Feuille 1
Vecteurs du plan et de l'espace [1]

Les feuilles d'exercices sont découpées en trois types d'exercice :
- Les *indispensables* : à savoir faire en autonomie.
- Les *exercices d'application* : pour mieux maîtriser et comprendre le cours.
- *Pour aller plus loin* : exercices présentant des développements mathématiques ou des études de modélisations de phénomènes issues d'autres disciplines.

Indispensables

Exercice 1 (Rappels de trigonométrie)**.** 1. Pour chaque valeur de a dans la liste d'angles (en radians)

$$0,\ \frac{\pi}{6},\ \frac{\pi}{4},\ \frac{\pi}{3},\ \frac{\pi}{2},$$

donner le cosinus et le sinus de a et de $-a$. Placer les points de coordonnées $(\cos(a), \sin(a))$ et $(\cos(a), \sin(-a))$ sur le cercle trigonométrique.

Solution : Les cosinus et sinus de ces angles sont rappelés dans le cours, ainsi que leur position sur le cercle unité. On sait par ailleurs que $\cos(-a) = \cos(a)$ et $\sin(-a) = -\sin(a)$. On peut donc dresser le tableau suivant :

a	$\cos(a)$	$\sin(a)$	$\cos(-a)$	$\sin(-a)$
0	1	0	1	0
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\frac{\pi}{2}$	0	1	0	-1

2. Pour tout x réel, exprimer les cosinus et sinus de $x + \frac{\pi}{2}$, $x + \pi$ et $x + \frac{3\pi}{2}$ en fonction de ceux de x. On pourra se rappeler les formules trigonométriques pour le cosinus et le sinus de la somme de deux angles.

Solution : On sait que $\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$ et $\sin(a+b) = \cos(a)\sin(b) + \sin(a)\cos(b)$. En posant $a = x$ et $b = \frac{\pi}{2}$, on obtient :

$$\cos(x + \frac{\pi}{2}) = -\sin(x) \quad \sin(x + \frac{\pi}{2}) = \cos(x).$$

On retrouve aussi facilement ces deux formules sur un dessin.

1. Version du 10 septembre 2019

3. Pour toutes les valeurs de a de la première liste, déterminer les sinus et cosinus de $a+\frac{\pi}{2}$, $a+\pi$ et $a+\frac{3\pi}{2}$

Solution : On utilise le tableau de la première question et les formules de la deuxième. On tire directement de ces formules que :

$$\cos(x+\pi) = -\cos(x) \quad \sin(x+\pi) = -\sin(x),$$

$$\cos(x+\frac{3\pi}{2}) = \sin(x) \quad \sin(x+\frac{3\pi}{2}) = -\cos(x).$$

On en déduit toutes les valeurs demandées, resumées dans le tableau ci-dessous. On prendra soin de vérifier les valeurs annoncées sur un dessin.

a	$\cos(a)$	$\sin(a)$	$\cos(a+\frac{\pi}{2})$	$\sin(a+\frac{\pi}{2})$	$\cos(a+\pi)$	$\sin(a+\pi)$	$\cos(a+\frac{3\pi}{2})$	$\sin(a+\frac{3\pi}{2})$
0	1	0	0	1	-1	0	0	-1
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$
$\frac{\pi}{2}$	0	1	-1	0	0	-1	1	0

Exercice 2 (Coordonnées et produit scalaire)**.** On se place dans le plan euclidien, avec son repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ canonique. On définit les points $A = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix}1+\sqrt{3}\\0\end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}$.

1. Placer ces points sur un graphique.
2. Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{OC}$ et leur norme.

Solution : On sait que les coordonnées d'un vecteur $\overrightarrow{MN}$ sont les coordonnées de N moins celles de N. Ca donne :

$$\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \quad \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix}\sqrt{3}\\-1\end{pmatrix} \quad \overrightarrow{OC} = \begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}.$$

La norme du vecteur $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ étant (dans le repère orthonormé) $\sqrt{x^2+y^2}$, on calcule :

$$\|\overrightarrow{OA}\| = \sqrt{2} \qquad \|\overrightarrow{AB}\| = 2 \qquad \|\overrightarrow{OC}\| = 1.$$

3. Calculer les produits scalaires $\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}$. En déduire l'angle entre les vecteurs $\overrightarrow{OC}$ et $\overrightarrow{AB}$, et l'angle entre $\overrightarrow{OC}$ et $\overrightarrow{OA}$.

