Feuille 2
Systèmes linéaires

Les feuilles d'exercices sont découpées en trois types d'exercice :
- Les *indispensables* : à savoir faire en autonomie.
- Les *exercices d'application* : pour mieux maîtriser et comprendre le cours.
- *Pour aller plus loin* : exercices présentant des développements mathématiques ou des études de modélisations de phénomènes issues d'autres disciplines.

Indispensables

Exercice 1.

1. Écrire chaque système sous forme matricielle :

$$a)\begin{cases} x = -y \\ 2x = 3y \end{cases}, \quad b)\begin{cases} -3z = 1 + 2y \\ 3y = 2x + 2 \\ 3 = 3x + 2z \end{cases}, \quad c)\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + y + t = -1 \\ z + 2t = 1 \end{cases}, \quad d)\begin{cases} x + y = 1 \\ y + z = 2 \\ z + t = 3 \\ t + w = 4 \end{cases}$$

Solution :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & -2 & -3 \\ -2 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1, \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

2. Écrire chaque égalité matricielle sous forme de système linéaire :

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \\ w \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

Solution :

$$a)\begin{cases} x - y = -1 \\ -x + y = 1 \end{cases}, \quad b)\begin{cases} y - z = 0 \\ x + z = 1 \\ -x + y = 0 \end{cases}, \quad d)\begin{cases} x + z + w = 1 \\ y + t + u = -1 \end{cases}$$

Exercice 2. On considère le système linéaire suivant :

$$(\mathcal{S})\begin{cases} y - x = 1 \\ y + x = 2 \end{cases}$$

1. Résoudre le système.
2. Écrire la matrice A du système $\mathcal{S}$, puis la matrice augmentée.
3. En réalisant des opérations sur les lignes de la matrice augmentée, déterminer à nouveau l'ensemble de solutions.
4. Quel est le rang de $\mathcal{S}$?

<u>Solution</u> :

1. À la main,

$$\begin{cases} y - x = 1 \\ y + x = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x + 1 \\ y = 2 - x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1}{2} \\ y = \dfrac{3}{2} \end{cases}$$

2. Matrice du système :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad (A|b) = \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{array}\right).$$

3. On utilise la méthode du pivot de Gauss :

$$L_2 \leftarrow L_2 + L_1 : \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{array}\right),$$

$$L_2 \leftarrow \frac{1}{2}L_2 : \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} \end{array}\right),$$

$$L_1 \leftarrow L_1 - L_2 : \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 0 & \frac{-1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} \end{array}\right),$$

$$L_1 \leftarrow -1 : \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} \end{array}\right),$$

4. Le système $\mathcal{S}$ a même rang que le système équivalent. Ainsi, le rang de $\mathcal{S}$ est égal à 2.

Exercice 3. Résoudre les systèmes suivants et calculer leurs rangs.

$$(\mathcal{S}_1)\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x & + & 2y & - & z & + & t & = & 1 \\ x & + & 3y & + & z & - & t & = & 2 \\ -x & + & y & + & 7z & + & 2t & = & 3 \\ 2x & + & y & - & 8z & + & t & = & 4 \end{array}\right. \qquad (\mathcal{S}_2)\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x & + & y & - & 3z & - & 4t & = & -1 \\ 2x & + & 2y & + & 2z & - & 3t & = & 2 \\ 3x & + & 6y & - & 2z & + & t & = & 8 \\ 2x & + & y & + & 5z & + & t & = & 5 \end{array}\right.$$

$$(\mathcal{S}_3)\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x & - & y & + & z & + & t & = & 3 \\ 5x & + & 2y & - & z & - & 3t & = & 5 \\ -3x & - & 4y & + & 3z & + & 2t & = & 1 \\ 6x & + & y & & & - & 2t & = & 8 \end{array}\right.$$

Solution : Pour résoudre ces systèmes on utilise la méthode du pivot de Gauss.

Résolution du système $\mathcal{S}_1$:

$$\begin{cases} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 2L_1 \end{cases} \quad : \quad \begin{cases} \boxed{x} + 2y - z + t = 1 \\ y + 2z - 2t = 1 \\ 3y + 6z + 3t = 4 \\ -3y - 6z - t = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} L_3 \leftarrow L_3 - 3L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 + 3L_2 \end{cases} \quad : \quad \begin{cases} \boxed{x} + 2y - z + t = 1 \\ \boxed{y} + 2z - 2t = 1 \\ 9t = 1 \\ -7t = 5 \end{cases}$$

$$L_3 \leftarrow \frac{1}{9}L_3 \quad : \quad \begin{cases} \boxed{x} + 2y - z + t = 1 \\ \boxed{y} + 2z - 2t = 1 \\ \boxed{t} = \frac{1}{9} \\ -7t = 5 \end{cases}$$

$$L_4 \leftarrow L_4 + 7L_3 \quad : \quad \begin{cases} \boxed{x} + 2y - z + t = 1 \\ \boxed{y} + 2z - 2t = 1 \\ \boxed{t} = \frac{1}{9} \\ 0 = \frac{52}{9} \end{cases}$$

Le système $\mathcal{S}_1$ n'a pas de solution.

