# Algorithmes basés sur des parcours : algorithmes de Dijkstra et de Prim

- Plus courts chemins : algorithme de Dijkstra
- Arbre couvrant de coût minimum : algorithme de Prim

LU3IN003 - Chargés de cours : Fanny Pascual et Olivier Spanjaard.

# Plus courts chemins
(chemins de coûts minimum)

OpenStreetMap | Modifier | Historique | Exporter | Traces GPS | Journaux des utilisateurs | Droits d

Jussieu, Place Jussieu, Quartier Saint-Victor

Châtelet - Les Halles, Place Basse, Quartier

À pied (GraphHopper) | Aller

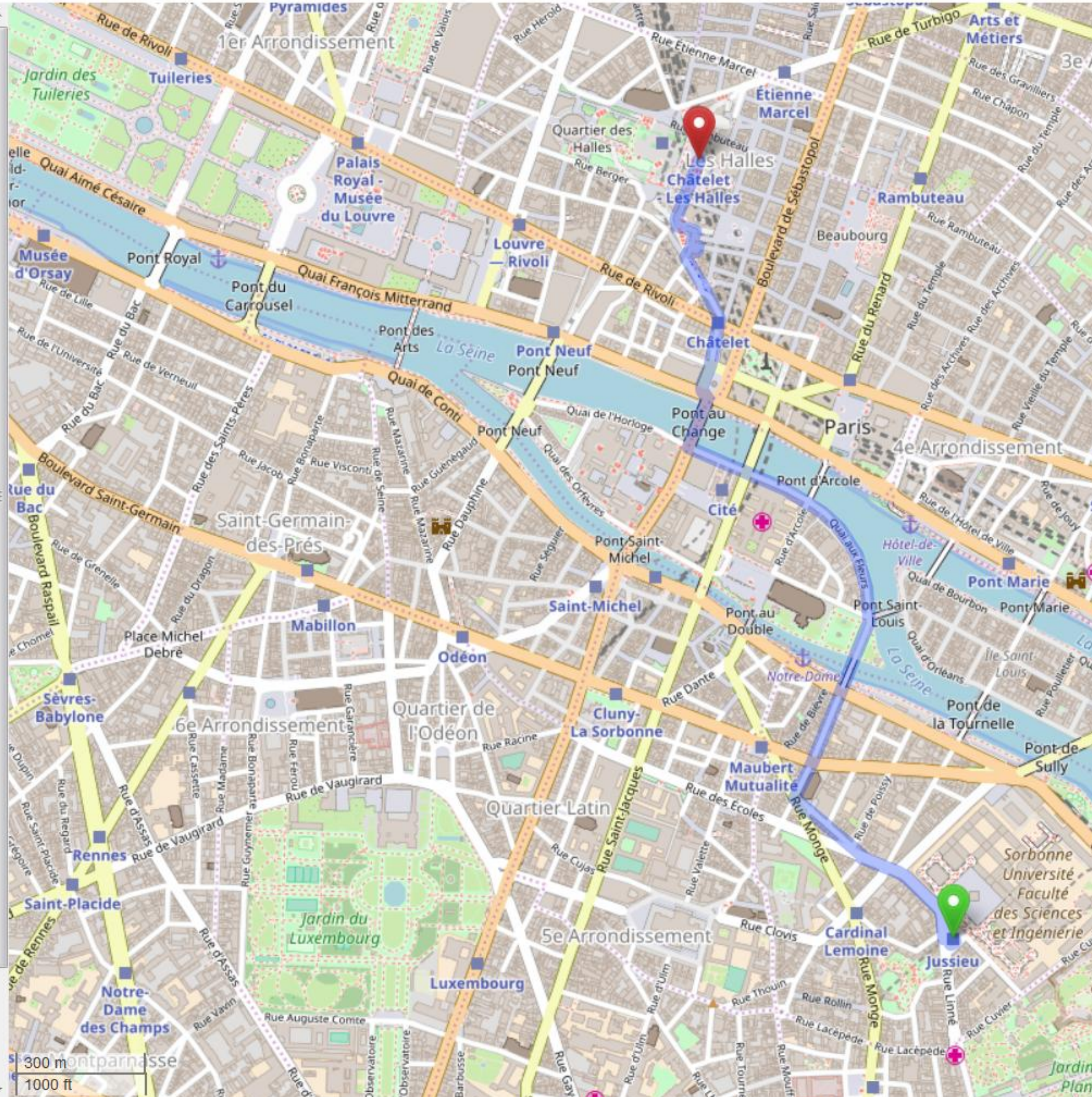
Inverser les directions

## Itinéraire

Distance: 2.4km. Temps: 0:29.

Croissant: 40m. Décroissant: 43m.

| | | |
|---|---|---|
| ↑ | **1.** Continuez | 10m |
| ↱ | **2.** Tournez à droite | 20m |
| ↰ | **3.** Tournez à gauche | 10m |
| ↱ | **4.** Tournez à droite sur Rue Linné | 300m |
| ↱ | **5.** Tournez à droite | 200m |
| ↱ | **6.** Tournez à droite sur Rue des Bernardins | 1100m |
| ↱ | **7.** Tournez à droite sur Boulevard du Palais | 120m |
| ↰ | **8.** Tournez à gauche sur Quai de la Mégisserie | 10m |
| ↑ | **9.** Restez sur la droite sur Place du Châtelet | 200m |
| ↑ | **10.** Restez sur la droite sur Rue des Halles | 10m |
| ↑ | **11.** Continuez sur Place Sainte-Opportune | 30m |
| ↑ | **12.** Continuez sur Rue des Halles | 110m |
| ↰ | **13.** Tournez à gauche sur Rue de la Ferronnerie | 300m |



# Définition du problème

Soit G=(S,A) un graphe orienté (n sommets, m arcs).
Soit c : A→R une fonction coût sur les arcs.
Soient un sommet origine s et un sommet destination d.

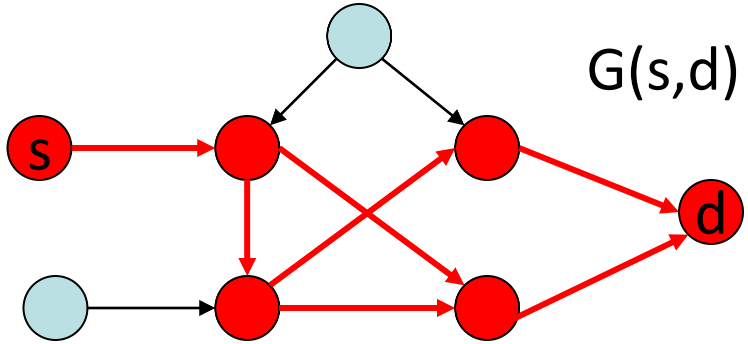
Coût d'un chemin $l = (a_1,a_2,\ldots,a_p)$, noté $c(l)$ de G : $\sum_{k=1..p} c(a_k)$.

Etant donnés 2 sommets s et d, on veut :

a) savoir s'il existe un chemin de coût minimum de s à d ;
b) si oui, déterminer un tel chemin.

## Le sous-graphe G(s,d)

Les sommets x du graphe qui n'appartiennent pas à un chemin de s à d peuvent être supprimés de G.
G(s,d) est le sous-graphe de G obtenu après suppression de ces sommets.



