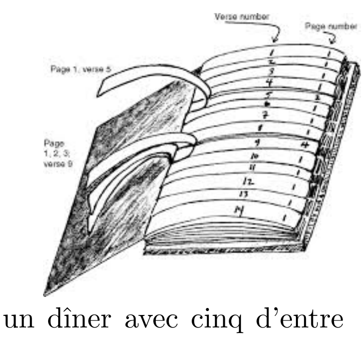
Feuille 7 (Probabilités 1)
Combinatoire et dénombrement

Les feuilles d'exercices sont découpées en trois types d'exercice :
- Les *indispensables* : à savoir faire en autonomie.
- Les *exercices d'application* : pour mieux maîtriser et comprendre le cours.
- *Pour aller plus loin* : exercices présentant des développements mathématiques ou des études de modélisations de phénomènes issues d'autres disciplines.

Indispensables

Exercice 1 (Dénombrement)**.**

1. Pour un cadenas à 4 chiffres (entre 0 et 9), un code est-il modélisé par un ensemble de 4 chiffres, par un quadruplet de chiffres, par un arrangement de 4 chiffres ou par une combinaison de 4 chiffres ? Combien y a-t-il de codes possibles ? Combien y a-t-il de codes qui ne contiennent pas plusieurs fois le même chiffre ?
2. À l'issue d'une course entre 10 cyclistes, combien y a-t-il de podiums possibles ?
3. Étant donnés q et p deux entiers positifs non nuls, on considère une feuille rectangulaire de hauteur p cm et de largeur q cm, quadrillée en $p \times q$ carrés de 1 cm^2. En s'autorisant à se déplacer à chaque étape d'1 cm soit vers la droite soit vers le haut, combien y a-t-il de chemins différents pour aller du coin inférieur gauche vers le coin supérieur droit ?
4. Les 12 tomes d'un encyclopédie sont sur une étagère. Combien y a-t-il de façon de les aligner ? Combien y a-t-il de façon de les aligner de sorte que les tomes 1 et 2 soient l'un à côté de l'autre, dans cet ordre (de gauche à droite) ?
5. Un ensemble E contient n éléments, et $A \subset E$ en contient $p < n$. Combien de parties de E contiennent exactement un élément de A ?
6. En informatique, on utilise le système binaire pour coder les caractères. Un bit (binary digit : chiffre binaire) est un élément qui prend la valeur 0 ou la valeur 1. Avec 8 bits (un octet), combien de caractères peut-on coder ?
7. Raymond Queneau a écrit un ouvrage intitulé *Cent mille milliards de poèmes*. Il est composé de 10 pages contenant chacune 14 vers. Le lecteur peut composer son propre poème de 14 vers en prenant le premier vers de l'une des 10 pages puis le deuxième vers de l'une des 10 pages et ainsi de suite jusqu'au quatorzième vers. Justifier le titre de l'ouvrage.



8. Une personne a onze amis très proches, et souhaiterait organiser un dîner avec cinq d'entre eux. Combien a-t-elle de choix possibles ? Même question si, de plus, deux des amis ne peuvent venir qu'ensemble. Même question si, au contraire, deux des amis ne peuvent pas se voir.
9. Combien 1800 a-t-il de diviseurs ?

Exercice 2 (Symbole de sommation)**.** Pour $n \in \mathbb{N}$, on note E_n l'ensemble des entiers entre 1 et n qui ne sont pas divisibles par 3. Écrire sans symbole $\sum$ les termes suivants :

$$\sum_{k \in E_6} k\,, \qquad \sum_{i=1}^{4} \sum_{j \in E_i} \frac{1}{j}\,, \qquad \sum_{r \in E_7} \sum_{s=r}^{r+2} s^r$$

Applications

Exercice 3 (Ensembles)**.** Parmi les étudiants de Sorbonne Université, 60% pratiquent le curling, 50% le karaté et 70% le bobsleigh. De plus, 30% font à la fois du curling et du karaté, 35% font du curling et du bobsleigh, et 30% font à la fois du karaté et du bobsleigh. Quelqu'un prétend que 20% des étudiants pratiquent les trois sports. Est-ce possible ?

