Forcing, Combinatória Infinita e Aplicações

Luisa Costa Gualano Bossa (Candidata)
Vinicius de Oliveira Rodrigues (Orientador)

Maio de 2025

Resumo

Este projeto foca no estudo técnica de forcing, tema central da teoria dos conjuntos com aplicações nesta e em outras áreas da matemática. Serão abordados seus fundamentos, pré-requisitos e aplicações clássicas em Combinatória Infinita, como a prova da consistência da negação da hipótese do contínuo e do Axioma de Martin.

1 Introdução

A Teoria dos Conjuntos, introduzida por Georg Cantor no final do século XIX, estabeleceu um arcabouço teórico rigoroso para a formalização da Matemática e a compreensão de estruturas infinitas. No início do século passado, essa teoria foi formalizada em lógica de primeira ordem, sendo ZF as mais conhecidas e utilizadas axiomatizações a teoria ZF (de Zermelo-Fraenkel) e, principalmente, sua extensão ZFC (que inclui o Axioma da Escolha).

Uma das mais conhecidas questões clássicas que surgiram deste estudo é a validade da *Hipótese do Contínuo.* Formulada por Cantor em 1878 [4], a Hipótese do Contínuo afirma que a cardinalidade do conjunto dos números reais é a menor possível dentre as cardinalidades não enumeráveis – em símbolos, que $\mathfrak{c} = \aleph_1$. Tal questão adquiriu grande notoriedade, figurando como a primeira questão da conhecida lista de problemas de Hilbert de 1900 [11].

Na década de 1940, Gödel mostrou que a Hipótese do Contínuo é válida no modelo interno dos conjuntos construtíveis, $\mathbf{L}$, assim mostrando que, se ZF é consistente, então ZFC+CH também é consistente. Equivalentemente, Gödel mostrou que, se ZF é consistente, então a Hipótese do Contínuo não pode ser refutada a partir dos axiomas de ZFC.

Após o trabalho de Gödel, seguiu em aberto a questão sobre se CH pode ser provado a partir dos axiomas de ZFC. Tal questão foi respondida negativamente apenas em 1963, quando Paul Cohen [6] introduziu a técnica de *forcing* para produzir modelos de teoria dos conjuntos em que a Hipótese do Contínuo é falsa.

Forcing se transformou rapidamente em uma das mais importantes ferramentas em Teoria dos conjuntos. Em 1971, Solovay e Tennenbaum [20] adaptaram esta técnica para aplica-la de forma iterada a fim de construir um modelo de ZFC sem árvore de Suslin – um importante objeto combinatório estudado sistematicamente desde a década de 30 cuja existência em ZFC era uma pergunta em aberto, e relacionado com o problema de classificação da reta real [16].

O Axioma de Martin, axioma que captura certos argumentos envolvendo forcing sem fazer uso de modelos, foi introduzido e teve sua consistência provada por Martin e Solovay em [17], impulsionando a popularização da técnica de forcing.

O estudo das características cardinais do contínuo – cardinais entre o primeiro cardinal não enumerável, $\aleph_1$ e o contínuo, $\mathfrak{c}$, que capturam propriedades do contínuo que conjuntos enumeráveis não possuem, também ganhou grande tração, sendo Forcing a principal ferramenta para provar que tais cardinais podem ser arbitrariamente grandes ou pequenos, além de distintos entre si. Trabalhos clássicos sobre esse tema são [1] e [18], e surveys mais modernos sobre esse material incluem [3] e [21]. Trabalhos crescentes continuam sendo publicados em revistas de ponta (sendo, por exemplo, [9] um destaque recente).

Há inúmeras aplicações de Combinatória Infinita e Forcing em outras áreas da Matemática, como por exemplo em Topologia Geral, conforme fica explícito nos handbooks [15] e [8], com uma ampla gama de resultados envolvendo inclusive aplicações de Topologia Geral em Análise Funcional e Álgebra.

Apesar do grande número de aplicações importantes e do amplo desenvolvimento da técnica de Forcing ao longo das décadas, forcing continua sendo um tópico denso que requer esforço e dedicação para ser aprendido e plenamente compreendido. Tal tópico não é parte do currículo regular de Matemática no Brasil, nem mesmo em um primeiro curso de Teoria Axiomática dos Conjuntos como o oferecido pelo IME-USP.

Neste projeto, visamos capacitar a aluna de iniciação científica a trabalhar com técnicas de forcing a partir de um estudo guiado sistemático em que esta adquirirá os pré-requisitos restantes necessários para sua plena compreensão, estudando a seguir sua e suas aplicações básicas clássicas em detalhes (apresentadas com roupagem moderna), seguindo para aplicações mais recentes e complexas. Ao final da iniciação científica, a aluna estará preparada para iniciar a leitura de artigos científicos contemporâneos da área, tendo plenas condições de participar de seminários de pós-graduação no instituto e contribuir com discussões, e poderá, futuramente, desenvolver projeto de pesquisa de pós-graduação com potencial de impacto muito maior do que possuiria sem que a iniciação científica fosse realizada.