Résolution du système $\mathcal{S}_2$:

$$\begin{cases} L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 2L_1 \end{cases} : \left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} \boxed{x} & + & y & - & 3z & - & 4t & = & -1 \\ & & & & 8z & + & 5t & = & 4 \\ & & 3y & + & 7z & + & 13t & = & 11 \\ & - & y & + & 11z & + & 9t & = & 7 \end{array}\right.$$

$$L_2 \leftrightarrow L_4 : \left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} \boxed{x} & + & y & - & 3z & - & 4t & = & -1 \\ & - & y & + & 11z & + & 9t & = & 7 \\ & & 3y & + & 7z & + & 13t & = & 11 \\ & & & & 8z & + & 5t & = & 4 \end{array}\right.$$

$$L_2 \leftarrow -L_2 : \left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} \boxed{x} & + & y & - & 3z & - & 4t & = & -1 \\ & & \boxed{y} & - & 11z & - & 9t & = & -7 \\ & & 3y & + & 7z & + & 13t & = & 11 \\ & & & & 8z & + & 5t & = & 4 \end{array}\right.$$

$$L_3 \leftarrow L_3 - 3L_2 : \left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} \boxed{x} & + & y & - & 3z & - & 4t & = & -1 \\ & & \boxed{y} & - & 11z & - & 9t & = & -7 \\ & & & & 40z & + & 40t & = & 32 \\ & & & & 8z & + & 5t & = & 4 \end{array}\right.$$

$$L_3 \leftarrow \frac{1}{40}L_3 : \left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} \boxed{x} & + & y & - & 3z & - & 4t & = & -1 \\ & & \boxed{y} & - & 11z & - & 9t & = & -7 \\ & & & & \boxed{z} & + & t & = & \frac{4}{5} \\ & & & & 8z & + & 5t & = & 4 \end{array}\right.$$

$$L_4 \leftarrow L_4 - 8L_3 : \left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} \boxed{x} & + & y & - & 3z & - & 4t & = & -1 \\ & & \boxed{y} & - & 11z & - & 9t & = & -7 \\ & & & & \boxed{z} & + & t & = & \frac{4}{5} \\ & & & & & - & 3t & = & -\frac{12}{5} \end{array}\right.$$

$$L_4 \leftarrow -\frac{1}{3}L_4 : \left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} \boxed{x} & + & y & - & 3z & - & 4t & = & -1 \\ & & \boxed{y} & - & 11z & - & 9t & = & -7 \\ & & & & \boxed{z} & + & t & = & \frac{4}{5} \\ & & & & & & \boxed{t} & = & \frac{4}{5} \end{array}\right.$$

$$L_1 \leftarrow L_1 - L2 : \left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} \boxed{x} & & & + & 8z & + & 5t & = & 6 \\ & & \boxed{y} & - & 11z & - & 9t & = & -7 \\ & & & & \boxed{z} & + & t & = & \frac{4}{5} \\ & & & & & & \boxed{t} & = & \frac{4}{5} \end{array}\right.$$

$$\begin{cases} L_1 \leftarrow L_1 - 8L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 + 11L_3 \end{cases} : \left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} \boxed{x} & & & & & - & 3t & = & -\frac{2}{5} \\ & & \boxed{y} & & & & 2t & = & \frac{9}{5} \\ & & & & \boxed{z} & + & t & = & \frac{4}{5} \\ & & & & & & \boxed{t} & = & \frac{4}{5} \end{array}\right.$$

$$\begin{cases} L_1 \leftarrow L_1 + 3L_4 \\ L_2 \leftarrow L_2 - 2L_4 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_4 \end{cases} : \left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} \boxed{x} & & & & & & & = & 2 \\ & & \boxed{y} & & & & & = & \frac{1}{5} \\ & & & & \boxed{z} & & & = & 0 \\ & & & & & & \boxed{t} & = & \frac{4}{5} \end{array}\right.$$

Le système $\mathcal{S}_2$ a exactement une solution : $t = \dfrac{4}{5}$, $z = 0$, $y = \dfrac{1}{5}$, $x = 2$. Donc rang=4.

