Feuille 8 (Probabilités 2)
Espace probabilisé

Les feuilles d'exercices sont découpées en trois types d'exercice :
- Les *indispensables* : à savoir faire en autonomie.
- Les *exercices d'application* : pour mieux maîtriser et comprendre le cours.
- *Pour aller plus loin* : exercices présentant des développements mathématiques ou des études de modélisations de phénomènes issues d'autres disciplines.

Indispensables

Exercice 1 (Vrai ou Faux ?)**.**

1. Deux événements incompatibles sont indépendants.
2. Deux événements indépendants sont incompatibles.
3. Deux événements de probabilité non nulle et incompatibles ne sont jamais indépendants.
4. Si A et B sont deux événements indépendants, alors $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$.

Exercice 2.

1. On truque un dé cubique de telle sorte que la probabilité de chaque face soit proportionnelle au numéro qu'elle porte. Quelle est la probabilité d'obtenir un 6 pour un seul lancer ?
2. On lance une pièce équilibrée n fois, les lancers étant indépendants. Quelle est la probabilité d'obtenir au moins une fois pile ? Quelle est la probabilité d'obtenir exactement une fois pile ?
3. L'examen final d'un cours de géographie est un simple QCM avec trois questions, deux réponses proposées par question. Une erreur au maximum est acceptée : deux ou trois erreurs sont éliminatoires. Un étudiant qui ne connaît pas son cours décide de répondre au hasard (uniformément) à chacune des questions (indépendamment les unes des autres). Il estime qu'il a alors une chance sur trois de réussir l'examen. Est-il meilleur en probabilités qu'en géographie ?

Exercice 3 (Théorème de Bayes)**.** On s'intéresse à un test Covid. On suppose que ce test est sensible à 95% : si l'on est porteur du virus, on a 95% de chance d'avoir un test positif. On suppose également qu'il est spécifique à 99% : si l'on n'est pas porteur, on a 99% de chance d'avoir un test négatif. On suppose enfin que la prévalence du virus est de 6% : 6% de la population est porteuse. Sur la base de ces hypothèses :

1. Quelle est la probabilité d'être porteur du virus si l'on a un test positif ?
2. Quelle est la probabilité de ne pas être porteur si l'on a un test négatif ?

Exercice 4. Le poker se joue avec un jeu de 32 cartes [1]. Chaque joueur reçoit 5 cartes. Quelle est la probabilité qu'un joueur ait dans sa main...

1. un carré d'as (les quatre as) ?
2. un carré (quatre cartes de la même valeur) ?
3. un full (trois cartes de la même valeur et une paire de cartes de la même valeur) ?
4. un brelan (trois cartes de la même valeur et deux cartes de valeurs différentes) ?

1. Les cartes présentent quatre couleurs (appelées également “enseignes”) dénommées carreau, trèfle, pique, cœur. Les cartes représentent soit des nombres (de 2 à 10) soit des “figures” (Valet, Dame, Roi, As). Un jeu de 32 [52] cartes contient, pour chaque couleur, une carte de chacune des valeurs suivantes : $[2, 3, ..., 6]$, 7, 8, 9, 10, Valet, Dame, Roi, As

Exercice 5 (Des "paradoxes" classiques)**.**

1. Dans un jeu télévisé, un candidat doit choisir entre trois portes. Une seule de ces portes mène à une victoire (disons une somme d'argent), les deux autres cachent chacune une chèvre et font repartir le candidat bredouille. La porte gagnante a été tirée au hasard équiprobablement parmi les trois portes. Le candidat désigne dans un premier temps l'une des portes. Le présentateur ouvre, parmi les deux portes qui ne sont pas désignées par le candidat, une porte qui cache une chèvre. Le candidat doit, au choix, confirmer son premier choix et ouvrir la porte qu'il avait désignée, ou bien changer d'avis et ouvrir la porte qu'il n'avait pas désignée et qui n'est pas encore ouverte. Que doit faire le candidat ?
2. On suppose (pour simplifier) qu'à chaque naissance, un enfant a une chance sur deux d'être un garçon ou une fille, et ce indépendamment de toute autre naissance. Un couple a deux enfants. Sachant que le cadet est un garçon, quelle est la probabilité que l'aîné soit un garçon ? Sachant que l'un des deux est un garçon, quelle est la probabilité que l'autre soit un garçon ?

