Feuille de TD 2 : indications

Exercice 1. Etudier la convergence des suites définies par les formules suivantes.

(a) $a_n = 1 + \dfrac{e^{in^2}}{n+3}$.
(b) $b_n = (1+i)^n$.
(c) $c_n = \dfrac{3n-3}{2n+3}$.
(d) $d_n = \dfrac{n+\sqrt{n^2+1}}{n-\sqrt{n^2+1}}$.
(e) $e_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{2n}$.

Indications : (a) Que vaut le module de $\dfrac{e^{in^2}}{n+3}$? (b) Calculer le module de b_n. (c) et (d) Face à une fraction, il est bon de factoriser le terme dominant (typiquement : la plus grosse puissance de n) au numérateur et au dénominateur. (e) Il est souvent utile d'écrire $a^b = e^{b \ln a}$.

Exercice 2. Soit (u_n) une suite complexe. Ecrire les propriétés suivantes à l'aide de quantificateurs.

(a) (u_n) admet une limite réelle.
(b) (u_n) n'est pas bornée.
(c) (u_n) n'est pas convergente.
(d) (u_n) est constante à partir d'un certain rang.

Indications : (a) La réponse commence par $\exists$. (b) et (c) Nier la définition de « (u_n) est bornée » et « (u_n) est convergente ».

Exercice 3. Soit (u_n) une suite convergeant vers $\ell \in \mathbb{C}^*$.

(a) Prouver qu'il existe $m > 0$ et $N \in \mathbb{N}$ tels que pour tout $n \geq N$, $|u_n| \geq m$.
(b) Prouver que $(1/u_n)$ converge vers $1/\ell$.

Indications : (a) Utiliser la définition de la convergence pour un ϵ bien choisi, ainsi que l'inégalité triangulaire « à l'envers » (cf. premier chapitre du poly, p. 13). (b) Revenir à la définition de la convergence.

Exercice 4. Soit (u_n) une suite convergente de nombres entiers. Démontrer que (u_n) est constante à partir d'un certain rang.

Indication : Prouver que pour p et q assez grands, $u_p - u_q$ est très petit et donc... nul.

Exercice 5. Démontrer les estimations suivantes, quand $n \to +\infty$.

(a) $4(n+1)^3 - 2n^2 + n\cos n = O(n^3)$.

(b) $\dfrac{7n^2 - 15n}{n-3} \sim 7n$.

(c) $\sin(1/n) \sim 1/n$.

(d) $\ln(n+1) - \ln(n) - \dfrac{1}{n} = O(1/n^2)$.

(e) $n^a = o(r^n)$ pour tous $a \in \mathbb{R}$ et $r > 1$.

(f) $z^n = o(n!)$ pour tout $z \in \mathbb{C}$.

(g) $n! = o(n^n)$.

Indications : (a) Utiliser l'inégalité triangulaire et majorer grossièrement. (b) Etudier le quotient du membre de gauche par le membre de droite. (c) et (d) DL. (e) Ecrire n^a/r^n comme l'exponentielle de quelque chose. (f) et (g) Ecrire les quotients comme le produit de n facteurs ; garder le plus petit (qui va tendre vers 0) et vérifier que les autres sont de module ≤ 1 sauf éventuellement un nombre fini.

Exercice 6. Déterminer les bornes supérieure et inférieure des ensembles de réels suivants (finies ou infinies). Sont-elles atteintes ?

— $A = \{(-1)^n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

— $B = \{(-1)^n n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

— $C = \{\cos x \mid 2\pi/3 < x < 4\pi/3\}$.

— $D = \left\{ \dfrac{n}{n+1} \;\middle|\; n \in \mathbb{N} \right\}$.

— $E = \left\{ \dfrac{2p}{2pq+3} \mid p, q \in \mathbb{N}^* \right\}$.

Indications : (a) Ensemble fini. (b) Vérifier que B n'est ni minoré ni majoré. (c) Ecrire C sous la forme d'un intervalle explicite. (d) C'est l'ensemble des valeurs d'une suite qu'on peut étudier facilement. (e) Encadrer un peu grossièrement cette fraction puis vérifier qu'on ne pouvait pas faire mieux en faisant tendre l'un ou l'autre des paramètres vers l'infini.

Exercice 7. Etant donnée une fonction croissante $f : [0,1] \to [0,1]$, on note $A = \{x \in [0,1] \mid x \leq f(x)\}$.

(a) Montrer que A admet une borne supérieure $\sigma \in [0,1]$.

(b) Prouver que $f(\sigma)$ est un majorant de A, puis que σ est dans A.

(c) Vérifier que, pour tout élément x de A, $f(x)$ est dans A.

(d) En déduire que $f(\sigma) = \sigma$.

Indications : (b) Pour $x \in A$, $x \leq \sigma$. Croissance de f... (c) Pour $x \in A$, $x \leq f(x)$. Croissance de f... (d) (b) donne une inégalité et (c) l'autre.

Exercice 8. (Somme télescopique) Pour tout $n > 1$, on pose

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \quad \text{et} \quad T_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)}.$$

(a) Vérifier que (S_n) est croissante.

(b) Exploiter l'identité $\dfrac{1}{k(k-1)} = \dfrac{1}{k-1} - \dfrac{1}{k}$ pour montrer que (T_n) est convergente.

(c) En déduire que (S_n) est convergente.

Indications : (b) Avec l'identité proposée, les termes de la somme se simplient presque tous. (c) Reste à voir que (S_n) est majorée.

