Indications pour la feuille de TD 5

Exercice 1. Calculs.

(a) Calculer $\displaystyle\int_1^2 x^a dx$ pour tout $a \in \mathbb{R}$.

(b) Calculer $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

(c) Calculer une primitive de ln sur $\mathbb{R}_+^*$.

(d) Calculer les primitives de $x \mapsto 1/x$ sur $\mathbb{R}^*$.

(e) Calculer $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan(x)dx$.

(f) Calculer $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\sin(x)}\sin(x)\cos(x)dx$.

(g) Calculer $\displaystyle\int_0^{\pi} \sin(x)^3 dx$.

Indications : (a) Attention au cas particulier $a = -1$. (c) Intégrer par parties $\displaystyle\int_1^x 1 \times \ln t\, dt$. (d) Attention, $\mathbb{R}^*$ n'est pas un intervalle. (e) $\tan = \sin / \cos$. (f) Changement de variable, IPP. (g) Développer $(\sin x)^3 = \left(\dfrac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right)^3$ comme somme de termes du type $\sin(nx)$.

Exercice 2. On veut calculer $I = \displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{dt}{2+\sin t}$.

(a) Pourquoi I est-elle bien définie ?

(b) Montrer que $I = \displaystyle\lim_{T\to\pi} \int_{-T}^{T} \frac{dt}{2+\sin t}$.

(c) Soit $t \in]-\pi, \pi[$. Justifier la formule $\sin(t) = \dfrac{2\tan(t/2)}{1+\tan^2(t/2)}$.

(d) En déduire un calcul de I.

Indications : (a) Quel type de fonction sait-on intégrer ? (b) Commencer par utiliser la périodicité de l'intégrande. Introduire une primitive F de cet intégrande pour bien comprendre l'écriture comme une limite. (c) Trigo... (d) Faire le changement de variable $x = \tan(t/2)$ en utilisant (c). On trouve alors un intégrande qui ressemble à la dérivée d'arctangente : faire un petit changement de variable (affine) pour que l'intégrande devienne exactement la dérivée d'arctangente.

Exercice 3. Soit $f : [a,b] \to [c,d]$ une bijection croissante de classe C^1.

(a) Représenter graphiquement $\displaystyle\int_c^d f^{-1}(t)dt$.

(b) En déduire, graphiquement, la formule $\displaystyle\int_a^b f(t)dt + \int_c^d f^{-1}(t)dt = bd - ac$.

(c) Démontrer cette formule par un calcul. *On pourra commencer par un changement de variable sur l'intégrale du (a).*

Indications : (a) Le graphe de f^{-1} s'obtient à partir de celui de f en faisant une réflexion par rapport à la diagonale. Si on ne trace que le graphe de f, comment peut-on donc dessiner l'aire sous le graphe de f^{-1} ? (b) Représenter les deux intégrales sur le même dessin. (c) Commencer par faire le changement de variable $x = f(t)$ dans $\displaystyle\int_c^d f^{-1}(t)dt$.

Exercice 4. Soient $m, n \in \mathbb{Z}$ tels que $m \leq n$. Calculer $\displaystyle\int_m^n E(t)dt$, où E est la fonction calculant la partie entière d'un réel.

Indications : Faire un dessin. Utiliser la relation de Chasles.

Exercice 5. Soit f une fonction continue et positive sur un segment $[a, b]$, avec $a < b$. On s'intéresse à la suite définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad u_n = \left(\int_a^b f(x)^n dx \right)^{\frac{1}{n}}.$$

(a) On note $M = \sup\limits_{[a,b]} f$. Montrer que $u_n \leq M(b-a)^{\frac{1}{n}}$ pour tout indice n.

(b) Soit $\epsilon > 0$. Prouver qu'il existe $c < d$ tels que $[c, d] \subset [a, b]$ et

$$\forall x \in [c, d], \quad f(x) \geq M - \epsilon.$$

(c) Prouver que (u_n) converge vers M.

Indications : (a) Majorer f dans l'intégrale. (b) Commencer par vérifier que M est atteint par f en un point. Faire un dessin. (c) L'intégrande étant positif, l'intégrale sur $[a, b]$ est plus grande que l'intégrale sur $[c, d]$. Avec (b), cela donne une minoration de u_n. Pour étudier le comportement limite, utiliser cette minoration et la majoration du (a).

Exercice 6. (Constante d'Euler)

(a) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Justifier l'encadrement

$$\frac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{dt}{t} \leq \frac{1}{k}.$$

(b) Prouver l'existence d'une constante $\gamma \geq 0$ telle que

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln(n) + \gamma + o(1) \qquad \text{quand } n \to +\infty.$$

Indication : montrer que la suite $\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n)\right)$ *est décroissante minorée.*

Indications : (a) Encadrer l'intégrande en utilisant sa décroissance. (b) Faire ce que suggère l'indication en utilisant deux fois (a).

Exercice 7. Soit f une fonction continue sur un intervalle I autour de 0. On suppose que f a un développement limité du type

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + o(x^n)$$

en 0. On notera $p(X) = a_0 + a_1 X + \cdots + a_n X^n$.

(a) Soit $\epsilon > 0$. Vérifier qu'il existe $\eta > 0$ tel que pour $|x| < \eta$

$$|f(x) - p(x)| \leq \epsilon |x|^n.$$

(b) Soit F la primitive de f sur I qui s'annule en 0. Démontrer que F a un développement limité du type

$$F(x) = a_0 x + a_1 \frac{x^2}{2} + \cdots + a_n \frac{x^{n+1}}{n+1} + o(x^{n+1})$$

quand x tend vers 0.

(c) Application : quel est le développement limité de arctan en 0 à l'ordre 7 ?

