TD 2

COUCHE PHYSIQUE

1. PROPAGATION DU SIGNAL

La transmission de données sur un support physique entre un émetteur et un récepteur se fait par propagation d'une onde (électrique ou électromagnétique), dont la forme la plus simple est une fonction sinusoïdale :

$$s(t) = A\sin\left(2\pi f_0 t + \varphi\right)$$

caractérisée par trois paramètres :

- l'**amplitude** A qui est la *valeur crête* du signal dans le temps ;
- la **fréquence** f_0 qui est la vitesse à laquelle le signal se répète, exprimée en nombre de cycles par seconde ou en Hertz (Hz). L'inverse de la fréquence est appelé période T du signal et se mesure en secondes : $T = \dfrac{1}{f_0}$;
- la **phase** φ qui est une mesure de la position relative dans le temps à l'intérieur d'une période du signal, exprimée en radians (rad).

Exercice 1.1 | Signal périodique

1. Représenter la fonction sinusoïdale $f(x) = \sin(x)$. En déduire la représentation graphique de la fonction $g(t) = \sin(2\pi at)$ où a est un paramètre constant (strictement positif). La fonction $g(t)$ est-elle périodique ? Si oui, quelle est sa période ?
2. On considère le signal suivant :

$$s(t) = \sin(2\pi f_0 t) + \frac{1}{3}\sin(2\pi(3f_0)t)$$

   a) De combien de composantes fréquentielles ce signal est-il constitué ? Les représenter et les sommer graphiquement.

   b) Le signal $s(t)$ est-il périodique ? Si oui, quelle est sa période ?

2. DECOMPOSITION EN SERIES DE FOURIER / SPECTRE

Au 19ième siècle, Jean-Baptiste **Fourier** montre que toute **fonction périodique** $g(t)$ de période T peut se décomposer en une somme (éventuellement infinie) de fonctions sinus et cosinus :

$$g(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(2\pi n f_0 t) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(2\pi n f_0 t)$$

où f_0 est la ***fréquence fondamentale*** (inverse de la période T), a_n et b_n sont les amplitudes cosinus et sinus de la ***$n^{ième}$ harmonique*** et c_0 est la composante continue du signal. Une telle décomposition est unique et est appelée ***Série de Fourier***. Les coefficients a_n, b_n et c_0 apparaissant dans cette décomposition sont donnés à titre indicatif par les intégrales suivantes, définies sur un intervalle de longueur T quelconque :

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T g(t)\cos(2\pi n f_0 t)\,dt$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T g(t)\sin(2\pi n f_0 t)\,dt$$

$$c_0 = \frac{1}{T}\int_0^T g(t)\,dt$$

Le ***spectre fréquentiel*** associé à une fonction périodique $g(t)$ est un ***spectre de raies***, chaque raie correspondant à la fréquence d'un harmonique de la décomposition en séries de Fourier de $g(t)$. On définit trois types de spectres fréquentiels. Le plus utilisé est le **spectre d'amplitude** pour lequel la hauteur de chaque raie est égale à $\sqrt{a_n^2 + b_n^2}$.

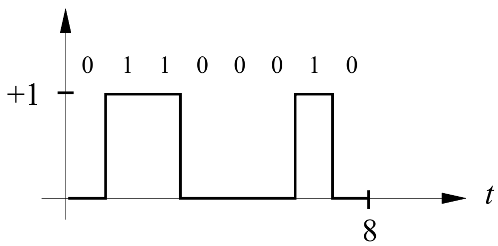
La ***largeur spectrale*** ou ***largeur de bande*** d'un signal est la largeur de la plage des fréquences incluses dans le signal (différence entre la plus grande fréquence et la plus petite fréquence ayant une raie non nulle dans le spectre).

Exercice 2.1 | Décomposition en séries de Fourier

1. Sans faire aucun calcul et par simple identification, donner les coefficients de la décomposition en séries de Fourier du signal $s(t)$ de l'exercice 1.1.
2. Représenter le spectre d'amplitude associé au signal $s(t)$. Quelle est la largeur spectrale de ce signal ?

