Feuille de TD 1 : outillage mathématique

Exercice 1. Comparer les tables de vérité de
(a) $P \Rightarrow Q$, $(\text{non}\, P)$ ou Q , $(\text{non}\, Q) \Rightarrow (\text{non}\, P)$;
(b) P ou $(Q$ et $R)$ et $(P$ ou $Q)$ et $(P$ ou $R)$.

Exercice 2. Si je mange, alors je bois et je ne parle pas. Si je ne parle pas, alors je m'ennuie. Je ne m'ennuie pas. Que peut-on en déduire ?

Exercice 3. Soit une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
(a) Écrire la négation de l'assertion

$$\forall x \in \mathbb{R}, \exists \epsilon > 0, \forall \delta > 0, \exists y \in \mathbb{R}, |y - x| < \delta \text{ et } |f(y) - f(x)| \geq \epsilon.$$

(b) Écrire avec des quantificateurs que f n'est pas décroissante.
(c) Soient x, y deux réels. Écrire la négation, la contraposée et la réciproque de

$$(f(x) \leq f(y)) \implies (x \leq y)$$

(d) Que signifie l'assertion suivante ?

$$\forall x \in \mathbb{R}, (f(x) = 0 \implies x = 0).$$

Exercice 4. Les raisonnements suivants sont *formellement* faux. Pourquoi ?
(a) Le théorème de Bolzano-Weierstrass dit que toute suite bornée admet une valeur d'adhérence. Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = n \sin(n\pi/2)$. La suite (u_n) ainsi définie n'est pas bornée. Par le théorème de Bolzano-Weierstrass, la suite (u_n) n'admet pas de valeur d'adhérence.
(b) On veut résoudre l'équation $x^4 = \pi$ dans $\mathbb{R}$. En appliquant la fonction sinus à cette équation, on trouve $\sin(x^4) = \sin(\pi) = 0$. Or on connaît les valeurs qui annulent la fonction sinus : ce sont les nombres $k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$. On en déduit que $x^4 = k\pi$, avec en fait $k \in \mathbb{N}$, puisque $x^4 \geq 0$. Finalement, l'ensemble des solutions est $\{\pm \sqrt[4]{k\pi} \mid k \in \mathbb{N}\}$.

Exercice 5. Vrai ou faux ?
(a) $\forall x \in \mathbb{R}, ((\forall \epsilon > 0, x \leq \epsilon) \Rightarrow x \leq 0)$.
(b) $\forall x \in \mathbb{R}, ((\forall \epsilon > 0, x < \epsilon) \Rightarrow x < 0)$.

Exercice 6. Démontrer qu'il n'existe pas de nombre rationnel x tel que $x^2 = 2$.
Indication : sinon, on pourrait écrire $x = p/q$ pour des entiers p et q qui ne sont pas tous les deux pairs.

Exercice 7. Soient E un ensemble *fini* et $f : E \to E$ une fonction. Prouver que f est injective si et seulement si f est surjective.
Indication : pour le sens $\Rightarrow$, écrire $E = \{e_1, \ldots, e_n\}$ et compter le nombre d'éléments distincts dans l'ensemble $\{f(e_1), \ldots, f(e_n)\}$.

Exercice 8. Partie entière d'un réel.

(a) Soit $x \in \mathbb{R}$. Prouver l'existence d'un unique entier n tel que
$$n \leq x < n+1.$$
Dans la suite, on note $n = E(x)$.

(b) Tracer le graphe de la fonction $E : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ainsi définie.

(c) Prouver : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad E(x+1) = E(x) + 1$.

Exercice 9. Soient deux réels a et b tels que $a < b$.

(a) Montrer que si n est un entier assez grand, il existe un entier k tel que
$$na < k < nb.$$

(b) En déduire que l'intervalle $]a, b[$ contient un nombre rationnel. Et même une infinité de nombres rationnels.

(c) Montrer que l'intervalle $]a, b[$ contient aussi une infinité de nombres irrationnels.

Exercice 10. Déterminer les ensembles suivants.

(a) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid |x+2| + |3x-1| = 4\}$;

(b) $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x + 5 = \sqrt{x+11}\}$;

(c) $C = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - 3i| = |z + i|\}$;

(d) $D = \{x \in \mathbb{R} \mid E(3x) = 2 - E(x)\}$.