Solution : Notons α l'angle entre $\overrightarrow{OC}$ et $\overrightarrow{AB}$ et β l'angle entre $\overrightarrow{OC}$ et $\overrightarrow{OA}$. Pour les deux produits scalaires à calculer, on a deux formules : celle de la définition du produit scalaire, avec les normes et le cos de l'angle ; et celle en coordonnées. La deuxième nous permet d'écrire directement :

$$\overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{AB} = -\sqrt{3} \qquad \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC} = -1.$$

La première formule donne :

$$-\sqrt{3} = \overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{AB} = \|\overrightarrow{OC}\|\|\overrightarrow{AB}\| \cos(\alpha) = 2\cos(\alpha)$$

$$-1 = \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC} = \|\overrightarrow{OA}\|\|\overrightarrow{OC}\| \cos(\beta) = \sqrt{2}\cos(\beta).$$

On obtient $\cos(\alpha) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\cos(\beta) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$. Ca détermine une mesure de ces angles au signe près en se reportant au dernier tableau du premier exercice : $\alpha = \pm 7\frac{\pi}{6}$ et $\beta = \pm 3\frac{\pi}{4}$. En observant la figure, on a $\alpha = -7\frac{\pi}{6}$ (on pourrait aussi prendre $\alpha = 5\frac{\pi}{6}$) et $\beta = 3\frac{\pi}{4}$.

Exercice 3 (Equations de droite)**.** On se place dans le plan euclidien avec un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

On considère le point $A = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ et le vecteur $\vec{u} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}$

1. Calculer la norme de $\vec{u}$.

Solution : On a $\|\vec{u}\| = \sqrt{(-2)^2 + (-1)^2} = \sqrt{5}$.

2. Donner une équation paramétrique de la droite D passant par A et dirigée par $\vec{u}$.

Solution : La droite D est décrite comme l'ensemble des points $M_t = A + t\vec{u}$, pour t réel. Donc une équation paramétrique de D est :

$$\begin{pmatrix} 3 - 2t \\ 1 - t \end{pmatrix} \text{ pour } t \in \mathbb{R}.$$

3. Donner les coordonnées des deux points de D à distance 1 de A.

Solution : On peut calculer la norme $\|\overrightarrow{AM_t}\| = |t|\|\vec{u}\|$ en fonction de t et résoudre l'équation $\|\overrightarrow{AM_t}\| = 1$. Les solutions sont $t = \pm\frac{1}{\|\vec{u}\|} = \pm\frac{1}{\sqrt{5}}$.

On peut aussi raisonner géométriquement : le point $M_t = A + t\vec{u}$ est à distance $|t|\|\vec{u}\|$ de A, par construction. On retombe sur la même équation.

4. Donner un vecteur $\vec{v}$ non nul orthogonal à $\vec{u}$.

Solution : On a vu en cours que le vecteur $\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ est orthogonal à $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$. Dans notre cas, on peut prendre $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

5. Donner une équation cartésienne de D.

<u>Solution</u> : On décrit maintenant la droite D comme l'ensemble des points $M = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ tels que $\overrightarrow{AM}$ est orthogonal à $\vec{v}$. Une équation cartésienne est donc donnée par l'égalité $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{v} = 0$. On obtient $x - 3 + (y-1)(-2) = 0$ soit l'équation :

$$x - 2y - 1 = 0.$$

On prend soin de vérifier que c'est cohérent avec l'équation paramétrique trouvée précédemment.

6. Parmi les points de la liste suivante, déterminer ceux qui appartiennent à D :

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

<u>Solution</u> : C'est maintenant juste un problème de vérifier si l'équation cartésienne obtenue à la question précédente est vérifiée ou non. Seul le point $\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$ appartient à la droite.

Vous pouvez vérifier par curiosité que répondre à la même question en utilisant l'équation paramétrique est vraiment faisable, mais demande quand même un peu plus de travail.

Exercice 4. Equation de plan

On se place dans l'espace euclidien, avec son repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ canonique. On définit le point $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et les vecteurs $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$.

1. Calculer le produit vectoriel $\vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v}$. Vérifier qu'il est bien orthogonal à $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

<u>Solution</u> : On utilise la formule du cours : $\vec{w} = \begin{pmatrix} 4+3 \\ 0-8 \\ 6-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -8 \\ 6 \end{pmatrix}$. On vérifie sans difficulté que $\vec{u} \cdot \vec{w}$ et $\vec{v} \cdot \vec{w}$ sont nuls, ce qui garantit l'orthogonalité.

2. Soit $M = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ un point de l'espace. Donner les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AM}$.

<u>Solution</u> : Aucune difficulté : $\overrightarrow{AM} = \begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \\ z-1 \end{pmatrix}$.

3. On suppose que M est dans le plan P passant par A et dirigé par $\vec{u}$ et $\vec{v}$. Combien vaut le produit scalaire $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{w}$? En déduire une équation cartésienne du plan P.