Exercice 2.2 | Déformation du signal

On considère la transmission d'une suite supposée infinie de caractères « b », un caractère « b » étant codé sur un octet « 01100010 », transmis à l'aide du signal suivant :



On appelle $g(t)$ le signal complet correspondant à la transmission d'une suite infinie de caractères « b ».

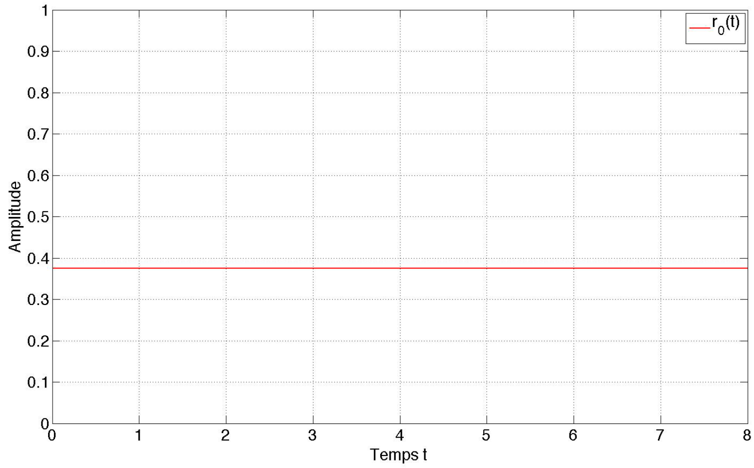
1. Calculer la composante continue c_0 du signal $g(t)$.

Les valeurs numériques approchées à 10^{-6} près des 10 premiers harmoniques sont données dans le tableau suivant :

n	a_n	b_n	$\sqrt{a_n^2 + b_n^2}$
1	0,093231	0,225079	0,243624
2	–0,477465	–0,159155	0,503292
3	–0,181130	–0,075026	0,196053
4	0,000000	0,159155	0,159155
5	0,108678	–0,045016	0,117632
6	0,159155	–0,053052	0,167764
7	–0,013319	0,032154	0,034803
8	–0,000000	0,000000	0,000000
9	0,010359	0,025009	0,027069
10	–0,095493	–0,031831	0,100658

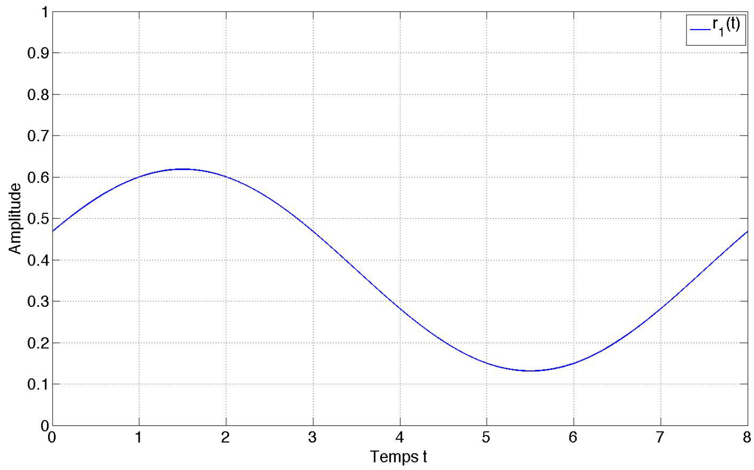
2. En déduire le spectre d'amplitude associé au signal.