Exercice 9. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ et $v_n = u_n + \dfrac{1}{nn!}$.

(a) Prouver que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

(b) En déduire qu'elles convergent vers une même limite $e \in]2, 3[$.

(c) Prouver que e est un nombre irrationnel.

Indications : (a) Vérifier la définition des suites adjacentes, après le théorème 4, p. 23 - 24. (b) Cf. (a). (c) Supposer que $e = p/q$, avec $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$, et encadrer $q!e$ pour obtenir une contradiction.

Exercice 10. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = n \cos\left(\dfrac{n\pi}{4}\right)$.

(a) Extraire de (u_n) une sous-suite tendant vers $+\infty$.

(b) Extraire de (u_n) une sous-suite convergente.

Indications : (a) Chercher des indices n tels que $\cos\left(\dfrac{n\pi}{4}\right) = 1$. (b) Chercher des indices n tels que $\cos\left(\dfrac{n\pi}{4}\right) = 0$.

Exercice 11.

(a) Montrer que la suite $(\sin n)$ est divergente.
Indication : $\sin(n \pm 1)$.

(b) Montrer qu'il existe une suite strictement croissante d'entiers a_n telle que la suite $(\sin a_n)$ converge.

Indications : (a) Supposer que $(\sin n)$ converge vers un réel ℓ. Utiliser des formules de trigonométrie pour exprimer $\sin(n+1)$ et $\sin(n-1)$ en fonction de $\sin n$. Prouver qu'alors $\ell = 0$, puis regarder ce qu'on peut dire de $\cos n$ pour obtenir une contradiction. (b) Utiliser un théorème fait pour ça.

Exercice 12. Soit (u_n) une suite complexe. Prouver que (u_n) converge vers ℓ si et seulement si les deux suites extraites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers ℓ.

Indication : Pour le sens réciproque, revenir à la définition de la convergence.

Exercice 13. Soit (u_n) une suite complexe bornée et divergente.

(a) Montrer que (u_n) admet une sous-suite convergeant vers un nombre complexe ℓ.

(b) Prouver qu'il existe $\epsilon > 0$ et une extractrice $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_{\phi(n)} - \ell| \geq \epsilon.$$

(c) Prouver que (u_n) admet une sous-suite convergeant vers un nombre complexe ℓ' différent de ℓ.

Indications : (a) Utiliser un théorème fait pour ça. (b) Ecrire avec des quantificateurs le fait que (u_n) ne converge pas vers ℓ. (c) Vérifier que $(u_{\phi(n)})$ admet une sous-suite convergente.

Exercice 14. (Moyenne de Cesaro) Soit (u_n) une suite convergeant vers $\ell \in \mathbb{C}$. On s'intéresse à la suite (μ_n) obtenue en posant

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \mu_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} u_k.$$

(a) Soit $\epsilon > 0$. Prouver qu'il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout indice $n > N$:

$$\frac{1}{n} \sum_{k=N+1}^{n} |u_k - \ell| \leq \epsilon.$$

(b) Prouver qu'il existe un entier $N' \geq N$ tel que pour tout indice $n > N'$:

$$|\mu_n - \ell| \leq 2\epsilon.$$

(c) Qu'a-t-on démontré ?

Indications : (a) Définition de la convergence de (u_n) vers ℓ. (b) Vérifier que $\mu_n - \ell = \dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} (u_k - \ell)$ et borner par deux termes, dont l'un est celui apparaissant dans (a).

Exercice 15. On dit qu'une suite complexe (u_n) est de Cauchy si

$$\forall \epsilon > 0, \ \exists N \in \mathbb{N}, \ \forall p, q \geq N, \ |u_p - u_q| \leq \epsilon.$$

(a) Prouver que toute suite convergente est de Cauchy.

(b) Prouver que toute suite de Cauchy est bornée.

(c) Prouver que toute suite de Cauchy admet une sous-suite convergente.

(d) Prouver que toute suite de Cauchy est convergente.

Indications : (a) Si ℓ est la limite, observer que $|u_p - u_q| \leq |u_p - \ell| + |\ell - u_q|$. (b) Mimer l'idée de la preuve de la proposition 3 p. 17. (d) Utiliser la sous-suite convergente $(u_{\phi(n)})$ donnée par (c) : que peut-on dire de $u_{\phi(n)} - u_n$ pour n grand ?

Exercice 16. Soit (u_n) une suite réelle bornée. Pour $N \in \mathbb{N}$, on note

$$s_N = \sup\{u_k \mid k \geq N\} \quad \text{et} \quad i_N = \inf\{u_k \mid k \geq N\}.$$

(a) Vérifier que (s_N) et (i_N) sont des suites monotones, puis convergentes.
On peut donc définir :

$$\limsup(u_n) = \lim_{N \to +\infty} s_N \quad \textit{et} \quad \liminf(u_n) = \lim_{N \to +\infty} i_N.$$

(b) Calculer $\limsup\Big((-1)^n e^{1/n}\Big)$ et $\liminf\Big((-1)^n e^{1/n}\Big)$.

(c) Prouver que la suite (u_n) converge vers ℓ si et seulement si

$$\limsup(u_n) = \liminf(u_n) = \ell.$$

Indications : (a) SI $A \subset B$, que dire de leurs bornes sup et inf ? (b) Distinguer les termes pairs et impairs. (c) Sens réciproque : encadrer u_n à l'aide des suites introduites dans l'énoncé. Sens direct : revenir à la définition de la convergence.