Feuille 7 (Probabilités 1)
Combinatoire et dénombrement

Les feuilles d'exercices sont découpées en trois types d'exercice :
- Les *indispensables* : à savoir faire en autonomie.
- Les *exercices d'application* : pour mieux maîtriser et comprendre le cours.
- *Pour aller plus loin* : exercices présentant des développements mathématiques ou des études de modélisations de phénomènes issues d'autres disciplines.

Indispensables

Exercice 1 (Dénombrement).

1. Pour un cadenas à 4 chiffres (entre 0 et 9), un code est-il modélisé par un ensemble de 4 chiffres, par un quadruplet de chiffres, par un arrangement de 4 chiffres ou par une combinaison de 4 chiffres ? Combien y a-t-il de codes possibles ? Combien y a-t-il de codes qui ne contiennent pas plusieurs fois le même chiffre ?

Solution : Dans un code, l'ordre de compte (les codes $(1, 2, 5, 3)$ et $(1, 3, 2, 5)$ sont différents), et les chiffres peuvent être répétés ($(1, 1, 1, 2)$ est un code à 4 chiffres). Un code n'est donc pas un ensemble de 4 chiffres (il n'y aurait pas d'ordre), ni un arrangement ou une combinaison (les chiffres ne pourraient pas être répétés). Un code est donc un quadruplet de nombre, c'est-à-dire un élément de $\{0, \dots, 9\}^4$. Le nombre de codes est donc le cardinal de cet ensemble, 10^4. Si l'on ne regarde que les codes qui ne répètent pas les chiffres, on obtient tous les arrangements de 4 chiffres (l'ordre compte toujours), il y a donc $10 \times 9 \times 8 \times 7$ possibilités.

2. À l'issue d'une course entre 10 cyclistes, combien y a-t-il de podiums possibles ?

Solution : Un podium est la donnée, dans l'ordre, de 3 des 10 cyclistes, sans répétition. C'est donc un arrangement de 3 éléments parmi 10, il y en a $10 \times 9 \times 8$.

3. Étant donnés q et p deux entiers positifs non nuls, on considère une feuille rectangulaire de hauteur p cm et de largeur q cm, quadrillée en $p \times q$ carrés de 1 cm^2. En s'autorisant à se déplacer à chaque étape d'1 cm soit vers la droite soit vers le haut, combien y a-t-il de chemins différents pour aller du coin inférieur gauche vers le coin supérieur droit ?

Solution : Dans tous les cas, il faudra se déplacer p fois vers le haut et q fois vers la droite, il y aura donc $p + q$ étapes et un chemin est entièrement déterminé par le choix, parmi ces $p + q$ étapes, des p fois où l'on monte vers le haut. Il y a $\binom{p+q}{p}$ choix pour positionner ces p étapes, et donc autant de chemins possibles.

4. Les 12 tomes d'un encyclopédie sont sur une étagère. Combien y a-t-il de façon de les aligner ? Combien y a-t-il de façon de les aligner de sorte que les tomes 1 et 2 soient l'un à côté de l'autre, dans cet ordre (de gauche à droite) ?

Solution : Il s'agit de compter le nombre d'ordres possibles dans lequel ranger les livres, c'est-à-dire le nombre de permutations de 12 éléments : il y en a 12!. Si maintenant on impose que les tomes 1 et 2 soient l'un à côté de l'autre dans cet ordre, alors il y a autant de possibilités qu'il y a de façon d'ordonner les 11 volumes une fois le volume 2 enlevé : en effet, une fois les 11 volumes rangés, il suffit d'ajouter le 2 à droite du 1 et, réciproquement, si on a les 12 tomes rangés avec la contrainte que le 2 est juste à droite du 1, alors en enlevant le tome 2 on obtient une permutation des 11 autres tomes. Il y a 11! permutations des 11 tomes, et donc 11! façon de ranger les 12 tomes avec la contrainte que le 2 est juste à droite du 1.

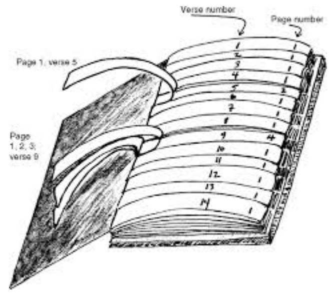
5. Un ensemble E contient n éléments, et $A \subset E$ en contient $p < n$. Combien de parties de E contiennent exactement un élément de A ?