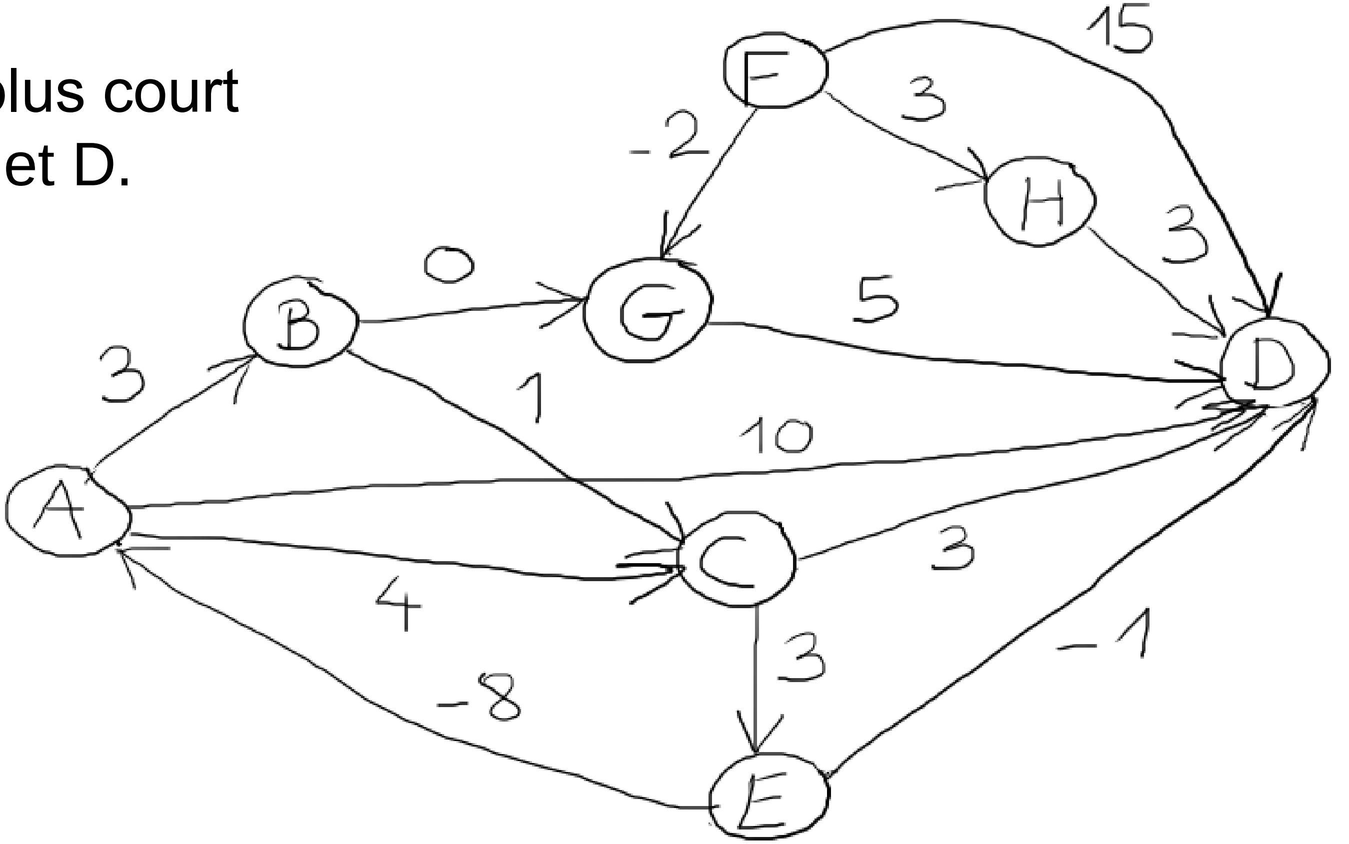

G(s,d) : sous-graphe rouge

**Propriété** :
c chemin de s à d dans G $\Leftrightarrow$ c chemin de s à d dans G(s,d)

*Quiz*

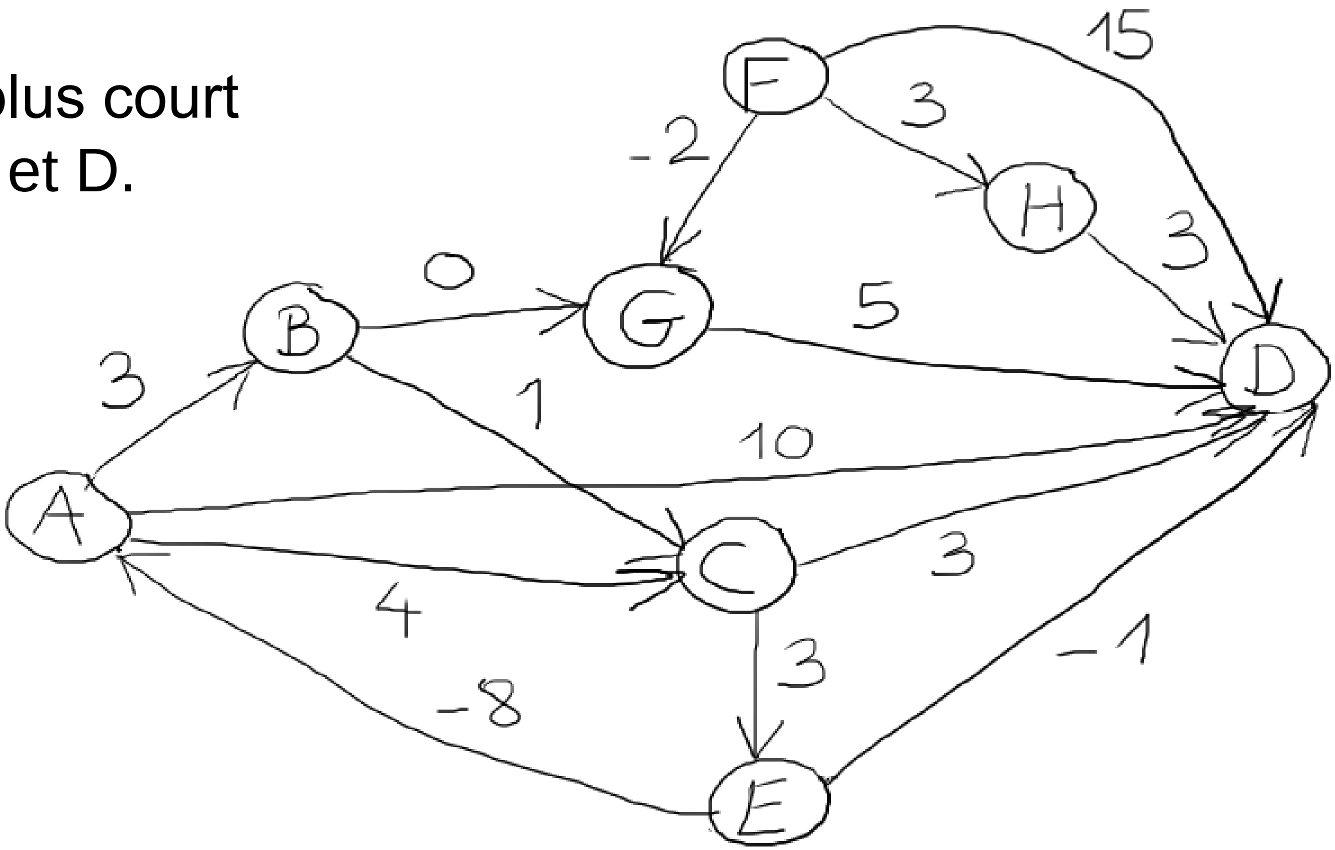
# Quel est le coût d'un chemin de coût minimum entre F et D dans G ?

A. 3
B. 6
C. 15
D. Il n'y a pas de plus court chemin entre F et D.



*Quiz* Quel est le coût d'un chemin de coût minimum entre A et D dans G ?

A. 6
B. 7
C. 10
D. Il n'y a pas de plus court chemin entre A et D.



Définition :

Un circuit est dit absorbant si son coût est strictement négatif.

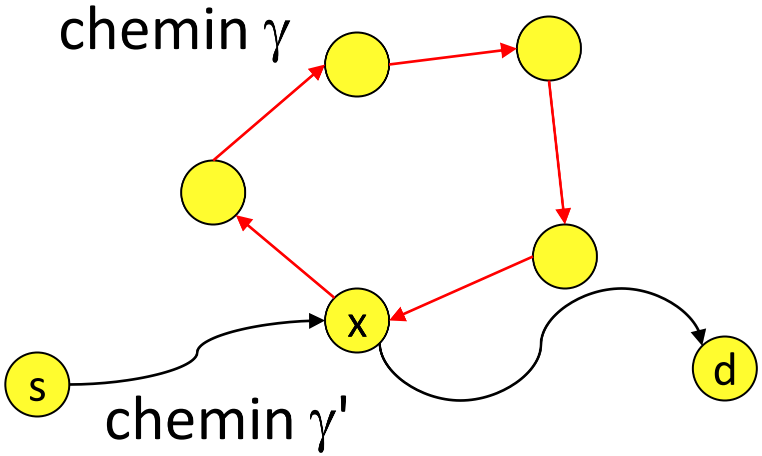
Propriété :

Il existe un chemin de s à d de coût minimum $\Leftrightarrow$

- il existe un chemin de s à d dans G.
- il n’existe pas de circuit absorbant dans G(s,d).

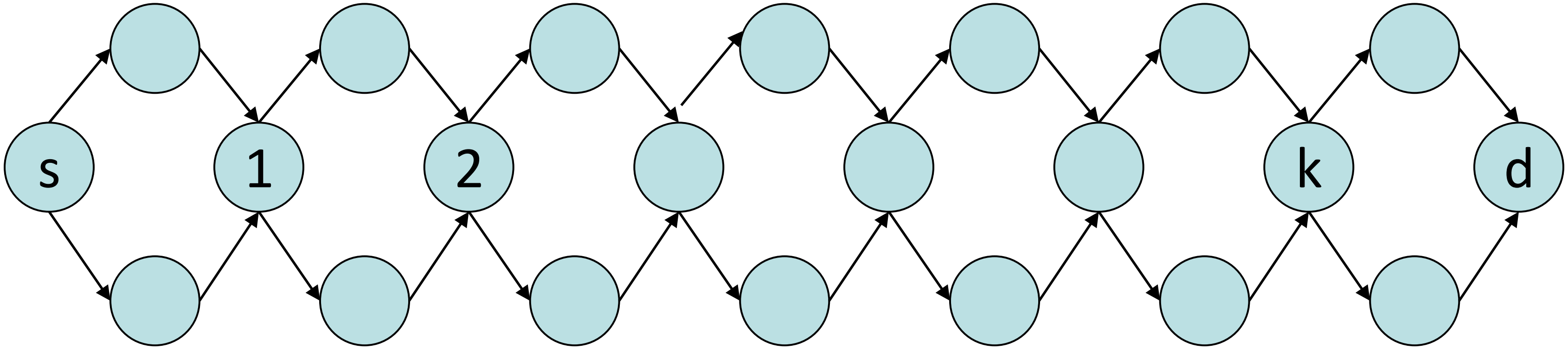
Propriété :
Un chemin de coût minimum de s à d est élémentaire.

Preuve : Si $\gamma$ est un chemin de coût minimum de s à d,
tout chemin élémentaire $\gamma'$ extrait de $\gamma$ satisfait $c(\gamma') \leq c(\gamma)$ .



Un chemin élémentaire n'empruntant pas 2 fois le même arc,
le nombre de chemins de s à d à examiner est fini.

Remarque : il peut être très grand (exponentiel en n).




$n = 3(k+1) +1$

Nombre de chemins de s à d : $2^{(k+1)} = 2^{((n-1)/3)}$.

# Arborescence des chemins de coût minimum

Hypothèses :

- Le sommet s est une racine de G;
- G ne possède pas de circuit absorbant.


Propriété :

G possède une arborescence couvrante H de racine s telle que pour tout sommet x de G, le chemin de s à x dans H est un chemin de coût minimum de s à x dans G.

H est appelée arborescence des chemins de coût minimum d'origine s.

# Arborescence des chemins de coût minimum

Soit H une arborescence couvrante de racine s dans G.
Soit $d(x)$ le coût du chemin de s à x dans H.

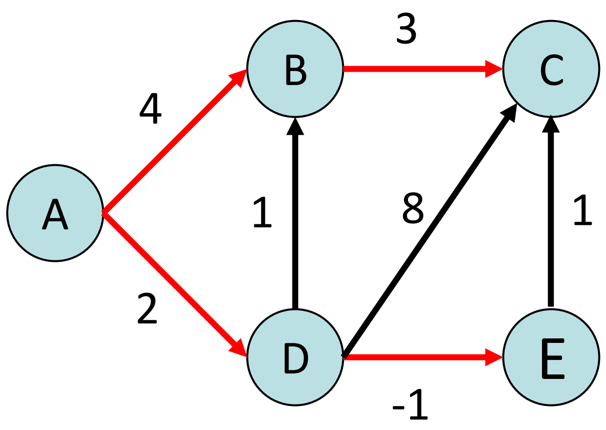
**Propriété :**
H est une arborescence des chemins de coût minimum pour G si et seulement si pour tout arc $(x,y)$ de G on a :

$$d(y) \leq d(x) + c(x,y).$$

Cette propriété est à la base de la plupart des algorithmes de calcul des chemins de coût minimum.

*Quiz*

L’arborescence en rouge est une arborescence des chemins de coût minimum.

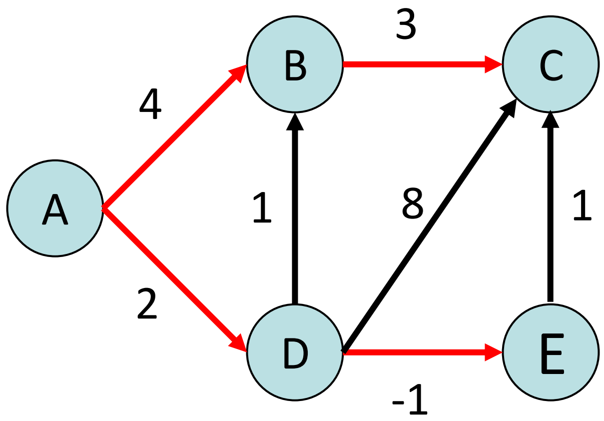



A. Vrai

B. Faux

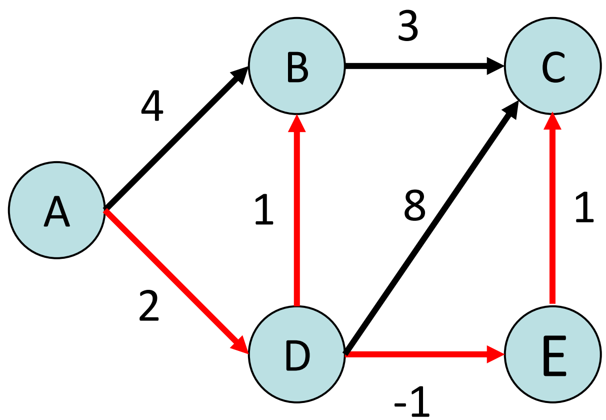
# *Quiz*

L'arborescence en rouge est une arborescence des chemins de coût minimum.




A. Vrai

B. Faux :



Notations :

Soit $H=(X,U)$ l'arborescence « couvrante » (de racine s) en cours.

Si $x \in X$, le coût du chemin de s à x dans H est noté $d(x)$.

Si $x \notin X$ , on fixe $d(x)= +\infty$

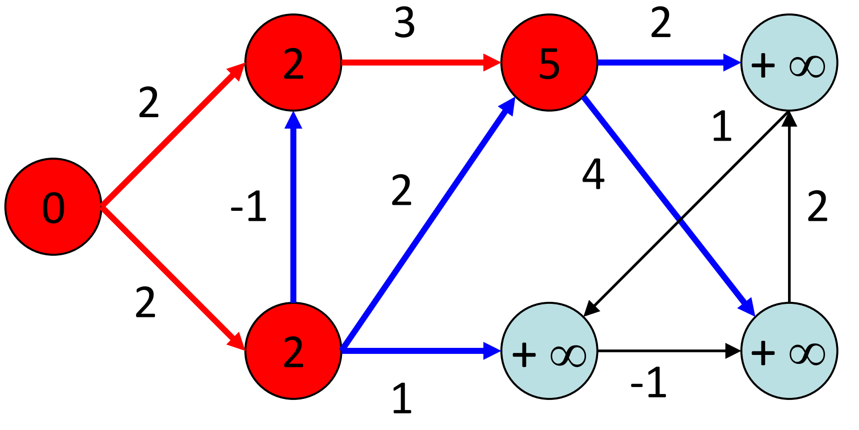
Un arc $(x,y)$ de G, avec $x \in X$ est dit incompatible pour H si :

$d(y) > d(x) + c(x,y)$

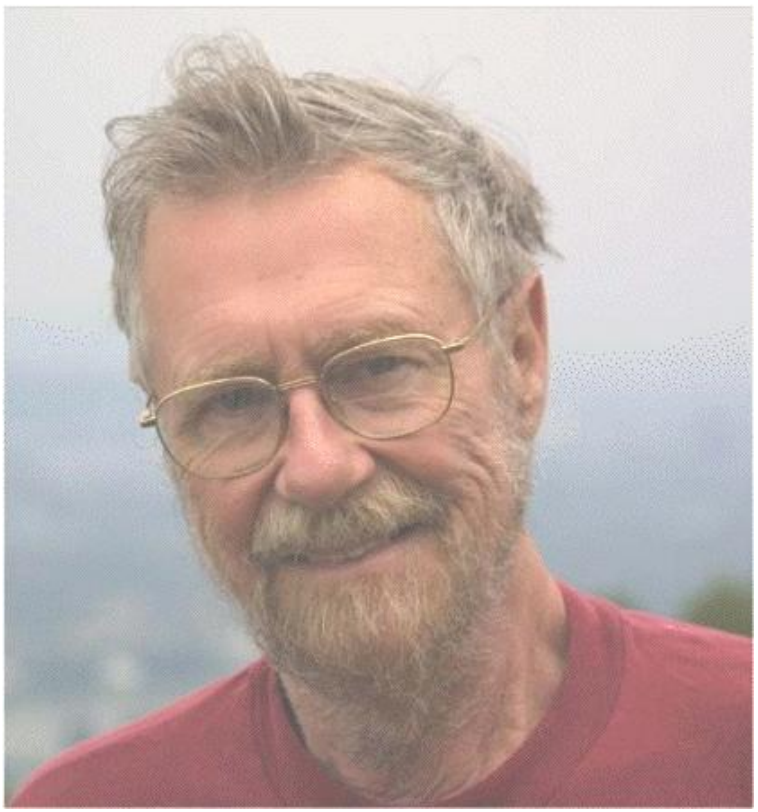
H : arborescence couvrante :

- sommets et arcs rouges
- valeurs d(x) dans les sommets rouges

Arcs incompatibles en bleu



# Coûts positifs ou nuls : algorithme de Dijkstra



**Edsger Dijkstra** (1930-2002)

Informaticien néerlandais.

