LICENCE D'INFORMATIQUE

Sorbonne Université

LU3IN003 – Algorithmique

Cours 1 : Rappels sur les preuves d'algorithmes et l'analyse de complexité

Année 2023-2024

Responsables et chargés de cours

Fanny Pascual

Olivier Spanjaard

Equipe pédagogique, supports de TD, site web de l'UE

Chargés de cours et de TD :

Fanny Pascual, Olivier Spanjaard

fanny.pascual@lip6.fr olivier.spanjaard@lip6.fr

Chargés de TD :

Manuel Amoussou, François Clément

Fascicules de TD : la distribution aura lieu en TD.

Site web de l'UE :
https://moodle-sciences-23.sorbonne-universite.fr/

Evaluation

- 50% CC, 50% Examen
- Contrôle continu :
  - Projet avec rapport et soutenance (15%)
    (un logiciel de **détection de plagiat** est appliqué sur tous les projets soumis)
  - Partiel (35%)
    (un exercice du fascicule de TD, ou une portion d’exercice, fera partie du sujet)

Ouvrages

Algorithmique de Cormen, Leiserson, Rivest, Stein.
DUNOD, 3ième édition, série Sciences Sup, 2010.

Eléments d'algorithmique de Berstel, Beauquier, Chrétienne.
MASSON, collection MIM.
http://www-igm.univ-mlv.fr/~berstel/Elements/Elements.pdf

155 exercices et problèmes corrigés d'algorithmique
Baynat, Chrétienne, Munier, Kedad-Sidhoum, Hanen, Picouleau.
DUNOD, Sciences Sup, 2010 (3e édition).

Algorithms de Dasgupta, Papadimitriou, Vaziran.
McGraw Hill Higher Education, 2006.

Algorithm design de Kleinberg et Tardos.
Pearson, 2005.

Algorithms de Erickson.
https://jeffe.cs.illinois.edu/teaching/algorithms/

Contenu de l’UE

Rappels : Preuve et complexité d’algorithmes

Partie 1 : Programmation récursive
Diviser pour régner
Algorithmes d’exploration d’arbres d’énumération

Partie 2 : Algorithmes de parcours et applications
Rappels sur les graphes, parcours en profondeur
Algorithmes de Dijkstra et de Prim

Partie 3 : Conception et analyse d’algorithmes gloutons.
Algorithmes de Kruskal et de Huffman.

Partie 4 : Programmation dynamique
Algorithmes de Bellman et Bellman-Ford.

Calcul du *n*ième terme de la suite de Fibonacci

La suite de Fibonacci est définie ainsi :

$F_1 = 1$

$F_2 = 1$

$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$

Ce sont les nombres de Fibonacci :

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, …

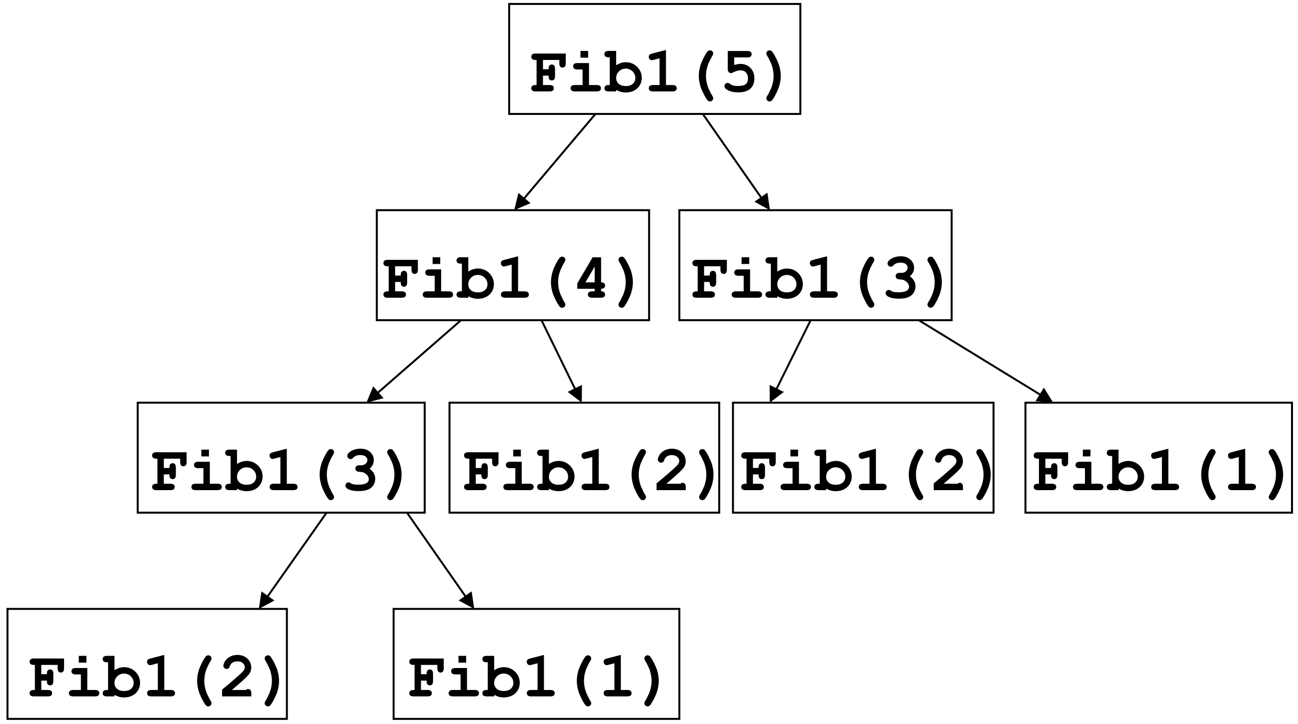
Leonardo da Pisa, dit Fibonacci

Ils croissent *très* vite: $F_{30} > 10^6$!