Solution : Il y a p choix pour l'élément de A, puis, pour chacun d'eux, il reste à choisir n'importe quelle partie de $E \setminus A$. Or le nombre de parties d'un ensemble à r éléments est 2^r donc il y a 2^{n-p} choix pour les autres éléments dans $E \setminus A$.

6. En informatique, on utilise le système binaire pour coder les caractères. Un bit (binary digit : chiffre binaire) est un élément qui prend la valeur 0 ou la valeur 1. Avec 8 bits (un octet), combien de caractères peut-on coder ?

Solution : Il y a autant de possibilités que de 8-uplet de $\{0,1\}$, c'est-à-dire que d'éléments de $\{0,1\}^8$, c'est-à-dire $2^8 = 256$.

7. Raymond Queneau a écrit un ouvrage intitulé *Cent mille milliards de poèmes*. Il est composé de 10 pages contenant chacune 14 vers. Le lecteur peut composer son propre poème de 14 vers en prenant le premier vers de l'une des 10 pages puis le deuxième vers de l'une des 10 pages et ainsi de suite jusqu'au quatorzième vers. Justifier le titre de l'ouvrage.



Solution : Un poème est donné (de façon unique) par un 14-uplet de nombres entre 1 et 10, qui désignent le numéro de la page choisie pour chaque vers. Il y a donc 10^{14} poèmes possibles, c'est-à-dire cent mille milliards.

8. Une personne a onze amis très proches, et souhaiterait organiser un dîner avec cinq d'entre eux. Combien a-t-elle de choix possibles ? Même question si, de plus, deux des amis ne peuvent venir qu'ensemble. Même question si, au contraire, deux des amis ne peuvent pas se voir.

Solution : Par définition, il y a $\binom{11}{5} = 462$ façons de choisir 5 personnes parmi 11. Si deux des amis ne peuvent venir qu'ensemble, on distingue deux cas : soit ils sont invités, auquel cas il reste 3 autres personnes à choisir parmi les 9 restantes, soit ils ne sont pas invités, auquel cas il reste 5 personnes à choisir parmi les 9 restantes, ce qui fait au total

$$\binom{9}{3} + \binom{9}{5} = 84 + 126 = 210$$

possibilités. Enfin, si deux des amis (notons-les A et B) ne peuvent pas venir ensemble, alors de trois choses l'une : si A est invité, il reste 4 personnes à inviter parmi 9 (puisqu'on exclut B), de même si

B est invité (on exclut A), et enfin si ni A ni B ne sont invités il reste 5 personnes à choisir parmi 9. Tous ces cas sont disjoints, le nombre total de possibilités est donc

$$\binom{9}{4} + \binom{9}{4} + \binom{9}{5} \;=\; 126 + 126 + 126 \;=\; 378\,.$$

Une façon alternative de trouver cette valeur est de retrancher au nombre total de groupes de 5 possibles (c'est-à-dire 462) le nombre de groupes dans lesquels A et B sont simultanément. Or il y a autant de groupes de 5 comportant A et B que de groupes de 3 parmi les 9 autres amis, c'est-à-dire $\binom{9}{3} = 84$, et l'on retrouve bien qu'il y a alors $462 - 84 = 378$ groupes de 5 qui ne contiennent pas simultanément A et B.

9. Combien 1800 a-t-il de diviseurs ?

<ins>Solution</ins> : Commençons par décomposer 1800 en facteur premiers : $1800 = 5^2 \times 3^2 \times 2^3$. Un diviseur de 1800 est donc de la forme $5^{n_5} \times 3^{n_3} \times 2^{n_2}$ avec $n_3, n_5 \in \{0,1,2\}$ et $n_2 \in \{0,1,2,3\}$. De plus, un triplet (n_5, n_3, n_2) de $\{0,1,2\}^2 \times \{0,1,2,3\}$ définit de manière unique un tel diviseur, autrement dit il y a autant de diviseurs que de triplets, c'est-à-dire

$$\mathrm{Card}(\{0,1,2\}^2 \times \{0,1,2,3\}) \;=\; (\mathrm{Card}(\{0,1,2\}))^2 \times \mathrm{Card}(\{0,1,2,3\}) \;=\; 3^2 \times 4 \;=\; 36\,.$$

