# Forcing, Combinatória Infinita e Aplicações

**Luisa Costa Gualano Borsa** (Candidata)
**Vinicius de Oliveira Rodrigues** (Orientador)

Maio de 2025

**Resumo**

## 1 Introdução

A Teoria dos Conjuntos, introduzida por Georg Cantor no final do século XIX, estabeleceu um arcabouço teórico rigoroso para a formalização da Matemática e a compreensão de estruturas infinitas. No início do século passado, essa teoria foi formalizada em lógica de primeira ordem, sendo ZF as mais conhecidas e utilizadas axiomatizações a teoria ZF (de Zermelo-Fraenkel) e, principalmente, sua extensão ZFC (que inclui o Axioma da Escolha).

Uma das mais conhecidas questões clássicas que surgiram deste estudo é a validade da *Hipótese do Contínuo*. Formulada por Cantor em 1878 [4], a Hipótese do Contínuo afirma que a cardinalidade do conjunto dos números reais é a menor possível dentre as cardinalidades não enumeráveis – em símbolos, que $\mathfrak{c} = \aleph_1$. Tal questão adquiriu grande notoriedade, figurando como a primeira questão da conhecida lista de problemas de Hilbert de 1900 [11].

Na década de 1940, Gödel mostrou que a Hipótese do Contínuo é válida no modelo interno dos conjuntos construtíveis, $\mathbf{L}$, assim mostrando que, se ZF é consistente, então ZFC+CH também é consistente. Equivalentemente, Gödel mostrou que, se ZF é consistente, então a Hipótese do Contínuo não pode ser refutada a partir dos axiomas de ZFC.

Após o trabalho de Gödel, seguiu em aberto a questão sobre se CH pode ser provado a partir dos axiomas de ZFC. Tal questão foi respondida negativamente apenas em 1963, quando Paul Cohen [6] introduziu a técnica de *forcing* para produzir modelos de teoria dos conjuntos em que a Hipótese do Contínuo é falsa.

Forcing se transformou rapidamente em uma das mais importantes ferramentas em Teoria dos conjuntos. Em 1971, Solovay e Tennenbaum [20] adaptaram esta técnica para aplica-la de forma iterada a fim de construir um modelo de ZFC sem árvore de Suslin – um importante objeto combinatório estudado sistematicamente desde a década de 30 cuja existência em ZFC era uma pergunta em aberto, e relacionado com o problema de classificação da reta real [16].

O Axioma de Martin, axioma que captura certos argumentos envolvendo forcing sem fazer uso de modelos, foi introduzido e teve sua consistencia provada por Martin e Solovay em [17], impulsionando a popularização da técnica de forcing.

O estudo das características cardinais do contínuo – cardinais entre o primeiro cardinal não enumerável, $\aleph_1$ e o contínuo, $\mathfrak{c}$, que capturam propriedades do contínuo que conjuntos enumeráveis não possuem, também ganhou grande tração, sendo Forcing a principal ferramenta para provar que tais cardinais podem ser arbitrariamente grandes ou pequenos, além de distintos entre si. Trabalhos clássicos sobre esse tema são [1] e [18], e surveys mais modernos sobre esse material incluem [3] e [21]. Trabalhos crescentes continuam sendo publicados em revistas de ponta (sendo, por exemplo, [9] um destaque recente).

Há inúmeras aplicações de Combinatória Infinita e Forcing em outras áreas da Matemática, como por exemplo em Topologia Geral, conforme fica explícito nos handbooks [15] e [8], com uma ampla gama de resultados envolvendo inclusive aplicações de Topologia Geral em Análise Funcional e Álgebra.

Apesar do grande número de aplicações importantes e do amplo desenvolvimento da técnica de Forcing ao longo das décadas, forcing continua sendo um tópico denso que requer esforço e dedicação para ser aprendido e plenamente compreendido. Tal tópico não é parte do currículo regular de Matemática no Brasil, nem mesmo em um primeiro curso de Teoria Axiomática dos Conjuntos como o oferecido pelo IME-USP.