En fait, $F_n \approx 2^{0.694n}$, croissance exponentielle.

Un premier algorithme (récursif)

```
fonction Fib1(n)
si n = 1 retourner 1
si n = 2 retourner 1
retourner Fib1(n-1) + Fib1(n-2)
```



Analyse d'un algorithme

Analyser un algorithme, c'est répondre aux trois questions suivantes :

- Terminaison : Est-ce que l'algorithme se termine ?
- Validité : Est-ce que l'algorithme retourne le résultat attendu ?
- Complexité : Quelle est le nombre d'opérations élémentaires que réalise l'algorithme (si la terminaison est assurée) ?

Analyse d'un algorithme récursif

- Terminaison : preuve par récurrence
- Validité : preuve par récurrence
- Complexité : formule de récurrence

Preuve par récurrence : rappels

On souhaite montrer la propriété $P(n)$ pour tout $n \geq n_0$

- Cas de base : la propriété $P(n_0)$ est vraie.
- Etape d'induction :
  - Récurrence faible : on suppose $P(n-1)$: la propriété est vraie au rang n-1
  - Récurrence forte : on suppose $P(k)$ pour tous les rangs $n_0 \leq k \leq n-1$

  et on montre $P(n)$: la propriété est vraie au rang n
- Conclusion : pour tout $n \geq n_0$ $P(n)$.

Terminaison et validité de Fib1

```
fonction Fib1(n)
si n = 1 retourner 1
si n = 2 retourner 1
retourner Fib1(n-1) + Fib1(n-2)
```

Par **récurrence** : HR_n « Fib1(n) se termine et retourne F_n. »

Cas de base. OK pour *n=1* et *n=2* car Fib1(1) et Fib1(2) se terminent et retournent bien $1=F_1=F_2$.

Etape inductive. Montrons que :

Pour tout $n \geq 3$, HR_{n-2} et HR_{n-1} vérifiées => HR_n vérifiée.

Fib1(n-1) se termine et retourne F_{n-1} d'après HR_{n-1}.

Fib1(n-2) se termine et retourne F_{n-2} d'après HR_{n-2}.

Donc Fib1(n) se termine et retourne $F_{n-1}+F_{n-2}=F_n$.

Conclusion. Pour tout $n \geq 1$, Fib1(n) se termine et retourne F_n.

Complexité de Fib1

```
fonction Fib1(n)
si n = 1 retourner 1
si n = 2 retourner 1
retourner Fib1(n-1) + Fib1(n-2)
```

Soit $T(n)$ = nombre d'additions requises pour calculer *Fib1(n).*

Alors:

$T(1)=0,\ T(2)=0$

$T(n) = T(n-1) + T(n-2) + 1$

n	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
F_n	1	1	2	3	5	8	13
T(n)	0	0	1	2	4	7	12

D'où $T(n) = F_n - 1 \approx 2^{0.694n}$!

Complexité exponentielle.

Complexité exponentielle

$2^{0.694n}$ additions requises pour calculer F_n.

C'est-à-dire que le calcul de F_{200} requiert de l'ordre de 2^{140} additions.

Combien de temps cela prend sur une machine rapide ?

Frontier (Oak Ridge National Laboratory, Etats-Unis)

Ce supercalculateur américain occupe la première place du classement des supercalculateurs (juin 2023), avec une puissance de 1194 pétaflops, soit 1194×10^{15} opérations/sec.

Complexité exponentielle

$1102 \times 10^{15} \approx 1102 \times 2^{40} \approx 2^{50}$ opérations/sec.