Résolution du système $\mathcal{S}_3$:

$$\begin{cases} L_2 \leftarrow L_2 - 5L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + 3L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 6L_1 \end{cases} : \quad \left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} \boxed{x} & - & y & + & z & + & t & = & 3 \\ & & 7y & - & 6z & - & 8t & = & -10 \\ & - & 7y & + & 6z & + & 5t & = & 10 \\ & & 7y & - & 6z & - & 8t & = & -10 \end{array}\right.$$

$$\begin{cases} L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 - L_2 \end{cases} : \quad \left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} \boxed{x} & - & y & + & z & + & t & = & 3 \\ & & 7y & - & 6z & - & 8t & = & -10 \\ & & & & & - & 3t & = & 0 \\ & & & & & & 0 & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\begin{cases} L_2 \leftarrow \dfrac{1}{7}L_2 \\ L_3 \leftarrow -\dfrac{1}{3}L_3 \end{cases} : \quad \left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} \boxed{x} & - & y & + & z & + & t & = & 3 \\ & & \boxed{y} & - & \frac{6}{7}z & - & \frac{8}{7}t & = & -\frac{10}{7} \\ & & & & & & \boxed{t} & = & 0 \\ & & & & & & 0 & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\begin{cases} L_1 \leftarrow L_1 - L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 + \dfrac{8}{7}L_3 \end{cases} : \quad \left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} \boxed{x} & - & y & + & z & & & = & 3 \\ & & \boxed{y} & - & \frac{6}{7}z & & & = & -\frac{10}{7} \\ & & & & & & \boxed{t} & = & 0 \\ & & & & & & 0 & = & 0 \end{array}\right.$$

$$L_1 \leftarrow L_1 + L_2 : \quad \left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} \boxed{x} & & & + & \frac{1}{7}z & & & = & \frac{11}{7} \\ & & \boxed{y} & - & \frac{6}{7}z & & & = & -\frac{10}{7} \\ & & & & & & \boxed{t} & = & 0 \\ & & & & & & 0 & = & 0 \end{array}\right.$$

Les solutions du système $\mathcal{S}_3$ sont $(x, y, t, z) = \left(\frac{11}{7} - \frac{1}{6}z, -\frac{10}{7} + \frac{6}{7}z, 0, z\right)$, où z est une variable libre. Donc rang=4-1=3.

Exercice 4. Proposons une solution (erronée) du système suivant :

$$\begin{cases} 2x + 2y + z = 0 \\ x + 2y + 2z = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$$

On remplace la ligne L_1 par $L_1 - L_2$ pour éliminer y, L_2 par $L_2 - L_3$ pour éliminer x et L_3 par $L_3 - L_1$ pour éliminer z. On obtient

$$\begin{cases} x - z = 0 \\ y + z = 0 \\ -x - y = 0 \end{cases}$$

Ce système équivaut à $x = -y = z$. Donc $(x, y, z) = (1, -1, 1)$ est solution. Mais ce triplet n'est pas solution du système initial... Où est l'erreur ?

Solution : Le problème sont les remplacements simultanés, surtout sur le dernier L_3 par $L_3 - L_1$ où nous avons utilisé le L_1 du début et non son remplacement L_1 par $L_1 - L_2$. Cela fait que cette dernière étape n'est pas réversible par des opérations élémentaires. Cela explique pourquoi il faut fixer des pivots.

Exercice 5. Soit $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$. On considère le système linéaire :

$$(\mathcal{S}) \begin{cases} -x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 = b_1 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 = b_2 \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 3x_4 = b_3 \end{cases}$$

1. Écrire la matrice A du système $\mathcal{S}$, puis la matrice augmentée.
2. En effectuant des opérations sur les lignes de la matrice augmentée, déterminer les conditions sur b_1, b_2 et b_3 pour que le système admette une solution.
3. Résoudre le système en fonction de b_1, b_2 et b_3.
4. Quel est le rang de $\mathcal{S}$?