Neste projeto, visamos capacitar a aluna de iniciação científica a trabalhar com técnicas de forcing a partir de um estudo guiado sistemático em que esta adquirirá os pré-requisitos restantes necessários para sua plena compreensão, estudando a seguir sua e suas aplicações básicas clássicas em detalhes (apresentadas com roupagem moderna), seguindo para aplicações mais recentes e complexas. Ao final da iniciação científica, a aluna estará preparada para iniciar a leitura de artigos científicos contemporâneos da área, tendo plenas condições de participar de seminários de pós-graduação no instituto e contribuir com discussões, e poderá, futuramente, desenvolver projeto de pesquisa de na pós-graduação com potencial de impacto muito maior do que possuiria sem que a iniciação científica fosse realizada.

## 1.1 Apresentação da candidata e do orientador

A candidata, Luisa Costa Gualano Borsa, é estudante do Bacharelado em Matemática do IME-USP, tendo ingressado via transferência externa no segundo semestre de 2024, e atualmente cursa o equivalente ao terceiro semestre do curso. Na data de início no projeto, estará cursando o equivalente ao quarto semestre. A candidata tem obtido excelente desempenho nas disciplinas e demonstra grande interesse em Teoria dos Conjuntos, estando atualmente estudando os capítulos iniciais do livro [12] em formato de pré-iniciação científica junto ao orientador, também demonstrando grande interesse, dedicação e desempenho.

O orientador, Vinicius de Oliveira Rodrigues, é Professor Doutor do Departamento de Matemática do IME-USP com ampla experiência em Teoria dos Conjuntos e Topologia Geral, tendo realizado estágios no exterior na York University e University of Toronto. Utiliza Forcing como ferramenta de pesquisa frequente e fundamental, como por exemplo em [2], [5], [7], [10] e [19], estando, assim, plenamente apto a orientar este projeto.

A instituição sede, o IME-USP, concentra o maior núcleo de pesquisa em Teoria dos Conjuntos e Set Theoretic Topology do Brasil, contando com outros docentes especialistas na área, bem como um considerável número de alunos de pós-graduação, sendo este um ambiente adequado para o desenvolvimento do projeto.

## 2 Objetivos

O principal objetivo do projeto é que, ao seu final, a aluna compreenda plenamente a técnica de forcing e suas aplicações clássicas, de modo a capacita-la para iniciar a leitura de artigos contemporâneos da área e participar de seminários de pós-graduação no IME-USP, contribuindo com discussões de pesquisa.

Os tópicos a serem estudados incluem:

- Teoria dos modelos básica, entendento a noção de estrutura, modelos e os teoremas de Löwenheim-Skolem-Tarski, compacidade, completude e correção.
- Pré-requisitos restantes sobre Teoria dos Conjuntos, como um básico sobre a classe **L** dos construtíveis e os Teoremas da Reflexão.
- A noção de absolutidade em Teoria dos Conjuntos, fórmulas $\Delta_0$.
- A teoria geral envolvendo a técnica de Forcing, incluindo as demonstrações dos Teoremas da Verdade e Definibilidade.
- O modelo de Cohen para a prova da negação da consistência da Hipótese do contínuo e algumas das suas principais propriedades.
- O Axioma de Martin e algumas aplicações. Forcing iterado e a demonstração de sua consistência.
- Se houver tempo, outras aplicações em detalhes da técnica de Forcing que sejam de maior interesse da aluna a serem decididos em momento oportuno. Tópicos possíveis envolvem problemas de Topologia Geral, Teoria dos Grafos Infinitos ou Características Cardinais do Contínuo, mas sem se restringir a estes.

Durante o projeto, a aluna começará a comparecer e participar de seminários de pós-graduação do IME-USP, onde poderá discutir os tópicos estudados e suas aplicações com outros alunos e professores, tendo contato, nestes seminários, com outras aplicações de Forcing e Combinatória Infinita.

## 3 Plano de Trabalho, Metodologia e Execução

Na etapa pré-projeto, a aluna seguirá o estudo dos capítulos inicia do livro [12], de modo a dominar a manipulação básica de ordinais, cardinais, e compreenda induções e recursões transfinitas. A atual grande dedicação, desempenho e interesse da aluna nos atuais seminários de pré-iniciação científica não deixa dúvidas ao orientador de que, ao início do projeto, estes pré-requisitos estarão supridos.

