Feuille 3
Inversion et déterminants

Les feuilles d'exercices sont découpées en trois types d'exercice :
- Les *indispensables* : à savoir faire en autonomie.
- Les *exercices d'application* : pour mieux maîtriser et comprendre le cours.
- *Pour aller plus loin* : exercices présentant des développements mathématiques ou des études de modélisations de phénomènes issues d'autres disciplines.

Indispensables

Exercice 1. Soit $A = \begin{pmatrix} -3 & 5 & 6 \\ -1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

1. En utilisant la méthode du pivot de Gauss, effectuer des opérations sur les lignes jusqu'à obtenir la matrice identité.
2. Réaliser les mêmes opérations que précédemment sur la matrice identité. Noter A' la matrice obtenue.
3. Quel est le lien entre A et A' ? Justifier que la méthode permet de trouver l'inverse d'une matrice (si elle existe).

Exercice 2. (déterminant 2x2) Soit $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Pour $(e_1, e_2) \in \mathbb{R}^2$, on définit $(\mathcal{S}_{(e_1,e_2)})$: $\begin{cases} ax + by = e_1 \\ cx + dy = e_2 \end{cases}$

1. À quelle condition $(\mathcal{S}_{(e_1,e_2)})$ admet des solutions quel que soit $(e_1, e_2) \in \mathbb{R}^2$?
2. Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. À quelle condition les lignes de A ne sont-elles pas colinéaires ? Montrer que sous cette condition, A est inversible et trouver son inverse.

Exercice 3. Soient $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer $\det B$, $\det C$, $\det(BC)$ et $\det(B+C)$. Que remarquez-vous ? Cette formule est-elle générale ?

Exercice 4 (Systèmes linéaires et déterminant)**.** On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $\det(A)$ et rang A. En déduire que le système $AX = B$ a une unique solution, quel que soit $B \in \mathbb{R}^3$.
2. Mêmes questions avec la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.
3. En utilisant la même méthode, déterminer l'ensemble des $x \in \mathbb{R}$ tel que $A_x X = B$ a une solution pour tout $B \in \mathbb{R}^3$, où $A_x = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 16 \\ 1 & x & x^2 \\ 1 & 5 & 25 \end{pmatrix}$

Exercice 5. Calculer le déterminant des matrices suivantes, puis en effectuant des opérations sur les lignes du couple $(A \mid I)$, calculer leur inverse. Que se passe-t-il, si avec cette méthode, on essaie de calculer l'inverse d'une matrice non inversible ?

$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 6 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$; $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 4 & 4 \end{pmatrix}$; $A_3 = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

Exercice 6. On se place dans $M_n(\mathbb{R})$ et l'on considère la matrice suivante, disons pour $n = 4$:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. En calculant dét(A), déterminer si A est inversible et si oui, calculer son inverse.
2. Écrire la matrice $A + I_4$ et calculer son carré.
3. $(*)$ Sachant que $(A+I_4)(A+I_4) = A^2 + 2A + I_4$, déduire de la question précédente une égalité $A(A + aI_4) = bI_4$ pour des réels a, b que l'on déterminera. Comparer avec le résultat de la question 1.

Applications

Exercice 7 (Aires et volumes)**.** 1. Calculer l'aire du parallélogramme construit sur les vecteurs : $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$.

2. Calculer le volume du parallélépipède construit sur les vecteurs $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
3. Montrer que le volume d'un parallélépipède dont les sommets sont des points de $\mathbb{R}^3$ à coefficients entiers est un nombre entier.

Exercice 8. On considère le parallèlogramme défini par les vecteurs suivants ($t \in [0, 1]$) :

$$U = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad V_t = \begin{pmatrix} t \\ -t^2 \end{pmatrix}$$

1. Calculer l'aire du parallèlogramme.
2. Pour quelle valeur de t obtient-on l'aire maximale ? Que vaut-elle ?

Exercice 9. 1. En s'inspirant de l'exercice 4 du TD1, donner l'expression générale de la matrice 3×3 de la rotation autour de l'axe Oz et d'angle θ dans $\mathbb{R}^3$.