Solution : 1. La matrice A et la matrice augmentée de $\mathcal{S}$ sont respectivement

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 3 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad (A|b) = \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & -2 & 3 & 1 & b_1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & b_2 \\ 3 & 4 & 1 & 3 & b_3 \end{array}\right).$$

2. On utilise la méthode du pivot de Gauss :

$$L_1 \leftarrow -L_1 : \left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 2 & -3 & -1 & -b_1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & b_2 \\ 3 & 4 & 1 & 3 & b_3 \end{array}\right); \quad \begin{cases} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1 \end{cases} : \left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 2 & -3 & -1 & -b_1 \\ 0 & -1 & 5 & 3 & b_2 + b_1 \\ 0 & -2 & 10 & 6 & b_3 + 3b_1 \end{array}\right);$$

$$L_2 \leftarrow -L_2 : \left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 2 & -3 & -1 & -b_1 \\ 0 & \boxed{1} & -5 & -3 & -b_2 - b_1 \\ 0 & -2 & 10 & 6 & b_3 + 3b_1 \end{array}\right); \quad L_3 \leftarrow L_3 + 2L_2 : \left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 2 & -3 & -1 & -b_1 \\ 0 & \boxed{1} & -5 & -3 & -b_2 - b_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_3 - 2b_2 + b_1 \end{array}\right);$$

$$L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2 : \left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 0 & 7 & 5 & b_1 + 2b_2 \\ 0 & \boxed{1} & -5 & -3 & -b_2 - b_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_3 - 2b_2 + b_1 \end{array}\right) =: (A'|b').$$

Le système $\mathcal{S}$ a une solution si et seulement si $b_3 - 2b_2 + b_1 = 0$;

3. Dans ce cas, les solutions de $\mathcal{S}$ sont exactement les solutions du système suivant :

$$(\mathcal{S}') \begin{cases} x_1 = b_1 + 2b_2 - 7x_3 - 5x_4 \\ x_2 = -b_2 - b_1 + 5x_3 + 3x_4 \end{cases}$$

où x_3 et x_4 sont des variables libres.
4. Le système $\mathcal{S}$ a même rang que le système équivalent $\mathcal{S}'$, dont la matrice A' est échelonnée à deux lignes. Ainsi, le rang de $\mathcal{S}$ est égal à 2.

Exercice 6. Soit A une matrice échelonnée de taille $n \times m$. Considérons les quatre cas suivants :

1. $n = 3$, $m = 3$ et A admet 3 pivots.
2. $n = 4, m = 4$ et A admet 3 pivots.
3. $n = 2, m = 5$ et A admet 2 pivots.
4. $n = 3, m = 2$ et A admet 2 pivots.

a) Pour quel(s) cas le système $A\vec{x} = \vec{0}$ admet-il une solution non-triviale ?
b) Pour quel(s) cas, quel que soit le vecteur $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$, le système $A\vec{x} = \vec{b}$ admet-il une solution ?
c) Pour quel(s) cas, quel que soit le vecteur $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$, le système $A\vec{x} = \vec{b}$ admet-il une unique solution ?
d) Comment se généralisent les résultats précedents pour une matrice A quelconque ?

<u>Solution</u> : Application directe de l'énoncé indispensable 17. En effet, le système homogène admet une solution non-triviale ssi le $rang A \neq m$. Comme rang A = nombre de pivots, la solution non-triviale existe seulement dans les cas 2. et 3. Pour l'équation non-homogène, par le même énoncé, il faut que rang=n, ce qui est le cas seulement dans les exemples 1. et 3. Pour la dernière question, il faut que $rang = n = m$, donc le 1. Pour une matrice quelconque, on utilise le rang.

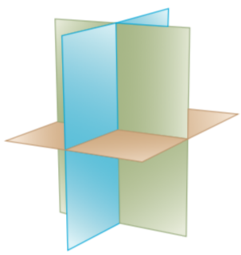
Exercice 7. Une équation à trois inconnues est l'équation cartésienne d'un plan dans l'espace. Un système de trois équations décrit donc l'intersection de trois plans. Pour les quatre possibilités géométriques ci-dessous, retrouver le système qui lui correspond :

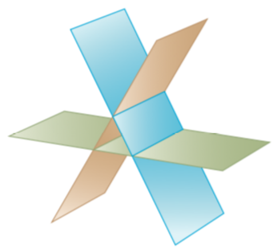
$$a) \begin{cases} z = -1 \\ y = 0 \\ z = 1 \end{cases}$$

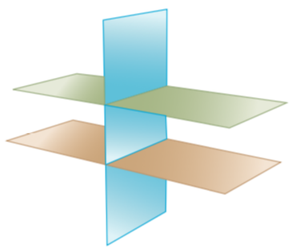
$$b) \begin{cases} z = 0 \\ y = 0 \\ x = 0 \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} z - y = 0 \\ z + y = 0 \\ z = -1 \end{cases}$$

$$d) \begin{cases} z - y = 0 \\ z + y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$


1.