1959 : publication de « l'algorithme de Dijkstra ».

1972 : Prix Turing (science et art des langages de programmation, Algol).

# Coûts positifs ou nuls : algorithme de Dijkstra

Donnée :
Graphe orienté G=(S,A),
Sommet s racine de G,
Fonction coût c sur les arcs telle que pour tout arc (x,y) : $c(x,y) \geq 0$.

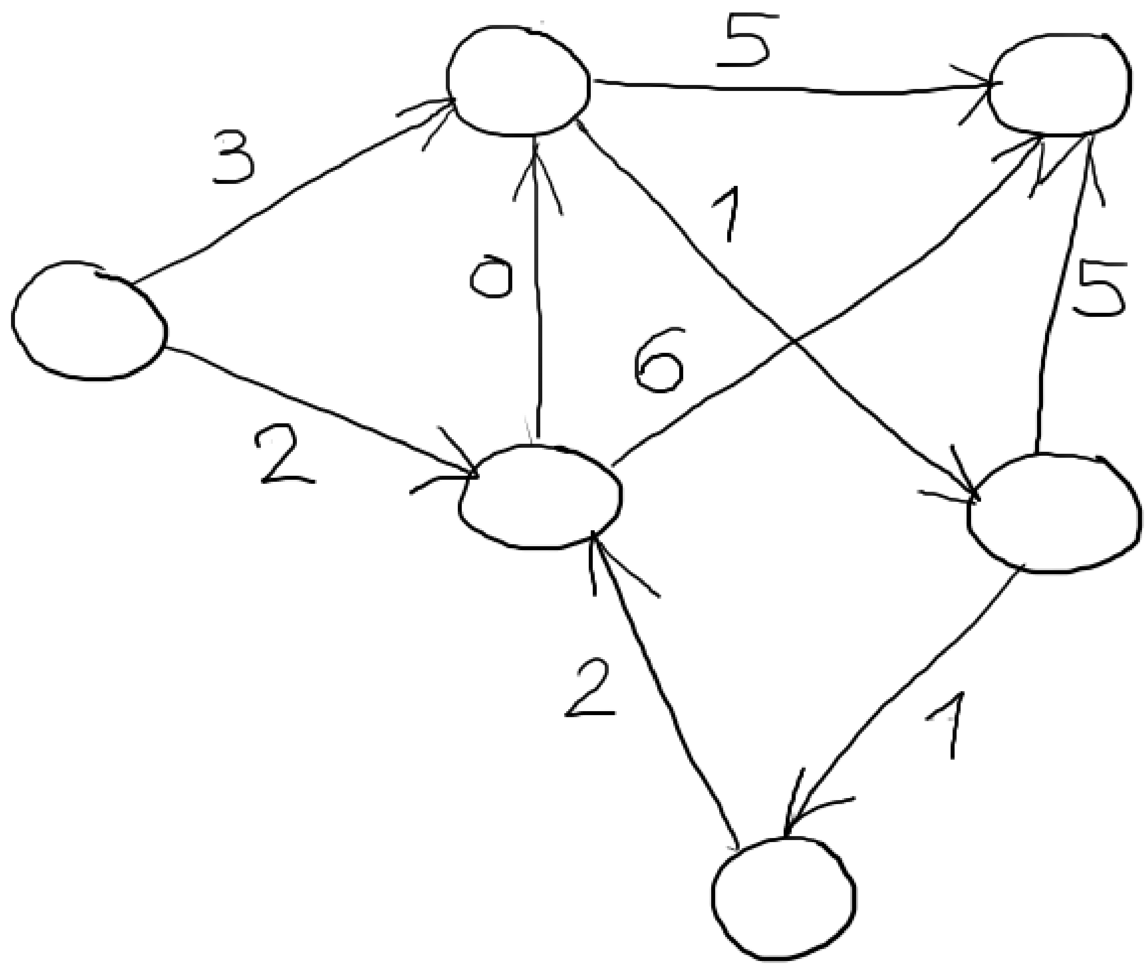
Algorithme de Dijkstra :
Initialisation;
Pour k de 1 à n faire
    Soit x un sommet ouvert tel que d(x) est minimum ;
    Examiner(x);
FinPour.
// d(x) le coût du chemin de s à x dans H

Initialisation

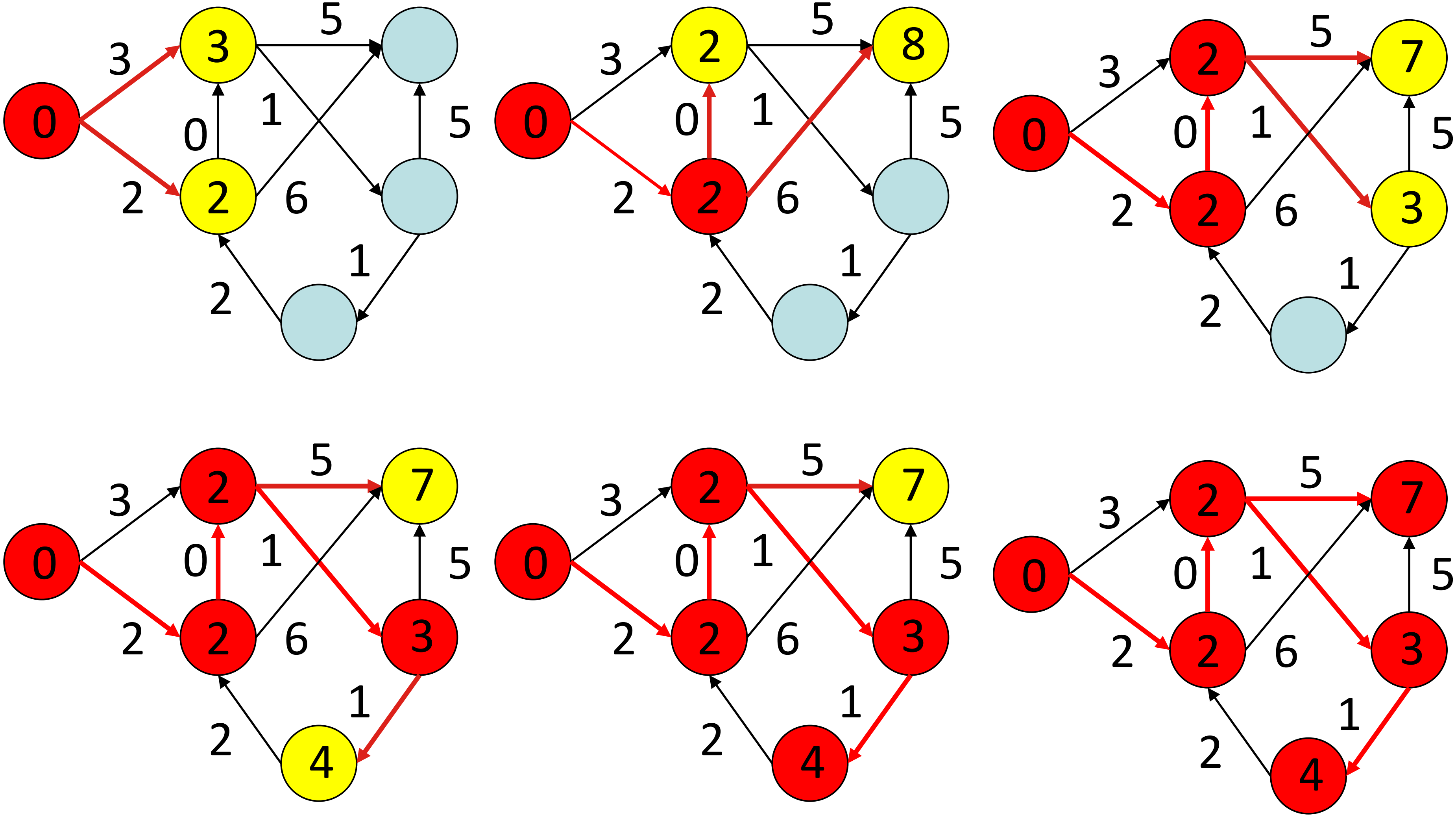
```
d(s_1) = 0; ouvrir(s_1);
Pour tout k de 2 à n faire
    d(s_k) = + ∞ ;
Fin Pour
```

Examiner(x)

```
Pour tout successeur y de x faire
    Si d(y) > d(x)+c(x,y) alors
        d(y) = d(x)+c(x,y);
        pred(y) = x;
        Si y n'est pas ouvert, ouvrir(y)
        FinSi
    FinSi
FinPour
fermer(x);
```