Exercice 4. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, une permutation de n éléments peut être vue comme une application $\sigma : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\}$ bijective (on pioche successivement et sans remise n boules numérotées de 1 à n et on note $\sigma(i) = j$ si la boule numéro i a été piochée en j^{ieme} position). Combien y a-t-il de permutations de $\{1, \ldots, n\}$ telles que $\sigma(k)$ est pair pour tout k pair ?

Exercice 5 (Autour du binôme de Newton)**.**

1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ fixé, étudier le comportement de $f(x) = ((x + 2)^n - x^n)/x^{n-1}$ quand $x \to +\infty$.
2. Soit $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. En se basant sur la formule du binôme de Newton, calculer

$$a) \quad \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k \qquad\qquad b) \quad \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \qquad\qquad c) \quad \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k$$

Exercice 6 (Série géométrique)**.**

1. On note x le nombre de $[0, 1]$ dont l'écriture décimale ne contient que des 9, c'est-à-dire

$$x \;=\; 0,9999999\ldots \;=\; \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{9}{10^k}\,.$$

   Montrer que $x = 1$.
2. La légende indienne de la création des échecs est la suivante : le sage Sissa aurait inventé ce jeu pour distraire son roi. Ce dernier, pour le remercier, lui aurait proposé de choisir une récompense. Le sage aurait dit : "placez un grain de riz sur la première case de l'échiquier, puis deux sur la deuxième case, quatre sur la troisième, et ainsi de suite en doublant le nombre de grains de riz à chaque case, et donnez-moi le riz posé au total sur l'échiquier". Un échiquier comportant 64 cases, un grain de riz ayant approximativement une masse de 0,04g et la production mondiale de riz ayant été environ de 699 millions de tonnes en 2010, la demande de Sissa était-elle raisonnable ?

Exercice 7 (Bootstrap)**.**

1. Pour $m \geqslant n$ deux entiers positifs, combien y a-t-il de façons de ranger m boules indiscernables dans n boîtes numérotées, de telle sorte qu'il y ait au moins une boule par boîte ? *Indication : on peut voir le problème ainsi : on aligne les boules, puis on les prend une par une dans l'ordre, en remplissant les boîtes une par une, c'est-à-dire que les premières boules vont dans la boîte* 1*, puis on passe à la boîte* 2*, etc. Une fois les boules alignées,*

   ○○○○○○

   le nombre de boules par boîte est entièrement déterminée par les délimitations, entre deux boules successives, qui désignent le moment où l'on change de boîte. Par exemple, pour $m = 6$ *et* $n = 4$*, on peut placer ces délimitations ainsi :*

   ○|○○|○|○○

   ce qui correspond à mettre une boule dans la boîte 1*,* 2 *dans la* 2*,* 1 *dans la* 3 *et* 2 *dans la* 4*.*

2. Pour m et n deux entiers positifs, combien y a-t-il de façons de ranger m boules indiscernables dans n boîtes numérotées ? *Indication : une façon de ranger m boules dans n boîtes correspond de manière unique à une façon de ranger $m+n$ boules dans n boîte sans boîtes vides.*
3. Pour m et n deux entiers positifs, combien y a-t-il de façon d'écrire un entier $m \in \mathbb{N}_*$ comme la somme de n entiers ? (ex : $4 = 0+4 = 1+3 = 2+2 = 3+1 = 4+0$, il y a 6 façons d'écrire 4 comme une somme de deux entiers).
4. En statistiques, la méthode dite du bootstrap [1] repose sur ce qu'on appelle le ré-échantillonnage. On suppose que l'on dispose de n observations distinctes $x_1, \ldots, x_n$. Ré-échantillonner consiste à sélectionner un certain nombre de fois x_1, un certain nombre de fois x_2, etc. jusqu'à avoir sélectionné n observations (en les comptant plusieurs fois si on a sélectionné plusieurs fois la même). Par exemple, pour $n = 4$, (x_1, x_1, x_1, x_3) ou (x_1, x_2, x_2, x_4) sont des ré-échantillons de (x_1, x_2, x_3, x_4). Un ré-échantillon est entièrement déterminé par le nombre de fois qu'on a sélectionné chaque observations (autrement dit, (x_1, x_1, x_1, x_3) et (x_1, x_1, x_3, x_1) désignent le même ré-échantillon : celui où on a sélectionné 3 fois x_1, 1 fois x_3 et 0 fois x_2 et x_4). Combien y a-t-il de ré-échantillons possibles ?

