Indications sur la feuille de TD 4

Exercice 1. Soient a, $b \in \mathbb{R}$, avec $a \neq 1$. On considère une suite (u_n) telle que $u_{n+1} = au_n + b$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(a) Quelle est la seule limite réelle possible pour la suite (u_n) ? On la note ℓ dans la suite.

(b) On pose $v_n = u_n - \ell$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Vérifier que (v_n) est une suite géométrique.

(c) Pour quelles valeurs du paramètre a la suite (u_n) converge-t-elle ?

(d) Application. On part d'un carré blanc de côté 1. On le partage en 9 carrés de même taille et on colorie le carré central. Pour chacun des petits carrés non coloriés, on réitère le procédé. On note u_n l'aire coloriée après n étapes. Prouver que la suite (u_n) converge et calculer sa limite.

Indications : (a) On peut utiliser le théorème sur les limites possibles (paragraphe 3.4, page 48 du polycopié) ou bien le retrouver par un passage à la limite dans ce cas simple. (b) Exprimer v_{n+1} en fonction de u_{n+1}, puis de u_n, puis de v_n. (c) Observer que (u_n) converge si et seulement si (v_n) converge. (d) Se ramener à (c) (quelle proportion de l'aire non coloriée devient coloriée à chaque étape ?)

Exercice 2. On s'intéresse à une suite complexe (u_n) telle que $u_{n+1} = \dfrac{3u_n - 2\overline{u_n}}{5}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Prouver que (u_n) converge et calculer sa limite.

Indication : Regarder les suites $(\mathrm{R}e(u_n))$ et $(\mathrm{I}m(u_n))$.

Exercice 3. On s'intéresse à la suite (u_n) telle que $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = u_n^2 + 2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(a) Vérifier que la suite est bien définie.

(b) Représenter graphiquement cette suite récurrente.

(c) Prouver que (u_n) est strictement croissante.

(d) Démontrer que (u_n) tend vers $+\infty$.

Indications : (a) La question est celle du paragraphe 3.1 du polycopié (page 44). Ici, pas de difficulté. (b) Appliquer la procédure du paragraphe 3.2. (c) S'inspirer du dessin et vérifier qu'on peut appliquer un résultat de 3.3. (d) Se rappeler qu'une suite croissante admet toujours une limite, finie ou $+\infty$. Il faut exclure le premier cas.

Exercice 4. On s'intéresse à la suite (u_n) telle que $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \sin(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(a) Vérifier que la suite est bien définie.

(b) Représenter graphiquement cette suite récurrente.

(c) Montrer que l'intervalle $[0, 1]$ est stabilisé par la fonction sinus.

(d) Prouver que (u_n) est décroissante.

(e) Montrer que (u_n) converge et calculer sa limite.

Indications : (a) La question est celle du paragraphe 3.1 du polycopié (page 44). Ici, pas de difficulté. (b) Appliquer la procédure du paragraphe 3.2. (c) Si nécessaire, le paragraphe 3.1 donne la définition pertinente. (d) S'inspirer du dessin et vérifier qu'on peut appliquer un résultat de 3.3. (e) Utiliser les deux questions précédentes, puis le théorème sur les limites possibles (paragraphe 3.4).

Exercice 5. Soit $a \in \mathbb{R}$. On s'intéresse à la suite (u_n) telle que $u_0 = a$ et $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(a) Pour quels réels a cette suite est-elle bien définie ?

(b) Si (u_n) converge, quels sont les limites possibles ?

(c) Etudier la convergence en fonction du paramètre a.

Indications : (a) Il y a des valeurs de a qui posent un problème immédiat. Pour vérifier que les autres valeurs conviennent, utiliser un intervalle stable. (b) Théorème sur les limites possibles (paragraphe 3.4). (c) Faire un dessin pour voir ce qui se passe en fonction de la position de a. Il est utile de prouver que la suite est toujours monotone (cf. 3.3).

Exercice 6. Soit $f(x) = \dfrac{2}{1+x}$, pour $x \neq -1$. On s'intéresse à la suite (u_n) telle que $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(a) Représenter graphiquement cette suite récurrente.

(b) Montrer que l'intervalle $[1/2, 2]$ est stabilisé par la fonction f.

(c) Quelles sont les limites possibles pour la suite (u_n) ?

(d) Démontrer que (u_n) converge et estimer la vitesse de convergence.

(e) Que dire des sens de variation de (u_{2n}) et (u_{2n+1}) ?

Indications : (a) Appliquer la procédure du paragraphe 3.2. (b) Si nécessaire, le paragraphe 3.1 donne la définition pertinente. (c) Théorème sur les limites possibles (paragraphe 3.4). (d) Vérifier qu'on peut appliquer le théorème du point fixe contractant (paragraphe 3.4, page 50). (e) Vérifier qu'on peut appliquer un résultat de 3.3.

Exercice 7. Soit $a > 0$. On considère une suite (u_n) telle que $u_0 > 0$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{u_n}{2} + \frac{a}{2u_n}.$$

(C'est la méthode de Newton pour approcher les solutions de $x^2 = a$.)

(a) Prouver que pour $n \geq 1$, $u_n \geq \sqrt{a}$.

(b) Montrer que $(u_n)_{n \geq 1}$ est décroissante.

(c) Prouver que (u_n) converge vers $\sqrt{a}$.

(d) Démontrer l'estimation d'erreur : $u_n - \sqrt{a} = O(10^{-2^n})$ quand $n \to +\infty$.

Indication : poser $\epsilon_n = \dfrac{u_n - \sqrt{a}}{2\sqrt{a}}$ *et trouver une inégalité simple entre* ϵ_{n+1} *et* ϵ_n.

Indications : (a) Vérifier que, pour tout $x > 0$, $f(x) = \dfrac{x}{2} + \dfrac{a}{2x} \geq \sqrt{a}$. (b) Vérifier qu'on peut appliquer un résultat de 3.3. (c) Utiliser les deux questions précédentes, puis le théorème sur les limites possibles (paragraphe 3.4).