Indications : (a) Définition de $o(x^n)$. (b) Utiliser (a) pour majorer $\left|\int_0^x (f(t) - p(t))dt\right|$.

Exercice 8. Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Prouver que f est intégrable si et seulement si, pour tout $\epsilon > 0$, il existe des fonctions en escalier ψ et φ telles que

$$\psi \leq f \leq \varphi \quad \text{et} \quad \int_a^b (\varphi - \psi) \leq \epsilon.$$

Indications : Introduire les intégrales inférieure I_- et supérieure I_+ de f, cf. sections 4.3 et 4.4 du cours (pages 57-59). Pour le sens $\Leftarrow$, observer qu'on a toujours $I_- \leq I_+$ (cf. cours) et que l'hypothèse permet de majorer $I_+ - I_-$, puis d'en déduire que $I_- = I_+$. Pour le sens $\Rightarrow$, utiliser la définition des bornes supérieure et inférieure (1.2 page 19) pour obtenir des fonction φ et ψ convenables.

Exercice 9. Soit f une fonction intégrable et positive sur un segment $[a, b]$ telle que $\int_a^b f = 0$. On se donne $\alpha < \beta$ tels que $[\alpha, \beta] \subset [a, b]$.

(a) Vérifier que $\int_\alpha^\beta f = 0$.

(b) Soit $\epsilon > 0$. Montrer qu'il existe une fonction ϕ en escalier sur $[\alpha, \beta]$ telle que $f \leq \phi$ et $\displaystyle\int_\alpha^\beta \phi \leq (\beta - \alpha)\epsilon$.

(c) En déduire qu'on peut trouver un segment $[\alpha', \beta'] \subset [\alpha, \beta]$ tel que $\alpha' < \beta'$ et pour tout $x \in [\alpha', \beta'], \quad f(x) \leq \epsilon$.

(d) Démontrer qu'il existe $x \in [\alpha, \beta]$ tel que $f(x) = 0$.

(e) Donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction intégrable et positive soit d'intégrale nulle sur un segment $[a, b]$.

Indications : (a) Utiliser la relation de Chasles pour voir que $\displaystyle\int_\alpha^\beta f \leq 0$. (b) Que vaut l'intégrale supérieure de f ? (c) Utiliser la fonction en escalier ϕ trouvée en b. Vérifier qu'on a $\phi \leq \epsilon$ sur l'un des intervalles où ϕ est constante. (d) Utiliser c à répétition pour construire des segments $[\alpha_n, \beta_n]$ inclus les uns dans les autres et où f est majorée par 2^{-n}. Prouver que (α_n) converge vers un réel x qui qui convient. (e) La condition est que la fonction s'annule au moins une fois dans chaque sous-segment de longueur non nulle de $[a, b]$.

Exercice 10. Montrer que les suites définies ci-dessous convergent et calculer leur limite.

$$u_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k+n}, \qquad v_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{n}{k^2 + 3n^2}, \qquad w_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\sin\left(\frac{k\pi}{3n}\right)\cos\left(\frac{k\pi}{3n}\right)}{n}.$$

Indications : Ce sont des sommes de Riemann, cf. page 67 du poly (notamment l'exemple 24). Ecrire ces sommes sous la forme $\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)$ et utiliser le théorème du cours pour se ramener au calcul d'une intégrale.

Exercice 11. (méthode des trapèzes) Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2. On considère la subdivision régulière $\{x_0 < ... < x_n\}$, qui partage le segment $[a, b]$ en n intervalles de longueur $(b - a)/n$.

(a) Fixons un indice i entre 0 et $n - 1$. On note ϕ_i la fonction affine qui coïncide avec f en x_i et en x_{i+1}. Faire un dessin et montrer que

$$\forall x \in [x_i, x_{i+1}], \quad \phi_i(x) = \alpha_i(x - x_i) + \beta_i,$$

avec $\alpha_i = \dfrac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i}$ et $\beta_i = f(x_i)$.

(b) On considère la fonction $\phi : [a, b] \to \mathbb{R}$ telle que $\phi = \phi_i$ sur chaque segment $[x_i, x_{i+1}]$. Montrer que ϕ est bien définie et continue. Calculer son intégrale.

(c) Soit $x \in [x_i, x_{i+1}]$. Prouver qu'il existe $\mu, \nu \in [x_i, x_{i+1}]$ tels que

$$f(x) - \phi_i(x) = (f'(\mu) - f'(\nu))(x - x_i).$$

(d) En déduire qu'il existe une constante C dépendant de a, b et f telle que

$$\left| \int_a^b f - \int_a^b \phi \right| \leq \frac{C}{n^2}.$$

Indications : (a) Autrement dit, $y = \phi_i(x)$ est l'équation de la droite passant par $(x_i, (f(x_i))$ et $(x_{i+1}, (f(x_{i+1}))$. (b) Vérifier que les fonctions ϕ_i « se recollent bien ». Utiliser Chasles pour le calcul de l'intégrale. (c) Accroissements finis. (d) Utiliser c et l'inégalité des accroissements finis pour majorer $|f - \phi|$. On pourra s'inspirer de la preuve du théorème 7 page 67 dans le poly.

Exercice 12. En utilisant une formule de Taylor, démontrer la formule

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad e^x = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}.$$

Indication : $x^n = o(n!)$ quand $n \to +\infty$, cf. cours sur les suites ou TD 2.

Exercice 13. Démontrer l'inégalité : $\qquad \forall x \in \mathbb{R}_+, \quad \left| \ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2} \right| \leq \frac{x^3}{3}.$
En déduire une valeur approchée de $\ln(1,003)$ à 10^{-8} près.

Indication : Taylor-Lagrange.