Feuille de TD 1 : indications

Exercice 1. Comparer les tables de vérité de
(a) $P \Rightarrow Q$, (non P) ou Q , (non Q) $\Rightarrow$ (non P) ;
(b) P ou (Q et R) et (P ou Q) et (P ou R).

Indication : C'est une application directe du paragraphe 1.1 du premier chapitre de cours.

Exercice 2. Si je mange, alors je bois et je ne parle pas. Si je ne parle pas, alors je m'ennuie. Je ne m'ennuie pas. Que peut-on en déduire ?

Indication : L'énoncé propose deux implications. Il peut être utile d'en écrire les contraposées.

Exercice 3. Soit une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
(a) Écrire la négation de l'assertion

$$\forall x \in \mathbb{R}, \exists \epsilon > 0, \forall \delta > 0, \exists y \in \mathbb{R}, |y - x| < \delta \text{ et } |f(y) - f(x)| \geq \epsilon.$$

(b) Écrire avec des quantificateurs que f n'est pas décroissante.
(c) Soient x, y deux réels. Écrire la négation, la contraposée et la réciproque de

$$(f(x) \leq f(y)) \implies (x \leq y)$$

(d) Que signifie l'assertion suivante ?

$$\forall x \in \mathbb{R}, (f(x) = 0 \implies x = 0).$$

Indication : (a) Appliquer la procédure décrite à la fin du paragraphe 1.2 (énoncé indispensable 3 et après). (b) Ecrire la proposition logique « f est croissante » avec des quantificateurs, puis la nier comme au (a). (c) Relire les éléments de cours sur l'implication dans 1.1 si nécessaire. (d) Attention à ne pas sur-interpréter cette implication. Ce n'est pas une équivalence.

Exercice 4. Les raisonnements suivants sont *formellement* faux. Pourquoi ?
(a) Le théorème de Bolzano-Weierstrass dit que toute suite bornée admet une valeur d'adhérence. Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = n \sin(n\pi/2)$. La suite (u_n) ainsi définie n'est pas bornée. Par le théorème de Bolzano-Weierstrass, la suite (u_n) n'admet pas de valeur d'adhérence.
(b) On veut résoudre l'équation $x^4 = \pi$ dans $\mathbb{R}$. En appliquant la fonction sinus à cette équation, on trouve $\sin(x^4) = \sin(\pi) = 0$. Or on connaît les valeurs qui annulent la fonction sinus : ce sont les nombres $k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$. On en déduit que $x^4 = k\pi$, avec en fait $k \in \mathbb{N}$, puisque $x^4 \geq 0$. Finalement, l'ensemble des solutions est $\{\pm \sqrt[4]{k\pi} \mid k \in \mathbb{N}\}$.

Indication : (a) Confusion entre $A \implies B$ et $(\text{non}\, A) \implies (\text{non}\, B)$ (qui n'est pas sa contraposée !). (b) Confusion entre implication et équivalence.

Exercice 5. Vrai ou faux ?

(a) $\forall x \in \mathbb{R}, ((\forall \epsilon > 0, x \leq \epsilon) \Rightarrow x \leq 0)$.

(b) $\forall x \in \mathbb{R}, ((\forall \epsilon > 0, x < \epsilon) \Rightarrow x < 0)$.

Indication : (a) Remplacer l'implication par sa contraposée. (b) Ecrire la négation de cette proposition.

Exercice 6. Démontrer qu'il n'existe pas de nombre rationnel x tel que $x^2 = 2$.
Indication : sinon, on pourrait écrire $x = p/q$ pour des entiers p et q qui ne sont pas tous les deux pairs.

Exercice 7. Soient E un ensemble *fini* et $f : E \to E$ une fonction. Prouver que f est injective si et seulement si f est surjective.
Indication : pour le sens $\Rightarrow$, écrire $E = \{e_1, \ldots, e_n\}$ et compter le nombre d'éléments distincts dans l'ensemble $\{f(e_1), \ldots, f(e_n)\}$.

Exercice 8. Partie entière d'un réel.

(a) Soit $x \in \mathbb{R}$. Prouver l'existence d'un unique entier n tel que
$$n \leq x < n + 1.$$
Dans la suite, on note $n = E(x)$.

(b) Tracer le graphe de la fonction $E : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ainsi définie.

(c) Prouver : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad E(x + 1) = E(x) + 1$.

Indication : (a) Pour prouver l'unicité, supposer qu'on a deux entiers n et m vérifiant l'encadrement proposé ; en déduire un encadrement de l'entier $m-n$. Pour prouver l'existence d'un tel n, le chercher comme le plus grand entier inférieur ou égal à x. (c) Utiliser l'unicité vue en (a).

Exercice 9. Soient deux réels a et b tels que $a < b$.

(a) Montrer que si n est un entier assez grand, il existe un entier k tel que
$$na < k < nb.$$

(b) En déduire que l'intervalle $]a, b[$ contient un nombre rationnel. Et même une infinité de nombres rationnels.

(c) Montrer que l'intervalle $]a, b[$ contient aussi une infinité de nombres irrationnels.

Indication : (a) Utiliser une partie entière. (b) La question (a) donne un rationnel adéquat. Pour en avoir une infinité, il suffit d'ajouter des nombres rationnels assez petits. (c) On pourra cette fois ajouter des nombres irrationnels assez petits.

Exercice 10. Déterminer les ensembles suivants.

(a) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid |x+2| + |3x-1| = 4\}$;

(b) $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x+5 = \sqrt{x+11}\}$;

(c) $C = \{z \in \mathbb{C} \mid |z-3i| = |z+i|\}$;

(d) $D = \{x \in \mathbb{R} \mid E(3x) = 2 - E(x)\}$.

Indication : (a) Pour se débarrasser des valeurs absolues, distinguer trois cas selon la position de x par rapport à -2 et $1/3$. (b) Léquation $a = \sqrt{b}$ signifie que a est un nombre *positif* tel que $a^2 = b$. (c) Géométriquement, $|a-b|$ est la distance euclidienne entre les points du plan d'affixes a et b. (d) Ecrire $x = k + r$ avec $k = E(x)$ et $r \in [0, 1[$, puis calculer $E(3x)$ en fonction de la valeur de r.