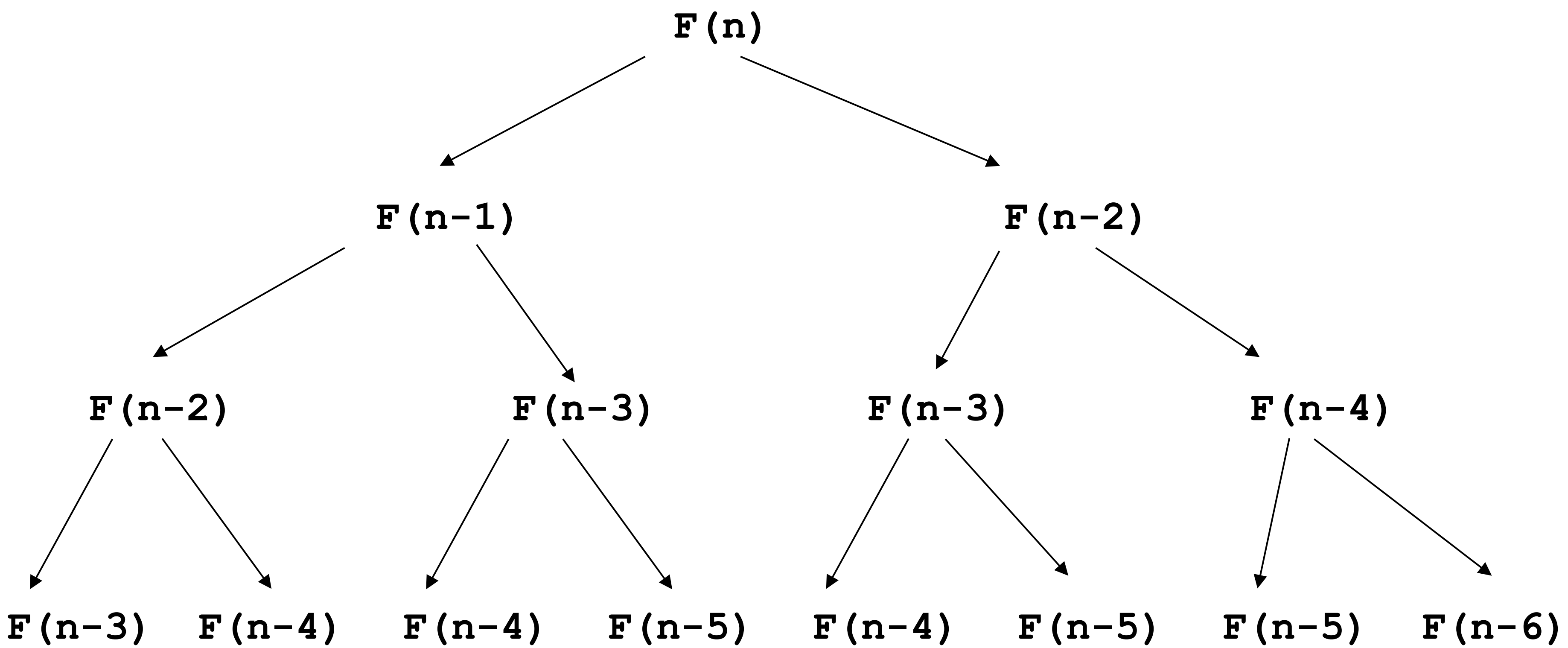
Calcul de F_{200} requiert $\approx 2^{140}$ opérations

$\rightarrow$ 2^{90} secondes pour calculer F_{200} avec Frontier

Temps en secondes	Interprétation
2^{10}	17 minutes
2^{20}	12 jours
2^{30}	32 ans
2^{40}	33000 ans

Pourquoi **`Fib1`** est-il si mauvais ?

Observons l'arbre de récursion...



Les mêmes sous-problèmes sont résolus un grand nombre de fois !

Un autre algorithme (itératif)

Il y a *n* sous-problèmes F_1, F_2, …, F_n. Stocker les résultats intermédiaires plutôt que de relancer les calculs.

```
fonction Fib2(n)
 Créer un tableau fib[1..n]
 fib[1] = 1
 fib[2] = 1
 pour i = 3 à n:
     fib[i] = fib[i-1] + fib[i-2]
 retourner fib[n]
```

Les trois question usuelles :

1. Terminaison ?
2. Validité ?
3. Complexité ?

Preuve d'algorithme itératif

1) On montre que l'algorithme termine.
2) Pour montrer la validité de l'algorithme, on utilise un invariant de boucle P.

C'est une propriété mathématique exprimée sur les variables d'un algorithme itératif, qui est :

- Vérifiée à une ligne précise du code, pour toutes les itérations.

P(k) : propriété vraie à la k-ième itération de la boucle. Ceci peut être montré par récurrence : on montre P(1) (propriété vraie au début de la boucle), puis on montre P(k-1) $\Rightarrow$ P(k).

- Pertinente pour démontrer la validité de l'algorithme.

Si n est la dernière itération, P(n) doit aider à prouver que l'algorithme est valide.

3) Complexité : facile.

Un autre algorithme (itératif)

```
fonction Fib2(n)
 Créer un tableau fib[1..n]
 fib[1] = 1
 fib[2] = 1
 pour i = 3 à n:
     fib[i] = fib[i-1] + fib[i-2]
 retourner fib[n]
```

1. Terminaison ?
2. Validité ?

   Invariant de boucle pour **`Fib2`** :

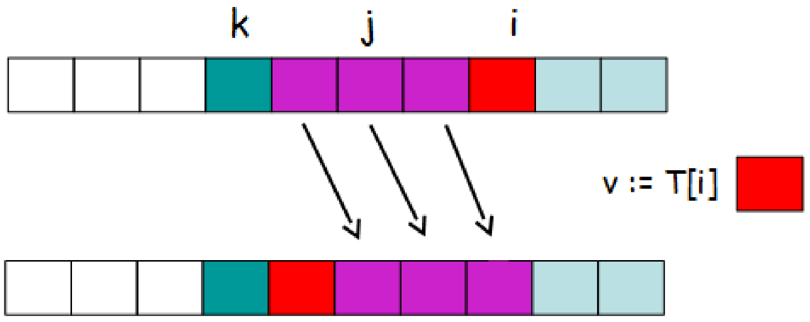
   « **`fib[i]`** contient F_i à l'issue de l'itération i. »