3.


2.


4.

i) pas de solutions — X) intersection réduite à un point unique

ii) nombre infini de solutions — Y) intersection vide

iii) solution unique — Z) intersection contenant une infinité de points

<u>Solution</u> :

— $a) \leftrightarrow 2. \leftrightarrow i) \leftrightarrow Y)$;
— $b) \leftrightarrow 1. \leftrightarrow iii) \leftrightarrow X)$;
— $c) \leftrightarrow 3. \leftrightarrow i) \leftrightarrow Y)$;
— $d) \leftrightarrow 4. \leftrightarrow ii) \leftrightarrow Z)$;

Exercice 8 (Inversion d'une matrice carrée)**.** Calculer le rang de A et déterminer si A est inversible. Si c'est le cas, calculer l'inverse de A.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Solution : Pour le rang de A, on applique le pivot de Gauss :

$$\begin{pmatrix}1&1&1\\2&1&1\\1&2&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1\\0&-1&-1\\0&1&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1\\0&-1&-1\\0&0&-1\end{pmatrix}$$

donc rang $A=3$ donc par le théorème du rang, A est inversible. Pour inverser la matrice A, on résout le système $AX=Y$, où l'on a posé $X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ et $Y=\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$.

$$AX=Y \iff \left\{\begin{array}{ccccccc} x&+&y&+&z&=&a\\ 2x&+&y&+&z&=&b\\ x&+&2y&+&z&=&c\end{array}\right.$$

On effectue $L_2\leftarrow L_2-L_1$ et $L_3\leftarrow L_3-L_1$:

$$\iff \left\{\begin{array}{ccccccc} x&+&y&+&z&=&a\\ x&+&0&+&0&=&b-a\\ 0&+&y&+&0&=&c-a\end{array}\right.$$

On trouve donc $x=b-a$, $y=c-a$ et $z=3a-b-c$. Ainsi, en considérant les solutions pour $Y=(1,0,0)$, $(0,1,0)$ et $(0,0,1)$, on trouve

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}-1&1&0\\-1&0&1\\3&-1&-1\end{pmatrix}.$$

Applications

Exercice 9. Dans un magasin, tous les articles d'une même catégorie sont au même prix. Pierre et Marie décident d'y acheter des DVD et des bandes dessinées. Ils possèdent chacun 75 euros. Pierre achète un DVD et 4 bandes dessinées ; il lui reste 14,5 euros. Marie dépense 73,5 euros pour l'achat de 2 DVD et 3 bandes dessinées. Calculer le prix de chaque article.

Solution : Soit D le prix d'un DVD et B le prix d'une bande dessinée. Pour Pierre on a l'équation

$$1.D+4.B=75-14,5$$

Pour Marie, on a

$$2D+3B=73,5$$

Alors, on a un système linéaire,

$$(\mathcal{S})\begin{cases}D+4B=60,5\\2D+3B=73,5\end{cases}$$

avec matrice augmentée

$$\left(\begin{array}{cc|c}1&4&60,5\\2&3&73,5\end{array}\right).$$

Par pivot de Gauss, on obtient un système équivalent :

$$L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 : \quad \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 4 & 60,5 \\ 0 & 3-8 & 73,5 - 2*60,5 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 4 & 60,5 \\ 0 & -5 & -47,5 \end{array}\right)$$

$$L_2 \leftarrow \frac{1}{-5} L_2 : \quad \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 4 & 60,5 \\ 0 & 1 & 9,5 \end{array}\right)$$

$$L_1 \leftarrow L_1 - 4L_2 : \quad \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 60,5 - 4*9,5 \\ 0 & 1 & 9,5 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 22,5 \\ 0 & 1 & 9,5 \end{array}\right)$$

Ainsi un DVD coûte 22,5 euros et une bande dessinée 9,5 euros.

Exercice 10. Pour suivre un certain régime amaigrissant, il faut manger par jour environ 33g de protéine, 45g de glucides et 3g de lipides. Malheureusement, dans le frigo, nous n'avons que du lait écrémé, du soja et du blé. Voici un tableau avec les informations nutritionnelles :

(par 100g)	Lait	Soja	Blé
Protéine	36g	51g	13g
Glucides	52g	34g	74g
Lipides	0g	7g	1,1g

Déterminer L, S et B les quantités de lait, soja et blé que nous devons manger ce jour-là pour faire le régime.