Pour aller plus loin

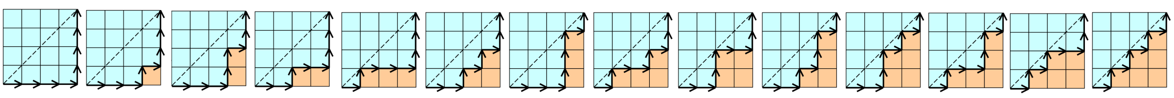
Exercice 8 (Nombres de Catalan)**.** Pour $n \in \mathbb{N}$, on considère un produit de $n+1$ facteurs : $a_1 \times a_2 \cdots \times a_{n+1}$. On suppose que le produit est transitif (c'est-à-dire $(ab)c = a(bc)$ pour tous a, b, c) mais pas commutatif ($ab \neq ba$ en général), par exemple on peut imaginer que les facteurs sont des matrices. Pour calculer le produit des $n+1$ facteurs, on doit donc faire successivement des produits de 2 facteurs, par exemple pour calculer abc on peut commencer par calculer ab puis faire le produit de ce terme avec c, ou inversement on peut calculer bc puis en calculer le produit avec a. On appelle n^{ieme} nombre de Catalan et on note C_n le nombre de façons différentes de procéder. Autrement dit, C_n est le nombre de façon de mettre des parenthèses sur les $n+1$ facteurs pour indiquer sans ambiguïté les priorités des calculs. Par exemple, pour $n = 2$, il y a $C_2 = 2$ possibilités, $(ab)c$ et $a(bc)$. Pour $n = 3$, $(ab)(cd)$ et $(a(bc))d$ sont deux parenthésages possibles, en revanche $ab(cd)$ n'est pas correct (on ne sait pas si on doit d'abord calculer ab puis le multiplier à (cd), ou si on doit calculer $b(cd)$ et ensuite le multiplier par a).

1. Calculer C_3 (et éventuellement vérifier que $C_4 = 14$).
2. Montrer que les nombres de Catalan satisfont la relation de récurrence

$$\forall n \geqslant 1\,, \qquad C_n = \sum_{k=0}^{n-1} C_k C_{n-k-1}\,.$$

   (On pourra s'intéresser à la multiplication qui est effectuée en dernière.)

3. Pour $n \in \mathbb{N}_*$, sur une grille de $n \times n$ carrés, on considère tous les chemins qui partent du coin en bas à gauche $(0,0)$, finissent au coin en haut à droite (n,n) et ne se déplacent que vers la droite ou vers le haut. On dit qu'un tel chemin est bon s'il ne dépasse jamais la diagonale, c'est-à-dire qu'il est inclus dans $\{(i,j) \in \{1,\ldots,n\}^2 \ : i \geqslant j\}$, et qu'il est mauvais sinon.



1. Étymologiquement, *bootstrap* désigne en anglais une languette à l'arrière de certaines bottes, et a été utilisé vers le 19ème siècle dans des expressions du genre « se tirer soi-même par les bootstrap »pour désigner une action impossible ou bien qui s'est déclenchée et menée sans aide extérieure. C'est également ce qui a donné les termes boot et reboot pour désigner les tâches qu'un ordinateur fait de lui-même à son lancement.

Montrer que le nombre de bons chemins est C_n (on pourra soit trouver une bijection entre l'ensemble des bons chemins et les façons de multiplier les facteurs, soit montrer que le nombre de bons chemins satisfait la même relation de récurennce que C_n)

4. On veut compter le nombre de mauvais chemins. Étant donnée la séquence d'instructions d'un mauvais chemin $(D, D, H, D, \dots)$ avec D =droite et H =haut, on considère l'opération suivante, qui produit un nouveau chemin : on suit les instructions dans l'ordre et, dès qu'on a dépassé strictement la diagonal, on suit exactement les instructions contraires, c'est-à-dire qu'on remplace les D par des H et inversement. Montrer grâce à cette construction que l'ensemble des mauvais chemins est en bijection avec l'ensemble des chemins qui partent de $(0, 0)$ et, en ne se déplaçant que vers la droite et le haut, arrivent en $(n-1, n+1)$. En déduire le nombre de mauvais chemins.
5. Montrer que
$$C_n \;=\; \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}.$$