Deuxième exemple : tri par insertion

Problème : Trier « sur place » le tableau de n entiers T[i..j]

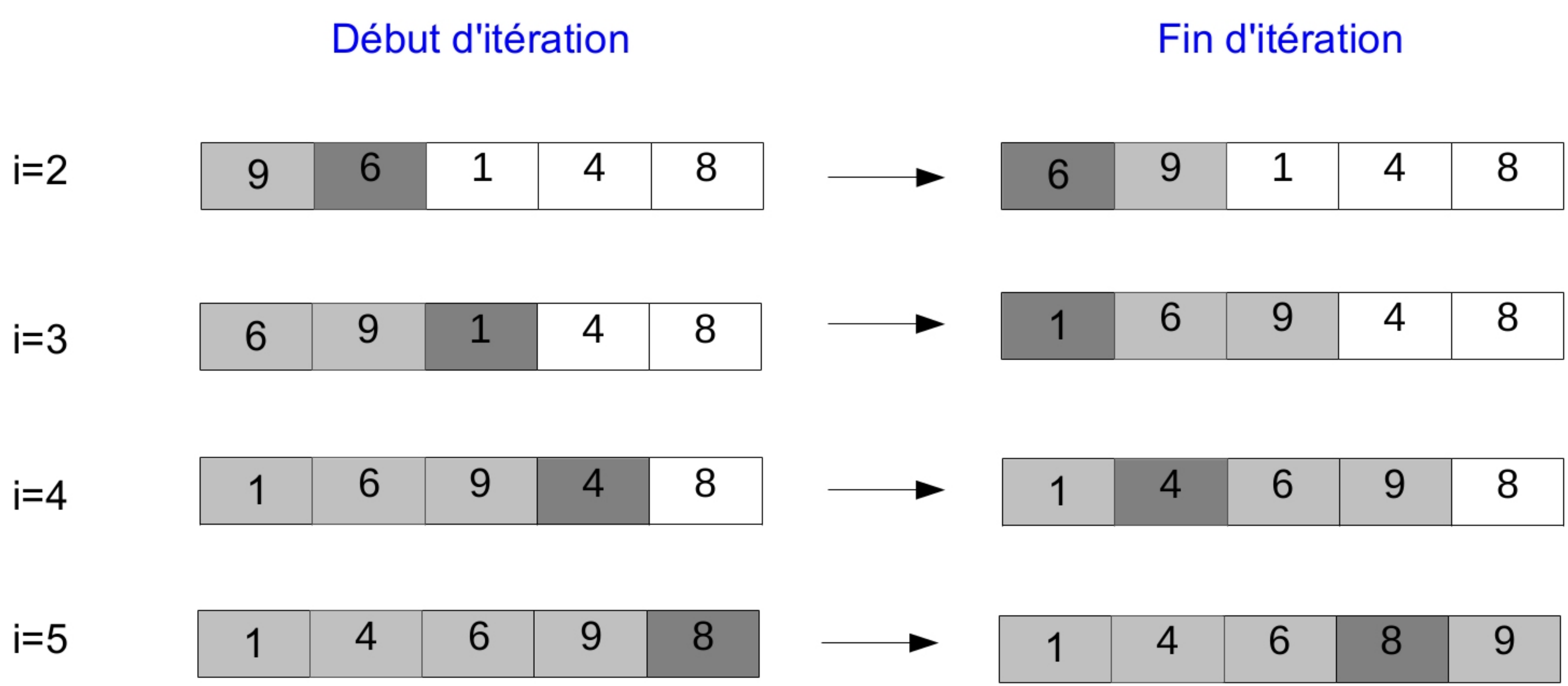
Itération i : passage du sous-tableau T[1..i-1] trié au sous-tableau T[1..i] trié :

```
TRI_INS(T,n);
Pour i de 2 à n
  v := T[i];
  j := i-1;
  Tantque (j>0 et T[j]>v)
       T[j+1]:=T[j];
       j:=j-1;
   Fintantque;
   T[j+1]:=v;
Finpour.
```



Exemple : tri par insertion

```
TRI_INS(T,n);
Pour i de 2 à n
   v := T[i];   j := i-1;
   Tantque (j>0 et T[j]>v)
          T[j+1]:=T[j];     j:=j-1;
   T[j+1]:=v;
```



1) Terminaison :

Pour chaque valeur de i de 2 à n,
la boucle Tantque est exécutée
N_i fois (avec $N_i \leq i-1$).

```
TRI_INS(T,n);
Pour i de 2 à n
  v := T[i];
  j := i-1;
  Tantque (j>0 et T[j]>v)
       T[j+1]:=T[j];
       j:=j-1;
   Fintantque;
   T[j+1]:=v;
Finpour.
```

Le nombre d'opérations exécutées dans la boucle Tantque (corps et tests) est majoré par une constante C.

Le nombre d'opérations exécutées dans la boucle Pour (corps et tests) et en dehors de la boucle Tantque est majoré par une constante D.

