dans le reste de la population), etc. jusqu'à la r^{ieme} personne sélectionnée qui a une probabilité $(N-r+1)/(N+M-r+1)$ d'être de type 1. Ensuite, sachant que les r premières personnes sélectionnées sont de type 1, la $(r+1)^{eme}$ personne a une probabilité $M/(N+M-r)$ d'être de type 2 (puisqu'à ce stade de l'expérience il reste M personne de type 2 dans une population totale de $N+M-r$). On recommence le même raisonnement : sachant que $r+1$ personnes ont déjà été sélectionnée, dont 1 de type 2, la $(r+2)^{ieme}$ personne a une probabilité $(M-1)/(N+M-r-1)$ d'être de type 2, etc. Au final, en notant toujours A_i l'événement “la i^{eme} personne sélectionnée est de type 1” (pour i entre 1 et k cette fois), on vient de calculer que

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_r \cap A_{r+1}^c \cap \cdots \cap A_k) &= \frac{N}{N+M} \times \frac{N-1}{N+M-1} \times \cdots \times \frac{N-r+1}{N+M-r+1} \\ &\quad \times \frac{M}{N+M-r} \times \frac{M-1}{N+M-r-1} \times \cdots \times \frac{M-(k-r-1)}{N+M-k+1}.\end{aligned}$$

En effet, au moment de sélectionner la dernière (k^{ieme}) personne, $k-1$ personnes ont déjà été enlevées de la population, dont r sont de type 1 donc $k-1-r$ sont de type 2. On peut écrire cette probabilité de façon plus compacte en utilisant les factoriels, précisément en utilisant que

$$(N+M)(N+M-1)\dots(N+M-k+1) = \frac{(N+M)!}{(N+M-k)!}, \qquad N(N-1)\dots(N-r+1) = \frac{N!}{(N-r)!}$$

$$M(M-1)\dots(M-(k-r)+1) = \frac{M!}{(M-(k-r))!},$$

on a donc obtenu

$$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_r \cap A_{r+1}^c \cap \cdots \cap A_k) = \frac{N!M!(N+M-k)!}{(N-r)!(M-(k-r))!(N+M)!}.$$

Cependant, on n'a regardé qu'une façon particulière d'obtenir r personnes de type 1, à savoir que les r premières personnes sélectionnées soient de type 1. Quelle est la probabilité que, par exemple, les r dernières personnes sélectionnées soient de type 1, et les $k-r$ premières de type 2 ? Le même raisonnement qu'avant nous donne l'expression suivante :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A_1^c \cap \cdots \cap A_{k-r}^c \cap A_{k-r+1} \cap \cdots \cap A_k) &= \frac{M}{N+M} \times \cdots \times \frac{M-(k-r)+1}{N+M-(k-r)+1} \\ &\quad \times \frac{N}{N+M-(k-r)} \times \cdots \times \frac{N-(r-1)}{N+M-k+1} \\ &= \frac{N!M!(N+M-k)!}{(N-r)!(M-(k-r))!(N+M)!}.\end{aligned}$$

On constate que c'est la même probabilité que celle de tirer en premier les r personnes de type 1. En fait, on peut se convaincre qu'on aurait obtenu le même résultat si on s'était fixé n'importe quel ordre d'arrivée des types 1 et 2. Autrement dit, si $(x_1, \dots, x_k)$ est un k-uplet de $\{1,2\}$ tel que la valeur 1 apparaît r fois, alors la probabilité qu'on ait observé exactement la séquence $x_1, \dots, x_k$ (c'est-à-dire que la i^{eme} personne sélectionnée soit de type x_i pour tout i entre 1 et k) est toujours