Solution : On commence par écrire un système d'équations. Pour manger 33g de protéine, il faut que

$$36 * L + 51 * S + 13 * B = 33$$

Aussi, pour manger 45g de glucides, il faut que

$$52 * L + 34 * S + 74 * B = 45$$

Finalement, pour manger 3g de lipides, il faut que

$$0 * L + 7 * S + 1,1 * B = 3$$

On obtient donc le système

$$\begin{cases} 36 * L + 51 * S + 13 * B = 33 \\ 52 * L + 34 * S + 74 * B = 45 \\ 0 * L + 7 * S + 1,1 * B = 3 \end{cases},$$

La matrice augmenté du système est

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 36 & 51 & 13 & 33 \\ 52 & 34 & 74 & 45 \\ 0 & 7 & 1,1 & 3 \end{array}\right).$$

Par pivot de Gauss, on obtient

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0,277 \\ 0 & 1 & 0 & 0,392 \\ 0 & 0 & 1 & 0,233 \end{array}\right).$$

Donc, ce jour-là il faut manger 0,277g de lait, 0,392g de soja et 0,233g de blé.

Exercice 11. Le CROUS veut construire une nouvelle résidence étudiante en utilisant des pré-fabriqués modulaires. Pour chaque étage, ils ont 3 modèles pré-conçus.

	Chambres triples	Chambres doubles	Chambres individuelles
Étage Type A	3	7	8
Étage Type B	4	4	8
Étage Type C	5	3	9

En utilisant ces modèles, est-il possible de concevoir un bâtiment de façon à avoir exactement 66 chambres triples, 74 chambres doubles et 136 chambres individuelles ?

Solution : Soient x_A, x_B et x_C, respectivement, le nombre d'étages de type A, B et C. Pour répondre à la question, nous devons considérer le système

$$\begin{cases} 3 * x_A + 4 * x_B + 5 * x_C = 66 \\ 7 * x_A + 4 * x_B + 3 * x_C = 74 \\ 8 * x_A + 8 * x_B + 9 * x_C = 136 \end{cases},$$

avec matrice augmenté

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 4 & 5 & 66 \\ 7 & 4 & 3 & 74 \\ 8 & 8 & 9 & 136 \end{array}\right).$$

Par pivot de Gauss, on obtient

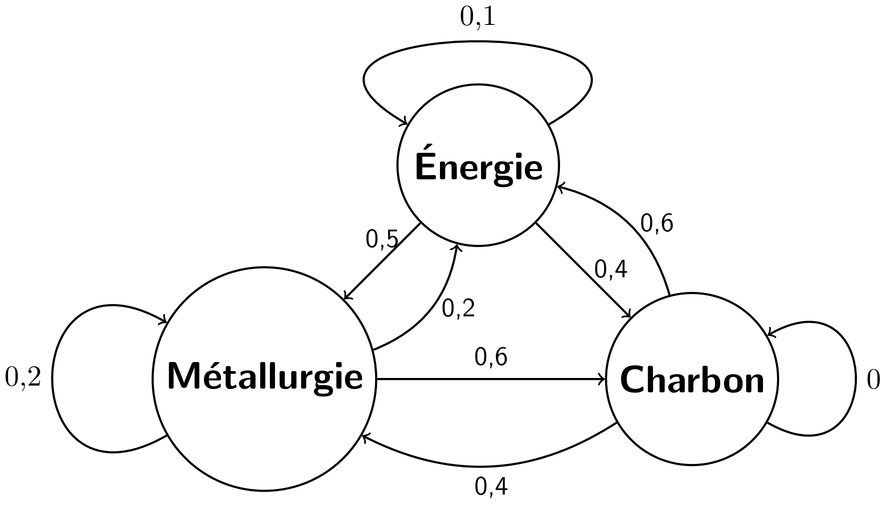
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 2 \\ 0 & 1 & \frac{13}{8} & 15 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Donc, avec solutions données par

$$\begin{cases} x_A - \frac{1}{2} x_C = 2 \\ x_B + \frac{13}{8} x_C = 15 \end{cases},$$

Nous voulons avoir un nombre d'étages naturel (ie, dans $\mathbb{N}$). Si on prendre $x_C = 8$, on a $x_A = 6$ et $x_B = 15 - 13 = 2$ ça marche. Par contre, si on prendre $x_C = 16$, on a $x_A = 10$ et $x_B = 15 - 26 < 0$. Ce serait impossible.