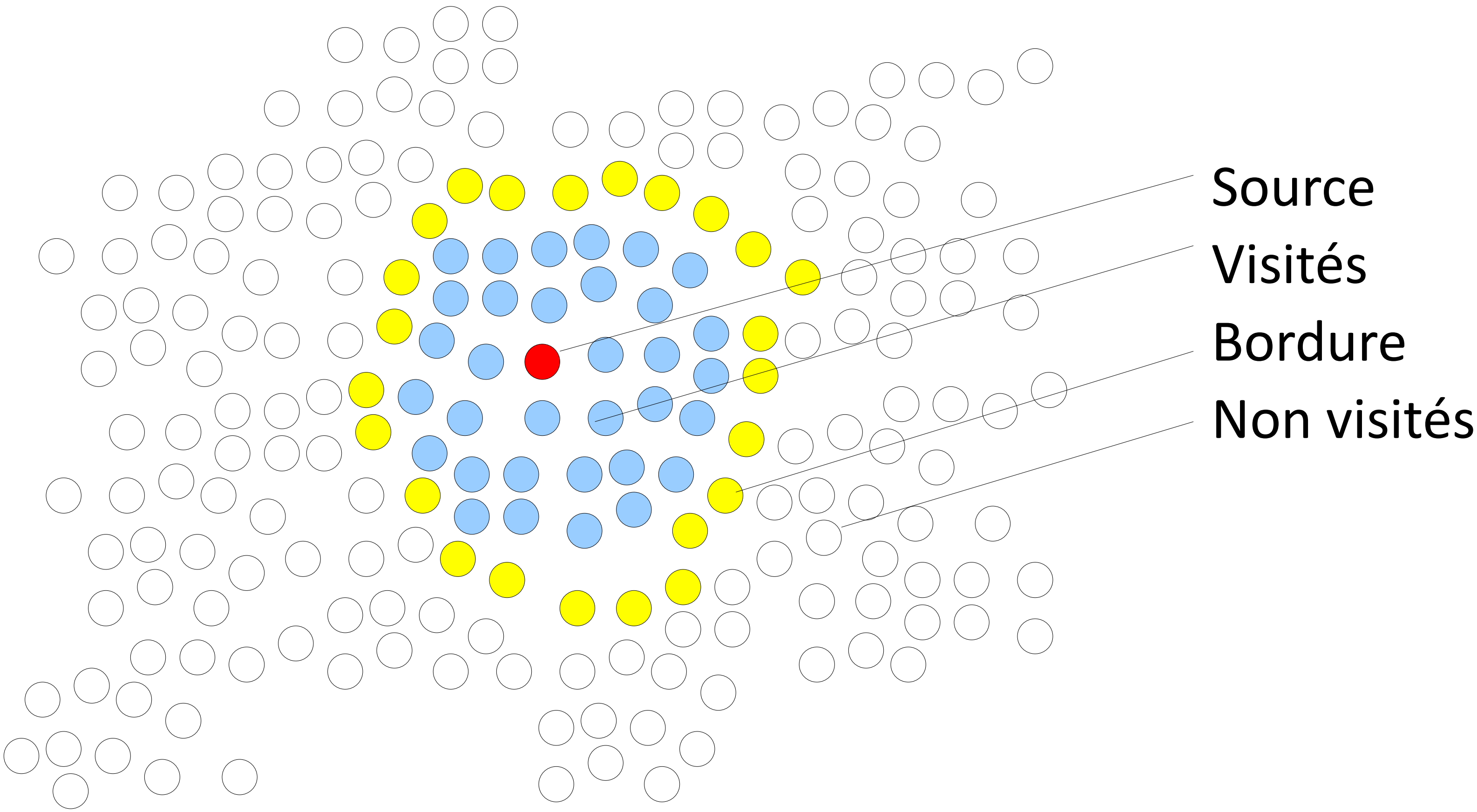


5
3
1
0
6
5
2
2
1



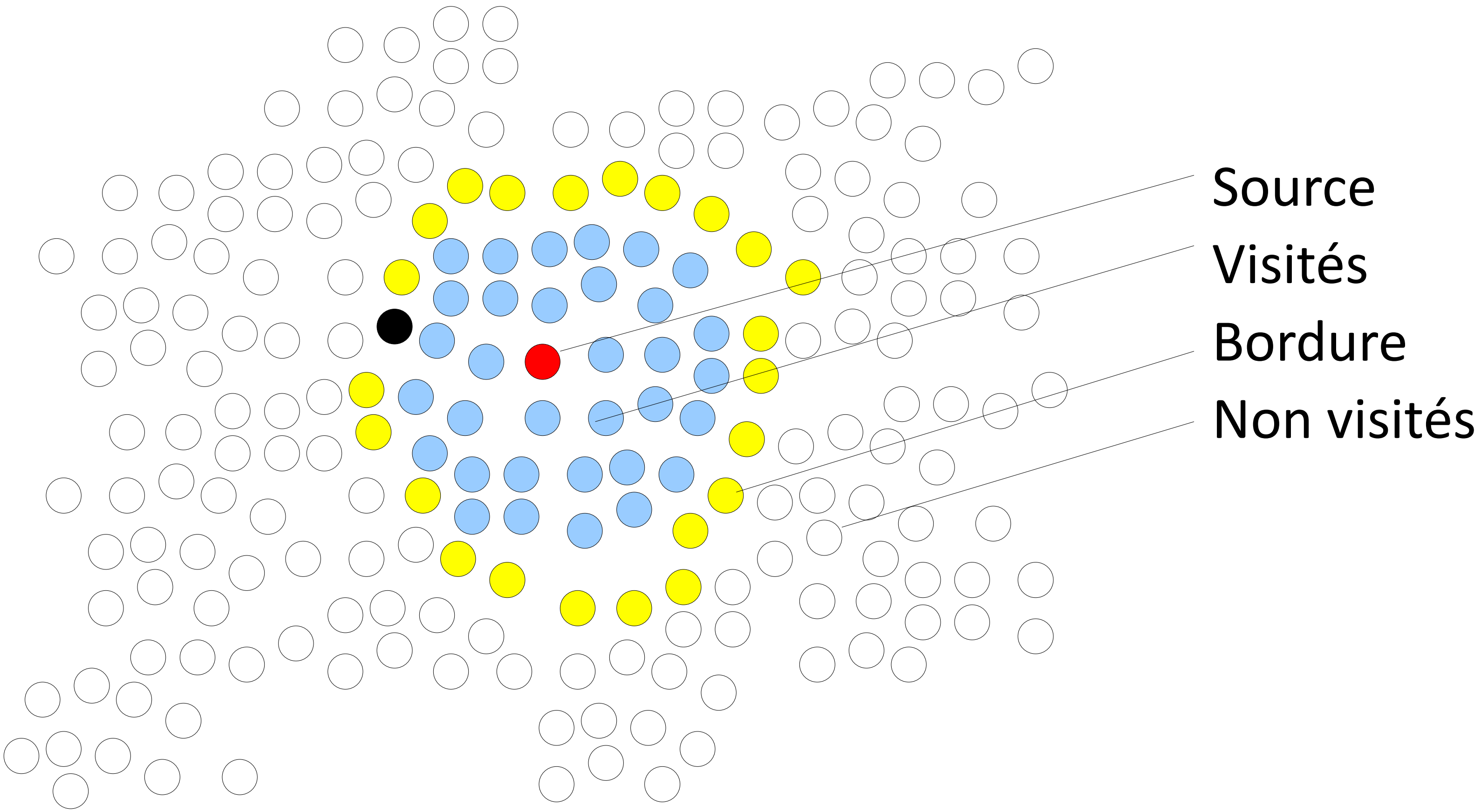
3
5
0
3
1
0
5
2
2
6
1
2
3
5
0
2
8
0
1
5
2
2
6
1
2
3
5
0
2
7
0
1
5
2
2
6
3
1
2
3
5
0
2
7
0
1
5
2
2
6
3
1
2
4
3
5
0
2
7
0
1
5
2
2
6
3
1
2
4
3
5
0
2
7
0
1
5
2
2
6
3
1
2
4

# Interprétation physique



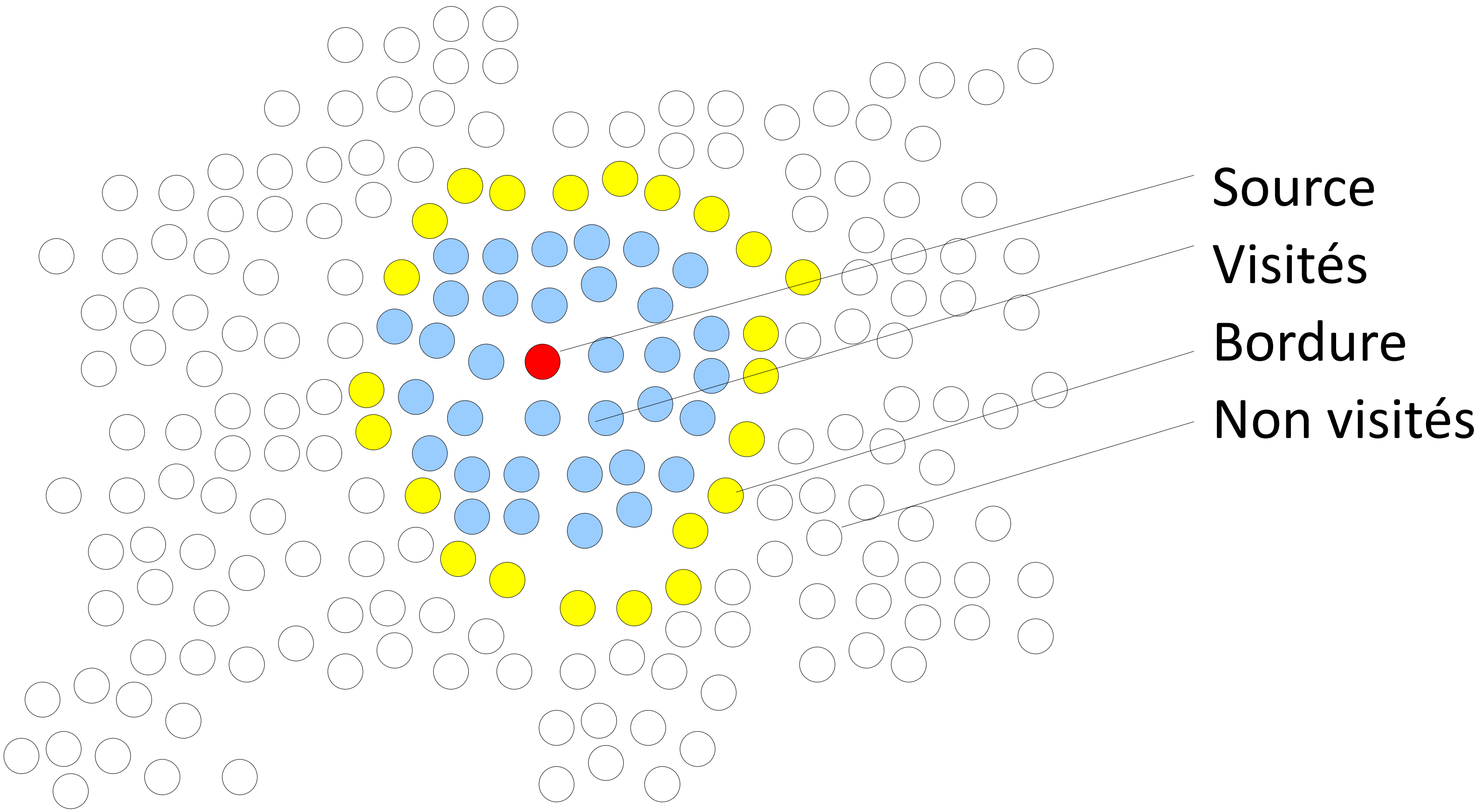

Front de propagation autour de la source = ronds dans l'eau

# Interprétation physique



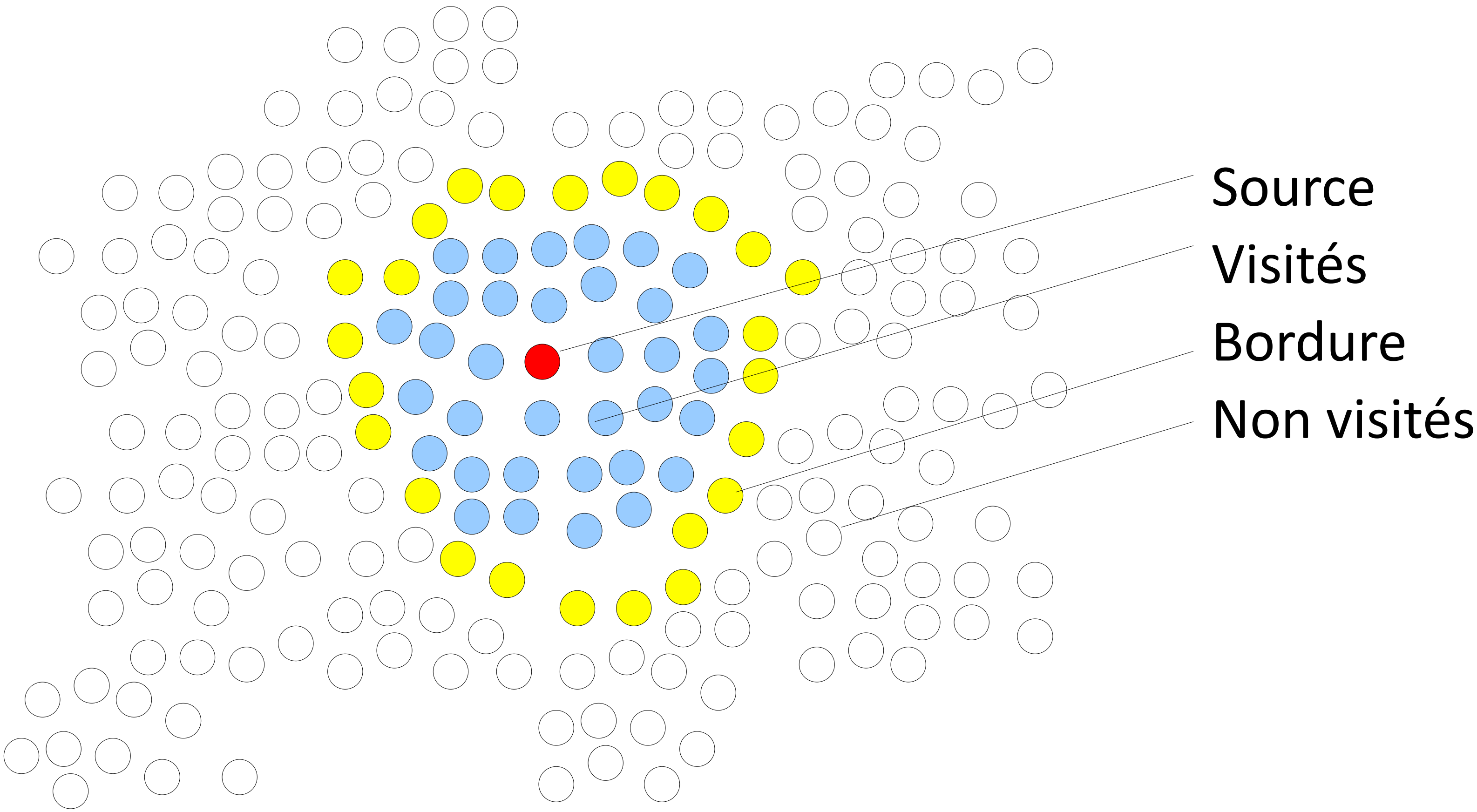

Front de propagation autour de la source = ronds dans l'eau

# Interprétation physique




Front de propagation autour de la source = ronds dans l'eau

# Interprétation physique




Front de propagation autour de la source = ronds dans l'eau

*Quiz*

## Quelle est la complexité de l’algorithme de Dijkstra ?

```
Initialisation;
Pour k de 1 à n faire
    Soit x un sommet ouvert
        tel que d(x) est minimum ;
    Examiner(x)
FinPour
```

A. O(n)

B. O(n+m)

C. O((n+m)log n)

D. $O(n^2)$

Complexité de l'algorithme de Dijkstra.