$$\frac{N!M!(N+M-k)!}{(N-r)!(M-(k-r))!(N+M)!}.$$

En effet, dans le raisonnement précédent, si on regarde le dénominateur, il décroît de 1 à chaque personne sélectionnée (puisque la population diminue de 1 à chaque fois qu'on observe une personne), donc quelque soit la séquence au final le dénominateur sera $(N+M)\dots(N+M-k+1)$. Quant au numérateur, au moment où on sélectionera la première personne de type 1 il sera égal à N, pour la deuxième personne de type 1 il sera égal à $N-1$, etc. jusqu'à $N-r+1$ pour la r^{ieme} personne de type 1, et de même pour les personnes de type 2 on verra successivement apparaître M, puis $M-1$, etc. jusqu'à $M-(k-r)+1$. Ceci montre bien que la probabilité sera toujours la même quelque soit la séquence $x_1, \dots, x_k$ si elle contient r fois la valeur 1.

Au final, la probabilité d'avoir sélectionné r personnes de type 1 est la somme des probabilités d'avoir sélectionné une séquence contenant r fois la valeur 1 sur toutes les séquences possibles. Puisque ces séquences ont la même probabilité, la probabilité finale est la probabilité d'une séquence fois le nombre de séquence. À r fixé, se donner une séquence, c'est exactement choisir les r indices parmi $1, \dots, k$ qui seront les personnes de type 1, autrement dit il y a $\binom{k}{r}$ séquences de k personnes dont r sont de type 1. La probabilité de sélectionner r personnes est donc

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(r) &= \binom{k}{r} \times \frac{N!M!(N+M-k)!}{(N-r)!(M-(k-r))!(N+M)!} \\ &= \frac{N!M!(N+M-k)!k!}{r!(k-r)!(N-r)!(M-(k-r))!(N+M)!}.\end{aligned}$$

3. On veut comprendre ce qui se passe lorsque la population totale, $M+N$, est beaucoup plus grande que la taille k de l'échantillon. Pour formaliser cela, on considère deux suites $(M_n)_{n\in\mathbb{N}_*}$ et $(N_n)_{n\in\mathbb{N}_*}$ qui sont telles que, pour tout $n \in \mathbb{N}_*$,

$$M_n + N_n = n \qquad \text{et} \qquad \frac{N_n}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} p \in]0,1[\,.$$

Autrement dit, n désigne la taille totale de la population et p est la proportion d'individus de type 1 lorsque la taille totale de la population devient grande. Pour k et r fixés, calculer la limite (pour $n \to +\infty$) de la probabilité calculée à la question précédente.

Solution : Pour alléger les notations, notons simplement N et M pour N_n et M_n. Dans la probabilité précédente, le facteur $\binom{k}{r}$ ne dépend pas de n. D'autre part,

$$\begin{aligned}\frac{N!}{(N-r)} &= N(N-1)\dots(N-r+1) \\ &= N^r \times 1 \times \left(1-\frac{1}{N}\right)\dots\left(1-\frac{r-1}{N}\right)\end{aligned}$$

Puisque $N/n \to p > 0$ quand $n \to +\infty$, $N \to +\infty$ donc

$$\frac{N!}{N^r(N-r)} \to 1\,, \qquad \text{autrement dit} \qquad \frac{N!}{(N-r)} \underset{n\to+\infty}{\simeq} N^r\,.$$

Par le même argument,

$$\frac{M!}{(M-(k-r))} \underset{n\to+\infty}{\simeq} M^{k-r} \qquad \text{et} \qquad \frac{(N+M-k)!}{(N+M)!} \underset{n\to+\infty}{\simeq} \frac{1}{(N+M)^k}\,.$$

On a donc obtenu que

$$\mathbb{P}(r) \underset{n\to+\infty}{\simeq} \binom{k}{r}\frac{N^r M^{k-r}}{(N+M)^k} = \binom{k}{r}\left(\frac{N}{n}\right)^r\left(\frac{M}{n}\right)^{k-r}.$$

Or, quand $n \to +\infty$, $N/n \to p$ et $M/n = M/(M+N) = 1 - N/(M+N) \to 1-p$, de sorte que

$$\mathbb{P}(r) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \binom{k}{r} p^r(1-p)^{k-r}\,.$$

