Feuille 4
Bases et sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$ [1]

Les feuilles d'exercices sont découpées en trois types d'exercice :
- Les *indispensables* : à savoir faire en autonomie.
- Les *exercices d'application* : pour mieux maîtriser et comprendre le cours.
- *Pour aller plus loin* : exercices présentant des développements mathématiques ou des études de modélisations de phénomènes issues d'autres disciplines.

Indispensables

Exercice 1. Préciser si les familles suivantes sont libres ou non.

1. Dans $\mathbb{R}^2$: $\big((1,2),(3,5)\big)$.

Solution : Par la théorème du cours (Énoncé indispensable 35), $\big((1,2),(3,5)\big)$ est libre ssi le rang de $\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 5\end{pmatrix}$ est 2= nombre de colonnes. Par l'algorithme de Gauss, en faisant $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$ on obtient $\begin{pmatrix}1 & 3\\ 0 & -1\end{pmatrix}$ donc avec 2 pivots et donc, rang= 2. Donc la famille est libre.

2. Dans $\mathbb{R}^3$: $\big((1,2,3),(1,-2,-3),(-2,-4,-6)\big)$.

Solution : Comme pour la question 1, $\big((1,2,3),(1,-2,-3),(-2,-4,-6)\big)$ est libre ssi $\begin{pmatrix}1 & 1 & -2\\ 2 & -2 & -4\\ 3 & -3 & -6\end{pmatrix}$ est de rang 3= nombre de colonnes. Par l'algorithme de Gauss, on faisant $L_2 \leftrightarrow L_2 - 2L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1$ on a

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & -2\\ 0 & -4 & 0\\ 0 & -6 & 0\end{pmatrix}$$

donc de rang 2. La famille n'est pas libre.

Exercice 2. Les parties suivantes sont-elles génératrices de $\mathbb{R}^3$?

1. $A_1 = \{(0,1,1),(1,0,1)\}$.
2. $A_2 = \{(0,1,1),(1,0,1),(1,1,0)\}$.
3. $A_3 = \{(-2,1,1),(1,-2,1),(1,1,-2)\}$.
4. $A_4 = \{(0,1,1),(1,0,1),(1,1,0),(1,1,1)\}$.
5. $A_5 = \{(-2,1,1),(1,-2,1),(1,1,-2),(0,-3,3)\}$.

Solution : Par la théorème du cours (Énoncé indispensable 35), une famille est génératrice ssi se rang de la matrice associé est = nombre de lignes.

1. Pour A_1, on regarde la matrice $\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ C'est claire que on ne peut pas avoir 3 pivots, donc la famille n'est pas génératrice. Ici on peut aussi utiliser la proposition 2.10 du cours : une famille génératrice a au moins n vecteurs.

1. Version du 10 février 2020

2. Pour $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ on peut utiliser le pivot de Gauss mais c'est plus simple de remarquer que dét $A_2 = 1 \neq 0$. Donc A_2 est inversible et donc par le théorème du cours, de rang 3.
3. Pour $A_3 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ on peut remplacer $L_2 \leftarrow L_2 + \frac{1}{2}L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 + \frac{1}{2}L_1$:
$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & -2+\frac{1}{2} & 1+\frac{1}{2} \\ 0 & 1+\frac{1}{2} & -2+\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$$
$L_3 \leftarrow L_3 + L_2$
$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
donc A_3 est de rang 2 et la famille n'est pas génératrice.
4. Pour
$$A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$
Par l'algorithme de Gauss, on obtient : $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$L_3 \leftarrow L_3 + L_2$
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$
Donc rang 3 avec 3 lignes. Donc la famille est génératrice. De façon plus simple, on obtient la même conclusion du fait que la famille A_4 contient la famille génératrice A_2 et donc, ça suffit pour la condition d'être génératrice.
5. Comme pour A_3, $L_2 \leftarrow L_2 + \frac{1}{2}L_1$, $\quad L_3 \leftarrow L_3 + \frac{1}{2}L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 + L_2$
$$A_5 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
Donc toujours pas génératrice.

Exercice 3. Dans $\mathbb{R}^3$, donner un exemple de famille libre qui n'est pas génératrice. et un exemple de famille génératrice qui n'est pas libre.

Solution : Par exemple la famille $\{(1,0,0),(0,1,0)\}$ est libre mais pas génératrice. La famille

$$\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1),(1,1,1)\}$$

est génératrice mais pas libre.

Exercice 4. Dans $\mathbb{R}^3$, on considère les trois vecteurs $u=(1,1,-1)$, $v=(-1,1,1)$ et $w=(1,-1,1)$. Montrer que u,v,w forment une base de $\mathbb{R}^3$. Donner les coordonnées du vecteur $(2,1,3)$ dans cette base.

