Corrigé de la feuille 3 : continuité, dérivabilité

Exercice 1.

(a) $|f(x)| = |x||\cos(1/x)| \leq |x| \to 0$ quand $x \to 0$. Donc $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$.

(b) La fonction g tend vers 0 en 0^-, par composition des limites $\lim\limits_{x\to 0^-} 1/x = -\infty$ et $\lim\limits_{y\to-\infty} e^x = 0$.

(c) Les suites $(x_n) = (2n\pi)$ et $(y_n) = (\pi/2 + 2n\pi)$ tendent vers $+\infty$ quand $n \to +\infty$. Or $(h(x_n))$ tend vers 0 et $(h(y_n))$ tend vers $+\infty$. Donc la fonction h n'admet pas de limite en $+\infty$.

(d) Par développements limités de sinus et cosinus, $i(x) = \dfrac{x^2 + o(x^2)}{1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2) - 1} = \dfrac{1 + o(1)}{-\frac{1}{2} + o(1)}$ quand $x \to 0$. Donc i tend vers -2 en 0.

Exercice 2.

(a) Etablissons, par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, la propriété

$$H_n : \qquad \forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = f(x/2^n).$$

Initialisation : H_0 est claire. Hérédité : si on suppose H_n pour un certain $n \in \mathbb{N}$, on peut écrire pour tout réel x :

$$f(x) = f(x/2^n) = f(2(x/2^{n+1})) = f(x/2^{n+1}),$$

d'où H_{n+1}. Ceci montre que H_n est vraie pour tout entier naturel n, par récurrence.

(b) Soit $x \in \mathbb{R}$. La suite $(x/2^n)$ tend vers 0. Par continuité de f en 0, la suite $(f(x/2^n))$ tend vers $f(0)$. Or cette suite est constante à $f(x)$ par (a). Donc $f(0) = f(x)$. Ceci prouve que $f(x) = f(0)$ pour tout réel x : f est constante.

Exercice 3. Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{Z}$. Supposons qu'il existe $x, \in \mathbb{R}$ tels que $f(x) = m$, $f(y) = n$ et $m < n$. Par continuité de f sur l'intervalle $\mathbb{R}$, tous les réels de l'intervalle $[m, n]$ sont des valeurs atteintes par f (théorème des valeurs intermédiaires). Or, l'intervalle $[m, n]$ contient des nombres non entiers (par exemple $m + 1/2$). Cela contredit le fait que f ne prend que des valeurs entières. Ceci prouve, par l'absurde, que f est constante.

Exercice 4. Soit $g : x \mapsto f(x) - x$. C'est une fonction continue sur l'intervalle $[a, b]$. Comme $f(a)$ et $f(b)$ sont dans $[a, b]$, on a $g(a) \geq 0$ et $g(b) \leq 0$. Le théorème des valeurs intermédiaires assure que 0 est une valeur atteinte par g, en un point c de l'intervalle $[a, b]$. Or $g(c) = 0$ signifie exactement $f(c) = c$.

Exercice 5.

(a) Non. Définissons $f : [0,1] \to \mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = x$ si $x > 0$ et $f(0) = 1$. Les valeurs prises par f forment l'intervalle $]0,1]$. Elles ne sont donc incluses dans aucun intervalle de la forme $[\epsilon, +\infty[$ avec $\epsilon > 0$.

(b) Oui. Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}_+^*$ continue. Comme f est continue sur un segment, f atteint un minimum en un point $c \in [a,b]$. Alors f est minorée par $f(c)$. Et $f(c) > 0$ par hypothèse.

Exercice 6.

(a) La fonction $x \mapsto x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$. La fonction $x \mapsto 1 + |x|$ ne s'annule pas et elle est dérivable sur $\mathbb{R}^*$. Donc le quotient, f, est bien défini sur $\mathbb{R}$, et dérivable sur $\mathbb{R}^*$. Comme le taux de variation $\dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \dfrac{1}{1 + |x|}$ tend vers 1 quand $x \to 0$, on en déduit que f est aussi dérivable en 0 (de dérivée 1). Ainsi, f est dérivable (donc continue) sur $\mathbb{R}$.