Exercice 2 (Symbole de sommation)**.** Pour $n \in \mathbb{N}$, on note E_n l'ensemble des entiers entre 1 et n qui ne sont pas divisibles par 3. Écrire sans symbole $\sum$ les termes suivants :

$$\sum_{k \in E_6} k\,, \qquad \sum_{i=1}^{4} \sum_{j \in E_i} \frac{1}{j}\,, \qquad \sum_{r \in E_7} \sum_{s=r}^{r+2} s^r$$

<ins>Solution</ins> :

$$\sum_{k \in E_6} = 1 + 2 + 4 + 5\,.$$

Pour la deuxième expression, en décomposant d'abord selon la valeur de i :

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{4} \sum_{j \in E_i} \frac{1}{j} \;&=\; \sum_{j \in E_1} \frac{1}{j} + \sum_{j \in E_2} \frac{1}{j} + \sum_{j \in E_3} \frac{1}{j} + \sum_{j \in E_4} \frac{1}{j} \\ &=\; 1 + \left(1 + \frac{1}{2}\right) + \left(1 + \frac{1}{2}\right) + \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right)\end{aligned}$$

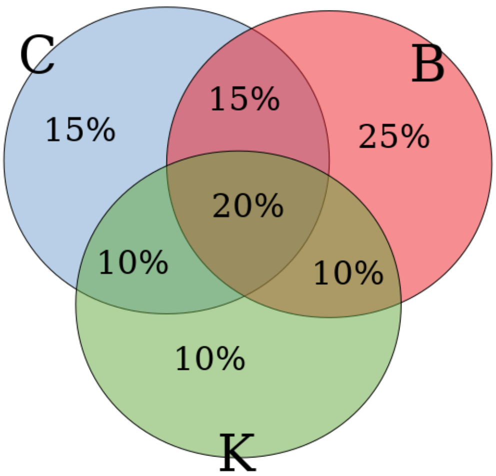
Pour la dernière expression, en décomposant d'abord selon la valeur de r :

$$\begin{aligned}\sum_{r \in E_7} \sum_{s=r}^{r+2} s^r \;&=\; \sum_{s=1}^{1+2} s + \sum_{s=2}^{2+2} s^2 + \sum_{s=4}^{4+2} s^4 + \sum_{s=5}^{5+2} s^5 + \sum_{s=7}^{7+2} s^7 \\ &=\; (1+2+3) + \left(2^2 + 3^2 + 4^2\right) + \left(4^4 + 5^4 + 6^4\right) + \left(5^5 + 6^5 + 7^5\right) + \left(7^7 + 8^7 + 9^7\right)\end{aligned}$$

Applications

Exercice 3 (Ensembles)**.** Parmi les étudiants de Sorbonne Université, 60% pratiquent le curling, 50% le karaté et 70% le bobsleigh. De plus, 30% font à la fois du curling et du karaté, 35% font du curling et du bobsleigh, et 30% font à la fois du karaté et du bobsleigh. Quelqu'un prétend que 20% des étudiants pratiquent les trois sports. Est-ce possible ?

Solution :



Notons C, K et B les ensembles d'étudiants pratiquant respectivement le curling, le karaté et le bobsleigh, et $p(E)$ la proportion d'un ensemble E (par exemple, $p(C) = 60\%$). Supposons que 20% des étudiants pratiquent les trois sports, c'est-à-dire que $p(C \cap K \cap B) = 20\%$. On peut alors calculer les proportions des ensembles d'étudiants pratiquant toutes les combinaisons possibles de sports. En effet, on sait qu'il y a 30% d'étudiants qui pratiquent le curling et le karaté, et 20% qui pratiquent les trois sports, il reste donc $p(C\cap K\cap B^c) = p(C\cap K)-p(C\cap K\cap B) = 10\%$ d'étudiants qui pratiquent le curling et le karaté mais pas le bobsleigh. De même, on calcule $p(C\cap B\cap K^c) = 15\%$ et $p(K\cap B\cap C^c) = 10\%$. On sait donc qu'il y a $p(C\cap K\cap B^c)+p(C\cap B\cap K^c)+p(C\cap K\cap B) = 10\%+15\%+20\% = 45\%$ d'étudiants qui pratiquent le curling et au moins un autre sport, il reste donc $p(C\cap K^c\cap B^c) = 60\% - 45\% = 15\%$ d'étudiants qui pratiquent uniquement le curling, et de même $p(K \cap C^c \cap B^c) = 50\% - 40\% = 10\%$ et $p(B \cap C^c \cap K^c) = 70\% - 45\% = 25\%$. En distinguant en fonction des différentes combinaisons de sport, on obtient une partition des étudiants qui pratiquent au moins un sport. La proportion de ces étudiants sportifs, parmi tous les étudiants de l'université, ne peut pas dépasser 100%. Or, la somme des proportions sur les éléments de la partition donne 105%, c'est donc impossible.