2. Calculer le déterminant de cette matrice et l'inverse de cette matrice.
3. Donner l'expression générale de la matrice 3×3 correspondant à la symétrie par rapport au plan xOy.
4. Calculer le déterminant de cette matrice et l'inverse de cette matrice.
5. Donner l'expression générale de la matrice 3×3 correspondant à la rotation autour de l'axe Oz et d'angle $\theta = \pi$ suivie par la symétrie par rapport au plan xOy. De quelle transformation s'agit-il ?
6. Calculer le déterminant de cette matrice et l'inverse.

Pour aller plus loin

Exercice 10. Soit

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_p \end{pmatrix}$$

où a_1, a_2, a_3, $\cdots$, a_p sont p réels. A quelle condition A est-elle inversible ?

Exercice 11. Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$.

1. Écrire une relation linéaire entre A^2, A et I_2 faisant intervenir les coefficients de la matrice A.
2. En déduire une condition nécessaire et suffisante (sans utiliser le déterminant) pour que A soit inversible. Donner alors l'expression de A^{-1}.
3. On suppose que la somme des éléments diagonaux de A est non nulle. Montrer que pour tout $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$, $A^2B = BA^2 \Longrightarrow AB = BA$.

Exercice 12 (Déterminant de Vandermonde)**.** Soient $\mathbb{K}$ un corps et $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{K}$, on considère le déterminant :

$$V(a_1, \ldots, a_n) = \text{dét}\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{pmatrix}.$$

Le but de l'exercice est de démontrer la formule : $\boxed{V(a_1, \ldots, a_n) = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (a_j - a_i).}$

1. Expliquer pourquoi la formule est vraie si deux des a_i sont égaux.
2. Vérifier le résultat pour $n = 2$ et $n = 3$.
3. En réalisant des opérations bien choisies sur les lignes, puis en développant par rapport à la première colonne, montrer que

$$(\dagger) \qquad V(a_1, \ldots, a_n) = V(a_2, \ldots, a_n) \prod_{i=2}^{n} (a_i - a_1).$$

4. Conclure alors par récurrence.

Exercice 13. Soient $x_0, x_1, \cdots, x_p \in \mathbb{R}$. À quelle condition sur $x_0, x_1, ..., x_p$ telle que pour tout $y_0, y_1, \cdots, y_p \in \mathbb{R}$, il existe un polynôme P de degré $\leq p$ tel que $P(x_i) = y_i$ $(i \in \{0, 1, \cdots, p\})$?

Exercice 14. Soient X une valeur indéterminée et $A = \begin{pmatrix} 2-X & -3 & -6 \\ 0 & 5-X & 6 \\ -1 & -5 & -5-X \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R}[X])$.
Calculer le polynôme $P = \text{dét}(A) \in \mathbb{R}[X]$ et déterminer ses racines. Si λ est racine de P, que peut-on dire sur A ?

Exercice 15. Soit A une matrice nilpotente de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ (il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $A^n = 0$).
En remarquant que $A = A - I_n + I_n$ et en utilisant la formule du binôme de Newton montrer que $A - I_n$ est inversible.

Exercice 16. Calculer les déterminants des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3456 & 1 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 3 & 4 & 7 \\ 9 & 1 & 5 & 9 & 5 \\ 5 & 4 & 6 & 5 & 4 \\ 3 & 9 & 9 & 3 & 5 \\ 3 & 7 & 2 & 3 & 6 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 6 & 8 & 10 \\ 6 & 12 & 5 & 0 & 2 \\ 1 & 14 & 11 & 3 & 18 \\ 1 & 2 & 6 & 1 & 11 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 3 & 8 & 3 & 7 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 8 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 8 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$