(b) La fonction g est continue sur $\mathbb{R}$ et dérivable sur $\mathbb{R}^*$ (comme composée...). Par développement limité, le taux de variation

$$\frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \frac{\cos(\sqrt{|x|}) - 1}{x} = \frac{-|x|/2 + o(|x|)}{x} = -\frac{|x|}{2x} + o(1)$$

tend vers $-1/2$ quand $x \to 0^+$ et vers $1/2$ quand $x \to 0^-$. La fonction g n'est donc pas dérivable en 0.

(c) Comme quotient de fonctions usuelles, h est dérivable sur $\mathbb{R}\backslash\{0, \pm 1\}$. Quand $x \to \pm 1$, $|h(x)|$ tend vers $+\infty$, donc h n'est pas continue en ± 1 (donc pas dérivable non plus). Le développement limité de sinus en 0 donne

$$\frac{h(x) - h(0)}{x - 0} = \frac{x + o(x)}{x \ln |x|} = \frac{1 + o(1)}{\ln |x|} \to 0,$$

quand $x \to 0$: la fonction h est dérivable (donc continue) en 0.

Exercice 7.

(a) Pour $x > 0$, $a(x) = x^{-2/3} - x^{-3/2}$, donc $a'(x) = -\dfrac{2}{3}x^{-5/3} + \dfrac{3}{2}x^{-5/2}$.

(b) Pour $|x| < \pi/2$, $b'(x) = \tan x + x(1 + \tan^2(x))$.

(c) Pour $x \neq 4$, $c'(x) = \dfrac{2(x-4) - (2x+3)}{(x-4)^2} = \dfrac{-11}{(x-4)^2}$.

(d) Pour $x \in \mathbb{R}$, $d'(x) = -\sin(\sin x)\cos(x) + 2xe^{x^2}$.

(e) Pour $|x| < \pi/2$, $e(x) = e^{\sin x \ln(\cos x)}$, donc

$$e'(x) = (\cos x \ln(\cos x) - \sin x \tan x)\, e^{\sin x \ln(\cos x)}.$$

Exercice 8. f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ (composée de fonctions usuelles) et pour tout $x \in \mathbb{R}^*$,

$$f'(x) = \frac{1}{1 + x^2} - \frac{1}{1 + (1/x)^2}\frac{1}{x^2} = 0.$$

Donc f est constante sur les *intervalles* $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$. Comme f tend vers $\pi/2$ en $+\infty$, on en déduit que f est constante à la valeur $\pi/2$ sur $]0, +\infty[$. Comme f tend vers $-\pi/2$ en $-\infty$, on en déduit que f est constante à la valeur $-\pi/2$ sur $]-\infty, 0[$.

Exercice 9. Appliquons le théorème des accroissements finis à la fonction $f : x \mapsto x^{\frac{1}{3}}$, dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$:

$$\sqrt[3]{1001} = f(1001) = f(1000) + f'(c)(1001 - 1000) = 10 + \frac{c^{-\frac{2}{3}}}{3}$$

pour un réel c de l'intervalle $]1000, 1001[$. Donc :

$$\sqrt[3]{1001} \leq 10 + \frac{1000^{-\frac{2}{3}}}{3} = 10 + \frac{1}{300} = 10,00333333\ldots$$

Exercice 10. Supposons que l'équation admet (au moins) 3 solutions réelles $x_1 < x_2 < x_3$. Par application du théorème de Rolle à la fonction polynômiale $f : x \mapsto x^n + ax + b$, on voit que f' s'annule en au moins deux points (un entre x_1 et x_2, un entre x_2 et x_3). Mais pour $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = nx^{n-1} + a$. Si n est pair, $n-1$ est impair, donc la fonction $x \mapsto x^{n-1}$ est une bijection (croissante) de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$; en particulier, elle ne prend la valeur $-a/n$ qu'une seule fois, ce qui signifie que f' s'annule exactement une fois. Cela empêche donc l'équation d'avoir trois solutions.