On applique au signal g(t) un filtre, appelé filtre passe-bas, laissant passer toutes les fréquences du signal jusqu'à une certaine fréquence f_c appelée fréquence de coupure. La représentation du signal $r_0(t)$ en sortie du filtre est la suivante :



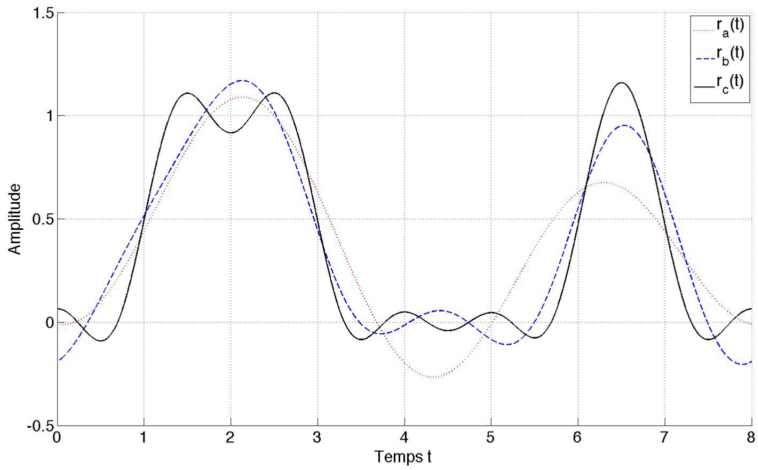
3. A quoi correspond le signal $r_0(t)$? Donner son expression. Que peut-on dire de la fréquence de coupure f_c du filtre ?

On change la fréquence de coupure du filtre. La représentation du signal $r_1(t)$ en sortie du filtre devient :



4. A quoi correspond le signal $r_1(t)$? Donner son expression. Que peut-on dire de la nouvelle fréquence de coupure f_c ?

La figure ci-dessous représente les signaux reçus $r_a(t)$, $r_b(t)$ et $r_c(t)$ lorsque l'on filtre le signal $g(t)$ à l'aide de trois fréquences de coupures différentes.



5. A quoi correspondent ces trois signaux ? Lequel d'entre eux est-il le plus proche de $g(t)$?

3. BANDE PASSANTE

Les supports physiques de transmission sont les éléments permettant de faire circuler les informations entre les équipements de transmission. On classe généralement ces supports en trois catégories :

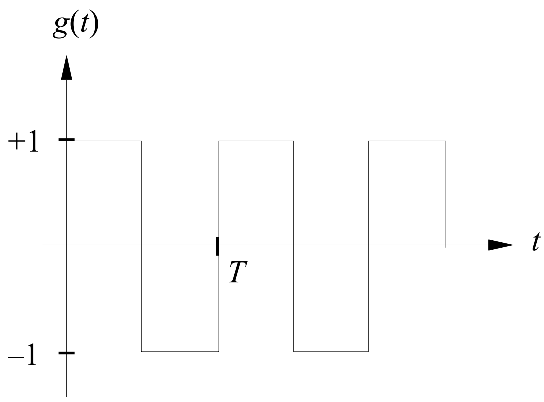
- les **supports métalliques** permettent de faire circuler une grandeur électrique sur un câble généralement métallique ;
- les **supports optiques** permettent d'acheminer des informations sous forme lumineuse ;
- les **supports aériens** désignent l'air ou le vide ; ils permettent la circulation d'ondes électromagnétiques diverses.

Un support de transmission ne peut transmettre que dans une bande de fréquence limitée. On appelle ***bande passante du support*** la bande de fréquences $[f_1, f_2]$ que le support laisse passer sans (trop de) déformation. La largeur de cette bande passante est généralement notée $B = f_2 - f_1$.

Exercice 3.1 | Bande passante

On considère la fonction périodique (de période T) suivante :

$$g(t) = +1 \quad \text{pour } 0 \leq t < T/2$$
$$g(t) = -1 \quad \text{pour } T/2 \leq t < T$$



Cette fonction représente un signal numérique codé sur deux niveaux : +1 V et –1 V. On suppose qu'une impulsion de +1 V code un « 1 » et qu'une impulsion de –1 V code un « 0 ». Ce type de codage est appelé NRZ (Non Return to Zero).

1. On considère que la fréquence (fondamentale) du signal est de 1 MHz. Quel est le débit du signal numérique correspondant (en bits par seconde) ?