Le nombre total d'opérations est donc fini : l'algorithme termine.

```
TRI_INS(T,n);
Pour i de 2 à n
  v := T[i];
  j := i-1;
  Tantque (j>0 et T[j]>v)
      T[j+1]:=T[j];
      j:=j-1;
   Fintantque;
   T[j+1]:=v;
Finpour.
```

2) Validité :

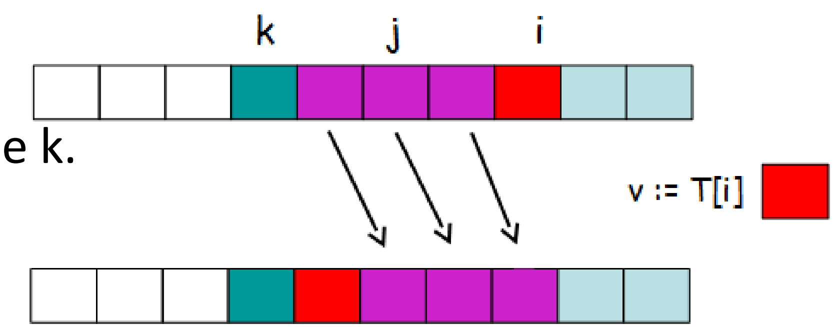
On prouve l'invariant de boucle P(i) :
« à la fin de la i-ème itération de la boucle Pour,
$T[1] \leq T[2] \leq \ldots \leq T[i]$ »

Preuve :

- Propriété vraie pour i=1 (P(1)).
- Supposons P(i-1). Soit k : valeur de j à la fin de l'itération i.

A la fin de l'itération i, nous avons :

- $T[1] \leq \ldots \leq T[k]$ d'après l'induction
- $T[k+2] \leq \ldots \leq T[i]$ d'après l'induction
- $T[k+1] < T[k+2]$ et $T[k] \leq T[k+1]$ d'après la définition de k.



Donc $T[1] \leq T[2] \leq \ldots \leq T[i]$: $P(i-1) \Rightarrow P(i)$.
- Et donc pour tout $i \in \{1,\ldots,n\}$, P(i) est vérifié.

Quand i=n, l'invariant de boucle prouve que le tableau est trié : l'algorithme est valide.

Retour à **`Fib2`** : complexité ?

Le contenu de la boucle consiste en une addition, et la boucle est itérée *n* − *2* fois.

→ le nombre d'additions réalisées par **`Fib2`** est linéaire en *n*.

```
fonction Fib2(n)
  Créer un tableau fib[1..n]
  fib[1] = 1
  fib[2] = 1
  pour i = 3 à n:
      fib[i] = fib[i-1] + fib[i-2]
  retourner fib[n]
```

Autrement dit, le nombre d'opérations est proportionnel à *n*.

La complexité <u>semble</u> être O(n).

Complexité d’un algorithme

La complexité (temporelle) d’un algorithme est une évaluation du nombre d’instructions élémentaires (réalisées **en temps constant**) en fonction de la **taille de codage** des paramètres d’entrée (souvent notée ***n***), et en utilisant les notations de Landau (ordres de grandeur).

Complexité pire cas : on évalue le nombre d’instructions dans le pire des cas (**majorant** sur le nombre d’instructions).

On identifie généralement la complexité d’un algorithme avec son pire cas.

Complexité de **`Fib2`** (révisée)

```
fonction Fib2(n)
  Créer un tableau fib[1..n]
  fib[1] = 1
  fib[2] = 1
  pour i = 3 à n:
       fib[i] = fib[i-1] + fib[i-2]
  retourner fib[n]
```

Attention : la complexité de **`Fib2`** est-elle vraiment linéaire ?

Il est raisonnable de traiter une addition comme une opération élémentaire (en temps constant) si des petits nombres sont sommés, par exemple, des entiers sur 32 bits.

Mais le *n*ième nombre de Fibonacci comporte environ *0.694n* bits, ce qui peut largement dépasser 32 quand *n* augmente.

On va compter le nombre d'additions de bits.

Addition

Additionner deux nombres de *n* bits de long

[22]		1	0	1	1	0
[13]			1	1	0	1
	-----	-----	-----	-----	-----	-----
[35]	1	0	0	0	1	1

Cela prend $O(n)$ opérations… et on ne peut espérer mieux. L'addition prend un temps *linéaire*.

Complexité de **`Fib2`** (révisée)

```
fonction Fib2(n)
  Créer un tableau fib[1..n]
  fib[1] = 1
  fib[2] = 1
  pour i = 3 à n:
      fib[i] = fib[i-1] + fib[i-2]
  retourner fib[n]
```

Chaque addition nécessite de l'ordre de *i* opérations élémentaires (**`fib[i]`** comporte de l'ordre de *i* bits). On le fait pour *i=3* à *n* :

$$\sum_{i=3}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2} - 3$$

De l'ordre de n^2 opérations élémentaires → $O(n^2)$

Cela <u>semble</u> être une complexité quadratique en *n*.

Taille d'une instance d'un problème

Plusieurs définitions de la taille d'une instance sont possibles dans la mesure où une même instance peut s’énoncer de différentes manières.

Exemple :
110 (base 2) et 20 (en base 3) sont deux représentations possibles de l’entier 6 (en base 10).

Les représentations raisonnables d’une instance conduisent à des tailles similaires.

Plutôt que de formaliser cette notion, nous la préciserons pour chaque problème traité.

