Feuille 5
Applications Linéaires de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^n$ [1]

Les feuilles d'exercices sont découpées en trois types d'exercice :
- Les *indispensables* : à savoir faire en autonomie.
- Les *exercices d'application* : pour mieux maîtriser et comprendre le cours.
- *Pour aller plus loin* : exercices présentant des développements mathématiques ou des études de modélisations de phénomènes issues d'autres disciplines.

Indispensables

Exercice 1. Déterminer si les applications suivantes sont linéaires :

$$\begin{array}{rl}
f_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 & f_1(x,y) = (2x+y, x-y) \\
f_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 & f_2(x,y,z) = (xy, x, y) \\
f_3 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 & f_3(x,y,z) = (2x+y+z, y-z, x+y) \\
f_4 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4 & f_4(x,y) = (y, 0, x-7y, x+y) \\
g_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 & g_1(x,y) = (x+y, x-y) \\
g_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 & g_2(x,y) = (x,y) \\
g_3 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 & g_3(x,y) = (x, y^2) \\
g_4 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} & g_4(x,y) = x \\
g_5 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} & g_5(x,y) = xy \\
g_6 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} & g_6(x,y) = |x+y|
\end{array}$$

Solution :

1. f_1 est linéaire. Pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ et $(x',y') \in \mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned}
f_1\big((x,y)+(x',y')\big) &= f_1\big(x+x', y+y'\big) \\
&= \big(2(x+x')+(y+y'), (x+x')-(y+y')\big) \\
&= \big(2x+y+2x'+y', x-y+x'-y'\big) \\
&= \big(2x+y, x-y\big) + \big(2x'+y', x'-y'\big) \\
&= f_1(x,y) + f_1(x',y')
\end{aligned}$$

   Pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$f_1\big(\lambda \cdot (x,y)\big) = f_1\big(\lambda x, \lambda y\big) = \big(2\lambda x + \lambda y, \lambda x - \lambda y\big) = \lambda \cdot \big(2x+y, x-y\big) = \lambda \cdot f_1(x,y).$$

2. f_2 n'est pas linéaire, en effet par exemple $f_2(1,1,0) + f_2(1,1,0)$ n'est pas égal à $f_2(2,2,0)$.
3. f_3 est linéaire : il faut vérifier d'abord que pour tout (x,y,z) et (x',y',z') alors $f_3\big((x,y,z) + (x',y',z')\big) = f_3(x,y,z) + f_3(x',y',z')$. Et ensuite que pour tout (x,y,z) et λ on a $f_3\big(\lambda \cdot (x,y,z)\big) = \lambda \cdot f_3(x,y,z)$.
4. f_4 est linéaire : il faut vérifier d'abord que pour tout (x,y) et (x',y') alors $f_4\big((x,y)+(x',y')\big) = f_4(x,y) + f_4(x',y')$. Et ensuite que pour tout (x,y) et λ on a $f_4\big(\lambda \cdot (x,y)\big) = \lambda \cdot f_4(x,y)$.
5. g_1 est linéaire par le même argument de f_1 ;
6. g_2 est linéaire : c'est l'application identité ;
7. g_3 n'est pas linéaire : en effet

$$g_3(x, y+y') = (x, (y+y')^2) = (x, y^2 + (y')^2 + 2yy') \neq (x, y^2 + (y')^2) = g_3(x,y) + g_3(x,y')$$

1. Version du 10 février 2020

8. g_4 est linéaire : $g_4((x,y)+(x',y')) = g_4((x+x',y+y')) = x+x' = g_4((x,y))+g_4((x',y'))$ et $g_4(0,0)=0$
9. g_5 est linéaire : c'est la fonction composé de g_4 avec f_2 et la composition d'applications linéaires est linéaire.
10. g_6 n'est pas linéaire :

$$g_6((-1).(1,1)) = g_6((-1,-1)) = |-1-1| = 2 \neq (-1).g_6((1,1)) = -2$$

Exercice 2. Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ la transformation linéaire donnée dans la base canonique par la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

et $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la transformation linéaire donnée dans la base canonique par la matrice

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Calculer la matrice associée à la fonction composée $g \circ f$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$.

