TD1 : Représentation binaire, algèbre de Boole et entiers naturels

Objectif(s)

- ⋆ Premières expressions logiques ; présentation du multiplexeur
- ⋆ Premiers circuits
- ⋆ Représentation des entiers naturels

Exercice(s)

Exercice 1 – Tables de vérité

Dans tout le TD, nous notons . le `ET` logique et $+$ le `OU` logique. La notation surlignée correspond à la négation logique : par exemple $\overline{a}$ correspond à `NON`(a). Ces notations sont utilisées dans le cours.

Question 1

Donnez la table de vérité correpondant à l'équation booléenne à trois entrées suivante :

$s = b + \overline{b}.a.c$

<u>**Solution**:</u>

a	b	c	s
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

Question 2

L'expression ci-dessus vous semble-t-elle simplifiable ? Justifiez votre réponse.

<u>**Solution**:</u>

Il y a deux manières de montrer que $b + \overline{b}.a.c = b + a.c$:

- Repartir de la table de vérité et montrer que $s = b + a.c$
- $b + \overline{b}.a.c = (b + \overline{b}).(b + a.c) = b + a.c$ (car $x + y.z = (x + y).(x + z)$).

On peut aussi voir que $x+\overline{x}.y = x+y$: si x est vrai alors l'expression $x+\overline{x}.y$ est vraie, sinon $\overline{x}$ est vrai et l'expression est vraie ssi y est vrai : l'expression $x + \overline{x}.y$ est donc bien équivalente à $x + y$

Question 3

Soit la table de vérité suivante (sortie s), rappelez comment on construit la forme normale disjonctive d'une fonction à partir de sa table, avant de la donner pour la sortie s :

a	b	c	s
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

Quelle est l'intuition derrière cette forme normale ?

Solution:

$s_{disjonctive} = \overline{a}.\overline{b}.\overline{c} + \overline{a}.b.\overline{c} + \overline{a}.b.c + a.b.c$

Question 4

Montrez à l'aide d'une table de vérité qu'en logique booléenne, on a :

a + (b.c) = (a+b).(a+c)

Développer le membre droit de l'égalité ci-dessus puis simplifier, en justifiant, pour aboutir au membre gauche de l'égalité.

Solution:

a	b	c	$b.c$	$a+b.c$	$a+b$	$a+c$	$(a+b).(a+c)$
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	1	0
0	1	0	0	0	1	0	0
0	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	1	1
1	0	1	0	1	1	1	1
1	1	0	0	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1

Développement de la partie de droite : $a.a + a.b + a.c + b.c = a.(1 + b + c) + b.c = a + b.c$

Question 5

Donner la table de vérité de la fonction `XOR` .

Solution:

a	b	a XOR b
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Question 6

À partir de la table de vérité de la fonction `XOR` , donnez la forme normale disjonctive cette fonction.

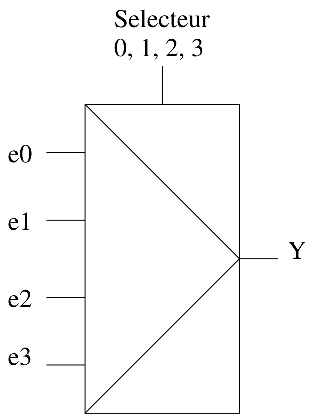

FIGURE 1 – Schéma d'un multiplexeur à 4 entrées et un sélecteur

Solution:
Forme normale disjonctive : $a \texttt{ XOR } b = (\overline{a}.b) + (a.\overline{b})$

Question 7

En utilisant les règles de De Morgan, déterminez une expression de la fonction $\overline{(a \texttt{ XOR } b)}$.
Que permet de tester cette fonction ?
Solution:

Le développement de la première expression obtenue pour le XOR est décomposé ci-après :
$\overline{a \texttt{ XOR } b} = \overline{((\overline{a}.b) + (a.\overline{b}))}$
$= \overline{(\overline{a}.b)}.\overline{(a.\overline{b})}$
$= (a + \overline{b}).(\overline{a} + b)$
$= (a.b) + (\overline{a}.\overline{b})$
On retrouve bien que le *non* XOR est vrai si les deux entrées ont la même valeur.

Exercice 2 – Multiplexeurs

Un multiplexeur à n entrées est un circuit à n entrées plus une entrée (appelée 'sélecteur') permettant de désigner la sortie voulue : un multiplexeur permet de mettre en sortie une seule des n entrées, celle désignée par le 'sélecteur'.

Autrement dit, un multiplexeur à n entrées ($n > 1$) est un circuit ayant en entrée un ensemble de bits $e_0, e_1, \cdots, e_{n-1}$ et un sélecteur utilisé pour coder un numéro d'entrée compris entre 0 et $n-1$. Le rôle de ce circuit est de produire en sortie la **valeur** de l'entrée dont le numéro est donné par le sélecteur.

Par exemple, dans la figure 1, si la valeur du sélecteur est :
— 0, la sortie Y du multiplexeur est égale à la valeur de l'entrée e_0 (y = 0 si e_0 = 0, y = 1 si e_0 = 1).
— 1, la sortie Y du multiplexeur est égale à la valeur de l'entrée e_1 (y = 0 si e_1 = 0, y = 1 si e_1 = 1).
— 2, la sortie Y du multiplexeur est égale à la valeur de l'entrée e_2 (y = 0 si e_2 = 0, y = 1 si e_2 = 1).
— 3, la sortie Y du multiplexeur est égale à la valeur de l'entrée e_3 (y = 0 si e_3 = 0, y = 1 si e_3 = 1).

Question 1 – Multiplexeur à 2 entrées

Un multiplexeur à deux entrées est un circuit ayant en entrée deux bits e_0 et e_1 et un sélecteur v sur 1 bit permettant de choisir la première entrée lorsque v vaut 0 ou la deuxième lorsque v vaut 1. Ce circuit a été présenté en cours.