Exercice 6. Les Shadoks ont construit une fusée. Elle n'est pas très au point mais ils ont calculé qu'elle avait une chance sur un million de marcher, et ils décident donc de se dépêcher de bien rater les 999 999 premiers essais pour être sûrs que le millionième marche. Cependant...

1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, si une expérience aléatoire a une chance sur n de réussir, quelle est la probabilité qu'elle rate n fois de suite (en supposant les tentatives indépendantes) ?
2. Que dire de cette probabilité quand n est grand ? *(on pourra utiliser le fait que* $x^n = (\exp(\ln x))^n = \exp(n \ln x)$ *pour tout* $x > 0$*, et le développement limité en* 0 *de* $\ln$*.)*

Exercice 7 (Equiprobabilité et ordres de grandeur)**.** Avant de commencer une partie de bridge, je mélange bien un jeu de 52 cartes. Y a-t-il une probabilité raisonnable (disons, supérieure à un sur mille) que des joueurs, un jour, dans toute l'histoire de l'humanité, aient déjà commencé une partie de cartes avec les cartes exactement dans le même ordre que moi ? (il suffit de faire une surestimation vague et très large du nombre de parties jouées dans l'histoire de l'humanité. Les cartes sont apparues aux alentours du VII^e siècle, la population mondiale a toujours été inférieure à 10 milliards, on pourra compter une moyenne d'au moins 5 minutes pour une partie, soit environ 100 000 parties de jeux de cartes en un an pour quelqu'un qui ne ferait que ça de sa vie (sans manger, dormir...). On pourra utiliser la donnée suivante $52! \geqslant 8 \times 10^{67}$).

Applications

Exercice 8. On souhaite faire une étude sur la consommation de drogue illégale dans une population. Pour contrecarrer la potentielle réticence des consommateurs à déclarer une activité illégale, on met en place le protocole suivant : avant de répondre (à la question : "consommez-vous une drogue illégale ?"), chaque personne interrogée jette un dé (sans en communiquer le résultat à l'interrogateur, ni à qui que ce soit). Si le dé donne un 6, la personne répond qu'elle consomme de la drogue ; sinon, elle répond la vérité (de sorte qu'une personne qui a répondu "oui" ne peut pas être accusée d'une activité illégale). On note p la proportion (inconnue) de consommateurs de drogue dans la population.

1. En supposant qu'elle est choisie uniformément parmi la population, quelle est la probabilité qu'une personne interrogée réponde "oui" ?
2. Sachant qu'elle a répondu "oui", quelle est la probabilité qu'elle consomme effectivement de la drogue ?
3. Les événements "la personne a répondu oui" et "la personne a fait 6" sont-ils indépendants ?

Exercice 9 (Inégalité de Bonferroni)**.** On considère deux événements A et B sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathbb{P})$, et on note $a = \mathbb{P}(A)$ et $b = \mathbb{P}(B)$.

1. On suppose que $a+b>1$. Montrer que $\mathbb{P}(A\cap B)>0$.
2. Étant fixés a et b, quelle est la plus petite valeur que peut prendre $\mathbb{P}(A\cap B)$? La plus grande ? Donner dans les deux cas un exemple (de $\Omega, \mathbb{P}, A$ et B) où la valeur extrémale est atteinte (on pourra considérer pour Ω un ensemble à trois points, par exemple $\{1,2,3\}$).
3. Plus généralement, on considère $n\geqslant 2$ événements $A_1,\dots,A_n$. Montrer que

$$\mathbb{P}\left(A_1\cap\dots\cap A_n\right) \;\geqslant\; \sum_{k=1}^{n}\mathbb{P}(A_k)-n+1\,.$$

Pour aller plus loin

Exercice 10. On s'intéresse à un caractère phénotypique donné dans une population, pour lequel il y a deux types possibles, qu'on note 1 et 2 (par exemple, on regarde la présence d'antigènes A à la surface des globules rouges chez une population humaine, de sorte que les individus de type 1 sont ceux qui ont un groupe sanguin A ou AB et ceux de type 2 de groupes O ou B). On suppose que la population est consitutée de N individus de type 1 et M de type 2.