Initialisation;

Pour k de 1 à n faire

  Soit x un sommet ouvert tel que d(x) est minimum ;

  Examiner(x)

FinPour

1) Initialisation : O(n)

2) Recherche d'un sommet ouvert / d minimum : O(n)

3) Examiner(x) : $O(d^+(x))$

Complexité de l'algorithme : $O(n^2)$.

L’ensemble dynamique O des sommets ouverts peut être géré en utilisant une structure de données implémentant le type de données abstrait TAS.

On peut alors implémenter l’algorithme de Dijkstra avec une complexité de $O((n+m)\log(n))$.

# Tas

Soit E un ensemble dynamique où chaque élément e est affecté d'une priorité prio(e).

Opérations d'un tas

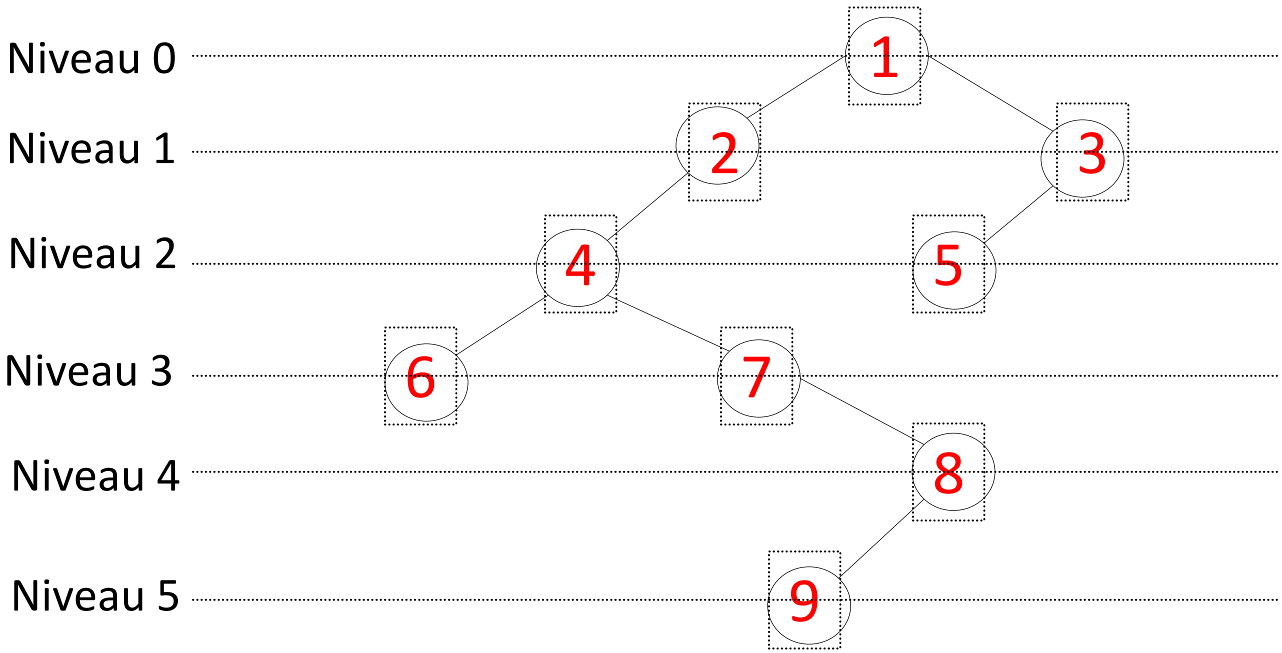
- CréerTas(E) crée un ensemble E vide
- Insérer(e,p,E) insère l'élément e de priorité p dans E
- BaisserPriorité(e,p,E) met la priorité de e à p dans E
- SupprimerMin(E) supprime dans E un élément de priorité minimum
- Min(E) renvoie un élément de priorité minimum de E

Numérotation hiérarchique des sommets d'un arbre binaire.

Ordre croissant des numéros :

1) de haut en bas (par niveaux croissants)

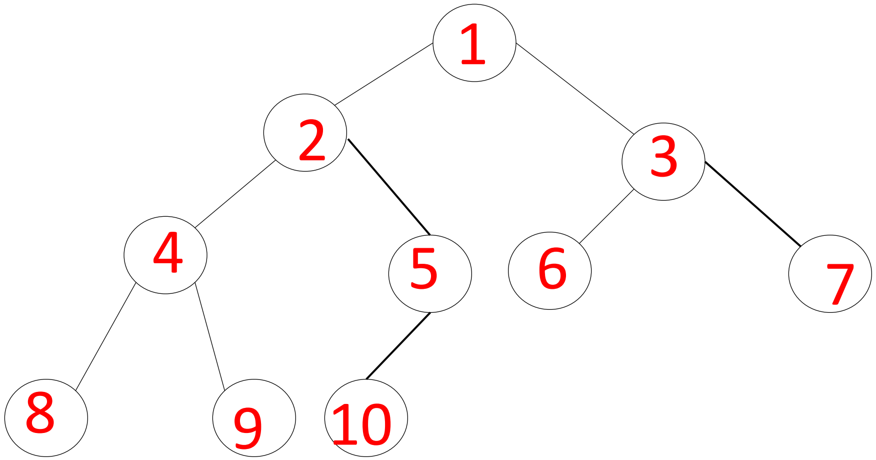
2) de gauche à droite.



## Arbre binaire parfait

Arbre tel que tous les niveaux sauf éventuellement le dernier sont remplis, et dans ce cas les feuilles du dernier niveau sont regroupées à gauche.

Exemple: L'arbre parfait à 10 sommets.



Arbre binaire parfait A de hauteur h :

1) les niveaux 0,1,..,h-1 de A sont complets (i.e : le niveau j contient $2^j$ sommets);

2) les j sommets du niveau h sont constitués:

- si $j=2q$, des 2 fils des q premiers sommets du niveau h-1
- si $j=2q+1$, des 2 fils des q premiers sommets du niveau h-1 du fils gauche du (q+1)ième sommet du niveau h-1.

Propriétés :

1) Il existe un seul arbre binaire parfait à n sommets $(P_n)$

2) La hauteur de $(P_n)$ est $\lfloor \log_2 n \rfloor$

## Tournoi

Un tournoi T pour (E,prio) est un arbre binaire sur E tel que :
pour tout sommet x distinct de la racine, prio(père(x)) ≤ prio(x).

Tas : tournoi parfait.

## Propriétés

1) les sous-arbres T(x) de T sont des tas;

2) racine(T) est un sommet de priorité minimum.

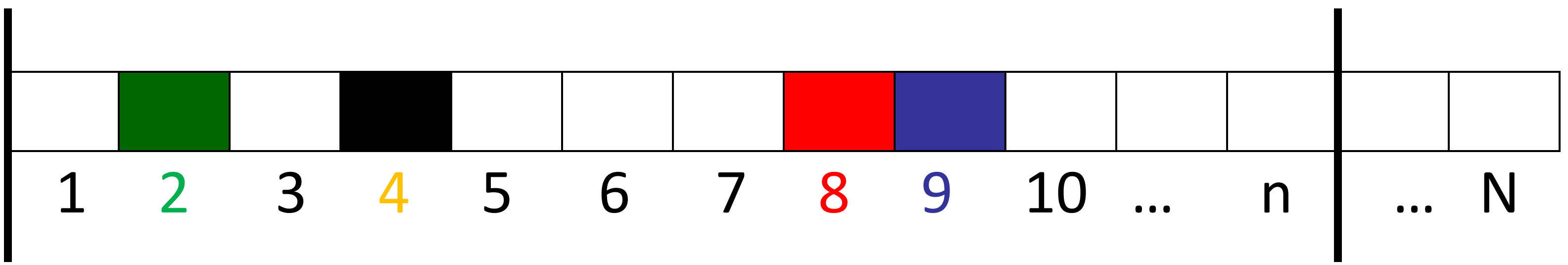
3) Propriétés liées à la numérotation num

- num(fg(x))=2∗num(x) , num(fd(x))=2∗num(x) + 1,
- num (père(x))= num (x) / 2 (pour x≠rac(T))
- EST_FEUILLE(x)⇔ 2∗num (x)> n
- num(DERNIERE_FEUILLE(T)) = n

Représentation d’un tas par un couple (TAB[1..N],n)

Valide si la constante N majore le nombre maximal d'éléments dans E

Les indices {1..n} de TAB correspondent aux numéros des sommets de T.




sommet x (indice 4 dans TAB):

fils gauche de x (indice 8 dans TAB)

fils droit de x (indice 9 dans TAB)

père de x (indice 2 dans TAB)

# Opérations sur un tas

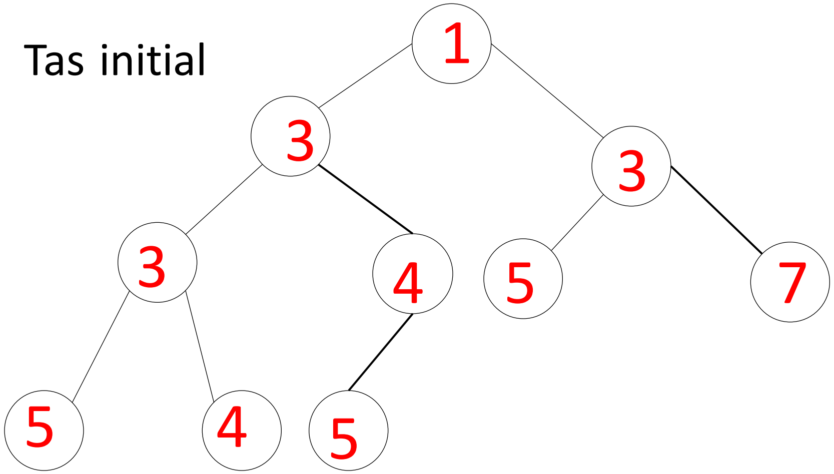
Insertion d'un élément de priorité k.
On utilise un tas T pour gérer (E,prio).

```
Procédure Insérer(e,k,T) ;
f:=Créer_Dernière_Feuille(e,k,T);
x:=f;
Tantque x≠rac(T) et x.prio<père(x).prio faire
            Echanger(x,père(x));
   x:=père(x)
FinTantque.
```

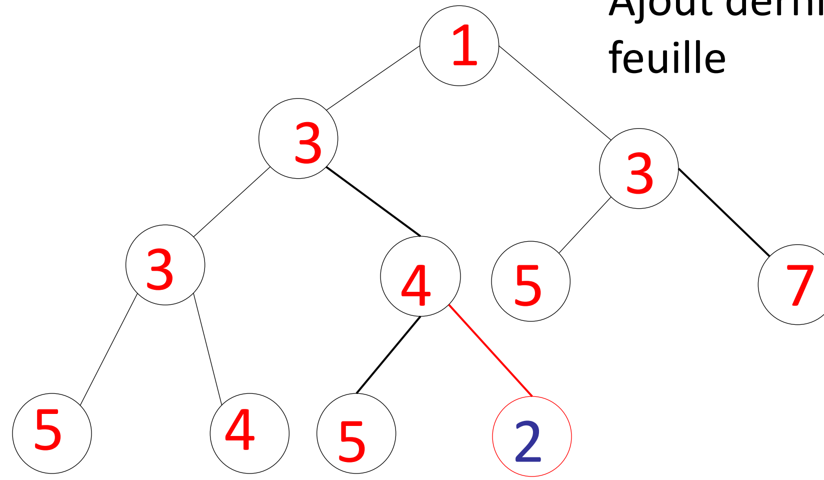
Complexité: $O(\log_2 n)$ (si la complexité de Echanger est O(1)).

