# Feuille 5
# Applications Linéaires de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^n$

Les feuilles d'exercices sont découpées en trois types d'exercice :
- Les *indispensables* : à savoir faire en autonomie.
- Les *exercices d'application* : pour mieux maîtriser et comprendre le cours.
- *Pour aller plus loin* : exercices présentant des développements mathématiques ou des études de modélisations de phénomènes issues d'autres disciplines.

## Indispensables

**Exercice 1.** Déterminer si les applications suivantes sont linéaires :

$$\begin{array}{rl}
f_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 & f_1(x,y) = (2x+y, x-y) \\
f_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 & f_2(x,y,z) = (xy, x, y) \\
f_3 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 & f_3(x,y,z) = (2x+y+z, y-z, x+y) \\
f_4 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4 & f_4(x,y) = (y, 0, x-7y, x+y) \\
g_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 & g_1(x,y) = (x+y, x-y) \\
g_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 & g_2(x,y) = (x,y) \\
g_3 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 & g_3(x,y) = (x, y^2) \\
g_4 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} & g_4(x,y) = x \\
g_5 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} & g_5(x,y) = xy \\
g_6 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} & g_6(x,y) = |x+y|
\end{array}$$

**Exercice 2.** Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ la transformation linéaire donnée dans la base canonique par la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

et $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la transformation linéaire donnée dans la base canonique par la matrice

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Calculer la matrice associée à la fonction composée $g \circ f$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$.
2. Comparer avec le produit de matrices $B.A$.
3. Pour quel cas général peut-on s'attendre à une relation similaire ?

**Exercice 3.** On considère l'application linéaire $f$ de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par $f((x,y,z)) = (x-y, y-z)$.
1. Déterminer $Ker\, f$.
2. $f$ est-elle injective ? Surjective ?

**Exercice 4.**
1. Montrer que $P = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y - 4z = 0 \right\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. Quelle est sa dimension ? Déterminer une base de $P$.
2. Montrer que $D = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x - y + z = 0 \text{ et } x + y - z = 0 \right\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. Quelle est sa dimension ? Déterminer une base de $D$.

3. Montrer que $H = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \mid x+y+z+t=0 \right\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$. Quelle est sa dimension ? Déterminer une base de $H$.

**Exercice 5.** Montrer que les application suivantes sont $\mathbb{R}$-linéaires. Pour chacune, donner une base du noyau et de son image, et en déduire si l'application est injective, surjective ou bijective.

$$f_1 : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4 \\ (x,y) \mapsto (y, y+2x, x, y+2x) \end{cases} \quad , \quad f_2 : \begin{cases} \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) \mapsto (x+y, x+2y+z). \end{cases}$$

**Exercice 6.** Soit $f$ l'application linéaire de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}^3$ canoniquement associée à la matrice

$$M = \begin{pmatrix} -11 & 7 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 11 & 2 \\ 1 & 0 & 7 & 1 \end{pmatrix}.$$

Déterminer le rang de $f$, ainsi qu'une base de son noyau et de son image. Donner une équation de l'image.

**Exercice 7.** Soit

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Soit $f$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans $\mathcal{B}$ est $A$. On pose $\varepsilon_1 = (1,1,1), \varepsilon_2 = (1,-1,0), \varepsilon_3 = (1,0,1)$ et $\mathcal{B}' = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$.

1. Montrer que $\mathcal{B}'$ constitue une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Écrire la matrice de $f$ dans cette base.
3. Déterminer une base de $Ker\, f$ et de $Im\, f$.

## Pour aller plus loin

**Exercice 8.** Soit l'endomorphisme $f$ de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Le plan $P$ d'équation $y+z=0$ est-il stable par $f$ ? La droite vect $\{(1,1,1)\}$ est-elle stable par $f$ ?

**Exercice 9.** Soit $f$ l'application linéaire du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^2$ définie par $f((x,y,z)) = (x+2y+z, x-2y+z)$.

1. Déterminer la matrice $A$ associée à $f$ par rapport aux bases canoniques de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^2$.
2. Soient $f_1 = (1,0,-1)$, $f_2 = (1,1,0)$, $f_3 = (1,1,1)$, $v_1 = (1,1)$ et $v_2 = (1,-1)$. Vérifier que $\mathcal{B}_3 = (f_1, f_2, f_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et que $\mathcal{B}_2 = (v_1, v_2)$ est une base de $\mathbb{R}^2$. Déterminer la matrice $A'$ associée à $f$ par rapport aux bases $\mathcal{B}_3$ et $\mathcal{B}_2$.
3. Trouver une base $\mathcal{B}'_2$ de $\mathbb{R}^2$ telle que la matrice associée à $f$ par rapport aux bases $\mathcal{B}_3$ et $\mathcal{B}'_2$ soit

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$