Feuille de TD 8 : indications

Exercice 1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on pose $f(P) = XP'(X)$.

(a) Vérifier que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

(b) Prouver que f est diagonalisable.

Indication : Calculer $f(X^k)$ pour $k \in \mathbb{N}$. Ne peut-on en déduire une base de vecteurs propres ?

Exercice 2. Soit E un espace vectoriel complexe, muni d'une base $(e_1, \ldots, e_n)$. Soit $f \in L(E)$ tel que $f(e_k) = e_{k+1}$ pour $k = 1, \ldots, n-1$ et $f(e_n) = e_1$.

(a) Calculer le polynôme caractéristique de f.

(b) En déduire que f est diagonalisable.

Indications : Ecrire la matrice A de f dans la base donnée. (a) Il s'agit de calculer le déterminant $\det(A - XI_n)$, par exemple en développant par rapport à la dernière colonne. (b) On trouve un polynôme très simple, dont les racines sont bien connues et permettent d'appliquer un critère du cours.

Exercice 3. Les matrices suivantes sont-elles diagonalisables sur $\mathbb{R}$? Sur $\mathbb{C}$? Si oui, donner les valeurs propres et une base de vecteurs propres.

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 0 & 6 & -3 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Indications : La méthode générale consiste à calculer le polynôme caractéristique de A, puis à le factoriser. Pour chacune des racines λ qu'on a trouvé, on peut calculer une base de l'espace propre associé en résolvant le système linéaire $AX = \lambda X$.

Exercice 4. Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ la matrice avec des 0 sur la diagonale et des 1 partout ailleurs :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & \ldots & \ldots & 1 \\ 1 & 0 & \ddots & \ddots & 1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & 1 \\ 1 & \ldots & \ldots & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Calculer l'image de $A + I_n$, puis la dimension de son noyau.

(b) En déduire que A est diagonalisable.

(c) Que vaut le déterminant de A ?

Indications : (a) L'image demandée se voit sur la matrice $A + I_n$. On en déduit le rang puis la dimension du noyau. (b) Le (a) donne déjà la dimension d'un espace propre de A. On pourra calculer $A(1, \ldots, 1)$ pour conclure. (c) Exprimer le déterminant en fonction des valeurs propres.

Exercice 5. Soit un entier $n \geq 2$. Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ la matrice dont les coefficients sont nuls à l'exception de $a_{nk} = a_{kn} = k$, pour $1 \leq k \leq n$. Trouver une matrice inversible P et une matrice diagonale D telles que $A = PDP^{-1}$.

Indications : Ecrire la matrice A, en déduire son rang, puis la dimension de son noyau. Pour trouver des valeurs propres non nulles λ, écrire le système linéaire $Ax = \lambda x$, observer que ce système admet des solutions x non nulles pour des valeurs particulières de λ. Ceci donne D. Pour trouver P, il faut chercher des vecteurs propres associés aux valeurs propres trouvées.

Exercice 6. Soient E un espace vectoriel et $s \in L(E)$ tel que $s \circ s = \mathrm{id}_E$.

(a) Montrer que les seules valeurs propres possibles de s sont 1 et -1.

(b) Soit $x \in E$. Vérifier qu'il existe des vecteurs x_+ et x_- tels que $x = x_+ + x_-$ et $s(x_\pm) = \pm x_\pm$.

(c) En déduire que s est diagonalisable.

(d) Décrire l'action de s par un dessin.

Indications : (a) En supposant que $s(x) = \lambda x$, calculer $s(s(x))$ de deux façons différentes. (b) La stratégie consiste à identifier qui doivent être x_+ et x_-. Pour cela, on appliquera s à la relation $x = x_+ + x_-$ pour trouver une seconde relation. Cela permettra de trouver des valeurs pour x_+ et x_-, en fonction de x. Il suffit alors de vérifier qu'elles conviennent. (c) Reformuler ce qu'on vient de prouver pour exprimer E comme la somme directe de deux espaces propres.

Exercice 7. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie. Soit $f \in L(E)$ tel que

$$\forall g \in L(E), \qquad f \circ g = g \circ f.$$

(a) Montrer que, pour tout $x \in E$, il existe $\lambda_x \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = \lambda_x x$.