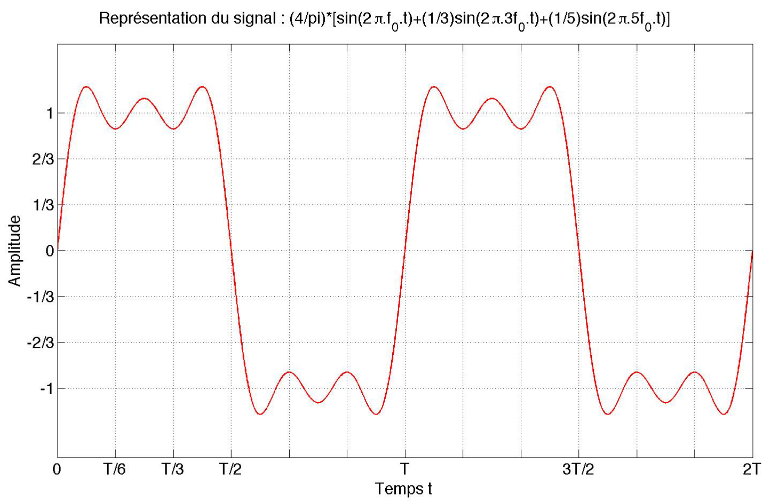
On montre que la décomposition de ce signal en série de Fourier est la suivante :

$$g(t) = \frac{4}{\pi} \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ impair}}}^{\infty} \frac{1}{n} \sin(2\pi n f_0 t)$$

.

2. Quels sont les coefficients a_n, b_n et c_0 associés à cette décomposition ? En déduire le spectre d'amplitude du signal.

On considère que la transmission des fréquences f_0 à $5f_0$ est nécessaire pour récupérer sans problème le signal au niveau du récepteur. La forme du signal obtenu (tronqué au-delà de la fréquence $5f_0$) est la suivante :



3. Quelle bande passante le support doit-il avoir pour permettre cette transmission ?

4. Que se passe-t-il si la largeur de la bande passante du support est de 2 MHz ?
5. Qu'en est-il si le débit de la transmission est réduit à 1 Mbit/s ?

On suppose maintenant que le signal est codé sur quatre niveaux : +3 V, +1 V, –1 V et –3 V, correspondant respectivement aux codes « 01 », « 00 », « 10 » et « 11 ». On a alors affaire à un signal NRZ quadrivalent.

6. On considère que le signal est toujours représenté par la fonction périodique $g(t)$ et que la fréquence du signal est de 500 kHz. Quels peuvent être les signaux transmis ? Quel est le débit du signal numérique correspondant (en bit/s) ?
7. Toujours avec une fréquence du signal de 500 kHz, quel débit obtient-on si le signal est codé sur $M = 2^r$ niveaux ?

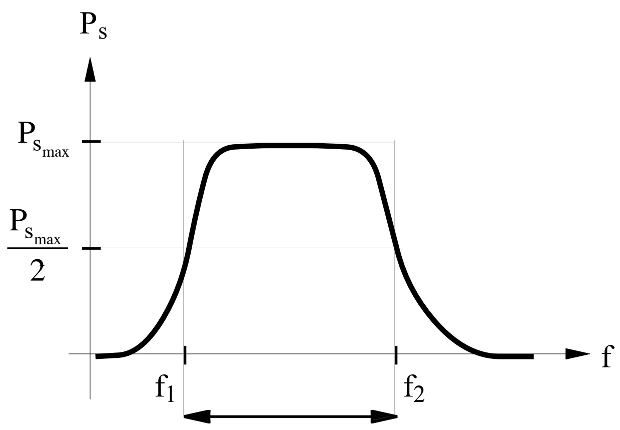
4. Bruit

La transmission de données ne se fait pas sans altération. Des parasites ou des dégradations du signal peuvent survenir au niveau des composants électroniques utilisés pour la transmission ou au niveau du canal. **Le bruit** est une perturbation aléatoire qui se rajoute au signal sur tout support. Il est généralement caractérisé par un ratio, appelé ***rapport signal-à-bruit***, qui permet de caractériser l'importance relative du signal par rapport à celle du bruit. Le rapport signal-à-bruit se calcule en faisant le quotient entre la puissance P_S du signal et la puissance P_N du bruit : P_S/P_N. Habituellement il est exprimé en ***décibels*** (dB) :

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{\mathrm{dB}} = 10 \ \log_{10}\left(\frac{P_S}{P_N}\right)$$

Plus le rapport signal-à-bruit est grand, meilleure est la qualité de la transmission.