Dans le cas où n est impair, de la même façon, f' s'annule au plus deux fois (puisque la fonction $x \mapsto x^{n-1}$ est strictement décroissante puis strictement croissante). Par le théorème de Rolle, on en déduit que f s'annule au plus trois fois.

Exercice 11.

(a) L'inégalité triangulaire à l'envers donne

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad ||x| - |y|| \leq |x - y|.$$

Donc, pour tout $\epsilon > 0$, si $|x - y| < \epsilon$, alors $|f(x) - f(y)| < \epsilon$. Cela prouve l'uniforme continuité de f.

(b) Soit $\kappa \in \mathbb{R}_+^*$ une borne sur f'. Pour $x, y \in I$, l'inégalité des accroissements finis donne

$$|f(x) - f(y)| \leq \kappa |x - y|.$$

Etant donné $\epsilon > 0$, si $|x - y| < \epsilon/\kappa$, alors $|f(x) - f(y)| < \epsilon$. Donc f est uniformément continue.

(c) Si f était uniformément continue, on devrait pouvoir trouver $a > 0$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|f(x+a) - f(x)| < 1$ ($\epsilon = 1$, $a = \eta/2$ dans la définition). Or $f(x+a) - f(x) = 2ax + a^2 \to +\infty$ quand $x \to +\infty$. Cela empêche l'uniforme continuité de f.

Exercice 12. (théorème de Heine)

(a) En niant la définition de l'uniforme continuité, on voit que f vérifie la propriété

$$\exists \epsilon > 0, \forall \eta > 0, \exists x, y \in [a, b], |x - y| < \eta \text{ et } |f(x) - f(y)| \geq \epsilon.$$

On fixe un tel $\epsilon > 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le choix $\eta = 1/n$ fournit donc des points x_n et y_n de I tels que $|x_n - y_n| < 1/n$ et $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \epsilon$. Ces suites (x_n) et (y_n) conviennent.

(b) Les suites (x_n) et (y_n) restent dans le segment $[a, b]$. Par le théorème de Bolzano-Weierstrass, on peut en extraire des sous-suites convergentes. Ce sont ces sous-suites qu'on rebaptise (x_n) et (y_n) dorénavant.

(c) Notons x la limite de (x_n). Comme les inégalités larges sont préservées par passage à la limite, on a $x \in [a,b]$. Donc f est continue en x. Comme $(x_n - y_n)$ tend vers 0, (y_n) converge aussi vers x. Par continuité de f en x, on en déduit que les suites $(f(x_n))$ et $(f(y_n))$ tendent vers $f(x)$. Donc leur différence tend vers 0, ce qui contredit $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \epsilon$. On a prouvé par l'absurde que f est uniformément continue.

Exercice 13.

(a) Soit $\epsilon > 0$. Comme f' tend vers ℓ en $+\infty$, il existe $A > 0$ tel que

$$\forall c > A, \quad \ell - \epsilon \leq f'(c) \leq \ell + \epsilon.$$

Soit $x > A$. Le théorème des accroissements finis donne un réel $c \in]A, x[$ tel que $\dfrac{f(x) - f(A)}{x - A} = f'(c)$. Puisque $c > A$, on en tire

$$\ell - \epsilon \leq \frac{f(x) - f(A)}{x - A} \leq \ell + \epsilon.$$

(b) Cette inégalité se réécrit, pour $x > A$:

$$\frac{(\ell - \epsilon)(x - A) + f(A)}{x} \leq \frac{f(x)}{x} \leq \frac{(\ell + \epsilon)(x - A) + f(A)}{x}.$$

Le membre de gauche (resp. droite) tend vers $\ell - \epsilon$ (resp. $\ell + \epsilon$) quand $x \to +\infty$. On peut donc trouver $B > A$ tel que pour $x > B$,

$$\ell - 2\epsilon \leq \frac{f(x)}{x} \leq \ell + 2\epsilon.$$

Cela montre que $f(x)/x$ converge vers ℓ quand x tend vers $+\infty$.

Exercice 14.

