Feuille 4
Bases et sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$

Les feuilles d'exercices sont découpées en trois types d'exercice :
- Les *indispensables* : à savoir faire en autonomie.
- Les *exercices d'application* : pour mieux maîtriser et comprendre le cours.
- *Pour aller plus loin* : exercices présentant des développements mathématiques ou des études de modélisations de phénomènes issues d'autres disciplines.

Indispensables

Exercice 1. Préciser si les familles suivantes sont libres ou non :
1. Dans $\mathbb{R}^2$: $\big((1,2),(3,5)\big)$.
2. Dans $\mathbb{R}^3$: $\big((1,2,3),(1,-2,-3),(-2,-4,-6)\big)$.

Exercice 2. Les ensembles suivants sont-ils générateurs de $\mathbb{R}^3$?
1. $A_1 = \{(0,1,1),(1,0,1)\}$.
2. $A_2 = \{(0,1,1),(1,0,1),(1,1,0)\}$.
3. $A_3 = \{(-2,1,1),(1,-2,1),(1,1,-2)\}$.
4. $A_4 = \{(0,1,1),(1,0,1),(1,1,0),(1,1,1)\}$.
5. $A_5 = \{(-2,1,1),(1,-2,1),(1,1,-2),(0,-3,3)\}$.

Exercice 3. Dans $\mathbb{R}^3$, donner un exemple de famille libre qui n'est pas génératrice, et un exemple de famille génératrice qui n'est pas libre.

Exercice 4. Dans $\mathbb{R}^3$, on considère les trois vecteurs $u = (1,1,-1)$, $v = (-1,1,1)$ et $w = (1,-1,1)$. Montrer que u, v, w forment une base de $\mathbb{R}^3$. Donner les coordonnées du vecteur $(2,1,3)$ dans cette base.

Exercice 5. On considère les trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$: $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1\\x\\1\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$, à quelles conditions sur $x \in \mathbb{R}$ forment-ils une base de $\mathbb{R}^3$?

Exercice 6. Déterminer la matrice de passage de la base $\mathcal{B}_1$ de $\mathbb{R}^3$ à la base $\mathcal{B}_2$ de $\mathbb{R}^3$, où

$$\mathcal{B}_1 = \big((1,2,1),(2,3,3),(3,7,1)\big), \quad \mathcal{B}_2 = \big((3,1,4),(5,3,2),(1,-1,7)\big).$$

Exercice 7. Déterminer si les ensembles suivants sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$:

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = x+1\}$$

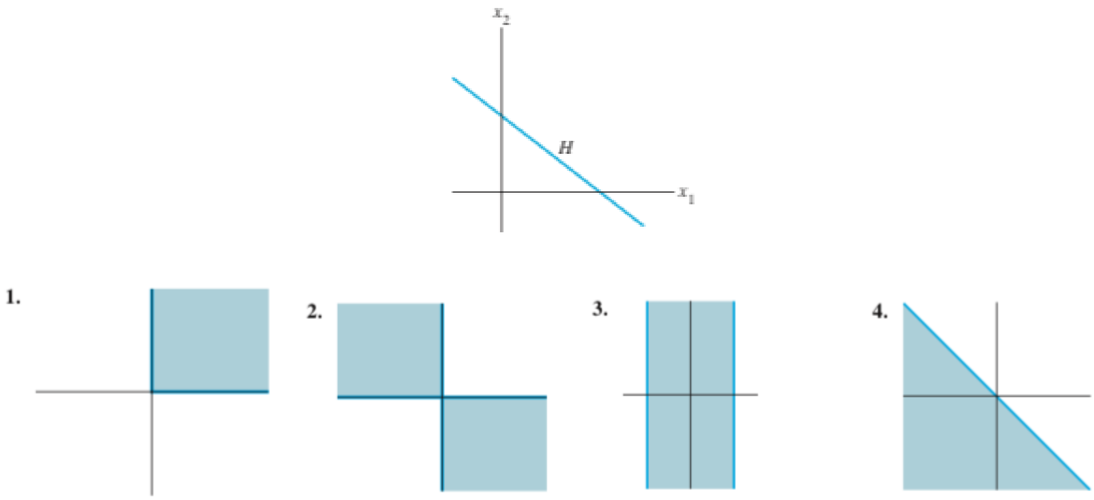
$$A_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = x\}, \quad A_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = x^2\}, \quad A_3 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \geqslant x\}.$$

$$E_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x+y=0\}, \quad E_1' = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | xy = 0\}.$$

$$E_2 = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 | x=0, y=z\}, \quad E_2' = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x = 1\}.$$

$$E_3 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x^2+xy \geqslant 0\}, \quad E_3' = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^2+xy+y^2 \geqslant 0\}.$$

Exercice 8. Expliquer pourquoi aucun des sous-ensembles de $\mathbb{R}^2$ représentés ci-dessous ne forment de sous-espace vectoriel :



Exercice 9. On considère, dans $\mathbb{R}^4$, les vecteurs :

$$v_1 = (1, 2, 3, 4), v_2 = (1, 1, 1, 3), v_3 = (2, 1, 1, 1), v_4 = (-1, 0, -1, 2), v_5 = (2, 3, 0, 1)$$

Soit F le sous-espace vectoriel engendré par $\{v_1, v_2, v_3\}$ et soit G celui engendré par $\{v_4, v_5\}$. Calculer les dimensions respectives de F, G, $F \cap G$, $F + G$.

Pour aller plus loin

Exercice 10. Donner un système d'équations des espaces vectoriels engendrés par les vecteurs suivants :

1. $u_1 = (1, 2, 3)$;
2. $u_1 = (1, 2, 3)$ et $u_2 = (-1, 0, 1)$;
3. $u_1 = (1, 2, 0)$, $u_2 = (2, 1, 0)$ et $u_3 = (1, 0, \alpha)$ où $\alpha \in \mathbb{R}$. Existe-t-il une valeur de α pour laquelle le vecteur u_3 s'écrit comme combinaison linéaire de u_1 et u_2 ? Le cas échéant qu'arrive-t-il au système d'équations précédent pour cette valeur de α ?