L'échelle logarithmique des décibels est également utilisée pour caractériser la bande passante. En effet, la bande passante d'une voie de transmission est définie comme l'intervalle $[f_1, f_2]$ de fréquence sur lequel l'affaiblissement en puissance du signal est compris entre l'affaiblissement minimal et l'affaiblissement minimal à laquelle on ajoute une certaine valeur, généralement 3 dB (correspondant donc à un affaiblissement de la puissance du signal de 50 % supplémentaires par rapport au meilleur cas).

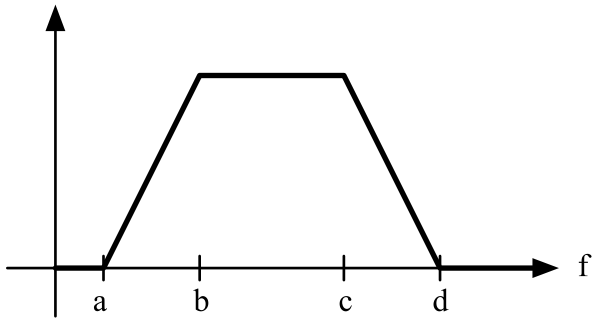


Exercice 4.1 | Rapport signal-à-bruit

1. A quels nombres de dB correspondent les rapports P_S/P_N : 100 000, 2000, 500 ?
2. A quoi correspondent en grandeur réelle les rapports : 3 dB, 10 dB, 40 dB, 37 dB ?

Exercice 4.2 | Bande passante à 3 dB

1. Calculer la largeur de la bande passante à 3 dB du canal (théorique) suivant :



5. CAPACITE THEORIQUE D'UN CANAL DE TRANSMISSION : LOI DE SHANNON

La loi de Shannon fournit le **débit binaire maximum** auquel on peut théoriquement transmettre sans erreur sur un canal à bande passante limitée sujet à du bruit, encore appelé capacité :

Loi de Shannon

La capacité d'un canal de transmission bruité de bande passante B s'exprime de la façon suivante :

$$C = B\log_2\left(1+\frac{P_S}{P_N}\right) \text{ bit/s}$$

où $\frac{P_S}{P_N}$ représente le rapport signal-à-bruit du canal (exprimé en grandeur réelle).

Exercice 5.1 | Loi de Shannon

On désire transmettre de la vidéo numérique ayant les caractéristiques suivantes : une matrice de 480×640 pixels où chaque pixel peut prendre une valeur parmi 32 intensités différentes. La vitesse requise est de 25 images par seconde.

1. Quelle est la vitesse de transmission de l'émetteur en bits par seconde ?
2. Le canal disponible a pour largeur de bande 4,5 MHz et un rapport signal-à-bruit de 35 dB. Peut-on transférer le signal vidéo sur ce canal ?
3. Qu'en est-il si le rapport signal-à-bruit passe à 20 dB ?

6. CODAGE EN LIGNE

Le **codage en ligne** consiste à associer une représentation physique au message numérique, avant d'effectuer une transmission numérique en Bande de Base (BdB) sur un support de longueur limitée.

Le codage en ligne se décompose en deux opérations. La première transforme la suite d'**éléments binaires** $\{d_k\}$ correspondant au message numérique à émettre en une suite de ***symboles***. C'est l'opération de codage binaire à M-aire. La seconde opération consiste à associer une forme d'onde à chaque symbole ainsi produit. C'est l'opération de codage M-aire à signal.