<u>Solution</u> : Les points M du plan P sont exactement les points tels que $\overrightarrow{AM}$ est orthogonal à $\vec{w}$. Donc le produit scalaire $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{w}$ doit valoir 0. On obtient l'"équation :

$$7x - 8y + 6z - 5 = 0.$$

4. Le point de coordonnées $\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$ appartient-il au plan P ?

<u>Solution</u> : On vérifie directement dans l'équation : elle est vérifiée, donc le point appartient au plan.

Exercice 5. Familles libres/liées
Pour les familles de vecteurs de l'espace ci-dessous, indiquer si elles sont libres ou liées et si elles forment une base de l'espace.

1. La famille composée de l'unique vecteur $\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$.

<u>Solution</u> : Cette famille est libre (composée d'un unique vecteur non nul), mais n'est pas une base : dans l'espace il faut une famille de trois vecteurs libres pour faire une base.

2. La famille composée des deux vecteurs $\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

<u>Solution</u> : Cette famille est libre (composée de deux vecteurs non colinéaires), mais n'est pas une base : dans l'espace il faut une famille de trois vecteurs libres pour faire une base.

3. La famille composée des trois vecteurs $\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{u}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

<u>Solution</u> : Cette famille est libre (composée de trois vecteurs non coplanaires), et est donc une base.

4. La famille composée des quatre vecteurs $\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{u}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{u}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

<u>Solution</u> : Elle ne peut pas être libre, il y a trop de vecteurs. On vérifie en effet qu'il y a une relation entre ces vecteurs :

$$\vec{u}_2 - \vec{u}_3 + 2\vec{u}_4 = \vec{0}.$$

5. La famille composée des trois vecteurs $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

<u>Solution</u> : Elle n'est pas libre : on a $\vec{v}_1 + \vec{v}_2 - \vec{v}_3 = \vec{0}$.

6. La famille composée des deux vecteurs $\vec{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{w}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix}$.

<u>Solution</u> : Elle n'est pas libre : on a $3\vec{w}_1 - \vec{w}_2 = \vec{0}$.

Applications

Exercice 6 (Vecteurs et centre de gravité)**.** Soit ABC un triangle du plan euclidien $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On note G le point tel que $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OC}$. On l'appelle centre de gravité du triangle.

1. Soit M le milieu de AB. Montrer que $2\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}$.

Solution : On a par construction de M : $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \vec{0}$. En effet ces deux vecteurs ont même direction (la droite (AB)), même longueur (la moitié de la distance entre A et B), mais directions opposées. On peut maintenant écrire $\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CM} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{CM} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{CM}$. On a bien obtenue l'égalité de la question.

2. Montrer que pour tout point P du plan, on a : $\overrightarrow{PG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{PA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{PB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{PC}$. En déduire que G est l'unique point du plan à vérifier $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$.

Solution : On raisonne de façon similaire à la question précédente.
Soit P un point du plan. On écrit $\overrightarrow{PG} = \overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OG}$. Par définition de G, on le réécrit $\overrightarrow{PG} = \overrightarrow{PO} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OC}$. En décomposant $\overrightarrow{PO} = 3\frac{1}{3}\overrightarrow{PO}$, on obtient :

$$\overrightarrow{PG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OA}) + \frac{1}{3}(\overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OB}) + \frac{1}{3}(\overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OC}) = \frac{1}{3}\overrightarrow{PA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{PB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{PC}.$$

En remplaçant P par G lui-même, on a $\vec{0} = \overrightarrow{GG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC})$. Ça donne l'équivalence demandée.

3. Montrer que $\overrightarrow{CG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CM}$.

Solution : On remplace P par C :

$$\overrightarrow{CG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CC}) = \frac{1}{3}(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}).$$

On conclut en utilisant la première question : $\overrightarrow{CG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CM}$.

4. Montrer que les médianes du triangle sont concourantes et se rencontrent en le point G. De plus, G est au deux-tiers de chaque médiane.

Solution : Les questions précédentes montrent que le centre de gravité G est au deux-tiers de la médiane issue de C. Mais dans les questions précédentes, le choix de raisonner avec M le milieu de $[AB]$ et C est un peut arbitraire : on peut faire exactement le même raisonnement pour chaque médiane. Donc G est le point d'intersection des 3 médianes (qui sont donc concourantes) et se trouve au deux-tiers de chacune d'elle.

Remarque : Dans cet exercice, on touche la notion de barycentre, qui a l'interprétation physique du centre de masse : si on imagine un triangle plan avec trois masses égales aux trois sommets, le point G est le point précis où il faut attacher le triangle pour qu'il soit suspendu de manière horizontale.