Autrement dit, quand la population totale devient grande, la probabilité d'observer r individus de type 1 parmi un échantillon de k personnes suit approximativement une loi binomiale $\mathcal{B}in(k,p)$. Ceci s'explique par le fait que retirer les personnes déjà sélectionnées de la population ne change pas grand chose puisque de toutes façons la probabilité d'avoir sélectionné deux fois la même personne est extrêmement faible. Or, si on sélectionne k personnes uniformément dans la population et indépendemment les unes des autres (de sorte qu'il y a la possibilité de tirer deux fois la même personne), on obtient exactement une loi binomiale $\mathcal{B}in(k, N/(N+M))$.

Exercice 11 (Entropie d'une probabilité)**.** Sur l'univers $\Omega = \{1,\dots,N\}$ pour $N \in \mathbb{N}$, on considère une probabilité $\mathbb{P}$ et on note $p_i = \mathbb{P}(i)$ pour $i \in \Omega$. On appelle entropie de $\mathbb{P}$ la quantité

$$H = -\sum_{i=1}^{N} p_i \ln p_i\,,$$

avec la convention $x \ln x = 0$ si $x = 0$.

1. Montrer que $H \geqslant 0$. Dans quels cas peut-on avoir $H = 0$?

<u>Solution</u> : Pour tout i, $p_i \in [0,1]$, en particulier $p_i \ln p_i \leqslant 0$. En sommant ces termes négatifs et en multipliant par -1 on trouve bien que $H \geqslant 0$. De plus, $H = 0$ implique que chacun des termes est nul. Or $p_i \ln p_i = 0$ uniquement dans deux cas : $p_i = 0$ et $p_i = 1$. Les p_i ne peuvent pas être tous nuls car leur somme fait 1, et pour la même raison, dès qu'un p_i est égal à 1, tous les autres sont nuls. Autrement dit,

$$H = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \exists k \in \{1,\dots,N\} \text{ tel que } p_k = 1 \text{ et } p_j = 0 \ \forall j \neq k\,.$$

2. Dans cette question uniquement, on suppose que $N = 2$, et l'on note $p_1 = p$, $p_2 = 1-p$. Étudier les variations de l'entropie en fonction de $p \in [0,1]$.

<u>Solution</u> : Vu comme une fonction de p, l'entropie est

$$H(p) = -p\ln p - (1-p)\ln(1-p)\,.$$

Par la question précédente, on sait que $H(p) = 0$ pour $p = 0$ ou $p = 1$ et que $H(p) > 0$ pour $p \in]0,1[$. On dérive :

$$H'(p) = -\ln p - 1 + \ln(1-p) + 1 = \ln\left(\frac{1-p}{p}\right) = \ln\left(\frac{1}{p} - 1\right).$$

Cette dérivée est positive si $1/p - 1 \geqslant 1$, autrement dit si $p \leqslant 1/2$, et négative si $p \geqslant 1/2$. Autrement dit, $H(p)$ part de 0 en $p = 0$, est croissante sur $[0, 1/2]$, maximale en $p = 1/2$, décroît sur $[1/2, 1]$ et retombe à zéro en $p = 1$.

3. Calculer H dans le cas où $\mathbb{P}$ est la loi uniforme sur Ω.

Solution : On calcule simplement $H = 1/N \sum_{k=1}^{N} \ln N = \ln N$.