Exercice 4. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, une permutation de n éléments peut être vue comme une application $\sigma : \{1, \dots, n\} \to \{1, \dots, n\}$ bijective (on pioche successivement et sans remise n boules numérotées de 1 à n et on note $\sigma(i) = j$ si la boule numéro i a été piochée en j^{ieme} position). Combien y a-t-il de permutations de $\{1, \dots, n\}$ telles que $\sigma(k)$ est pair pour tout k pair ?

Solution : Il y a $m = \lfloor n/2 \rfloor$ nombres pairs dans $\{1, \dots, n\}$, et $n - m$ nombres impairs. Si $\sigma(k)$ est pair pour tout k pair, alors l'application σ_p qui à k pair associe $\sigma(k)$ est une permutation des m nombres pairs entre 1 et n et, de même, l'application σ_i qui à k impair associe $\sigma(k)$ est une permutation des $n - m$ nombres impairs entre 1 et n. Réciproquement, si σ_p est une permutation des pairs entre 1 et n et σ_i une permutation des impairs, alors l'application σ définie par $\sigma(k) = \sigma_p(k)$ pour k pair et $\sigma(k) = \sigma_i(k)$ pour k impair est une bijection de $\{1, \dots, n\}$ telle que $\sigma(k)$ est pair pour tout k pair.

Autrement dit les ensembles $E = \{\sigma$ permutation telle que $\sigma(k)$ est pair pour tout k pair$\}$ et $F = \{$permutations des nombres pairs entre 1 et $n\}\times\{$permutations des nombres impairs entre 1 et $n\}$ sont en bijection, et donc de même cardinal. Donc $\mathrm{Card}(E) = m! \times (n-m)!$.

Exercice 5 (Autour du binôme de Newton)**.**

1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ fixé, étudier le comportement de $f(x) = ((x+2)^n - x^n)/x^{n-1}$ quand $x \to +\infty$.

Solution : Notons que, pour $x \to +\infty$, le monôme dominant du polynôme $(x+2)^n$ est x^n, de sorte que pour $(x+2)^n - x^n$, le terme dominant est le monôme suivant dans la décomposition de $(x+2)^n$, qui est un terme en x^{n-1}. Plus précisément, par la formule du binôme de Newton

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{x^{n-1}}\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k 2^{n-k} - x^n\right) \\ &= \frac{1}{x^{n-1}}\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}x^k 2^{n-k} \underset{x\to+\infty}{\simeq} \frac{1}{x^{n-1}}\binom{n}{n-1}x^{n-1}2^{n-(n-1)} = 2n\,. \end{aligned}$$

Autrement dit, $f(x)$ converge vers $2n$ quand x tend vers $+\infty$.

2. Soit $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. En se basant sur la formule du binôme de Newton, calculer

$$a)\quad \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k \qquad b)\quad \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} \qquad c)\quad \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k$$

Solution : D'après la formule du binôme de Newton,

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k 1^{n-k} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k\,.$$

En appliquant cette formule aux cas particulier $x = 1$ ou $x = -1$, on obtient

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = 2^n \qquad \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k = (1-1)^n = 0\,.$$

Exercice 6 (Série géométrique)**.**

1. On note x le nombre de $[0,1]$ dont l'écriture décimale ne contient que des 9, c'est-à-dire

$$x = 0,9999999\ldots = \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{9}{10^k}\,.$$

Montrer que $x = 1$.