Solution : Par la théorème du cours (Énoncé indispensable 35), u, v et w forment une base ssi la matrice associée est inversible et donc, ssi, sont déterminant est non-nul :

$$\text{dét}\begin{pmatrix}1&-1&1\\1&1&-1\\-1&1&1\end{pmatrix}=1\,\text{dét}\begin{pmatrix}1&-1\\1&1\end{pmatrix}-1\,\text{dét}\begin{pmatrix}-1&1\\1&1\end{pmatrix}+(-1)\,\text{dét}\begin{pmatrix}-1&1\\1&-1\end{pmatrix}=$$

$$=1.(1+1)-(-1-1)-(1-1)=2+2=4\neq 0$$

On peut calculer l'inverse par l'algorithme de Gauss, on obtient :

$$A^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\1&0&1\end{pmatrix}$$

On obtient les coordonnées du vecteur $(2,1,3)$ dans cette base, par

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}3\\4\\5\end{pmatrix}$$

Donc,

$$\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}=\frac{3}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}+\frac{5}{2}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$$

Exercice 5. On considère les trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$: $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1\\x\\1\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$, à quelles conditions sur $x\in\mathbb{R}$ forment-ils une base de $\mathbb{R}^3$?

Solution : Les trois vecteurs forment une base si et seulement si ils forment un système libre, donc si et seulement si l'équation :

$$a\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}1\\x\\1\end{pmatrix}+c\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix},$$

n'admet que $a=b=c=0$ comme solution. Or résoudre cette équation est équivalent à résoudre le système :

$$\begin{cases}a+b=0\\bx=0\\b+c=0\end{cases},$$

système qui admet comme unique solution $a = b = c = 0$ si et seulement si $x \neq 0$.

Exercice 6. Déterminer la matrice de passage de la base $\mathcal{B}_1$ de $\mathbb{R}^3$ à la base $\mathcal{B}_2$ de $\mathbb{R}^3$, où

$$\mathcal{B}_1 = \big((1,2,1),(2,3,3),(3,7,1)\big), \quad \mathcal{B}_2 = \big((3,1,4),(5,3,2),(1,-1,7)\big).$$

Solution : On pose

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 7 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 4 & 2 & -7 \end{pmatrix}$$

La matrice de changement de base est donnée par $A^{-1}.B$. Par pivot de Gauss, on a

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -18 & 7 & 5 \\ 5 & -2 & -1 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Finalement $A^{-1}.B = \begin{pmatrix} -18 & 7 & 5 \\ 5 & -2 & -1 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 4 & 2 & -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -27 & -59 & -60 \\ 9 & 17 & 14 \\ 4 & 10 & 11 \end{pmatrix}$

Exercice 7. Déterminer si les ensembles suivants sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$.

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = x+1\}$$

$$A_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = x\}, \quad A_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = x^2\}, \quad A_3 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \geqslant x\}.$$

$$E_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x+y=0\}, \quad E_1' = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | xy = 0\}.$$

$$E_2 = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 | x = 0, y = z\}, \quad E_2' = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x = 1\}.$$

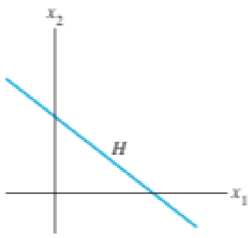
$$E_3 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + xy \geqslant 0\}, \quad E_3' = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + xy + y^2 \geqslant 0\}.$$

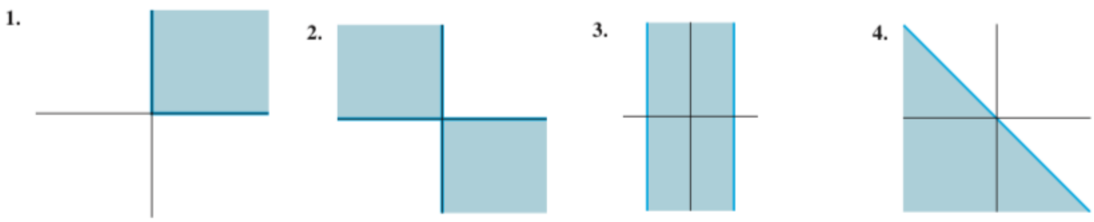
Solution :