Exemples :
Multiplication de deux entiers sur n bits → taille : n
Tri d'un tableau A[1...n] d’entiers de taille raisonnables → taille : n
etc.

Complexité de **`Fib2`** (révisée bis)

```
fonction Fib2(n)
  Créer un tableau fib[1..n]
  fib[1] = 1
  fib[2] = 1
  pour i = 3 à n:
      fib[i] = fib[i-1] + fib[i-2]
  retourner fib[n]
```

La complexité de **`Fib2`** est $O(n^2)$ mais la donnée d'entrée est n, qui requiert de l'ordre de $log_2 n$ bits pour être stockée en mémoire.

On a $n=2^{log2(n)}$ d'où $n^2=4^{log2(n)}$.

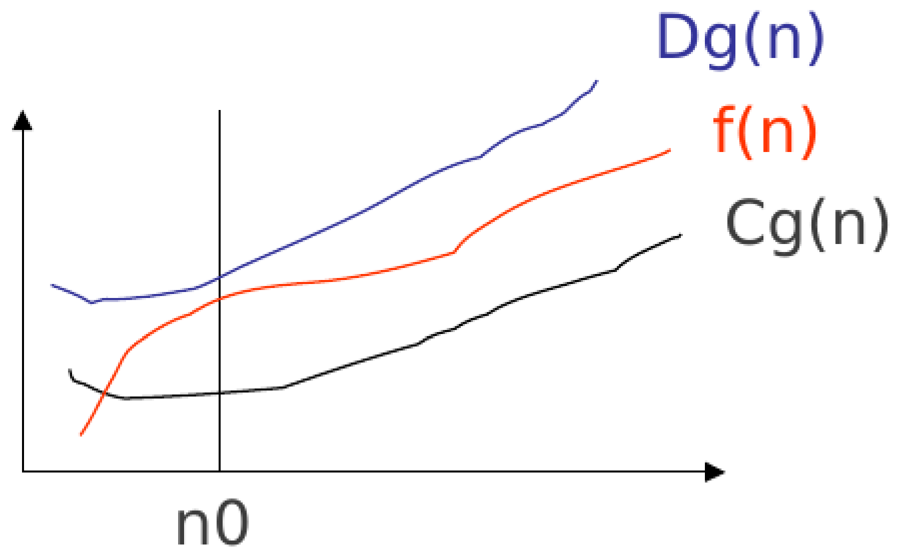
La complexité en fonction de la taille $log_2 n$ de la donnée d'entrée s'écrit donc $\boldsymbol{O(4^{log2(n)})}$, autrement dit elle est exponentielle en la taille de la donnée d'entrée.

Toutefois, tout algorithme calculant F_n aura une complexité exponentielle car F_n comporte de l'ordre de $0.694n$ bits, une sortie de taille exponentielle par rapport à la taille $log_2 n$ de l'entrée.

Rappel sur les notations de Landau

Soient f et g deux fonctions de N dans N.

$f \in O(g)$
s'il existe une constante D positive et un entier n_0 tels que:
$n > n_0$, $f(n) \leq Dg(n)$.



$f \in \Omega(g)$
s'il existe une constante C positive et un entier n_0 tels que:
$n > n_0$, $Cg(n) \leq f(n)$.

$f = \Theta(g)$

$f \in \Theta(g)$
s'il existe 2 constantes C et D positives et un entier n_0 tels que:
$n > n_0$, $Cg(n) \leq f(n) \leq Dg(n)$.