Solution : Appliqué à $r = 1/10$, la formule de la série géométrique donne

$$\frac{x}{9} = \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{10^k} = -1 + \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{10^k} = -1 + \frac{1}{1-1/10} = \frac{1}{9} \qquad \Rightarrow \qquad x = 1\,.$$

2. La légende indienne de la création des échecs est la suivante : le sage Sissa aurait inventé ce jeu pour distraire son roi. Ce dernier, pour le remercier, lui aurait proposé de choisir une récompense. Le sage aurait dit : “placez un grain de riz sur la première case de l'échiquier, puis deux sur la deuxième case, quatre sur la troisième, et ainsi de suite en doublant le nombre de grains de riz à chaque case, et donnez-moi le riz posé au total sur l'échiquier”. Un échiquier comportant 64 cases, un grain de riz ayant approximativement une masse de 0,04g et la production mondiale de riz ayant été environ de 699 millions de tonnes en 2010, la demande de Sissa était-elle raisonnable ?

Solution : Il y a 2^{k-1} grains de riz sur la k^{ieme} case, donc au total

$$\sum_{k=1}^{64} 2^{k-1} = \sum_{j=0}^{63} 2^j = \frac{1-2^{64}}{1-2} = 2^{64}-1 \geqslant 1,8 \times 10^{19}\,.$$

En multipliant par 4×10^{-8} on obtient environ 720 milliards de tonnes de riz, donc plus de 1000 fois la production mondiale actuelle.

Exercice 7 (Bootstrap)**.**

1. Pour $m \geqslant n$ deux entiers positifs, combien y a-t-il de façons de ranger m boules indiscernables dans n boîtes numérotées, de telle sorte qu'il y ait au moins une boule par boîte ? *Indication : on peut voir le problème ainsi : on aligne les boules, puis on les prend une par une dans l'ordre, en remplissant les boîtes une par une, c'est-à-dire que les premières boules vont dans la boîte* 1*, puis on passe à la boîte* 2*, etc. Une fois les boules alignées,*

$$\bigcirc\,\bigcirc\,\bigcirc\,\bigcirc\,\bigcirc\bigcirc$$

le nombre de boules par boîte est entièrement déterminée par les délimitations, entre deux boules successives, qui désignent le moment où l'on change de boîte. Par exemple, pour $m = 6$ *et* $n = 4$*, on peut placer ces délimitations ainsi :*

$$\bigcirc|\,\bigcirc\,\bigcirc|\,\bigcirc\,|\,\bigcirc\,\bigcirc$$

ce qui correspond à mettre une boule dans la boîte 1*,* 2 *dans la* 2*,* 1 *dans la* 3 *et* 2 *dans la* 4*.*

Solution : Dans le cas général, pour obtenir n cases, il faut placer $n-1$ barres entre les boules (mais jamais deux ou plus entre deux boules car on ne veut pas de boîtes vides), et il y a $m-1$ endroits possibles pour y placer ces $n-1$ barres. Le nombre de façons de ranger m boules dans n boîtes en ne laissant aucune boîte vide est donc $\binom{m-1}{n-1}$.

2. Pour m et n deux entiers positifs, combien y a-t-il de façons de ranger m boules indiscernables dans n boîtes numérotées ? *Indication : une façon de ranger* m *boules dans* n *boîtes correspond de manière unique à une façon de ranger* $m+n$ *boules dans* n *boîte sans boîtes vides.*

Solution : Si l'on a m boules dans n boîtes, alors en ajoutant une boule dans chaque boîte on a $m+n$ boules dans n boîte et aucune boîte n'est vide, et inversement si on a $m+n$ boules dans n boîtes avec aucune boîte vide alors on peut enlever une boule par boîte et on obtient bien m boules dans n boîte. Il y a donc autant de façon de ranger m boules dans n boîtes que de ranger $m+n$ boules dans n boîtes sans boîtes vides, c'est-à-dire, d'après la question précédente, $\binom{m+n-1}{n-1}$.

3. Pour m et n deux entiers positifs, combien y a-t-il de façon d'écrire un entier $m \in \mathbb{N}_*$ comme la somme de n entiers ? (ex : $4 = 0+4 = 1+3 = 2+2 = 3+1 = 4+0$, il y a 6 façons d'écrire 4 comme une somme de deux entiers).

Solution : C'est exactement le nombre de façons de ranger m boules dans n boîtes, il suffit de dire que le nombre total de boules, m, est égal à la somme des nombres de boules par boîte. C'est donc $\binom{m+n-1}{n-1}$.

