Devoir à maison

Justifier toutes vos réponses. Les réponses non-justifiées ne sont pas prises en compte.

Exercice 1. Déterminer les bornes sup./inf. si elles existent.

(a) $A = [2, 3[$

(b) $B = \left\{2 - \dfrac{3}{n} \mid n \in \mathbb{N}^*\right\}$

(c) $C = \left\{\dfrac{n}{n^2+1} \mid n \in \mathbb{N}^*\right\}$

Exercice 2. Vrai ou faux ?
Soient (a_n), (b_n), (c_n) des suites réelles divergentes. Supposons $a_n, b_n, c_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(a) $(a_n + b_n)$ diverge.

(b) $(a_n b_n c_n)$ diverge.

(c) $(a_n^{b_n})$ diverge.

Exercice 3.

(a) Soit $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ avec

$$f(x) = \begin{cases} x \sin\left(\dfrac{1}{x^2}\right), & \text{si } x \neq 0, \\ \\ 0, & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

La fonction f où est-elle continue ?

(b) Soient $a, b \in \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ avec

$$g(x) = \begin{cases} |x|, & \text{si } x \leq 0, \\ \\ (x-a)(x-b), & \text{si } x \in]0, 1], \\ \\ x - 1, & \text{si } x \geq 1. \end{cases}$$

Déterminer l'ensemble de $a, b \in \mathbb{R}$ telle que la fonction g est continue sur $\mathbb{R}$.