Donnez la table de vérité d'un multiplexeur à 2 entrées en exprimant simplement la valeur de la sortie y ($y = e_0$ ou $y = e_1$) en fonction de la valeur du sélecteur v.

Donnez la forme normale disjonctive de ce multiplexeur.

Solution:

v	y
0	e_0
1	e_1

$y = \overline{v}.e_0 + v.e_1$

Question 2 – Multiplexeur à 4 entrées

On souhaite maintenant donner l'expression booléenne correspondant à un multiplexeur à 4 entrées. Puisque l'on est en logique booléenne, la valeur du sélecteur, comprise entre 0 et 3, est codée en binaire à l'aide deux bits notés i_0 et i_1, tel que le $i_1 i_0$ soit le codage "entiers naturels" du numéro de l'entrée à sélectionner : i_0 est le bit de poids faible du sélecteur et la **valeur v** du sélecteur est donnée par **v**$= \sum_{k=0}^{n-1} i_k.2^k$.

Remplissez la table ci-dessous en indiquant dans la 3ème colonne la valeur **v** du sélecteur encodée par les deux bits d'entréee puis indiquer dans la 4ème colonne la valeur de sortie de y.

i_1	i_0	**v**	s
0	0		
0	1		
1	0		
1	1		

En déduire une expression algébrique [1] de y.

Solution:

i_1	i_0	**v**	s
0	0	0	e_0
0	1	1	e_1
1	0	2	e_2
1	1	3	e_3

On trouve l'expression booléenne pour un multiplexeur à 4 entrées à partir de la table de la même manière que celle pour le multiplexeur à 2 entrées :

$y = \overline{i_1}.\overline{i_0}.e_0 + \overline{i_1}.i_0.e_1 + i_1.\overline{i_0}.e_2 + i_1.i_0.e_3$

Exercice 3 – Représentation des entiers naturels

Question 1

Remplissez le tableau suivant qui pourra vous servir pour la suite de ce TD pour les conversions.

1. dans l'algèbre de Boole

base 10	base 2	base 16
0		
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		

base 10	base 2	base 16
8		
9		
10		
11		
12		
13		
14		
15		

Question 2

Combien de valeurs différentes peut-on coder dans un mot binaire de longueur n ?

Quel est l'intervalle des valeurs représentables dans un mot de n bits avec le codage "entiers naturels" ?

Combien faut-il de bits au minimum dans un mot pour qu'il puisse encoder les valeurs suivantes (selon le codage "entiers naturels") : 127_d et 32_d ?

<u>Solution</u>:

On peut représenter 2^n valeurs différentes sur n bits.

Soit N un nombre entier, alors ce nombre s'exprime en binaire selon le codage "entiers naturels" selon la relation : $N = \sum_{i=0}^{n-1} a_i.2^i$.

Un mot binaire de n bits permet de représenter les nombres entiers compris dans l'intervalle $[0; ..2^n - 1]$. Il faut 7 bits et 6 bits pour représenter 127_d et 32_d respectivement.

Question 3

Combien de valeurs différentes peut-on coder dans un mot hexadécimal de longueur n ?

Quel est l'intervalle des valeurs représentables dans un mot de n chiffres hexadécimaux avec le codage "entiers naturels" ?

<u>Solution</u>:

On peut représenter 16^n valeurs différentes. Soit N un nombre entier, alors ce nombre s'exprime en hexadécimal selon la relation : $N = \sum_{i=0}^{n-1} a_i.16^i$

Ainsi, un mot hexadécimal de n chiffres permet de représenter les nombres entiers compris dans l'intervalle entier $[0; 16^n - 1]$.

Question 4

Complétez le tableau suivant :

Mot binaire de 8 bits qui encode la valeur d	Nombre d en décimal	Mot hexadécimal de 8 bits (2 chiffres) qui encode la valeur d
	10	
0b0000 0010		
		0x10
	57	
	127	
		0x17
		0x5B
0b0010 1001		
0b1010 1010		

<u>**Solution**</u>:

base 2 (sur 8 bits)	base 10	base 16 (sur 1 octet)
$0b$0000 1010	10	$0x0A$
$0b$0000 0010	2	$0x02$
$0b$0001 0000	16	$0x10$
$0b$0011 1001	57	$0x39$
$0b$0111 1111	127	$0x7F$
$0b$0001 0111	23	$0x17$
$0b$0101 1011	91	$0x5B$
$0b$0010 1001	41	$0x29$
$0b$1010 1010	170	$0xAA$

Exercice 4 – Exercices de conversion

Conversion binaire → hexadécimal

- $1\ 1101_b =$
- $1001\ 1000\ 0011\ 1100_b =$

Solution:
$1\ 1101_b = 0001\ 1101_b = 1D_h$
$1001\ 1000\ 0011\ 1100_b = 983C_h$

Conversion hexadécimal → binaire

- $75_h =$
- $1A_h =$
- $34DF_h =$

Solution:
$75_h = 0111\ 0101_b = 111\ 0101_b$
$1A_h = 0001\ 1010_b$
$34DF_h = 0011\ 0100\ 1101\ 1111_b$

Conversion binaire $\rightarrow$ décimal
- $1001\ 0110_b =$
- $1100\ 0110_b =$

Solution:
$1001\ 0110_b = 150$
$1100\ 0110_b = 198$

Conversion décimal $\rightarrow$ binaire. Pour ces conversions, vous utiliserez et l'approche par divisions successives et celle par tableau de puissances.
- $57_d =$
- $1272_d =$

Solution:
$57_d = 11\ 1001_b$
$1272_d = 100\ 1111\ 1000_b$