4. En statistiques, la méthode dite du bootstrap [1] repose sur ce qu'on appelle le ré-échantillonnage. On suppose que l'on dispose de n observations distinctes $x_1, \ldots, x_n$. Ré-échantillonner consiste à sélectionner un certain nombre de fois x_1, un certain nombre de fois x_2, etc. jusqu'à avoir sélectionné n observations (en les comptant plusieurs fois si on a sélectionné plusieurs fois la même). Par exemple, pour $n = 4$, (x_1, x_1, x_1, x_3) ou (x_1, x_2, x_2, x_4) sont des ré-échantillons de (x_1, x_2, x_3, x_4). Un ré-échantillon est entièrement déterminé par le nombre de fois qu'on a sélectionné chaque observations (autrement dit, (x_1, x_1, x_1, x_3) et (x_1, x_1, x_3, x_1) désignent le même ré-échantillon : celui où on a sélectionné 3 fois x_1, 1 fois x_3 et 0 fois x_2 et x_4). Combien y a-t-il de ré-échantillons possibles ?

Solution : Considérons n boîtes numérotées de 1 à n, et rangeons-y n boules. Alors on peut considérer le ré-échantillon défini ainsi : on sélectionne autant de fois l'observation x_i qu'il y a de boules dans la boîte numéro i. Ceci construit bien une bijection entre l'ensemble des ré-échantillons possibles, et l'ensemble des façons de ranger n boules dans n boîtes. D'après les questions précédentes, il y a donc $\binom{2n-1}{n}$ ré-échantillons possibles.

Pour aller plus loin

Exercice 8 (Nombres de Catalan)**.** Pour $n \in \mathbb{N}$, on considère un produit de $n+1$ facteurs : $a_1 \times a_2 \cdots \times a_{n+1}$. On suppose que le produit est transitif (c'est-à-dire $(ab)c = a(bc)$ pour tous a, b, c) mais pas commutatif ($ab \neq ba$ en général), par exemple on peut imaginer que les facteurs sont des matrices. Pour calculer le produit des $n+1$ facteurs, on doit donc faire successivement des produits de 2 facteurs, par exemple pour calculer abc on peut commencer par calculer ab puis faire le produit de ce terme avec c, ou inversement on peut calculer bc puis en calculer le produit avec a. On appelle n^{ieme} nombre de Catalan et on note C_n le nombre de façons différentes de procéder. Autrement dit, C_n est le nombre de façon de mettre des parenthèses sur les $n+1$ facteurs pour indiquer sans ambiguïté les priorités des calculs. Par exemple, pour $n = 2$, il y a $C_2 = 2$ possibilités, $(ab)c$ et $a(bc)$. Pour $n = 3$, $(ab)(cd)$ et $(a(bc))d$ sont deux parenthésages possibles, en revanche $ab(cd)$ n'est pas correct (on ne sait pas si on doit d'abord calculer ab puis le multiplier à (cd), ou si on doit calculer $b(cd)$ et ensuite le multiplier par a).

1. Calculer C_3 (et éventuellement vérifier que $C_4 = 14$).

Solution : On énumère les possibilités. Pour $n = 3$,

$$a(b(cd)) \qquad (ab)(cd) \qquad (a(bc))d \qquad a((bc)d) \qquad ((ab)c)d$$

1. Étymologiquement, *bootstrap* désigne en anglais une languette à l'arrière de certaines bottes, et a été utilisé vers le 19ème siècle dans des expressions du genre « se tirer soi-même par les bootstrap »pour désigner une action impossible ou bien qui s'est déclenchée et menée sans aide extérieure. C'est également ce qui a donné les termes boot et reboot pour désigner les tâches qu'un ordinateur fait de lui-même à son lancement.

donc $C_3 = 5$. Pour $n = 4$, c'est un peu fastidieux. Commençons par les façons de calculer qui commencent par calculer (ab) :

$$(((ab)c)d)e \qquad ((ab)c)(de) \qquad ((ab)(cd))e \qquad (ab)((cd)e) \qquad (ab)(c(de))\,,$$

puis celles qui commencent par (bc) :

$$(a(bc))(de) \qquad ((a(bc))d)e \qquad (a((bc)d))e \qquad a(((bc)d)e) \qquad a((bc)(de))\,,$$

puis celles qui commencent par (cd) (sans compter celles qu'on a déjà vues) :

$$a(b((cd)e)) \qquad (a(b(cd)))e \qquad a((b(cd))e)\,,$$

puis celles qui commencent pas (de) (idem) :

$$a(b(c(de)))$$

On a donc $C_4 = 14$.