Solution :

$$f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x+y \\ 2x-y+z \end{pmatrix}$$

$$g(u,v) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x+y \\ y \end{pmatrix}$$

donc

$$g(f(x,y,z)) = (-(3x+y)+(2x-y+z), 2x-y+z) = (-x-2y+z, 2x-y+z$$

Dans la base canonique, est donnée par la matrice

$$\begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Comparer avec le produit de matrices $B.A$.

Solution :

$$B.A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} --1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Donc les matrices sont les mêmes.

3. Dans quelle généralité peut-on s'attendre à une relation similaire ?

Solution : Si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ est une transformation linéaire donnée dans la base canonique par une matrice A et $g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$ est une transformation linéaire donnée dans la base canonique par une matrice B alors la composée $g \circ f$ est l'application linéaire donnée par le produit de matrices $B.A$.

Exercice 3. On considère l'application linéaire f de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par $f((x,y,z)) = (x-y, y-z)$.

1. Déterminer $Ker\, f$.

Solution : Dans la base canonique, f est donnée par la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Pour détérminer le noyau de f il faut résoudre le système

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

A est échelonnée avec 2 pivots. Sous forme échelonnée réduite, on obtient le système

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

et donc $Kerf$ c'est le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendrée par le vecteur $(1,1,1)$.

2. f est-elle injective ? Surjective ?

Solution : f n'est pas injective car $kerf$ est de dimension 1>0. f est surjective car rang $A = 2 =$ dimension de $\mathbb{R}^2$.

Exercice 4.

1. Montrer que $P = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y - 4z = 0 \right\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. Quelle est sa dimension ? Déterminer une base de P.
2. Montrer que $D = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x - y + z = 0 \text{ et } x + y - z = 0 \right\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. Quelle est sa dimension ? Déterminer une base de D.
3. Montrer que $H = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \mid x + y + z + t = 0 \right\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$. Quelle est sa dimension ? Déterminer une base de H.

Solution :

1. Soit f définie de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$f(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}) = x + 2y - 4z\,,$$

alors f est une application linéaire de noyau l'ensemble P qui est donc un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. De plus f est clairement surjective (par exemple $f(\begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}) = x$) de sorte que par le théorème du rang :

$$\dim(P) = \dim(\ker(f)) = 3 - \mathrm{rg}(f) = 2\,.$$

Enfin, pour fournir une base, il suffit de déterminer deux vecteurs de P qui forment une famille libre, par exemple $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ sont deux vecteurs de P, de plus :

$$a \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 2a = 0 \\ -a + 2b = 0 \\ b = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad a = b = 0\,,$$

ce qui prouve qu'ils forment une famille libre.

2. On procède de même en considérant ici la fonction f définie de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ par :

$$f(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} x - y + z \\ x + y - z \end{pmatrix}\,.$$

Cette fonction est linéaire de noyau égal à D et est surjective, ainsi $\dim(D) = 1$ et une base de D est constituée d'un vecteur de D non nul comme par exemple $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

3. On procède de même en considérant ici la fonction f définie de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$f(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}) = x + y + z + t\,.$$

Cette fonction est linéaire de noyau égal à H et est surjective, ainsi $\dim(H) = 3$ et une base de H est constituée de trois vecteurs de H qui forment une famille libre comme $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Exercice 5. Montrer que les application suivantes sont $\mathbb{R}$-linéaires. Pour chacune, donner une base du noyau et de son image, et en déduire si l'application est injective, surjective ou bijective.

$$f_1 : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4 \\ (x, y) \mapsto (y, y + 2x, x, y + 2x) \end{cases} \quad , \quad f_2 : \begin{cases} \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) \mapsto (x + y, x + 2y + z). \end{cases}$$

Solution :

$$f_1(x, y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$f_1(0,0) = (0,0,0,0)$$

$$f_1(x+x', y+y') = (y+y', y+y'+2(x+x'), x+x', y+y'+2(x+x')) =$$
$$= (y, y+2x, x, y+2x) + (y', y'+2x', x', y'+2x') = f_1(x,y) + f_1(x',y')$$

$$f_1(\lambda.x, \lambda y) = (\lambda y, \lambda y + 2\lambda x, \lambda.x, \lambda y + 2\lambda x) = \lambda.(y, y+2x, x, y+2x) = \lambda f_1(x,y)$$

Donc f_1 est linéaire.