Exercice 12. L'économie d'un certain pays est composée de trois secteurs : énergie E, métallurgie M et charbon C. Chaque secteur doit utiliser une partie de sa propre production et vendre la partie qui reste aux autres secteurs. Le schéma suivant résume ces informations en % de production :



On note que pour chaque secteur, la somme des portions sortantes est égale à 1. Notons p_E, p_M et p_C le chiffre d'affaires de chaque secteur.

1. Traduire par un système d'équations linéaires la condition d'équilibre budgétaire simultanée pour les trois secteurs.

Solution : Pour que le secteur du charbon soit en équilibre budgétaire , il faut que

$$p_C = 0,6p_M + 0,4.p_E$$

Pour le secteur de l'énergie on a besoin de

$$p_E = 0,1p_E + 0,2p_M + 0,6p_C$$

Finalement, pour le secteur métallurgique

$$p_M = 0,5p_E + 0,2p_M + 0,4p_C$$

On obtient donc le système linéaire :

$$\begin{cases} p_C - 0,4p_E - 0,6p_M = 0 \\ -0,6p_C + 0,9p_E - 0,2p_M = 0 \\ -0,4p_C - 0,5p_E + 0,8p_M = 0 \end{cases}$$

2. Est-ce qu'une telle condition d'équilibre existe et est unique ?

Solution : La matrice augmentée :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -0,4 & -0,6 & 0 \\ -0,6 & 0,9 & -0,2 & 0 \\ -0,4 & -0,5 & 0,8 & 0 \end{array}\right)$$

Par pivot de Gauss, on obtient

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -0,4 & -0,6 & 0 \\ 0 & 0,66 & -0,56 & 0 \\ 0 & -0,66 & 0,56 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -0,4 & -0,6 & 0 \\ 0 & 0,66 & -0,56 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -0,4 & -0,6 & 0 \\ 0 & 1 & -0,85 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -0,94 & 0 \\ 0 & 1 & -0,85 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Donc,

$$\begin{cases} p_C = 0,94 p_M \\ p_E = 0,85 p_M \\ p_M \text{ variable libre} \end{cases}$$

Conclusion : il y a une infinité de points d'équilibre budgétaire, un pour chaque choix de p_M

Pour aller plus loin

Exercice 13. Résoudre en fonction du paramètre réel m les systèmes linéaires suivants :

$$(\mathcal{S}_1)\begin{cases} x+2y-3z=1 \\ x+3y-4z=2 \\ 2x+3y-5z=m \end{cases} \qquad (\mathcal{S}_2)\begin{cases} 2x+y-3z=1 \\ x+3y-2z=2 \\ 7x-4y-m^2z=m-4 \end{cases} \qquad (\mathcal{S}_3)\begin{cases} x+my+2z=m \\ -2x+y+(m-2)z=1 \\ mx+y+2z=2m-1 \end{cases}$$

Solution :

Résolution du système $\mathcal{S}_1$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 2 & -3 & 1 \\ 1 & 3 & -4 & 2 \\ 2 & 3 & -5 & m \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 2 & -3 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & m-2 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 2 & -3 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & m-1 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 0 & -1 & -1 \\ 0 & \boxed{1} & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & m-1 \end{array}\right)$$

Si $m \neq 1$, $\mathcal{S}_1$ n'a pas de solutions. Sinon, ses solutions sont $(x,y,z) = (-1+z, 1+z, z)$, où z est une variable libre.

Résolution du système $\mathcal{S}_2$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & 3 & -2 & 2 \\ 7 & -4 & -m^2 & m-4 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 3 & -2 & 2 \\ 0 & -5 & 1 & -3 \\ 0 & -25 & -m^2+14 & m-18 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 3 & -2 & 2 \\ 0 & \boxed{1} & -\frac{1}{5} & \frac{3}{5} \\ 0 & 0 & -m^2+9 & m-3 \end{array}\right)$$

Si $m = -3$, $\mathcal{S}_2$ n'a pas de solution.
Si $m = 3$, les solutions de $\mathcal{S}_2$ sont $(x,y,z) = \left(\frac{1}{5} + \frac{7}{5}z, \frac{3}{5} + \frac{1}{5}z, z\right)$, où z est une variable libre.
Supposons $m \notin \{-3, 3\}$ et poursuivons les opérations sur la matrice augmentée de $\mathcal{S}_2$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 3 & -2 & 2 \\ 0 & \boxed{1} & -\frac{1}{5} & \frac{3}{5} \\ 0 & 0 & \boxed{1} & -\frac{1}{m+3} \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 3 & 0 & \frac{2m+4}{m+3} \\ 0 & \boxed{1} & 0 & \frac{3m+8}{5(m+3)} \\ 0 & 0 & \boxed{1} & -\frac{1}{m+3} \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 0 & 0 & \frac{m-4}{5(m+3)} \\ 0 & \boxed{1} & 0 & \frac{3m+8}{5(m+3)} \\ 0 & 0 & \boxed{1} & -\frac{1}{m+3} \end{array}\right)$$

Dans ce cas, le système $\mathcal{S}_2$ a exactement une solution : $(x,y,z) = \left(\frac{m-4}{5(m+3)}, \frac{3m+8}{5(m+3)}, -\frac{1}{m+3}\right)$.