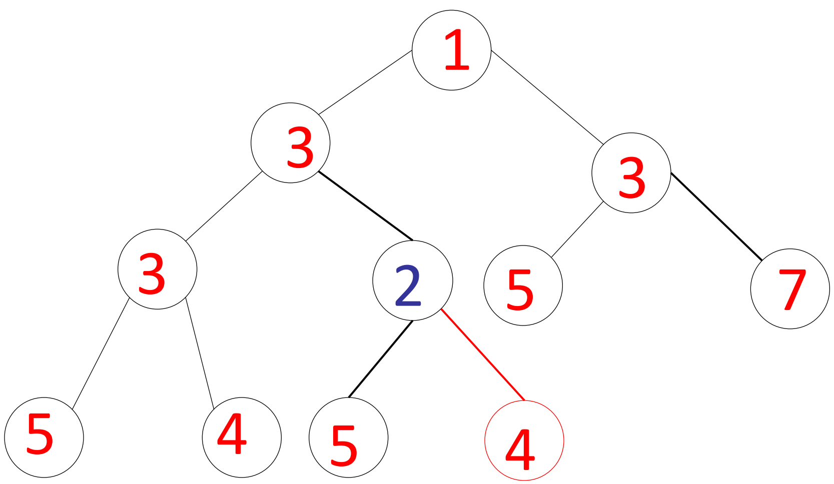
# Exemple: Insérer(e,2,T)

Tas initial

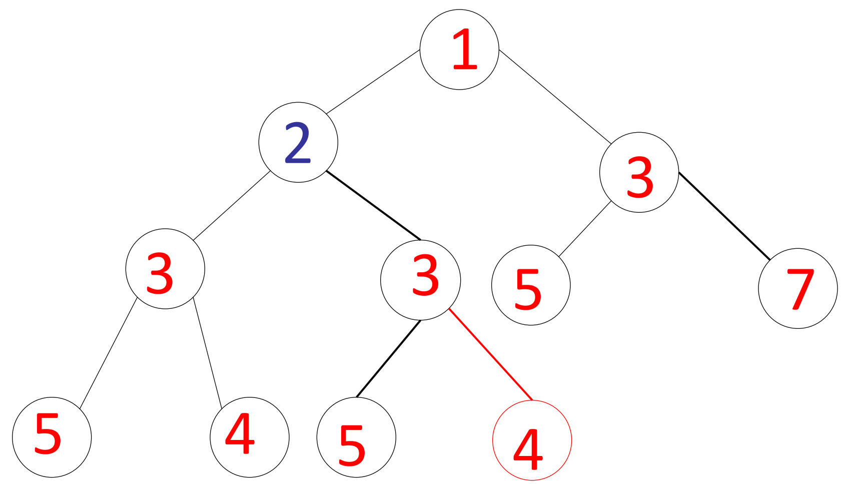



Ajout dernière feuille




Remontée dernière feuille




Tas final

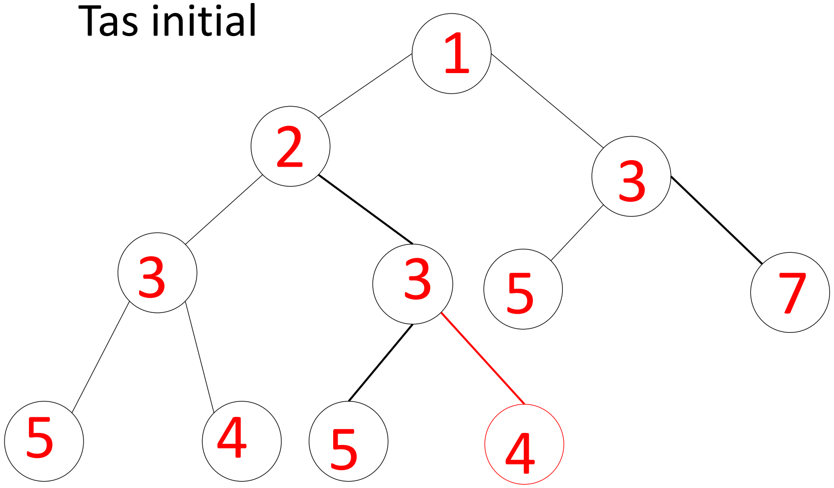
Suppression d'un élément de priorité minimale.

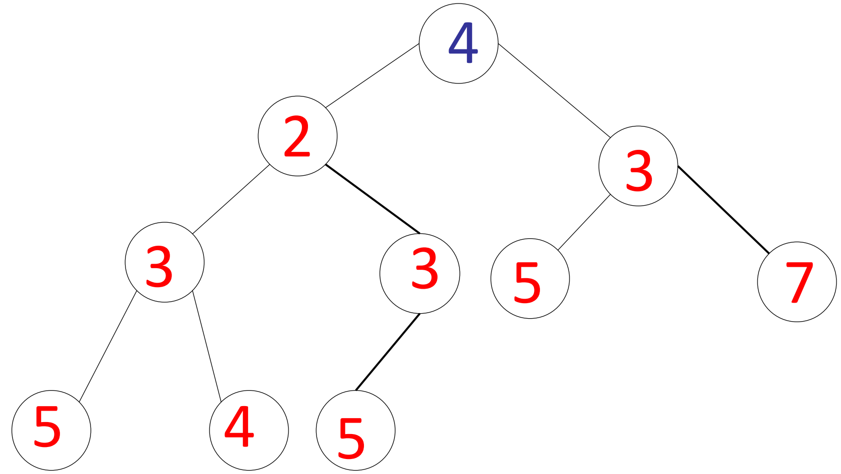
```
Procédure Supprimer_Min(T);
Echanger(rac(T),Dernière_Feuille(T));
Couper_Dernière_Feuille(T);
x:=rac(T);
Tantque (non Est_Feuille(x,T) et x.prio>Filsmin(x).prio) faire
        Echanger(x,Filsmin(x));
        x:=Filsmin(x)
Fintantque.
```

Complexité : $O(\log_2 (n))$

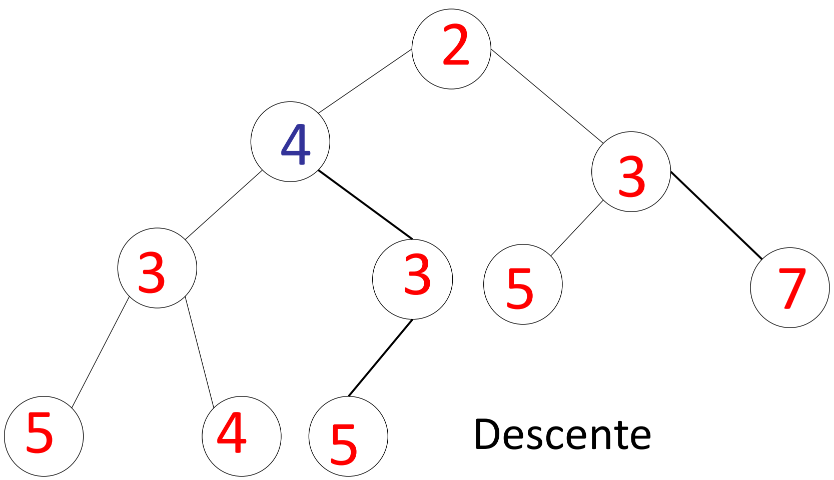
# Exemple: Supprimer_Min(T)

Tas initial

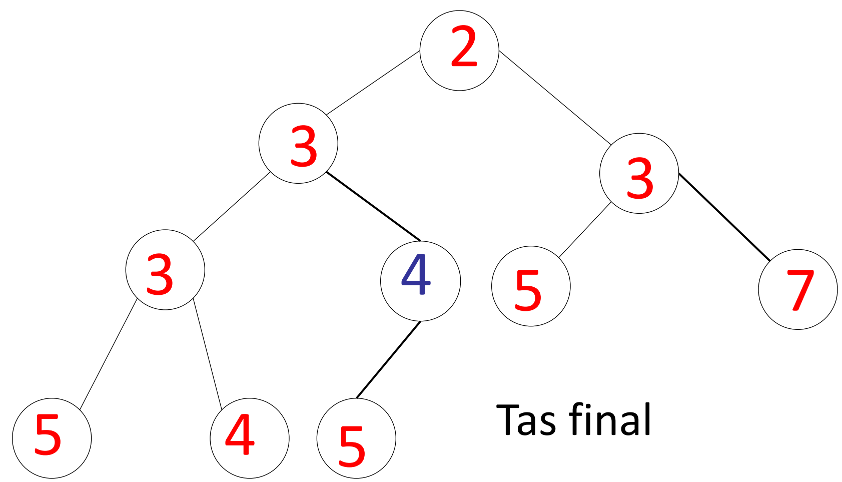




Echange racine-dernière feuille
Couper dernière feuille



Descente



Tas final

Baisser la priorité d'un élément
(en ayant un pointeur sur cet élément)

La priorité de l'élément e passe à p :

```
Procédure Baisser_Priorité (T,e,p);
e.Prio :=p;
x:=e ;
Tantque x≠rac(T) et x.prio<père(x).prio faire
            Echanger(x,père(x));
            x:=père(x)
Fintantque.
```

Complexité : $O(\log_2 (n))$

## Gestion de l'ensemble des sommets ouverts dans l'algorithme de Dijkstra.

L'ensemble dynamique est O ;
La priorité d'un sommet ouvert x est $d(x)$ : coût du chemin de s à x dans l'arborescence H courante.

Soient à la fin de l'itération k :

F l'ensemble des sommets fermés,

O l'ensemble des sommets ouverts,

Un sommet ouvert z de priorité minimale est à la racine du tas.
Donc, pour calculer z , complexité $O(1)$

## Gestion de l’ensemble des sommets ouverts dans l’algorithme de Dijkstra.

Algorithme de Dijkstra :
$d(s_1) = 0$; ouvrir($s_1$);
Pour tout k de 2 à n faire
    $d(s_k) = +\infty$ ;
Fin Pour

Pour k de 1 à n faire
    Soit x un sommet ouvert tel que d(x) est minimum ;
    Examiner(x);
FinPour.

```
Examiner(x)
Pour tout successeur y de x faire
        Si d(y) > d(x)+c(x,y) alors
            d(y) = d(x)+c(x,y);
            pred(y) = x;
            Si y n’est pas ouvert, ouvrir(y)
            FinSi
        FinSi
FinPour
fermer(x);
```

Il faut insérer dans O chaque successeur y de z non ouvert (c'est-à-dire ni dans O ni dans F) avec la priorité d(z) +c(z,y).
Complexité : O(log(n)) par successeur

Pour chaque successeur y de z tel que y est ouvert et (z,y) est incompatible, il faut remplacer la priorité de y par la nouvelle évaluation de y : c'est-à-dire d(z) + c(z,y).
Complexité : O(log(n)) par successeur

Il faut supprimer z du tas :
Complexité : O(log(n)) par sommet supprimé.