2. Montrer que les nombres de Catalan satisfont la relation de récurrence

$$\forall n \geqslant 1\,, \qquad C_n = \sum_{k=0}^{n-1} C_k C_{n-k-1}\,.$$

(On pourra s'intéresser à la multiplication qui est effectuée en dernière.)

Solution : Pour un parenthésage donné, notons R le nombre de termes situés avant le signe $\times$ qui sera le dernier effectué, par exemple :

$$(((ab)c)d) \times e \;\Rightarrow\; R = 4\,, \qquad (ab) \times ((cd)e) \;\Rightarrow\; R = 2\,.$$

Une fois R déterminé, un parenthésage de n termes induit un parenthésage des R premiers termes et un parenthésage des $n - R$ derniers termes, par exemple :

$$((ab)c) \times ((de)(fg)) \qquad \Rightarrow \qquad R = 3\,, \text{parenthésages } (ab)c \text{ et } (de)(fg)\,.$$

Réciproquement, pour une valeur donnée de R, un parenthésage est complétement défini par un parenthésage des R premiers termes et un parenthésage de $n - R$ derniers termes.
Pour $n \geqslant 2$ et k entre 1 et $n-1$, notons E_n l'ensemble des parenthésages de n facteurs et $E_{n,k}$ l'ensemble de ces parenthésages tels que $R = k$. Le raisonnement précédent montre que $E_{n,k}$ est en bijection avec $E_k \times E_{n-k}$. D'autre part les $(E_{n,k})_{1 \leqslant k \leqslant n-1}$ forment une partition de E_n, donc en distinguant selon les valeurs possibles de R,

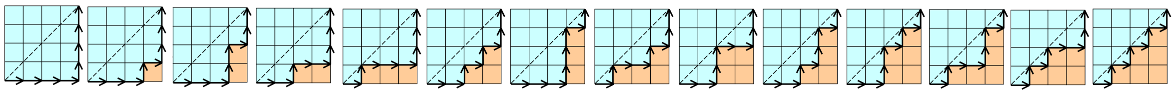
$$\mathrm{Card}(E_n) \;=\; \sum_{k=1}^{n-1} \mathrm{Card}(E_k)\mathrm{Card}(E_{n-k})\,.$$

Par définition de C_n, pour tout $n \geqslant 1$,

$$C_n = \mathrm{Card}(E_{n+1}) = \sum_{k=1}^{n} C_{k-1} C_{n-k} = \sum_{j=0}^{n-1} C_j C_{n-j-1}$$

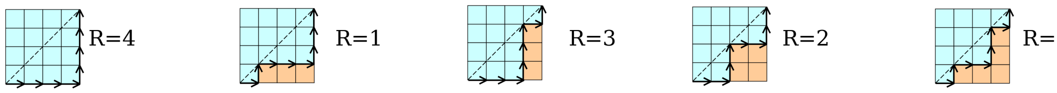
où l'on a fait une rénumérotation $j = k - 1$.

3. Pour $n \in \mathbb{N}_*$, sur une grille de $n \times n$ carrés, on considère tous les chemins qui partent du coin en bas à gauche $(0,0)$, finissent au coin en haut à droite (n,n) et ne se déplacent que vers la droite ou vers le haut. On dit qu'un tel chemin est bon s'il ne dépasse jamais la diagonale, c'est-à-dire qu'il est inclus dans $\{(i,j) \in \{1,\dots,n\}^2 \ : i \geqslant j\}$, et qu'il est mauvais sinon.