(b) En déduire que f est une homothétie.

Indications : (a) Si $x \neq 0$, le compléter en une base $(x, v_1, \ldots, v_{n-1})$ de E. Utiliser la projection g sur $\mathrm{Vect}(x)$ parallèlement à $\mathrm{Vect}(v_1, \ldots, v_{n-1})$. (b) Si $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de E, comparer λ_{e_i}, λ_{e_j} et $\lambda_{e_i+e_j}$.

Exercice 8. Soit E espace vectoriel de dimension n. Soit $f \in L(E)$ tel que $f^n = f \circ \cdots \circ f$ est nul.

(a) L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?

(b) On suppose qu'il existe $x \in E$ tel que $f^{n-1}(x) \neq 0$. Prouver que $(x, f(x), \ldots, f^{n-1}(x))$ est une base de E.

(c) Quelle est la matrice de f dans cette base ?

Indications : (a) En supposant que $f(x) = \lambda x$, calculer $f^n(x)$ de deux façons différentes. (b) Pour montrer que la famille est libre, supposer une équation $\lambda_0 x + \lambda_1 f(x) + \cdots + \lambda_{n-1} f^{n-1}(x) = 0$ et appliquer f plusieurs fois.

Exercice 9. Soit (u_n) une suite complexe vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+3} - 6u_{n+2} + 11u_{n+1} - 6u_n = 0.$$

(a) Montrer que les vecteurs $X_n = \begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$ vérifient une relation de récurrence du type

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad X_{n+1} = AX_n,$$

où A est une matrice à expliciter.

(b) En déduire une expression de X_n en fonction de n, A et X_0.

(c) Montrer qu'il existe des constantes $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$ telles que

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \alpha 3^n + \beta 2^n + \gamma.$$

Indication : (c) Diagonaliser A.

Exercice 10. Etant donnés $x, y \in \mathbb{R}^d$, on note $x \leq y$ (resp. $x < y$) si, pour $i = 1, \ldots, d$, $x_i \leq y_i$ (resp. $x_i < y_i$). En particulier, $x \geq 0$ signifie que toutes les composantes de x sont positives. On va se servir de l'ensemble

$$C = \left\{ x \in \mathbb{R}^d \;\middle|\; x \geq 0 \;\text{ et }\; \sum_{i=1}^{d} x_i = 1 \right\}.$$

Dans cet exercice, on considère une matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients a_{ij} sont strictement positifs. On pose $S = \max \left\{ \sum_{i=1}^{d} a_{ij} \mid j = 1 \ldots, d \right\}$.

(a) Soit $x \in \mathbb{R}^d$ tel que $x \geq 0$ et $x \neq 0$. Vérifier que

$$\theta(x) = \sup\{t \geq 0 \mid tx \leq Ax\}.$$

est bien défini et vérifie $0 < \theta(x) \leq S$.

(b) Soit $\lambda = \sup\{\theta(x) \mid x \in C\}$. Démontrer l'existence d'une suite de vecteurs $x^n = (x_1^n, \ldots, x_d^n)$ de C tels que
   - $\theta(x^n)$ converge vers λ, quand n tend vers $+\infty$;
   - les composantes de x^n tendent vers celles d'un vecteur x de C, quand n tend vers $+\infty$.

(c) Montrer que $\lambda x \leq Ax$.

(d) Supposons que $y = Ax - \lambda x$ n'est pas nul.
   - Prouver que $Ay > 0$.
   - Prouver qu'il existe $\epsilon > 0$ tel que $Ay \geq \epsilon Ax$.
   - En déduire une minoration de $\theta(Ax)$, puis une contradiction.
   - Qu'a-t-on démontré ?

Indications : (a) Vérifier que $Ax > 0$ pour obtenir $0 < \theta(x)$. Ecrire l'inégalité $tx \leq Ax$ composante par composante et sommer pour obtenir $\theta(x) \leq S$. (b) Caractérisation séquentielle du sup et Bolzano-Weierstrass. (c) Commencer par vérifier que $\theta(x^n)x^n \leq Ax^n$ pour tout n. (d) Le début est similaire à la justification de l'inégalité $0 < \theta(x)$ au (a).