(a) Comme $(f')'$ est positive, f' est croissante. Par le théorème des accroissements finis, si $a < x < b$, il existe $c \in]a, x[$ et $d \in]x, b[$ tels que

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(c) \text{ et } \frac{f(b) - f(x)}{b - x} = f'(d).$$

Puisque $c < d$, $f'(c) \leq f'(d)$, d'où

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq \frac{f(b) - f(x)}{b - x}.$$

(b) L'équation de la corde est celle d'une droite, donc de la forme $y = \alpha x + \beta$. La pente de la corde est $\alpha = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$. On trouve ensuite β en faisant $(x, y) = (a, f(a))$ dans l'équation. On voit ainsi que la corde est d'équation

$$y = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a), \qquad a \leq x \leq b.$$

Or en isolant $f(x)$ dans l'inégalité du (a), on obtient pour $a < x < b$:

$$f(x) \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a), \qquad a \leq x \leq b.$$

Le graphe de f est donc sous la corde entre a et b.

(c) En faisant $x \to a$ d'une part et $x \to b$ d'autre part dans (a), on obtient les deux inégalités

$$f'(a) \leq \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \quad \text{et} \quad \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leq f'(b).$$

(d) L'équation de la tangente au graphe en $a \in I$ est

$$y = f'(a)(x-a) + f(a)$$

(c'est la droite de pente $f'(a)$, passant par $(a, f(a))$. La première inégalité du (c) donne, pour tout $b > a$:

$$f(b) \geq f'(a)(b-a) + f(a).$$

Cela montre que pour tout $a \in I$, le graphe de f est au-dessus de la tangente en a, mais seulement *à droite de* a ($b > a$). La seconde inégalité du (c) se reformule de même pour montrer que, pour tout $b \in I$, le graphe de f est au-dessus de la tangente en b, *à gauche de* b. Finalement, tous les points du graphes de f sont au-dessus de toutes les tangentes au graphe.

(e) Une fonction f est concave si et seulement si $-f$ est convexe. On obtient donc des inégalités inversées. Graphiquement, le dessus devient le dessous et réciproquement (par symétrie par rapport à l'axe des abscisses). Donc le graphe d'une fonction concave est au-dessus de ses cordes et au-dessous de ses tangentes.

(f) Puisque $\exp'' = \exp \geq 0$, la fonction exponentielle est convexe. Son graphe est donc au-dessus de sa tangente en 0. L'équation de cette tangente est $y = \exp'(0)(x-0) + \exp(0) = x + 1$. D'où :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \exp(x) \geq 1 + x.$$

Pour $t > 0$, $\ln''(t) = -1/t^2 \leq 0$, donc la fonction logarithme est concave. Son graphe est donc au-dessous de sa tangente en 1, qui est d'équation $y = (x-1) + 0$:

$$\forall t \in]0, +\infty[, \qquad \ln(t) \leq t - 1,$$

soit, en posant $x = t - 1$,

$$\forall x \in]-1, +\infty[, \qquad \ln(1+x) \leq x.$$

Sur l'intervalle $[0, \pi/2]$, $\sin'' = -\sin \leq 0$, donc la fonction sinus y est concave. Son graphe y est donc au-dessous de sa tangente en 0, d'équation $y = x$, et au-dessus de sa corde entre 0 et $\pi/2$, dont l'équation s'écrit

$$y = \frac{\sin(\pi/2) - \sin(0)}{\pi/2 - 0}(x - 0) + \sin(0) = \frac{2}{\pi}x.$$

D'où :

$$\forall x \in [0, \pi/2], \qquad \frac{2}{\pi}x \leq \sin(x) \leq x.$$

Exercice 15.