Montrer que le nombre de bons chemins est C_n (on pourra soit trouver une bijection entre l'ensemble des bons chemins et les façons de multiplier les facteurs, soit montrer que le nombre de bons chemins satisfait la même relation de récurennce que C_n)

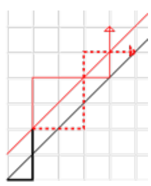
<u>Solution</u> : Notons D_n le nombre de bons chemins. On constate que $D_1 = 1$ et $D_2 = 2$. Il suffit donc de montrer qu'avec la convention $D_0 = 1$, $(D_n)_{n\in\mathbb{N}}$ satisfait la même relation de récurrence que $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Remarquons qu'un chemin de $(0,0)$ vers (n,n) est toujours constitué de $2n$ déplacements (n vers la droite, n vers le haut). Numérotons de 1 à n les n déplacements vers le haut et, pour un chemin donné, notons R le numéro du premier déplacement vers le haut qui fait arriver le chemin sur la diagonale. Par exemple :



En ne conservant le chemin que jusqu'au R^{ieme} déplacement vers le haut, on obtient un bon chemin sur une grille de taille $R \times R$, et de même si on regarde le chemin uniquement après le R^{ieme} déplacement vers le haut, on obtient un chemin sur une grille de taille $(n-R) \times (n-R)$. Comme dans la question précédente, en partionnant les bons chemins en fonction de la valeur de R, on arrive à la même relation de récurrence, ce qui conclut.

4. On veut compter le nombre de mauvais chemins. Étant donnée la séquence d'instructions d'un mauvais chemin $(D, D, H, D, \dots)$ avec D =droite et H =haut, on considère l'opération suivante, qui produit un nouveau chemin : on suit les instructions dans l'ordre et, dès qu'on a dépassé strictement la diagonal, on suit exactement les instructions contraires, c'est-à-dire qu'on remplace les D par des H et inversement. Montrer grâce à cette construction que l'ensemble des mauvais chemins est en bijection avec l'ensemble des chemins qui partent de $(0,0)$ et, en ne se déplaçant que vers la droite et le haut, arrivent en $(n-1, n+1)$. En déduire le nombre de mauvais chemins.

<u>Solution</u> : On représente l'opération sur cette figure (en noir le chemin initial jusqu'à dépassement de la diagonale, en pointillée le mauvais chemin initial, en ligne continue rouge le nouveau chemin) :



Remarquons que, par définition de la diagonale, au moment où on dépasse la diagonale, on a fait exactement 1 déplacement vers le haut de plus que de déplacement vers la droite. Comme un chemin de $(0,0)$ vers (n,n) comporte autant de H que de D, cela signifie qu'au moment du dépassement, dans les instructions qui n'ont pas encore été appliquées, il reste un D de plus que de H. Donc, dans le nouveau chemin obtenu après transformation, au lieu de n H et n D, il y aura $(n-1)$ D et $(n+1)$ H, le chemin va donc monter $n+1$ et aller vers la droite $n-1$ fois, il arrivera donc en $(n-1, n+1)$. Pour voir que l'application qui a un mauvais chemin associe le chemin modifié de $(0,0)$ vers $(n-1, n+1)$ est une bijection, il suffit de voir qu'à partir du chemin modifié on peut réobtenir le mauvais chemin initial en faisant exactement la même transformation : on suit le chemin modifié jusqu'à ce qu'il dépasse la diagonale (ce qui arrive forcément à un moment puisque le point d'arrivée est strictement au-dessus de la diagonale), et ensuite on inverse toutes les instructions.

Conclusion, il y autant de mauvais chemins de $(0,0)$ vers (n,n) que de chemins de $(0,0)$ vers $(n-1, n+1)$. Or (on l'a vu dans l'exercice 1) pour définir un tel chemin est défini, il faut et il suffit de choisir, parmi les $2n$ déplacements, lesquels seront les $n+1$ déplacements vers le haut. Il y a donc $\binom{2n}{n+1}$ mauvais chemins.

5. Montrer que

$$C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}.$$

<u>Solution</u> : Par le raisonnement précédent, il y a $\binom{2n}{n}$ chemins de $(0,0)$ vers (n,n), et parmi eux il y a $\binom{2n}{n+1}$ chemins qui sont mauvais, les autres sont les bons chemins dont le nombre est C_n, donc

$$C_n = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n+1}.$$

En utilisant la formule avec les factoriels pour les coefficients binomiaux,

$$\binom{2n}{n+1} = \frac{(2n)!}{(n+1)!(n-1)!} = \frac{(2n)!}{n!n!} \times \frac{n}{n+1} = \frac{n}{n+1}\binom{2n}{n}$$

et donc, finalement,

$$C_n = \binom{2n}{n}\left(1 - \frac{n}{n+1}\right) = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}.$$