1. A n'est pas un sous-espace car $(0,0) \notin A$
2. A_1 est un sous-espace de $\mathbb{R}^2$. En effet :
   — $(0,0) \in A_1$;
   — Si $(a,b) \in A_1$, alors $\lambda(a,b)$ aussi car $\lambda.a = \lambda b$;
   — Si $(a,b),(x,y) \in A_1$, alors $(a,b)+(x,y) = (a+x, b+y) \in A_1$ car $a+x = b+y$;
   Donc A_1 est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.
3. A_2 n'est pas un sous-espace vectoriel car $(2,4) \in A_2$, mais $2.(2,4) = (4,8)$ n'appartient pas.
4. A_3 n'est pas un sous-espace vectoriel car $(1,2) \in A_3$ mais $-(1,2) = (-1,-2)$ n'appartient pas.
5. E_1 est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

6. E_1' n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. En fait, ce n'est même pas un sous-groupe abélien car les vecteurs $u = (1, 0, 0)$ et $v = (0, 1, 0)$ sont dedans mais leur somme $u + v = (1, 1, 0)$ ne vérifie pas l'équation $xy = 0$.
7. E_2 est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
8. E_2' n'est pas un (sous-)espace vectoriel car il ne contient pas l'élément nul. Remarquons que ce n'est même pas un sous-groupe car le vecteur $(2, 0, 0) = (1, 0, 0) + (1, 0, 0) \notin E_2'$ alors qu'il est somme de deux vecteurs de E_2'.
9. E_3 n'est pas un (sous-)espaces vectoriel (de $\mathbb{R}^2$) car ce n'est pas un groupe abélien. En effet, les points $(0, -1)$ et $(\frac{1}{2}, 0)$ sont dans E_3 mais leur somme $(\frac{1}{2}, 0) + (0, -1) = (\frac{1}{2}, -1) \notin E_3$ car $\frac{1}{4} + \frac{1}{2} \times (-1) = -\frac{1}{4} \leq 0$. Remarque : par contre E_3 est stable par multiplication par un scalaire (faire un dessin).
10. E_3' est l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$ tout entier car l'inégalité $x^2 + xy + y^2 \geq 0$ est vraie pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$! Remarque : un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$ défini par une inégalité n'est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ que lorsque l'inégalité en question est équivalente à un système linéaire.

Exercice 8. Expliquer pourquoi les sous-ensembles de $\mathbb{R}^2$ ne forment pas un sous-espace de vectoriel :





Solution :

0 Le vecteur $(0, 0)$ n'appartient pas à H.
1 Le vecteur $(1, 0)$ appartient mais $(-1, 0)$ n'est pas dans le sous-ensemble.
2 Les vecteurs $(0, 1)$ et $(1, 0)$ appartient mais leur somme $(1, 1)$ non.
3 Le vecteur $(1, 0)$ est dans le sous-ensemble mais $50.(1, 0) = (50, 0)$ non.
4 Le vecteur $(-1, -1)$ est dans le sous-ensemble mais $-(-1, -1) = (1, 1)$ non.

Exercice 9. On considère, dans $\mathbb{R}^4$, les vecteurs :

$$v_1 = (1, 2, 3, 4), v_2 = (1, 1, 1, 3), v_3 = (2, 1, 1, 1), v_4 = (-1, 0, -1, 2), v_5 = (2, 3, 0, 1)$$

. Soit F le sous-espace vectoriel engendré par $\{v_1, v_2, v_3\}$ et soit G celui engendré par $\{v_4, v_5\}$. Calculer les dimensions respectives de F,G, $F \cap G$, $F + G$.

Solution :

1. G est engendré par deux vecteurs donc dim $G \leq 2$. Clairement v_4 et v_5 ne sont pas liés donc $dimG \geq 2$, c'est-à-dire $dimG = 2$.
2. F est engendré par trois vecteurs donc $dimF \leq 3$. Un calcul montre que la famille $\{v_1, v_2, v_3\}$ est libre, don $dimF \geq 3$ et donc $dimF = 3$.
3. Essayons d'abord d'estimer la dimension de $F \cap G$. D'une part $F \cap G \subseteq G$ donc $dim(F \cap G) \leq 2$. Utilisons d'autre part la formule $dim(F+G) = dimF + dimG - dim(F \cap G)$. Comme $F+G \subseteq \mathbb{R}^4$, on a $dim(F+G) \leq 4$ d'où on tire l'inégalité $dim(F \cap G) \geq 1$. Donc soit $dim(F \cap G) = 1$ ou bien $dim(F \cap G) = 2$. Supposons que $dim(F \cap G) = 2$.. Comme $F \cap G \subseteq G$ on aurait dans ce cas $F \cap G = G$ et donc $G \subseteq F$. En particulier il existerait $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que $v_4 = av_1 + bv_2 + cv_3$. On vérifie que ce n'est pas le cas, ainsi $dim(F \cap G)$ n'est pas égale à 2. On peut donc conclure $dim(F \cap G) = 1$.
4. Par la formule $dim(F+G) = dimF + dimG - dim(F \cap G)$, on obtient $dim(F+G) = 2+3-1 = 4$.Cela entraine $F + G = \mathbb{R}^4$.