(a) Comme l'exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$, les fonctions sh et ch le sont aussi. Comme $\exp' = \exp$, on trouve rapidement :

$$\mathrm{sh}' = \mathrm{ch} \quad \text{et} \quad \mathrm{ch}' = \mathrm{sh}\,.$$

Comme l'exponentielle est strictement positive, $\mathrm{sh}' = \mathrm{ch}$ est strictement positive : sh est strictement croissante. Puisque $\lim\limits_{\pm\infty} \mathrm{sh} = \pm\infty$, sh est donc une bijection croissante de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$ (théorème de la bijection). Avec $\mathrm{sh}(0)=0$, on en déduit que $\mathrm{ch}'=\mathrm{sh}$ est strictement négative sur $\mathbb{R}_-^*$ et strictement positive sur $\mathbb{R}_+^*$. Enfin, $\lim\limits_{\pm\infty} \mathrm{ch} = +\infty$ et $\mathrm{ch}(0)=1$: ch décroît strictement de $+\infty$ à 1 sur $\mathbb{R}_-$, puis croît strictement de 1 à $+\infty$ sur $\mathbb{R}_+$.

(b) Soit $x \in \mathbb{R}$. En développant et simplifiant, on trouve

$$\mathrm{ch}(x)^2 - \mathrm{sh}(x)^2 = \left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)^2 = \frac{2+2}{4} = 1.$$

On peut aussi dériver pour voir $\mathrm{ch}^2-\mathrm{sh}^2$ est de dérivée nulle donc constante sur l'intervalle $\mathbb{R}$, puis calculer cette constante en prenant la valeur en 0.

(c) Le développement limité en 0 à l'ordre n de l'exponentielle est :

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n).$$

On en déduit aussi, toujours en 0 :

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + \cdots + (-1)^n \frac{x^n}{n!} + o(x^n).$$

Prenons n pair pour fixer les idées : $n=2p$, $p \in \mathbb{N}$. On fait la demi-somme de ces expressions : les puissances impaires de x se simplifient et on trouve pour tout $p \in \mathbb{N}$

$$\mathrm{ch}(x) = \frac{e^x+e^{-x}}{2} = 1 + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^{2p}}{(2p)!} + o(x^{2p}).$$

quand x tend vers 0. De même, en prenant $n=2p+1$, $p \in \mathbb{N}$ et en faisant la demi-différence, on obtient

$$\mathrm{sh}(x) = \frac{e^x-e^{-x}}{2} = x + \frac{x^3}{6} + \cdots + \frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!} + o(x^{2p+1})$$

quand x tend vers 0.

(d) On a vu en (a) que sh est une bijection dérivable de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$, avec $\mathrm{sh}'=\mathrm{ch}>0$. Donc cette fonction admet une réciproque dérivable $\mathrm{Argsh} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et pour $x \in \mathbb{R}$:

$$\mathrm{Argsh}'(x) = \frac{1}{\mathrm{sh}'(\mathrm{Argsh}(x))} = \frac{1}{\mathrm{ch}(\mathrm{Argsh}(x))}.$$

Puisque $\mathrm{ch}^2 = 1+\mathrm{sh}^2$ et $\mathrm{ch} \geq 0$, on a $\mathrm{ch} = \sqrt{1+\mathrm{sh}^2}$. Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\mathrm{Argsh}'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+\mathrm{sh}^2(\mathrm{Argsh}(x))}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

(e) Regardons $f : x \mapsto \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2+1>0$, donc $x \mapsto \sqrt{x^2+1}$ est bien définie et même dérivable. De plus, pour tout réel x, $x^2+1>x^2$, donc, par stricte croissance de la racine carrée,

$$x+\sqrt{x^2+1} > x+\sqrt{x^2} = x+|x| \geq 0$$

Ceci montre que $x+\sqrt{x^2+1}$ est toujours strictement positif, de sorte que $f(x)$ est toujours bien défini. De plus, comme composée de fonctions dérivables, f est dérivable et, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\left(1+\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}\right) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = \mathrm{Argsh}'(x).$$

Comme $\mathbb{R}$ est un intervalle et $f(0) = 0 = \text{Argsh}(0)$, $f = \text{Argsh}$.