— Le noyau de f_1 est la solution du système

$$y = 0 \wedge \ y + 2x = 0 \ \wedge \ x = 0 \ \wedge \ y + 2x = 0$$

Donc

$$x = 0 \wedge y = 0$$

est le noyau est de dimension 0 et l'application est injective.

— f_1 n'est par surjective : l'image de f c'est le sous-espace de $\mathbb{R}^4$ engendrée par les colonnes de la matrice associée à f_1 : $(0,2,1,2)$ et $(1,1,0,1)$ et donc, un sous-espace de $\mathbb{R}^4$ de dimension 2.

$$f_2(x,y,z) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Par Pivot de Gauss, le noyau de f_2 est le sous-espace des solutions du système :

$$x = z \wedge y = -z$$

avec z variable libre. Donc c'est un sous-espace de dimension 1engendrée par $(1,-1,1)$ et f_2 n'est pas injective.

Par contre, comme l'espace engendrée par les colonnes de $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ est de dimension 2, f_2 est surjective.

Exercice 6. Soit f l'application linéaire de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}^3$ canoniquement associée à la matrice

$$M = \begin{pmatrix} -11 & 7 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 11 & 2 \\ 1 & 0 & 7 & 1 \end{pmatrix}.$$

Déterminer le rang de f, ainsi qu'une base de son noyau et de son image. Donner une équation de l'image.

Solution :

$$rank = 2$$

$$ker f = \{(-7x - y, -11x - 2y, x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}$$

$$Image\, f = < (7,1,0), (-11,0,1) >$$

Exercice 7. Soit

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans $\mathcal{B}$ est A. On pose $\varepsilon_1 = (1,1,1), \varepsilon_2 = (1,-1,0), \varepsilon_3 = (1,0,1)$ et $\mathcal{B}' = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$.

1. Montrer que $\mathcal{B}'$ constitue une base de $\mathbb{R}^3$.

Solution : Par la théoréme du cours $\mathcal{B}'$ constitue une base de $\mathbb{R}^3$ ssi

$$\text{dét} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \neq 0$$

En effet on a dét $= -1$ donc la matrice est inversible et $\mathcal{B}'$ est une base.

2. Écrire la matrice de f dans cette base.

Solution : On a

$$f(\varepsilon_1) = A.\varepsilon_1 = \varepsilon_1$$

$$f(\varepsilon_2) = A.\varepsilon_2 = 2.\varepsilon_2$$

$$f(\varepsilon_3) = A.\varepsilon_3 = 0$$

Donc, la matrice associée à f dans la base $\mathcal{B}'$ est

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3. Déterminer une base de $Ker\, f$ et de $Im\, f$.

Solution : Base de $ker f$ $= \{\varepsilon_3\}$.

Base pour l'image de f $= \{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$

Pour aller plus loin

Exercice 8. Soit l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à la matrice $M = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$. Le plan P d'équation $y + z = 0$ est-il stable par f ? La droite vect $\{(1,1,1)\}$ est-elle stable par f ?

Exercice 9. Soit f l'application linéaire du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^2$ définie par $f((x,y,z)) = (x + 2y + z, x - 2y + z)$.

1. Déterminer la matrice A associée à f par rapport aux bases canoniques de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^2$.
2. Soit $f_1 = (1, 0, -1)$, $f_2 = (1, 1, 0)$, $f_3 = (1, 1, 1)$, $v_1 = (1, 1)$ et $v_2 = (1, -1)$. Vérifier que $\mathcal{B}_3 = (f_1, f_2, f_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et que $\mathcal{B}_2 = (v_1, v_2)$ est une base de $\mathbb{R}^2$. Déterminer la matrice A' associée à f par rapport aux bases $\mathcal{B}_3$ et $\mathcal{B}_2$.
3. Trouver une base $\mathcal{B}_2'$ de $\mathbb{R}^2$ telle que la matrice associée à f par rapport aux bases $\mathcal{B}_3$ et $\mathcal{B}_2'$ soit

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$