Il en résulte que si les sommets sont examinés dans l'ordre $(z_1,z_2,\ldots,z_n)$, le nombre total d'opérations de mise à jour du tas est majoré par :

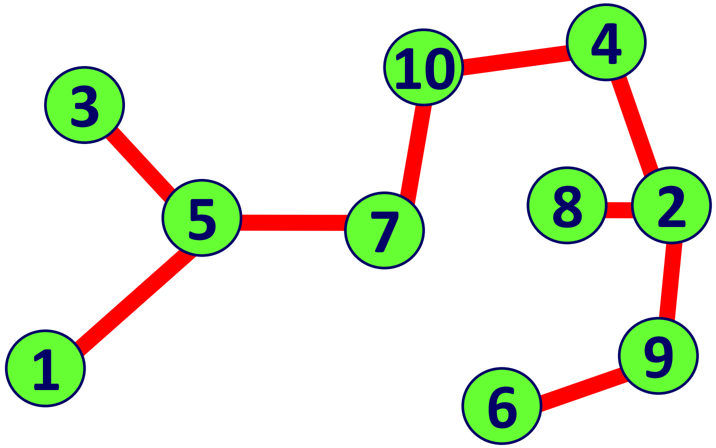
$$C \log(n)(n+d^+(z_1)+\ldots.+d^+(z_n)) = C\,(n+m)\log(n).$$

Complexité globale : O ((n+m)log(n))

# Arbre couvrant de coût minimum

# Application : conception de réseau

Une entreprise de télécommunication doit relier un ensemble de clients. Le coût de connection de deux clients est connu. But : relier les clients à un coût minimal.




Nombreuses applications :

- conception de réseau (hydraulique, electrique, communication…)
- utilisé pour d’autres problèmes : clustering, imagerie, relaxation de problèmes difficiles (arbre de Steiner, voyageur de commerce), etc.

# Définition du problème

Donnée :

Un graphe non orienté connexe G =(S,A) (n sommets, m arêtes)

Une fonction coût c : A $\rightarrow$ R (valuation des arêtes)

Rappel :

Un arbre couvrant de G est un graphe partiel de G qui est un arbre.

(On identifiera un arbre couvrant à son ensemble d'arêtes)

Définition :

Soit H un arbre couvrant, le coût de H, noté aussi c(H) est la somme $\sum_{e \in H} c(e)$ des coûts de ses arêtes.

Problème :

Déterminer un arbre couvrant H* de G de coût minimum.

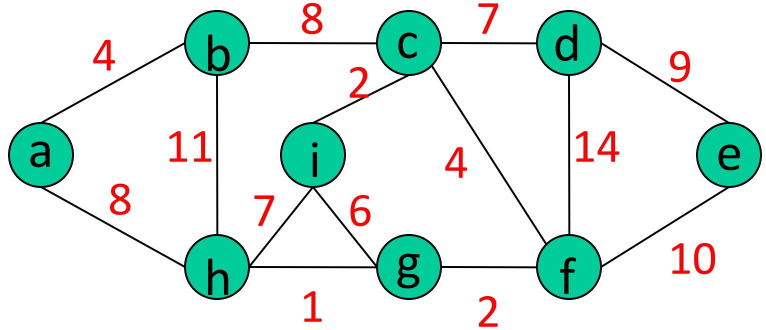
## *Quiz*

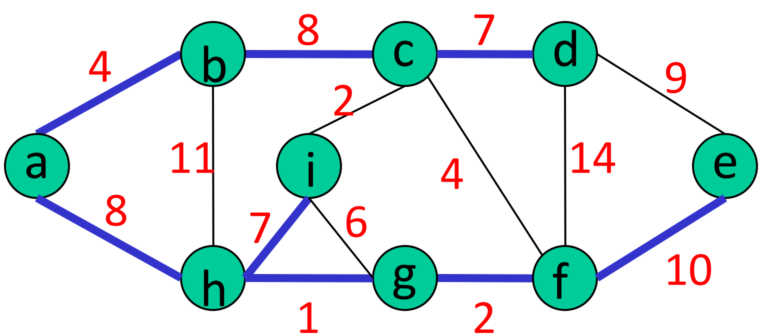
Soit G un graphe. Il existe toujours un arbre couvrant de coût minimum de G.

A. Vrai
B. Faux
C. Vrai si et seulement si il n’existe pas de circuit absorbant dans G.

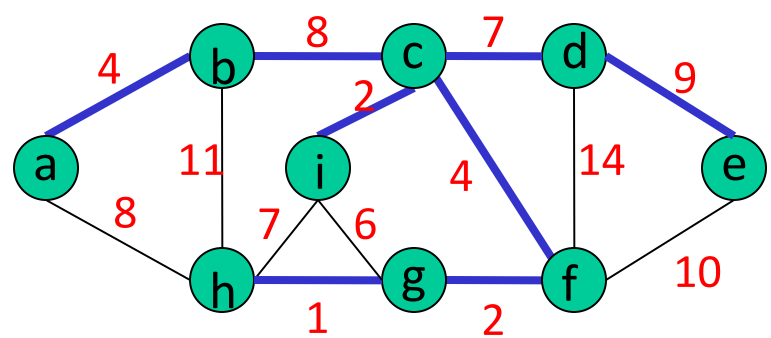
# Exemple

Graphe G :



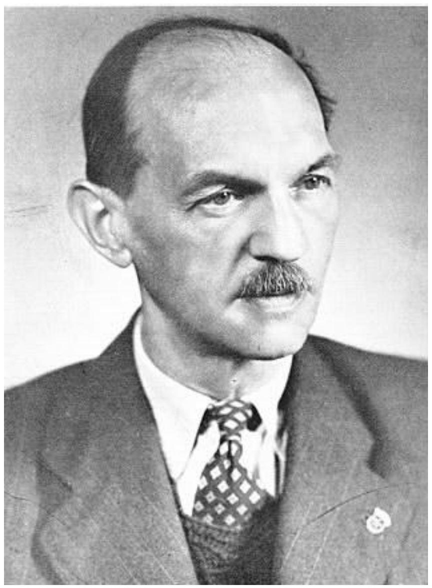

Arbre couvrant de coût = 47




Arbre couvrant de coût = 37

# Algorithme de Prim

Algorithme découvert par Jarnik en 1930, puis par Prim en 1957.
algorithme aussi dit : de Jarnik-Prim, ou de Jarnik-Prim-Dijkstra.



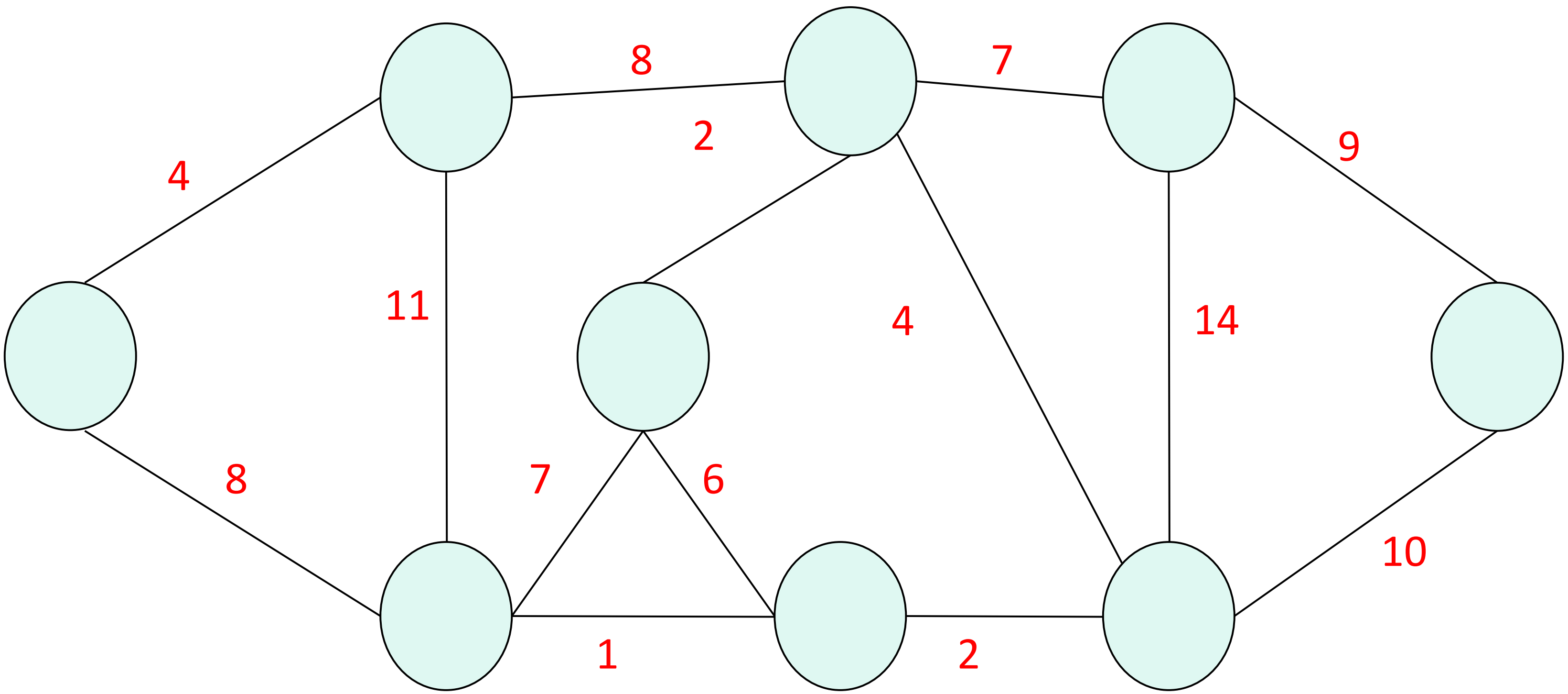
**Vojtech Jarnik** (1897-1970)
mathématicien tchèque.

**Robert C. Prim** (1921)
mathématicien et informaticien américain (laboratoires Bell).

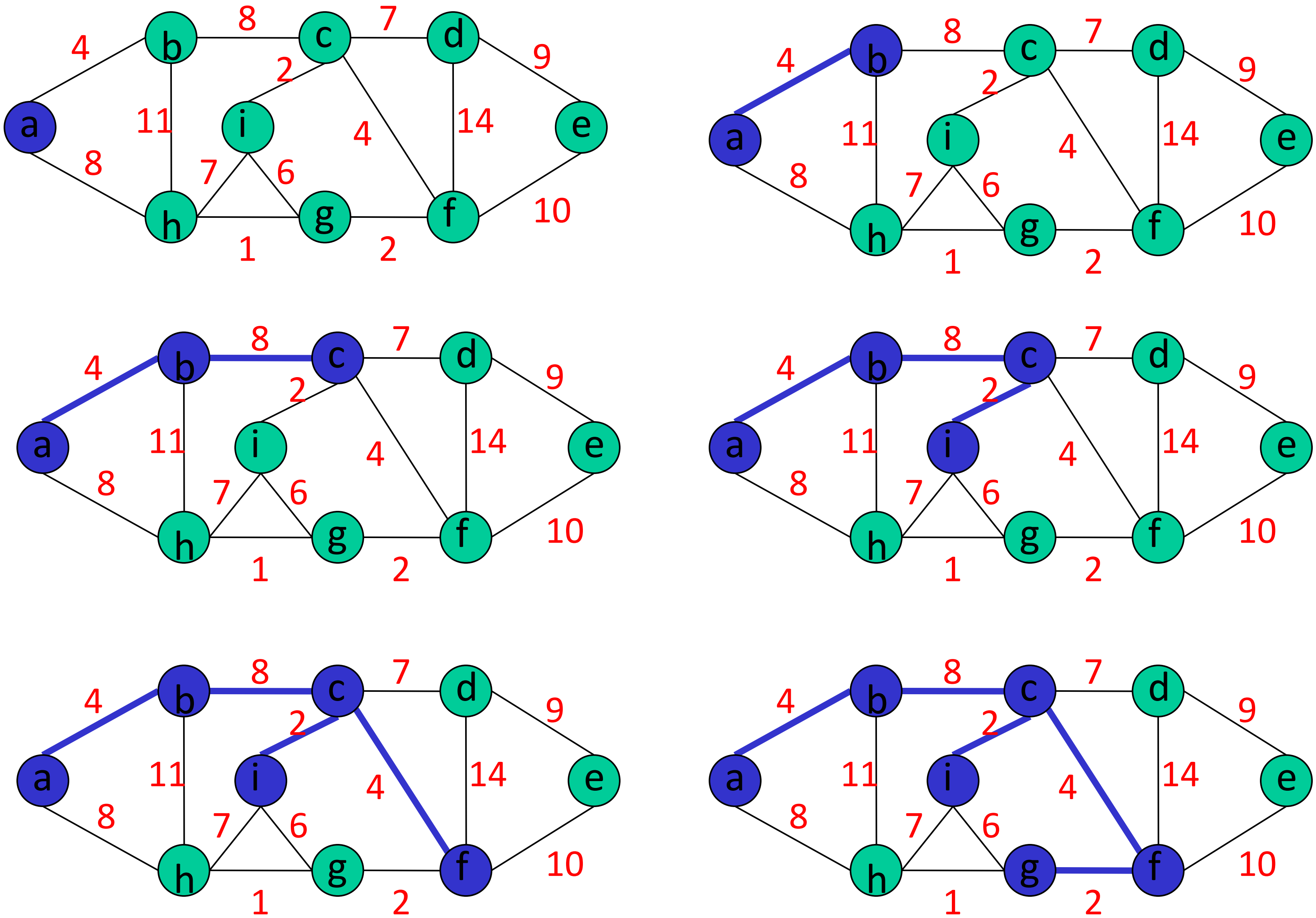
# Algorithme de Prim

```
Algorithme de Prim :
   d(s_1) = 0; ouvrir(s_1);
    Pour tout k de 2 à n faire d(s_k) = + ∞  ;
    FinPour
    Pour k de 1 à n faire
           Soit x un sommet ouvert tel que d(x) est minimum ;
           Examiner(x);
    FinPour.
```