On peut aussi poser $y = \operatorname{sh} x$, $z = e^x$, ce qui donne $z - 1/z = 2y$, soit $z^2 - 2yz - 1 = 0$. Ce trinôme du second degré (en z) admet comme unique racine positive $z = y + \sqrt{y^2+1}$, ce qui, avec $x = \ln z$, donne la formule $\text{Argsh}(y) = x = \ln(y + \sqrt{y^2+1})$.

(f) Le (a) et le théorème de la bijection montrent que ch est une bijection (strictement croissante) continue de $\mathbb{R}_+$ sur $[1, +\infty[$, qui admet donc une réciproque continue $\text{Argch} : [1, +\infty[\to \mathbb{R}_+$. $\operatorname{ch}' = \operatorname{sh}$ ne s'annule qu'en 0, et $\operatorname{ch}(0) = 1$. Donc le théorème de la bijection assure que Argch est dérivable sur $]1, +\infty[$ (et pas en 1), avec

$$\forall x > 1, \quad \text{Argch}'(x) = \frac{1}{\operatorname{ch}'(\text{Argch}(x))} = \frac{1}{\operatorname{sh}(\text{Argch}(x))}.$$

Or $\operatorname{sh}^2 = \operatorname{ch}^2 - 1$. Pour $x > 1$, $\text{Argch}(x) > 0$, de sorte que $\operatorname{sh}(\text{Argch}(x)) > 0$. On en déduit $\operatorname{sh}(\text{Argch}(x)) = \sqrt{\operatorname{ch}^2(\text{Argch}(x)) - 1} = \sqrt{x^2-1}$, puis

$$\text{Argch}'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}.$$

(g) Comme au (e), pour $x > 1$, on peut dériver $\ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)$, observer que la dérivée n'est autre que celle de $\text{Argch}(x)$, que ces deux expressions valent 0 en $x = 1$, ce qui implique l'égalité souhaitée en utilisant la continuité des fonctions en 1.

Ou bien, pour $y \geq 1$, on cherche $x \geq 0$ tel que $\operatorname{ch}(x) = y$. En posant $z = e^x$, cela revient à trouver la racine $z \geq 1$ du trinôme $z^2 - 2yz + 1 = 0$, i.e. $z = y + \sqrt{y^2-1}$. Cela donne

$$\text{Argch}(y) = x = \ln z = \ln(y + \sqrt{y^2-1}).$$

Exercice 16.

(a) La fonction th est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme quotient des fonctions dérivables sh et ch, la seconde ne s'annulant pas. De plus,

$$\operatorname{th}' = \frac{\operatorname{sh}'\operatorname{ch} - \operatorname{ch}'\operatorname{sh}}{\operatorname{ch}^2} = \frac{\operatorname{ch}^2 - \operatorname{sh}^2}{\operatorname{ch}^2} = \frac{1}{\operatorname{ch}^2},$$

puisque $\operatorname{ch}^2 - \operatorname{sh}^2 = 1$. On peut aussi développer la fraction :

$$\operatorname{th}' = \frac{\operatorname{ch}^2}{\operatorname{ch}^2} - \frac{\operatorname{sh}^2}{\operatorname{ch}^2} = 1 - \operatorname{th}^2.$$

(b) La formule $\operatorname{th}' = \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2} > 0$ montre que th est strictement croissante. Pour $x \in \mathbb{R}$,

$$\operatorname{th}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}},$$

en multipliant numérateur et dénominateur par e^{-x}. Ceci montre que th tend vers 1 en $+\infty$. En écrivant de même

$$\operatorname{th}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1},$$

on voit que th tend vers -1 en $-\infty$.

(c) Le théorème de la bijection montre donc que th est une bijection strictement croissante de $\mathbb{R}$ sur $]-1,1[$: elle admet une réciproque Argth $:]-1,1[\to \mathbb{R}$. Soient $x \in \mathbb{R}$ et $y = \operatorname{th} x$. Si on pose $z = e^{2x}$, la relation ci-dessus donne

$$y = \frac{z-1}{z+1},$$

donc $y(z+1) = z-1$, ou encore $e^{2x} = z = \dfrac{1+y}{1-y}$, soit

$$\operatorname{Argth} y = x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+y}{1-y}\right).$$