- Lors de l'opération de **codage binaire à *M*-aire**, les éléments binaires (bits) délivrés toutes les T_b secondes (ou encore à un débit $D_b = \frac{1}{T_b}$ bit/s) sont regroupés en symboles. La ***valence*** M du codage correspond à la taille de l'alphabet des symboles (nombre de symboles différents). Si $M = 2^r$, chaque symbole code $r = \log_2 M$ bits.

  Les symboles successifs sont alors transmis régulièrement à raison d'un symbole toutes les T_s secondes. Le nombre de symboles transmis par unité de temps $R_s = \frac{1}{T_s}$ symb/s (ou bauds), encore appelé rapidité de modulation, se relie donc au débit binaire par la relation suivante :

  $$R_s = \frac{D_b}{r} = \frac{D_b}{\log_2 M} \text{ symb/s ou bauds.}$$

- L'opération de **codage *M*-aire à signal** consiste à associer à chaque symbole une forme d'onde unique ou ***élément de signal***. Les formes d'onde utilisées sont de forme « carrée » (de sorte que le spectre du signal ainsi produit est centré autour de la fréquence nulle).

Exercice 6.1 | Codages bivalents

Soit la suite de bits : « 1101000011 » à coder en bande de base. Représenter les signaux transmis suivant les différents codes en ligne bivalents (de valence $M = 2$) définis ci-dessous.

1. Code NRZ (Non Return to Zero) binaire :
   $d_k = 0$, le signal vaut $-V$;
   $d_k = 1$, le signal vaut $+V$.
2. Code Manchester (ou biphase) :
   $d_k = 0$, le signal est un front montant au milieu de l'intervalle T_s ;
   $d_k = 1$, le signal est un front descendant au milieu de l'intervalle T_s.
3. Code Manchester différentiel (ou biphase différentiel) :
   $d_k = 0$, le signal force une transition (front montant ou descendant) au début de l'intervalle $\boldsymbol{T_s}$ et une autre au milieu de l'intervalle T_s ;
   $d_k = 1$, le signal force une transition (front montant ou descendant) uniquement au milieu de l'intervalle T_s.
   On supposera que l'amplitude du signal est égale à $-V$ juste avant l'origine des temps.
4. Code bipolaire simple :
   $d_k = 0$, le signal vaut 0 ;
   $d_k = 1$, le signal vaut $\pm V$ alternativement.
   Pour le codage du premier bit « 1 », on pourra prendre par convention une amplitude $+V$.

Exercice 6.2 | Codages multivalents

On considère un codage NRZ quadrivalent (de valence $M = 4$) transmettant un élément de signal toutes les 1 ms.

1. Représenter le codage correspondant à la séquence binaire « 00111011000111… ».
2. Quelle est la rapidité de modulation ?
3. Quel est le débit binaire transmis ?

7. CONTROLE D'ERREURS

Lors de la transmission des données, un signal peut subir diverses déformations et être altéré par du bruit. A la réception, lors du décodage, une **erreur** d'estimation peut alors se produire : l'état du signal représentant le bit « 1 » est interprété comme s'il s'agissait d'un bit « 0 » (ou l'inverse).

Les techniques employées, pour effectuer un contrôle d'erreurs, reposent sur l'utilisation de ***codes détecteurs*** ou de ***codes correcteurs*** d'erreurs qui enrichissent la suite de bits à envoyer, en lui ajoutant de la **redondance**. Le récepteur se sert de cette information ajoutée pour déterminer si une erreur s'est produite (code détecteur) et éventuellement pour la corriger (code correcteur).

Pour m bits de données, on ajoute r bits de redondance pour constituer un ***mot de code*** de n bits ($n = m+r$) que l'on transmet. Les r bits de contrôle se calculent directement (et de façon unique) à partir des m bits de données. Parmi tous les mots de code possibles, un mot sera dit ***légal***, si les bits de contrôle correspondent aux bits de données. Dans le cas contraire, il sera dit ***illégal*** (ou ***non autorisé***).