### 3.1 Primeiros seis meses - Pré-requisitos

Os primeiros seis meses de projeto consistirão em um estudo direcionado sistemático aos pré-requisitos de Forcing.

### 3.1.1 Teoria dos Modelos básica e absolutidade de fórmulas

Iniciaremos com o estudo do livro [13], capítulos II.1-II.12, II.15 e II.16. Alguns dos principais resultados a serem estudados incluem:

- Teorema da compacidade: seja $T$ uma teoria de primeira ordem. Se todo subconjunto finito de $T$ possui um modelo, então $T$ possui um modelo.
- Teorema de Löwenheim-Skolem-Tarski para baixo: seja $\mathcal{L}$ uma linguagem de primeira ordem, $M$ uma $\mathcal{L}$-estrutura e $A \subseteq M$. Então $M$ admite uma subestrutura elementar $N$ tal que $A \subseteq N$ e $|N| \leq |A| + \aleph_0$.
- Teorema da correção: seja $T$ uma teoria de primeira ordem e $\phi$ uma sentença. Se $T$ prova $\phi$, então $\phi$ é válida em todo modelo de $T$.
- Teorema da completude: seja $T$ uma teoria de primeira ordem. Se $T$ é válida em todo modelo de $T$, então $T$ prova $\phi$.

### 3.1.2 A classe dos conjuntos bem-fundados e Teoremas da Reflexão

Após visitar a teoria dos modelos básica, rosseguiremos para o estudo da classe dos conjuntos bem-fundados e de formas mais gerais do Teorema da Recursão a partir do livro [14]. Para tanto, serão estudados as seções I.9 e II.1-II.5 deste livro.

### 3.1.3 A classe dos conjuntos construtíveis

Após isso, prosseguiremos para o estudo da classe dos conjuntos construtíveis de Gödel, **L**, e suas propriedades a partir da seção II.6 do livro [14]. Tais resultados incluem o fato de que **L** é o menor modelo interno de ZF, e que valem o Axioma da Escolha a Hipótese Generalizada do Contínuo em **L**.

## 3.2 Últimos seis meses - Forcing

Caso o programa acima seja cumprido em menos de seis meses, a aluna poderá optar, no tempo restante, entre estudar algum dos tópicos acima com maior profundidade, ou assunto relacionado a estes, ou adiantar o início do estudo de Forcing.

Quando este tiver início, o estudo será baseado no livro [14], capítulos IV e V.

As seções IV.1 e IV.2 introduz a técnica de forcing e prova seus teoremas mais fundamentais, como o Teorema da Verdade e o Teorema da Definibilidade.

A seção IV.3 estuda em detalhes o modelo de Cohen, provando, em particular, a consistência da negação da Hipótese do Contínuo.

A seção IV.4 dá ferramentas essenciais para a caracterização combinatórica de certos modelos de forcing, bem como para a iteração do forcing.

As seções IV.5-IV.8 introduzem resultados adicionais, que serão estudados parcialmente ou completamente a depender do tempo disponível e do direcionamento desejado pela aluna.

As seções V.1-V.4 introduzem o forcing iterado, seus resultados teóricos mais básicos e a demonstração do Axioma de Martin. Nesta etapa, a depender o tempo disponível e interesse da aluna, poderemos estudar aplicações do Axioma de Martin em Combinatória Infinita ou outras áreas da matemática.

As seções V.5-V.7 introduzem resultados adicionais, que serão estudados parcialmentea depender do tempo disponível e do direcionamento desejado pela aluna.

Caso houver tempo, poderão, ao invés de resultados redigidos nas seções IV.5-IV.8 e V.5-V.7, serem estudados artigos científicos modernos que sejam de interesse da aluna naquele momento e que apliquem ou se relacionem com as técnicas aprendidas.

### 3.3 Metodologia e Execução

A metodologia de trabalho é a usual em matemática: a aluna lerá os textos indicados e, semanalmente, se encontrará com o orientador para apresentar e discutir os tópicos estudados, tirar dúvidas e planejar o estudo da semana seguinte.

O orientador indicará, periodicamente, alguns exercícios e teoremas presentes no texto para ter suas resoluções ou demonstrações digitadas pela aluna a fim de serem apresentados no relatório final do projeto.