Pour aller plus loin

Exercice 10. Donner un système d'équations des espaces vectoriels engendrés par les vecteurs suivants

1. $u_1 = (1, 2, 3)$;
2. $u_1 = (1, 2, 3)$ et $u_2 = (-1, 0, 1)$;
3. $u_1 = (1, 2, 0)$, $u_2 = (2, 1, 0)$ et $u_3 = (1, 0, \alpha)$ où $\alpha \in \mathbb{R}$. Existe-t-il une valeur de α où le vecteur u_3 s'écrit comme combinaison linéaire de u_1 et u_2 ? Le cas échéant qu'arrive-t-il au système d'équations précédent pour cette valeur de α ?

Solution :

1. On procède par équivalences en appliquant le Pivot de Gauss en éliminant les paramètres.

$$v = (x, y, z) \in \mathbb{R} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R}, \begin{cases} x = t \\ y = 2t \\ z = 3t \end{cases} \Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R}, \begin{cases} x = t \\ y = 2x \\ z = 3x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x \\ z = 3x \end{cases}$$

2. On applique là-encore le Pivot de Gauss pour éliminer les paramètres du système (ici notés s et t).

$$v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \exists t, s \in \mathbb{R}, \begin{cases} x = t - s \\ y = 2t \\ z = 3t + s \end{cases} \Leftrightarrow \exists t, s \in \mathbb{R}, \begin{cases} x = \frac{1}{2}y - s \\ y = 2t \\ z = \frac{3}{2}y + s \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \exists t, s \in \mathbb{R}, \begin{cases} x = \frac{1}{2}y - s \\ y = 2t \\ z - 3x = s + 3s = 4s \end{cases} \Leftrightarrow \exists t, s \in \mathbb{R}, \begin{cases} x = \frac{1}{2}y - \frac{1}{4}(z - 3x) \\ y = 2t \\ z - 3x = s + 3s = 4s \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \exists t, s \in \mathbb{R}, \begin{cases} 4x = 2y - z + 3x \\ y = 2t \\ z - 3x = s + 3s = 4s \end{cases} \Leftrightarrow x - 2y + z = 0.$$

3. Supposons $\alpha \neq 0$.

$$v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}u_1 + \mathbb{R}u_2 + \mathbb{R}u_3 \Leftrightarrow \ \exists t, s, r \in \mathbb{R}, \begin{cases} x = t + 2s + r \\ y = 2t + s \\ z = \alpha r \end{cases} \quad \Leftrightarrow \ \exists t, s, r \in \mathbb{R}, \begin{cases} x = t + 2s + \alpha^{-1} z \\ y - 2x = s - 4s - 2\alpha^{-1} \\ z = \alpha r \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \exists t, s, r \in \mathbb{R}, \begin{cases} x = t + 2s + \alpha^{-1} z \\ y - 2x + 2\alpha^{-1} z = -3s \\ z = \alpha r \end{cases} \quad \Leftrightarrow \ \exists t, s, r \in \mathbb{R}, \begin{cases} x = t + \dfrac{-2}{3}(y - 2x + 2\alpha^{-1} z) + \alpha^{-1} z \\ y - 2x + 2\alpha^{-1} z = -3s \\ z = \alpha r \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \exists t, s, r \in \mathbb{R}, \begin{cases} -x + 2y + \alpha^{-1} z = 3t \\ y - 2x + 2\alpha^{-1} z = -3s \\ z = \alpha r \end{cases} \quad \Leftrightarrow \ \exists t, s, r \in \mathbb{R}, \begin{cases} -\alpha x + 2\alpha y + z = 3\alpha t \\ \alpha y - 2\alpha x + 2z = -3\alpha s \\ z = \alpha r \end{cases}$$

Ce qui est toujours vrai quelque soient $x, y, z \in \mathbb{R}$. Ainsi u_1, u_2 et u_3 engendrent tout l'espace $\mathbb{R}^3$. Quand $\alpha = 0$, u_1, u_2 et u_3 engendrent seulement le sous-espace vectoriel $z = 0$. De plus, $u_3 = -\dfrac{1}{3}(u_1 - 2u_2)$.

Lorsque $\alpha = 0$, le système d'équation plus haut devient équivalent à $z = 0$. On retrouve bien ce que l'on vient de dire.