4. Montrer que $\ln(z) \leqslant z - 1$ pour tout $z > 0$, et en déduire que la loi uniforme est la loi d'entropie maximale, c'est-à-dire que quelque soit $\mathbb{P}$, H est plus petit que l'entropie de la loi uniforme *(indication : on considérera d'abord le cas où tous les p_i sont non nuls, et l'on pourra appliquer l'inégalité démontrée à $z = p_i/m$).*

Solution : Posons $h(z) = z - 1 - \ln(z)$ pour $z > 0$. Remarquons que $h(1) = 0$. D'autre part, $h'(z) = 1 - 1/z$ qui est positif pour $z \leqslant 1$ et négatif pour $z \geqslant 1$, autrement dit h est maximal en 1, ce qui veut dire que pour tout $z > 0$, $h(z) \leqslant h(1) = 0$, ce qui est exactement la même chose que de dire que $\ln(z) \leqslant z - 1$.
Considérons d'abord une loi $\mathbb{P}$ telle que les p_i sont tous non nuls. En appliquant l'inégalité précédente et en utilisant que la somme des p_i fait 1 et les propriétés du logarithme,

$$H \ = \ \sum_{i=1}^{N} p_i \left(\ln\left(\frac{1}{Np_i}\right) + \ln N \right) \ \leqslant \ \ln N + \sum_{i=1}^{N} p_i \left(\frac{1}{Np_i} - 1 \right) \ = \ \ln N + 1 - 1 \ = \ \ln N \,,$$

qui est bien l'entropie de la loi uniforme.
Maintenant, considérons le cas où certains p_i sont nuls. Notons $J = \{i \in \{1, \ldots, N\},\ p_i \neq 0\}$. Alors on peut restreindre $\mathbb{P}$ à J, ce qui donne toujours une probabilité, mais sur un plus petit nombre de points, et de telle sorte que, sur J, tous les p_i sont non nuls. D'après le résultat précédent, on sait que l'entropie de $\mathbb{P}$ est plus petite que l'entropie de la mesure uniforme sur J, qui est $\ln \mathrm{Card}(J) \leqslant \ln N$. On a donc bien montré dans tous les cas que $H \leqslant \ln N$, ce qui veut bien dire que sur un univers fini la loi uniforme est la loi d'entropie maximale.

Exercice 12 (indicatrice d'Euler)**.** L'objectif de cet exercice est de proposer une démonstration probabiliste d'un résultat classique d'arithmétique. Soit $n > 1$ un entier fixé. On choisit de manière équiprobable un entier x dans $\{1, \ldots, n\}$. Pour tout entier $m \leqslant n$ on note A_m l'événement "m divise x". On note également B l'événement "x est premier avec n". Enfin, on note $p_1, \ldots, p_r$ les diviseurs premiers de n.

1. Exprimer B en fonction des A_{p_k}.

Solution : Un entier x est premier avec n si et seulement si il n'est divisible par aucun des diviseurs premiers de n, autrement dit

$$B \ = \ A_{p_1}^c \cap A_{p_2}^c \cap \cdots \cap A_{p_r}^c$$

2. Pour tout entier naturel m qui divise n, calculer la probabilité de A_m.

Solution : Puisque x est tiré uniformément sur $\{1, \ldots, n\}$, $\mathbb{P}(A_m) = \mathrm{Card}(A_m)/n$. Soit $k = n/m$. Alors les multiples de m qui sont plus petits que n sont exactement $m, 2m, 3m, \ldots, km$ donc il y en a k. Autrement dit $\mathrm{Card}(A_m) = k = n/m$ et donc $\mathbb{P}(A_m) = 1/m$.

3. Montrer que les événements $A_{p_1}, \ldots, A_{p_r}$ sont mutuellement indépendants.

Solution :

4. En déduire la probabilité de B.

Solution : D'après la question précédente, les événements $A^c_{p_1}, \ldots, A^c_{p_r}$ sont indépendants. Avec les questions 1 et 2,

$$\mathbb{P}(B) \;=\; \mathbb{P}(A^c_{p_1} \cap \ldots A^c_{p_r}) \;=\; \prod_{i=1}^{r} \mathbb{P}(A_{p_i}) \;=\; \prod_{i=1}^{r} \left(1 - \frac{1}{p_i}\right) .$$