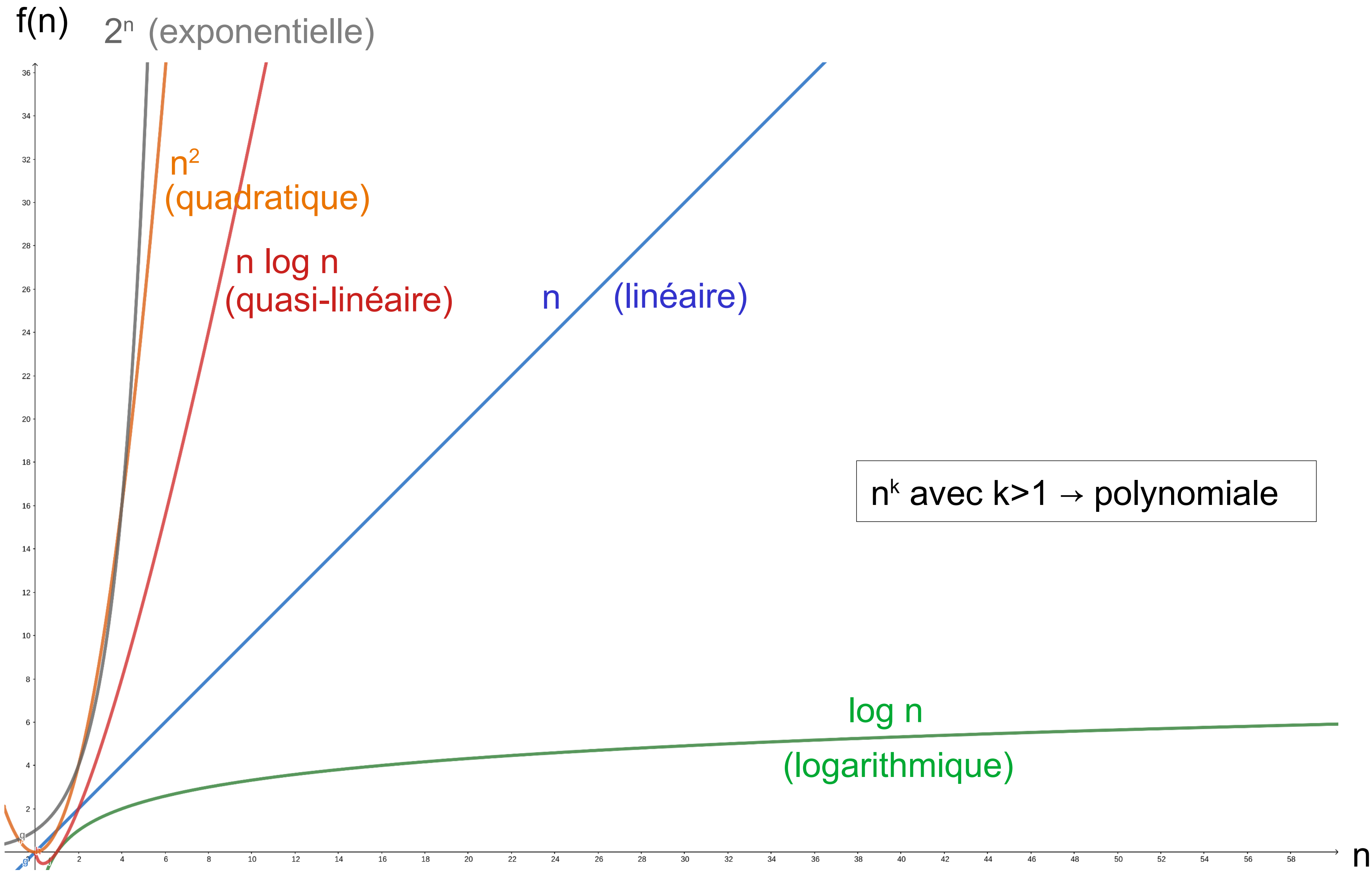
Exemples : $100n^2 + 4n\log_2(n) \in O(n^2)$; $2n + n^{10} \in O(2^n)$;
Il n'existe aucun entier K tel que $2^n \in O(n^K)$

Quelques règles utiles

Les quelques règles suivantes permettent de simplifier les complexités en omettant des termes dominés :

- Les coefficients peuvent être omis : $14n^2$ devient n^2
- n^a domine n^b si $a > b$: par exemple, n^2 domine n
- Une exponentielle domine un polynôme : 3^n domine n^5 (cela domine également 2^n)
- De même, un polynôme domine un logarithme : n domine $(log\ n)^3$. Cela signifie également, par exemple, que n^2 domine $n\ log\ n$.

Courbes de complexités fréquentes



Attention !

LU2IN003 (Algorithmique I)
$\Omega(n)$: minorant du nombre d'opérations sur toutes les instances
$O(n)$: majorant du nombre d'opérations sur toutes les instances
$\Theta(n)$: si le minorant et le majorant du nombre d'opérations sur toutes les instances coïncident.

LU3IN003 (Algorithmique II)
$\Omega(n)$: minorant du nombre d'opérations sur les pires instances
$O(n)$: majorant du nombre d'opérations sur les pires instances
$\Theta(n)$: si le minorant et le majorant du nombre d'opérations sur les pires instances coïncident.

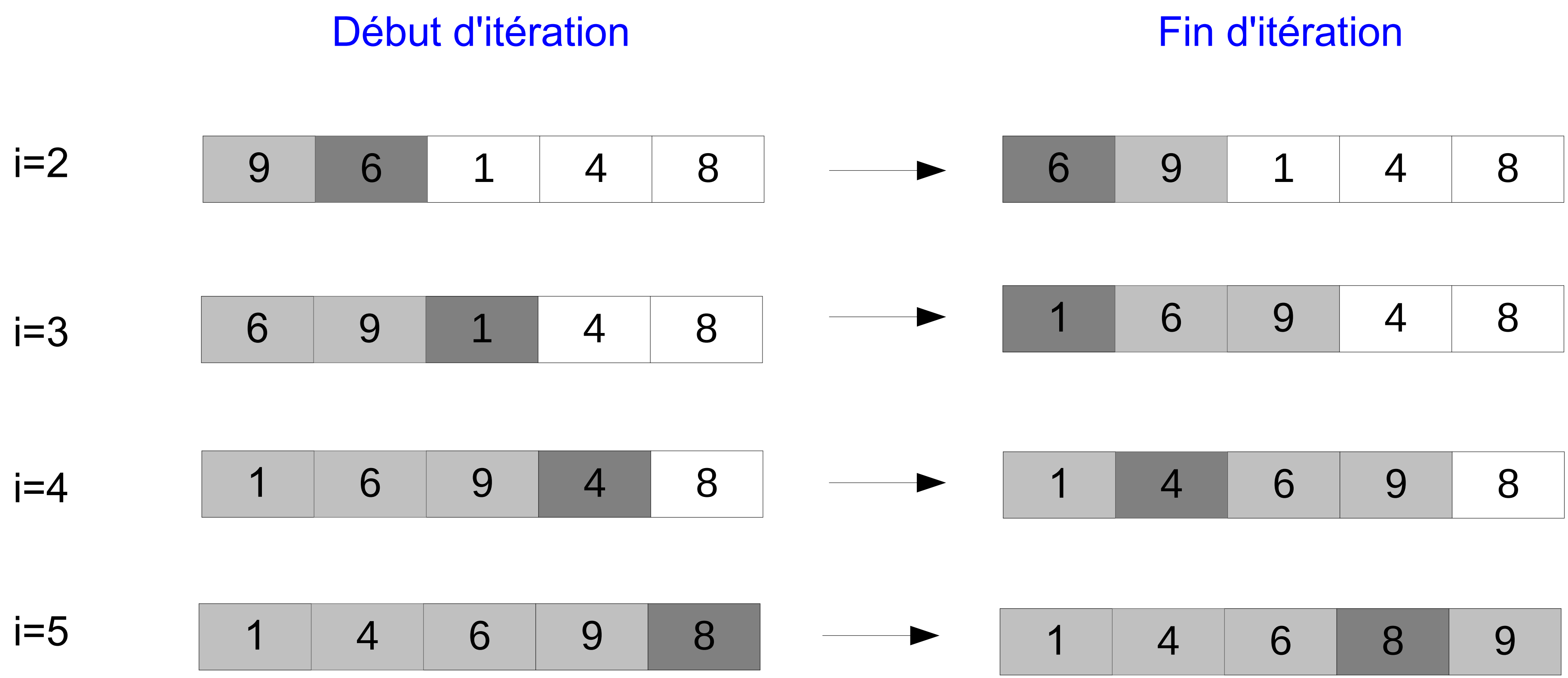
Illustrons cette différence en analysant le tri par insertion.