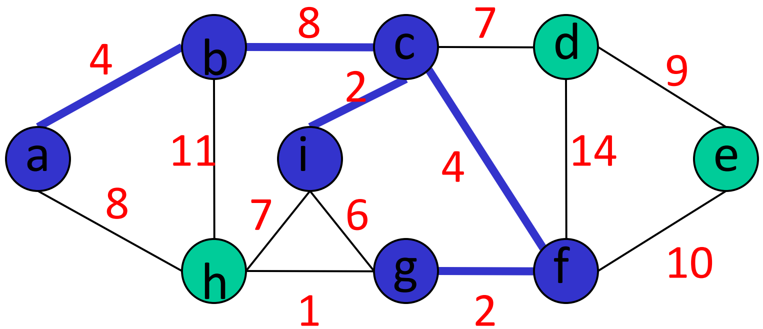
```
Examiner(x)
fermer(x);
Pour tout voisin y non fermé de x faire
           Si d(y) > c(x,y) alors
              d(y) = c(x,y); père(y)=x; Si y n'est pas ouvert ouvrir(y);
           FinSi
FinPour
```

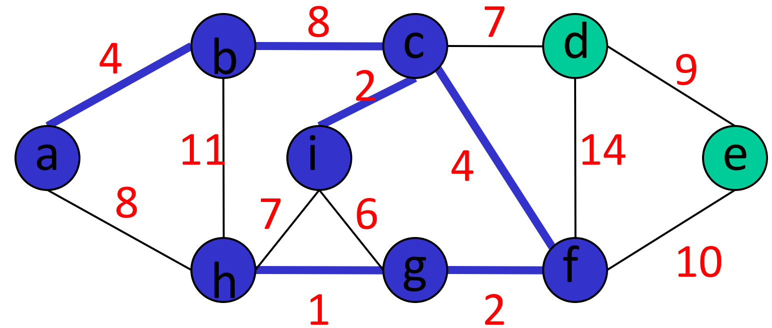

8
7
2
4
9
11
4
14
8
7
6
10
1
2

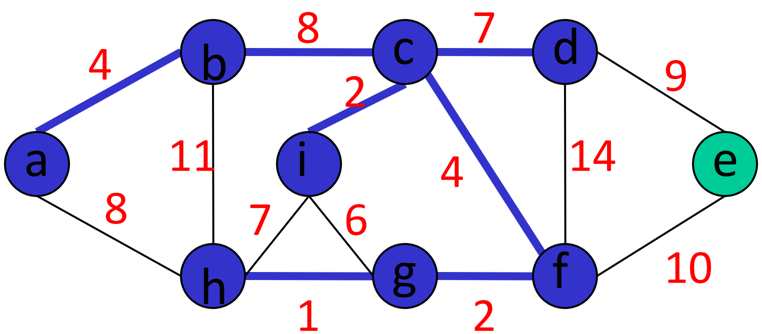
# Une exécution de l’algorithme de Prim

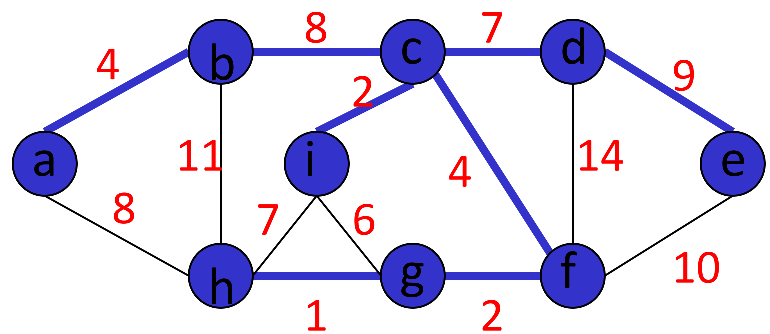


# Une exécution de l’algorithme de Prim (fin)



Algorithme très proche de celui de Dijkstra :

$d(s_1) = 0$; ouvrir($s_1$);
Pour tout k de 2 à n faire
    $d(s_k) = +\infty$ ;
FinPour
Pour k de 1 à n faire
    Soit x un sommet ouvert tel que d(x) est minimum ;
    Examiner(x);
FinPour.

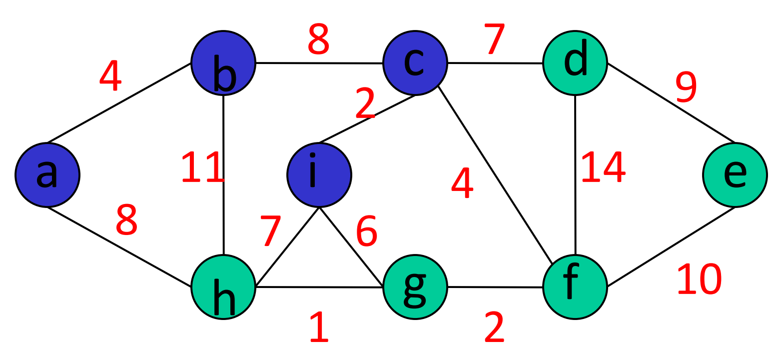
| **Examiner(x) dans Dijkstra :** | **Examiner(x) dans Prim :** |
|---|---|
| fermer(x);<br>Pour tout voisin non fermé y de x faire<br>Si d(y) > d(x)+c(x,y)<br>alors d(y)= d(x)+c(x,y);<br>père(y)=x;<br>Si y n'est pas ouvert ouvrir(y);<br>FinSi<br>FinPour | fermer(x);<br>Pour tout voisin non fermé y de x faire<br>Si d(y) > c(x,y)<br>alors d(y)= c(x,y);<br>père(y)=x;<br>Si y n'est pas ouvert ouvrir(y);<br>FinSi<br>FinPour |

## Complexité de l’algorithme de Prim

Même complexité que l’algorithme de Dijkstra : dépend de l’implémentation choisie.
En utilisant un tas : complexité en O(m log n)

## Validité de l’algorithme de Prim : définition préliminaire

Définition d’un co-cycle :
Soit G=(S,A). Soit U un ensemble de sommets de S.
Le co-cycle de U est l’ensemble des arêtes de A ayant une extrémité dans U et une extrémité dans S\U.



*Quiz*

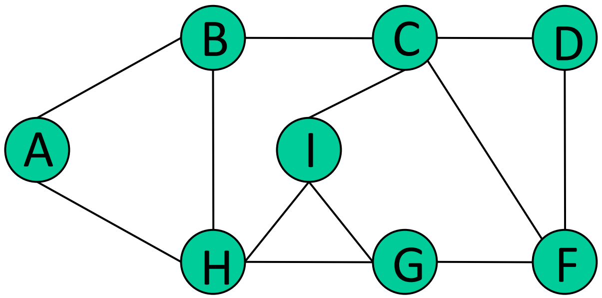
# Quel est le co-cycle de {A,B,H} ?

A. {{A,B},{B,H},{A,H}}

B. {{B,C},{H,I},{H,G}}

C. {{A,B},{B,H},{A,H}, {B,C},{H,I},{H,G}}

D. {C,I,G,D,F}



# L'algorithme de Prim retourne un arbre couvrant de coût minimum.

Preuve : Soit G=(S,A)

- Soit T l'arbre couvrant retourné par l'algo. de Prim.
  et $T_i$ l'arbre à la fin de l'itération i de l'algo.

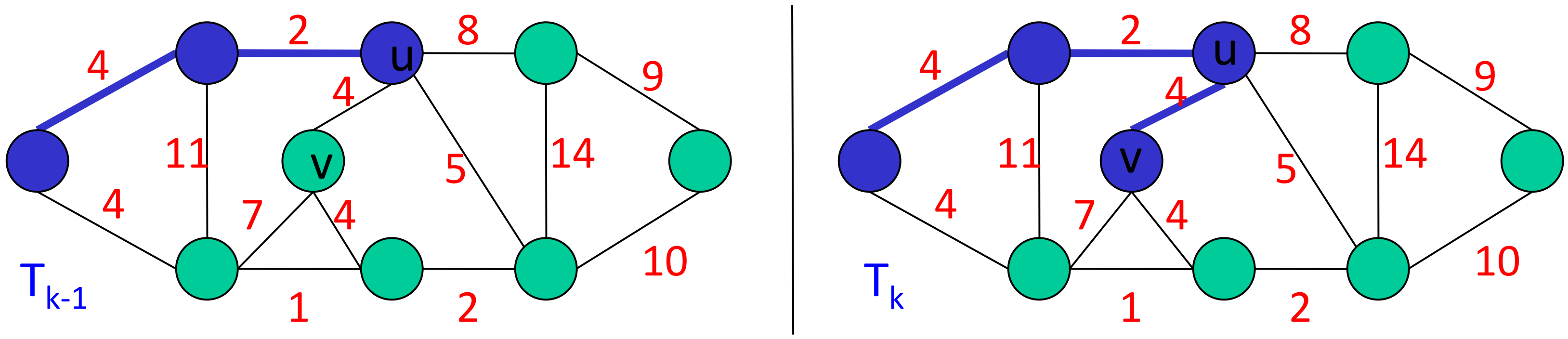
-Soit T* un arbre couvrant de coût minimum (un ACCM).

Si T= T* → T est un ACCM.

Sinon : Soit e={u,v} la première arête de A\ T* choisie par l'algo.

On suppose que cette arête a été choisie à l'itération k et que u a été ajoutée avant v

(i.e. u $\in T_{k-1}$ et $T_{k-1} \cup \{e\} = T_k$) :



## L'algorithme de Prim retourne un arbre couvrant de coût minimum.

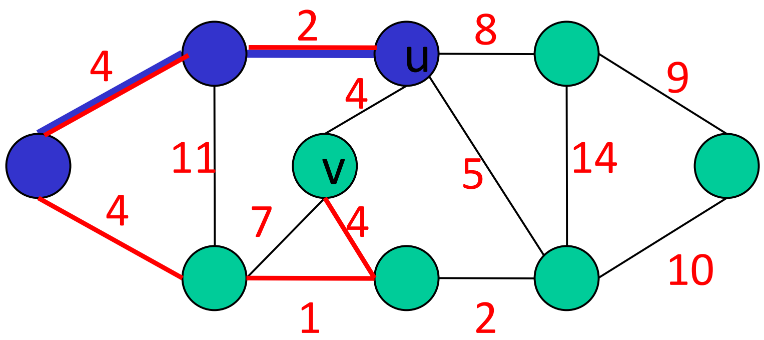
Preuve : Soit G=(S,A)

- Soit T l'arbre couvrant retourné par l'algo. de Prim.
  et $T_i$ l'arbre à la fin de l'itération i de l'algo.
- Soit T* un arbre couvrant de coût minimum (un ACCM).

Si T= T* → T est un ACCM.

## L'algorithme de Prim retourne un arbre couvrant de coût minimum.

Soit C la chaîne de u à v dans T* .




C U {e} forme un cycle.

Soit e* une arête de C qui est dans le co-cycle de $T_{k-1}$
Par construction coût(e*)≥ coût(e) .

En remplaçant e* par e dans T* on obtient un arbre couvrant $T_1$* tel que coût($T_1$*) ≤ coût( T*)
→ $T_1$* est un ACCM qui a une arête en commun de plus avec T.

On continue ce processus jusqu'à ce que $T_k$*=T → T est un ACCM.