1.1 Apresentação da candidata e do orientador

A candidata, Luisa Costa Gualano Bossa, é estudante do Bacharelado em Matemática do IME-USP, tendo ingressado via transferência externa no segundo semestre de 2024, e atualmente cursa o equivalente ao terceiro semestre do curso. Na data de início no projeto, estará cursando o equivalente ao quarto semestre. A candidata tem obtido excelente desempenho nas disciplinas e demonstra grande interesse em Teoria dos Conjuntos, estando atualmente estudando os capítulos iniciais do livro [12] em formato de pré-iniciação científica junto ao orientador, também demonstrando grande interesse, dedicação e desempenho.

O orientador, Vinicius de Oliveira Rodrigues, é Professor Doutor do Departamento de Matemática do IME-USP com ampla experiência em Teoria dos Conjuntos e Topologia Geral, tendo realizado estágios no exterior na York University e University of Toronto. Utiliza Forcing como ferramenta de pesquisa frequente e fundamental, como por exemplo em [2], [5], [7], [10] e [19], estando, assim, plenamente apto a orientar este projeto.

A instituição sede, o IME-USP, concentra o maior núcleo de pesquisa em Teoria dos Conjuntos e Set Theoretic Topology do Brasil, contando com outros docentes especialistas na área, bem como um considerável número de alunos de pós-graduação, sendo este um ambiente adequado para o desenvolvimento do projeto.

2 Objetivos

O principal objetivo do projeto é que, ao seu final, a aluna compreenda plenamente a técnica de forcing e suas aplicações clássicas, de modo a capacita-la para iniciar a leitura de artigos contemporâneos da área e participar de seminários de pós-graduação no IME-USP, contribuindo com discussões de pesquisa.

Os tópicos a serem estudados incluem:

- Teoria dos modelos básica, entendento a noção de estrutura, modelos e os teoremas de Löwenheim-Skolem-Tarski, compacidade, completude e correção.
- Pré-requisitos restantes sobre Teoria dos Conjuntos, como um básico sobre a classe **L** dos construtíveis e os Teoremas da Reflexão.
- A noção de absolutidade em Teoria dos Conjuntos, fórmulas Δ_0.
- A teoria geral envolvendo a técnica de Forcing, incluindo as demonstrações dos Teoremas da Verdade e Definibilidade.
- O modelo de Cohen para a prova da negação da consistência da Hipótese do contínuo e algumas das suas principais propriedades.
- O Axioma de Martin e algumas aplicações. Forcing iterado e a demonstração de sua consistência.
- Se houver tempo, outras aplicações em detalhes da técnica de Forcing que sejam de maior interesse da aluna a serem decididos em momento oportuno. Tópicos possíveis envolvem problemas de Topologia Geral, Teoria dos Grafos Infinitos ou Características Cardinais do Contínuo, mas sem se restringir a estes.

Durante o projeto, a aluna começará a comparecer e participar de seminários de pós-graduação do IME-USP, onde poderá discutir os tópicos estudados e suas aplicações com outros alunos e professores, tendo contato, nestes seminários, com outras aplicações de Forcing e Combinatória Infinita.

3 Plano de Trabalho, Metodologia e Execução

Na etapa pré-projeto, a aluna seguirá o estudo dos capítulos iniciais do livro [12], de modo a dominar a manipulação básica de ordinais, cardinais, e compreenda induções e recursões transfinitas. A atual grande dedicação, desempenho e interesse da aluna nos atuais seminários de pré-iniciação científica não deixa dúvidas ao orientador de que, ao início do projeto, estes pré-requisitos estarão supridos.

3.1 Primeiros seis meses - Pré-requisitos

Os primeiros seis meses de projeto consistirão em um estudo direcionado sistemático aos pré-requisitos de Forcing.

3.1.1 Teoria dos Modelos básica e absolutidade de fórmulas

Iniciaremos com o estudo do livro [13], capítulos II.1-II.12, II.15 e II.16. Alguns dos principais resultados a serem estudados incluem:

- Teorema da compacidade: seja T uma teoria de primeira ordem. Se todo subconjunto finito de T possui um modelo, então T possui um modelo.
- Teorema de Löwenheim-Skolem-Tarski para baixo: seja $\mathcal{L}$ uma linguagem de primeira ordem, M uma $\mathcal{L}$-estrutura e $A \subseteq M$. Então M admite uma subestrutura elementar N tal que $A \subseteq N$ e $|N| \leq |A| + \aleph_0$.
- Teorema da correção: seja T uma teoria de primeira ordem e ϕ uma sentença. Se T prova ϕ, então ϕ é válida em todo modelo de T.
- Teorema da completude: seja T uma teoria de primeira ordem. Se T é válida em todo modelo de T, então T prova ϕ.