Résolution du système $\mathcal{S}_3$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & m & 2 & m \\ -2 & 1 & m-2 & 1 \\ m & 1 & 2 & 2m-1 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & m & 2 & m \\ 0 & 2m+1 & m+2 & 2m+1 \\ 0 & -m^2+1 & 2-2m & -m^2+2m-1 \end{array}\right)$$

— Si $m=0$ la matrice augmentée de $\mathcal{S}_3$ est équivalente à

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right)$$

Donc il n'y a pas de solution.

— Si $m=1$, la matrice augmentée de $\mathcal{S}_3$ est équivalente à

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 3 & 3 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & 1 \end{array}\right)$$

et les solutions de $\mathcal{S}_3$ sont $(x,y,z)=(-z,1-z,z)$, où z est une variable libre.

— Si $m=-1$, la matrice augmentée de $\mathcal{S}_3$ est équivalente à

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & -4 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & -1 & 2 & -1 \\ 0 & \boxed{1} & -1 & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & -1 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & -1 & 0 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & -1 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & -1 \end{array}\right)$$

et $\mathcal{S}_3$ a exactement une solution : $(x,y,z)=(1,0,-1)$.

— Supposons $m\notin\{-1,1,0\}$ et poursuivons les opérations sur la matrice augmentée de $\mathcal{S}_2$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & m & 2 & m \\ 0 & -m^2+1 & 2-2m & -m^2+2m-1 \\ 0 & 2m+1 & m+2 & 2m+1 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & m & 2 & m \\ 0 & (1-m)(1+m) & 2(1-m) & (1-m)(m-1) \\ 0 & 2m+1 & m+2 & 2m+1 \end{array}\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & m & 2 & m \\ 0 & \boxed{1} & \dfrac{2}{m+1} & \dfrac{(m-1)}{m+1} \\ 0 & 2m+1 & m+2 & 2m+1 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & m & 2 & m \\ 0 & \boxed{1} & \frac{2}{m+1} & \frac{m-1}{m+1} \\ 0 & 0 & \frac{m(1-m)}{m+1} & \frac{4m+2}{m+1} \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & m & 2 & m \\ 0 & \boxed{1} & \frac{2}{m+1} & \frac{m-1}{m+1} \\ 0 & 0 & \boxed{1} & \frac{4m+2}{m(m-1)} \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & m & 0 & \frac{(m+2)(m^2-3m-2)}{m(m-1)} \\ 0 & \boxed{1} & 0 & \frac{(m+1)(m-4)}{m(m-1)} \\ 0 & 0 & \boxed{1} & \frac{4m+2}{m(m-1)} \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 0 & 0 & \frac{2(m^2-2m-2)}{m(m-1)} \\ 0 & \boxed{1} & 0 & \frac{(m+1)(m-4)}{m(m-1)} \\ 0 & 0 & \boxed{1} & \frac{4m+2}{m(m-1)} \end{array}\right)$$

et $\mathcal{S}_3$ a exactement une solution.

Exercice 14. Soit $k\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$, existe-t-il une matrice B telle que

$$B^2=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ k & 0 \end{pmatrix}\ ?$$

Solution : On pose $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et on calcule B^2

$$B^2 = \begin{pmatrix} a^2 + bc & b(a+d) \\ c(a+d) & d^2 + cb \end{pmatrix}?$$

Pour que $B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ k & 0 \end{pmatrix}$, ses coefficients doivent vérifier le système

$$\begin{cases} a^2 + bc = 0 \\ b(a+d) = 0 \\ d^2 + cb = 0 \\ c(a+d) = k \end{cases} .$$

Comme $k \neq 0$ la dernière équation implique que $(a+d) \neq 0$ et la deuxième équation implique alors que $b = 0$. On en déduit par la première équation que $a = 0$ et par la troisieme que $d = 0$. On arrive donc à une contradiction et ce système n'a pas de solution. Par suite, il n'existe pas de matrice B telle que $B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ k & 0 \end{pmatrix}$ et $k \neq 0$.