1. On sélectionne une première personne dans la population, uniformément, puis une seconde personne uniformément parmi le reste de la population (de façon à être sûr de ne pas sélectionner la même personne). Les types des deux personnes sont-ils indépendants ?
2. On recommence le procédé jusqu'à avoir sélectionné k personnes distinctes. Calculer, pour r entre 0 et k, la probabilité que, parmi ces k personnes, r soient de type 1.
3. On veut comprendre ce qui se passe lorsque la population totale, $M+N$, est beaucoup plus grande que la taille k de l'échantillon. Pour formaliser cela, on considère deux suites $(M_n)_{n\in\mathbb{N}_*}$ et $(N_n)_{n\in\mathbb{N}_*}$ qui sont telles que, pour tout $n\in\mathbb{N}_*$,

$$M_n+N_n=n \qquad \text{et} \qquad \frac{N_n}{n}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} p\in]0,1[\,.$$

   Autrement dit, n désigne la taille totale de la population et p est la proportion d'individus de type 1 lorsque la taille totale de la population devient grande. Pour k et r fixés, calculer la limite (pour $n\to+\infty$) de la probabilité calculée à la question précédente.

Exercice 11 (Entropie d'une probabilité)**.** Sur l'univers $\Omega=\{1,\dots,N\}$ pour $N\in\mathbb{N}$, on considère une probabilité $\mathbb{P}$ et on note $p_i=\mathbb{P}(i)$ pour $i\in\Omega$. On appelle entropie de $\mathbb{P}$ la quantité

$$H \;=\; -\sum_{i=1}^{N} p_i\ln p_i\,,$$

avec la convention $x\ln x=0$ si $x=0$.

1. Montrer que $H\geqslant 0$. Dans quels cas peut-on avoir $H=0$?
2. Dans cette question uniquement, on suppose que $N=2$, et l'on note $p_1=p$, $p_2=1-p$. Étudier les variations de l'entropie en fonction de $p\in[0,1]$.
3. Calculer H dans le cas où $\mathbb{P}$ est la loi uniforme sur Ω.
4. Montrer que $\ln(z)\leqslant z-1$ pour tout $z>0$, et en déduire que la loi uniforme est la loi d'entropie maximale, c'est-à-dire que quelque soit $\mathbb{P}$, H est plus petit que l'entropie de la loi uniforme *(indication : on considérera d'abord le cas où tous les p_i sont non nuls, et l'on pourra appliquer l'inégalité démontrée à $z=p_i/m$).*

Exercice 12 (indicatrice d'Euler)**.** L'objectif de cet exercice est de proposer une démonstration probabiliste d'un résultat classique d'arithmétique. Soit $n > 1$ un entier fixé. On choisit de manière équiprobable un entier x dans $\{1, \ldots, n\}$. Pour tout entier $m \leqslant n$ on note A_m l'événement "m divise x". On note également B l'événement "x est premier avec n". Enfin, on note $p_1, \ldots, p_r$ les diviseurs premiers de n.

1. Exprimer B en fonction des A_{p_k}.
2. Pour tout entier naturel m qui divise n, calculer la probabilité de A_m.
3. En déduire la probabilité de B.
4. Application : on note $\varphi(n)$ le nombre d'entiers compris entre 1 et n qui sont premiers avec n (on appelle φ la fonction indicatrice d'Euler). Démontrer que

$$\varphi(n) \;=\; n \prod_{k=1}^{r} \left(1 - \frac{1}{p_k}\right) .$$

Exercice 13. Un avion contient n places, numérotées. Les passagers rentrent l'un après l'autre. Le premier passager a oublié son billet, il s'installe au hasard uniformément parmi les n places. Les passagers suivants ont tous leur billet sur eux. À chaque fois qu'un nouveau passager rentre, si le siège correspondant à son billet est libre, il s'y assoit, sinon il s'assoit au hasard uniformément parmi les places encore libres. Quelle est la probabilité que le dernier passager à rentrer dans l'avion s'assoie à la place indiquée par son billet ?