O conteúdo a ser estudado pelo projeto é denso e complexo, mas o interesse e desempenho da aluna demonstram que ela é apta para realiza-lo. Além disso, a experiência do orientador com estes textos e com o tema garantem que a aluna terá o suporte necessário para tirar suas dúvidas, de modo que acredita-se que ela terá progresso substancialmente maior e mais rápido e mais profundo do que caso teria se estudasse os textos como auto-didata.

### 3.4 Forma de análise dos resultados

O orientador indicará, periodicamente, alguns exercícios e teoremas presentes no texto para ter suas resoluções ou demonstrações digitadas pela aluna a fim de serem apresentados no relatório final do projeto. O progresso da aluna poderá ser avaliado pelo seus relatórios.

Espera-se que, ao final, aluna esteja preparada para iniciar a leitura de artigos científicos contemporâneos da área, tendo plenas condições de participar de seminários de pós-graduação no instituto, e podendo, futuramente, desenvolver projeto de pesquisa de na pós-graduação com potencial de impacto muito maior do que possuiria sem que a iniciação científica fosse realizada.

## Referências


[1] T. Bartoszyński, H. Judah, and S. Shelah. The cichoń diagram. *Journal of Symbolic Logic*, 58(2):401–423, 1993.

[2] M. K. Bellini, V. O. Rodrigues, and A. H. Tomita. Forcing a classification of non-torsion Abelian groups of size at most 2c with non-trivial convergent sequences. *Topology and its Applications*, 296:107684, 2021.

[3] A. Blass. *Combinatorial cardinal characteristics of the continuum*, pages 395–489. Springer, 2009.

[4] G. Cantor. Ein beitrag zur mannigfaltigkeitslehre. *Journal für die reine und angewandte Mathematik (Crelles Journal)*, 1878(84):242–258, 1878.

[5] R. Carvalho and V. O. Rodrigues. On products of $\Delta$-sets. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 152:5429–5443, 2024.

[6] P. J. Cohen. The independence of the continuum hypothesis. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 50(6):1143–1148, 1963.

[7] C. Corral and V. O. Rodrigues. Fin-intersecting mad families. *Filomat*, 38(7):2563–2578, 2022.

[8] M. Foreman and A. Kanamori, editors. *Handbook of set theory*. Springer Science & Business Media, 2009.

[9] M. Goldstern, J. Kellner, and S. Shelah. Cichoń's Maximum. *Ann. Math. (2)*, 190(1):113–143, 2019.

[10] O. Guzmán, M. Hrušák, V. O. Rodrigues, S. Todorčević, and A. H. Tomita. Maximal almost disjoint families and pseudocompactness of hyperspaces. *Topology and its Applications*, 305:107872, 2022.

[11] D. Hilbert. Mathematische probleme. *Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-Physikalische Klasse*, 1900:253–297, 1900.

[12] K. Hrbacek and T. Jech. *Introduction to set theory, revised and expanded*. CRC Press, 2017.

[13] K. Kunen. *The Foundations of Mathematics*. Mathematical logic and foundations. College Publications, 2009.

[14] K. Kunen. *Set Theory*. Studies in logic. College Publications, 2011.

[15] K. Kunen and J. Vaughan, editors. *Handbook of set-theoretic topology*. Elsevier, 1984.

[16] G. Kurepa. Ensembles ordonnés et ramifiés. *Publ. Math. Univ. Belgrade*, 4:1–138, 1935.

[17] Donald A Martin and Robert M Solovay. Internal cohen extensions. *Annals of Mathematical Logic*, 2(2):143–178, 1970.

[18] A. W. Miller. Some properties of measure and category. *Transactions of the American Mathematical Society*, 266(1):93–114, 1981.

[19] V. O. Rodrigues and V. S. Ronchim. Almost-normality of Isbell-Mrówka spaces. *Topology and its Applications*, 288:107470, 2021.

[20] R. M. Solovay and S. Tennenbaum. Iterated cohen extensions and souslin's problem. *Annals of mathematics*, 94(2):201–245, 1971.

[21] E. K. van Douwen. *The integers and topology*, pages 111–167. North-Holland Amsterdam, 1984.