Exercice 7.1 | Codes détecteurs

1. Si l'on utilise un codage binaire, combien y a-t-il de mots de code possibles ? légaux ? illégaux ?
2. Qu'est-ce qui permet de détecter la présence d'une erreur en réception ?

Exercice 7.2 | Codes de détection d'erreurs basés sur la parité VRC / LRC

L'unité à protéger est le caractère ASCII. Ce dernier est codé sur 7 bits ($m = 7$). On ajoute alors un seul bit de contrôle ($r = 1$) de valeur telle que le nombre total de bits à 1 du code du caractère est pair. C'est ce qu'on appelle le ***bit de parité*** ou ***VRC*** (*Vertical Redundancy Checking*). On a alors un code de contrôle de parité paire. On définit de façon similaire un code de contrôle de parité impaire.

1. Combien d'erreurs simples par caractère ce code permet-il de détecter ?

Une autre façon de détecter les erreurs consiste à raisonner sur des blocs de $k*n$ bits. Les $k–1$ premières lignes sont chacune constituées d'un mot de code de n bits, dans lequel le dernier bit est un bit de parité. La dernière ligne contient un mot de contrôle de n bits dans lequel chaque bit contrôle la parité des bits de même rang des mots de code de la séquence. C'est ce que l'on appelle la ***parité bidimensionnelle*** ou ***LRC*** (*Longitudinal Redundancy Checking*). A nouveau, la parité de ces codes correcteurs peut, par convention, être paire ou impaire.

2. Dans l'alphabet CCITT n°5, le mot « OSI », se code par les trois caractères de 7 bits suivants : O = « 1001111 », S = « 1010011 », I = « 1000011 ». Donner le mot de code sur 8 bits associé à chaque caractère VRC puis le LRC correspondant en utilisant des blocs de 4 lignes et une parité paire.

3. Un code LRC permet-il de détecter des erreurs simples, doubles ou triples, sur l'ensemble du bloc ?
4. Trouver un cas de figure où 4 bits en erreurs (sur l'ensemble du bloc) ne seront pas détectés ?
5. Montrer que la parité bidimensionnelle permet de corriger des erreurs simples (par bloc).

Exercice 7.3 | Codes de détection d'erreurs polynomiaux CRC

La technique quasi-universellement utilisée pour la détection d'erreurs est le **CRC** (*Cyclic Redundancy Check*), qui un codage polynomial reposant sur deux concepts mathématiques : 1) l'arithmétique modulo-2 et 2) la division polynomiale.

A un code polynomial est associé un ***polynôme générateur*** g(x).

Le **codage** est le calcul du mot de code :

- on constitue M(x) le polynôme associé à la suite binaire à transmettre ;
- on multiplie M(x) par x^r , où r est le degré du polynôme générateur g(x) ;
- on calcule R(x), le reste de la division du polynôme $M(x)*x^r$ par g(x), en utilisant l'arithmétique modulo 2 (dans laquelle 1 + 1 = 0 et 0 – 1 = 1) ;
- on transmet le mot binaire associé à $T(x) = M(x)*x^r + R(x)$.

Le **décodage** est la vérification du mot de code reçu :

- on constitue T'(x) le polynôme associé à la suite binaire reçue ;
- on calcule R'(x), le reste de la division du polynôme T'(x) par g(x)
  - si R'(x) = 0, il n'y a pas d'erreur, la suite binaire reçue est un mot de code valide ; on récupère alors l'information utile ;
  - si $R'(x) \neq 0$, il y a une erreur ; on demande alors la retransmission du message.

On désire transmettre les chiffres hexadécimaux « A9C5 », le premier chiffre transmis étant le chiffre « A ». La protection contre les erreurs se fait en utilisant un code polynomial de polynôme générateur $g(x) = x^8 + 1$.

1. Donner la forme polynomiale du message émis.
2. Donner la suite binaire complète transmise au récepteur (mot de code émis).
3. En supposant que, par suite d'une erreur de transmission, le 19ième bit de la suite trouvée dans la première question est modifié, calculer la valeur du reste trouvée par le récepteur. L'erreur est-elle détectée ?