Exemple : complexité de **`TRI_INS`**

Algorithme de tri d'un tableau T[1...n].
Supposons que seules les comparaisons de 2 entiers du tableau soient comptées.

Procédure **`TRI_INS`**(T : tableau d'entiers, n : entier);
comparaisons
Pour i de 2 à n faire ----------------------------- 0
z:=T[i]; k:=i-1; ----------------------------- 0
Tantque k>0 et T[k]>z faire -------------------- $N_2+N_3+\ldots+N_n$
T[k+1]:=T[k]; k:=k-1 --------------------- 0
Fintantque;
T[k+1]:=z; -- 0
Finpour.

Exemple : un déroulement de `TRI_INS`



Déterminer la complexité « en Θ » de `TRI_INS`

Comme $N_i \leq i-1$, on a: **TRI_INS**$(n) \leq 1/2\ n(n-1)$.
Donc **TRI_INS**$(n) \in O(n^2)$.

Si les éléments du tableau sont initialement rangés dans l'ordre décroissant strict :
on a $N_i = i-1$ pour tout i de 2 à n.
Or pour un énoncé quelconque de taille n, on a :
$N_i \leq i-1$ pour i de 2 à n,
Il en résulte que : **TRI_INS**$(n) = 1/2\ n(n-1)$.
Donc **TRI_INS**$(n) \in \Omega(n^2)$.

L'algorithme **TRI_INS** est donc de complexité pire cas $\Theta(n^2)$.

Retour sur la remarque précédente

LU2IN003 (Algorithmique I)
$\Omega(n)$: minorant du nombre d'opérations sur toutes les instances.
$O(n)$: majorant du nombre d'opérations sur toutes les instances.
$\Theta(n)$: si le minorant et le majorant du nombre d'opérations sur toutes les instances coïncident.

Le tri par insertion est en $\Omega(n)$ (si le tableau est trié en ordre croissant en entrée) et en $O(n^2)$ (en majorant le nombre d'opérations). Le minorant et le majorant ne coïncident pas et le tri par insertion n'est donc pas en $\Theta(n)$ car il ne réalise pas le même nombre de comparaisons sur toutes les instances.

LU3IN003 (Algorithmique II)
$\Omega(n)$: minorant du nombre d'opérations sur les pires instances.
$O(n)$: majorant du nombre d'opérations sur les pires instances.
$\Theta(n)$: si le minorant et le majorant du nombre d'opérations sur les pires instances coïncident.

Le tri par insertion est en $\Omega(n^2)$ (si le tableau est trié en ordre décroissant en entrée) et en $O(n^2)$ (en majorant le nombre d'opérations). Le minorant et le majorant coïncident et le tri par insertion est donc en $\Theta(n^2)$, c'est à dire qu'il réalise exactement de l'ordre de n^2 opérations sur les pires instances.

Quiz : Notations de Landau

Parmi les affirmations suivantes, laquelle est exacte ?

A) Un algorithme en $\Theta(n^2)$ est plus lent sur **<u>toutes</u>** les données qu'un algorithme en $\Theta(n)$.
B) Un algorithme en $\Theta(n^2)$ est plus lent sur **<u>certaines</u>** données qu'un algorithme en $\Theta(n)$.
C) Un algorithme en $O(n^2)$ est plus lent sur **<u>toutes</u>** les données qu'un algorithme en $O(n)$.
D) Un algorithme en $O(n^2)$ est plus lent sur **<u>certaines</u>** données qu'un algorithme en $O(n)$.