5. Application : on note $\varphi(n)$ le nombre d'entiers compris entre 1 et n qui sont premiers avec n (on appelle φ la fonction indicatrice d'Euler). Démontrer que

$$\varphi(n) \;=\; n \prod_{k=1}^{r} \left(1 - \frac{1}{p_k}\right) .$$

Solution : Puisque x est tiré uniformément sur $\{1, \ldots, n\}$, $\mathbb{P}(B) = \mathrm{Card}(B)/n$, et par définition $\varphi(n) = \mathrm{Card}(B)$. En utilisant la question précédente,

$$\varphi(n) \;=\; n\mathbb{P}(B) \;=\; n \prod_{i=1}^{r} \left(1 - \frac{1}{p_i}\right) .$$

Exercice 13. Un avion contient n places, numérotées. Les passagers rentrent l'un après l'autre. Le premier passager a oublié son billet, il s'installe au hasard uniformément parmi les n places. Les passagers suivants ont tous leur billet sur eux. À chaque fois qu'un nouveau passager rentre, si le siège correspondant à son billet est libre, il s'y assoit, sinon il s'assoit au hasard uniformément parmi les places encore libres. Quelle est la probabilité que le dernier passager à rentrer dans l'avion s'assoie à la place indiquée par son billet ?

Solution : Notons p_n cette probabilité. Considérons le case $n = 2$. Le premier passager a une chance sur deux de s'asseoir sur son propre siège (auquel cas le second passager aura lui aussi son siège attitré) et une chance sur deux de s'asseoir sur le siège de l'autre passager (qui n'aura donc pas son siège). Autrement dit, $p_2 = 2$.
On peut aussi regarder le cas $n = 3$. Le premier passager a une chance sur trois de s'asseoir sur son siège et une chance sur trois sur le siège du second (qui a alors une chance sur deux de s'asseoir sur le siège du premier), ce qui donne une probabilité $1/3 + 1/3 \times 1/2$ que le troisième s'assoie à son siège, c'est-à-dire que $p_3 = 1/2$.
Supposons par récurrence que, pour un $n > 3$ donné, $p_k = 1/2$ pour tout $k < n$. Notons A_k l'événement "le premier passager s'assoit sur le siège du k^{eme} passager", et $D =$"le dernier s'assoit sur son propre siège". En particulier, $\mathbb{P}(A_k) = 1/n$ pour tout k entre 1 et n. D'autre part, $\mathbb{P}(D|A_n) = 0$ (le premier s'est déjà assis sur le siège du dernier) et $\mathbb{P}(D|A_1) = 1$ (le premier s'est assis sur le bon siège donc tous les passagers vont s'asseoir sur le bon siège). Maintenant, pour $k \in \{2, \ldots, n-1\}$, la situation est la suivante : les passagers $2, 3, \ldots, k-1$ s'assoient à leur place, normalement. Au moment où le k^{ieme} passager rentre, il découvre son siège pris, et $n - k + 1$ sièges encore libres. Il est donc exactement dans la situation dans laquelle était le premier passager, mais pour un avion de $n - k + 1$ places au

lieu de n, à savoir qu'il y a ces places libres devant lui mais qu'il n'en a pas d'attitrée. À partir de là, on sait quelle est la probabilité que le dernier passagers s'assoit à sa place : par définition, c'est p_{n-k+1}, et donc par hypothèse de récurrence c'est $1/2$. Autrement dit, $\mathbb{P}(D|A_k) = 1/2$ pour k entre 2 et $n-1$. Finalement, les $A_1, \dots, A_n$ formant un système complet d'événement, la formule des probabilités totales nous donne

$$\mathbb{P}(D) \; = \; \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}(D|A_i) \; = \; \frac{1}{n}\left(0 + 1 + \sum_{k=2}^{n-1} \frac{1}{2}\right) \; = \; \frac{1}{n}(1 + (n-2)/2) = \frac{1}{2}\,.$$

On a donc démontré l'hérédité de la propriété, et donc finalement que $p_n = 1/2$ pour tout $n \geqslant 2$.