Exercice 7 (Travail d'une force (Physique))**.** Des étudiantes en sciences construisent leur propre trottinette électrique. Elles disposent pour cela d'un moteur capable d'exercer une force de traction de $400N$ représentée par un vecteur $\vec{T}$. Elles se demandent sur quelle pente elles pourront l'utiliser.

Dans le plan euclidien muni du repère canonique, soit $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ et $A = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) \\ \sin(\alpha) \end{pmatrix}$. Le long du déplacement de la trottinette sur le trajet $\overrightarrow{OA}$, trois forces travaillent sur le couple "trottinette+étudiante" : la traction, correspondant à $\vec{T} = 400\,\overrightarrow{OA}$; le poids, représenté par un vecteur $\vec{P} = \begin{pmatrix} 0 \\ -800 \end{pmatrix}$ et la réaction du sol, représentée par un vecteur $\vec{R}$ colinéaire à $\begin{pmatrix} -\sin(\alpha) \\ \cos(\alpha) \end{pmatrix}$.
Sur un déplacement rectiligne de O à A, le travail de chacune des forces est le produit scalaire entre le vecteur représentant cette force et le vecteur $\overrightarrow{OA}$.

1. Calculer le travail des 3 forces.

Solution : L'énoncé nous explique qu'il faut calculer trois produits scalaires :

$$\begin{aligned} \vec{T} \cdot \overrightarrow{OA} &= 400\|\overrightarrow{OA}\|^2 = 400 \\ \vec{P} \cdot \overrightarrow{OA} &= -800\sin(\alpha) \\ \vec{R} \cdot \overrightarrow{OA} &= 0 \end{aligned}$$

2. Pour que la traction soit possible, il faut que la somme du travail des trois forces soit positif : déterminer la valeur de α (en radian) jusqu'à laquelle les étudiantes peuvent monter.

Solution : La somme du travail des trois forces est $400 - 800\sin(\alpha)$. La traction est donc possible si $\sin(\alpha) \leq \frac{1}{2}$. L'angle de la pente à monter ne doit donc pas excéder $\frac{\pi}{6}$.

3. Sur une route, les pentes sont plutôt exprimée en pourcentage. Savez-vous exprimer la valeur trouvée dans ces termes ?

Solution : Une pente exprimée en pourcentage explique de combien de mètres on monte quand on avance horizontalement de 100 mètres. Autrement dit, c'est 100 fois la tangente de l'angle. Une pente de 100% signifie qu'on monte autant qu'on avance, autrement dit l'angle est de $\frac{\pi}{4}$.

Ici, la pente ne doit pas excéder $\tan(\frac{\pi}{6}) = \frac{1}{\sqrt{3}} \simeq 0,58$. La pente maximale est donc de 58% : la trottinette est très efficace !

Pour aller plus loin

Exercice 8 (Hauteurs du triangle)**.** Soit ABC un triangle du plan euclidien $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. Soit H l'intersection de la hauteur issue de A et de la hauteur issue de B.

1. Montrer que pour tout point P du plan, on a :

$$\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{PB} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{PC} \cdot \overrightarrow{AB} = 0.$$

Solution : On tourne en rond dans cette expression ! Pour y voir plus clair, ne considérons que des vecteurs issus de P, grâce à la relation de Chasles ($\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{PC} - \overrightarrow{PB}$, etc) :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{PB} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{PC} \cdot \overrightarrow{AB} &= \overrightarrow{PA} \cdot (\overrightarrow{PC} - \overrightarrow{PB}) + \overrightarrow{PB} \cdot (\overrightarrow{PA} - \overrightarrow{PC}) + \overrightarrow{PC} \cdot (\overrightarrow{PB} - \overrightarrow{PA}) && (1) \\ &= \vec{0}. && (2) \end{aligned}$$

En effet, tous les produits scalaires se simplifient.

2. Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{HC} \cdot \overrightarrow{AB}$.

Solution : On remplace P par H. On sait que H est sur la hauteur issue de A, donc $\overrightarrow{AH}$ est orthogonal à $\overrightarrow{BC}$ et aussi sur la hauteur issue de B, donc $\overrightarrow{BH}$ est orthogonal à $\overrightarrow{CA}$. On obtient donc des annulations de produits scalaires :

$$\vec{0} = \overrightarrow{HA} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{HB} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{HC} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{HC} \cdot \overrightarrow{AB}.$$

3. Montrer que les trois hauteurs sont concourantes.

Solution : La question précédente montre que H sur la hauteur issue de C. Mais par construction il est aussi sur les hauteurs issues de A et de B : c'est donc le point de concours des hauteurs !