3.1.2 A classe dos conjuntos bem-fundados e Teoremas da Reflexão

Após visitar a teoria dos modelos básica, prosseguiremos para o estudo da classe dos conjuntos bem-fundados e de formas mais gerais do Teorema da Recursão a partir do livro [14]. Para tanto, serão estudados as seções I.9 e II.1-II.5 deste livro.

3.1.3 A classe dos conjuntos construtíveis

Após isso, prosseguiremos para o estudo da classe dos conjuntos construtíveis de Gödel, **L**, e suas propriedades a partir da seção II.6 do livro [14]. Tais resultados incluem o fato de que **L** é o menor modelo interno de ZF, e que valem o Axioma da Escolha a Hipótese Generalizada do Contínuo em **L**.

3.2 Últimos seis meses - Forcing

Caso o programa acima seja cumprido em menos de seis meses, a aluna poderá optar, no tempo restante, entre estudar algum dos tópicos acima com maior profundidade, ou assunto relacionado a estes, ou adiantar o início do estudo de Forcing.

Quando este tiver início, o estudo será baseado no livro [14], capítulos IV e V.

As seções IV.1 e IV.2 introduz a técnica de forcing e prova seus teoremas mais fundamentais, como o Teorema da Verdade e o Teorema da Definibilidade.

A seção IV.3 estuda em detalhes o modelo de Cohen, provando, em particular, a consistência da negação da Hipótese do Contínuo.

A seção IV.4 dá ferramentas essenciais para a caracterização combinatórica de certos modelos de forcing, bem como para a iteração do forcing.

As seções IV.5-IV.8 introduzem resultados adicionais, que serão estudados parcialmente ou completamente a depender do tempo disponível e do direcionamento desejado pela aluna.

As seções V.1-V.4 introduzem o forcing iterado, seus resultados teóricos mais básicos e a demonstração do Axioma de Martin. Nesta etapa, a depender do tempo disponível e interesse da aluna, poderemos estudar aplicações do Axioma de Martin em Combinatória Infinita ou outras áreas da matemática.

As seções V.5-V.7 introduzem resultados adicionais, que serão estudados parcialmente a depender do tempo disponível e do direcionamento desejado pela aluna.

Caso houver tempo, poderão, ao invés de resultados redigidos nas seções IV.5-IV.8 e V.5-V.7, serem estudados artigos científicos modernos que sejam de interesse da aluna naquele momento e que apliquem ou se relacionem com as técnicas aprendidas.

3.3 Metodologia e Execução

A metodologia de trabalho é a usual em matemática: a aluna lerá os textos indicados e, semanalmente, se encontrará com o orientador para apresentar e discutir os tópicos estudados, tirar dúvidas e planejar o estudo da semana seguinte.

O orientador indicará, periodicamente, alguns exercícios e teoremas presentes no texto para ter suas resoluções ou demonstrações digitadas pela aluna a fim de serem apresentados no relatório final do projeto.

O conteúdo a ser estudado pelo projeto é denso e complexo, mas o interesse e desempenho da aluna, demonstrados em disciplinas e nos seminários de pré-iniciação científica, certificam que ela é apta para realizá-lo. Além disso, a experiência do orientador com estes textos e com o tema garantem que a aluna terá o suporte necessário para tirar suas dúvidas, de modo que acredita-se que ela terá progresso substancialmente maior e mais rápido e mais profundo do que caso teria se estudasse os textos como auto-didata.

3.4 Forma de análise dos resultados

O orientador indicará, periodicamente, alguns exercícios e teoremas presentes no texto para ter suas resoluções ou demonstrações digitadas pela aluna a fim de serem apresentados no relatório final do projeto. O progresso da aluna poderá ser avaliado pelo seus relatórios.

Buscaremos a oportunidade de apresentar os resultados estudados em simpósios, seminários ou congressos.

Espera-se que, ao final, a aluna esteja preparada para iniciar a leitura de artigos científicos contemporâneos da área, tendo plenas condições de participar de seminários de pós-graduação no instituto, e podendo, futuramente, desenvolver projeto de pesquisa de pós-graduação com potencial de impacto muito maior do que possuiria sem que a iniciação científica fosse realizada.

Referências

[1] T. Bartoszyński, H. Judah, and S. Shelah. The cichoń diagram. *Journal of Symbolic Logic*, 58(2):401–423, 1993.

[2] M. K. Bellini, V. O. Rodrigues, and A. H. Tomita. Forcing a classification of non-torsion Abelian groups of size at most 2c with non-trivial convergent sequences. *Topology and its Applications*, 296:107684, 2021.

[3] A. Blass. *Combinatorial cardinal characteristics of the continuum*, pages 395–489. Springer, 2009.

[4] G. Cantor. Ein beitrag zur mannigfaltigkeitslehre. *Journal für die reine und angewandte Mathematik (Crelles Journal)*, 1878(84):242–258, 1878.

[5] R. Carvalho and V. O. Rodrigues. On products of Δ-sets. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 152:5429–5443, 2024.

[6] P. J. Cohen. The independence of the continuum hypothesis. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 50(6):1143–1148, 1963.

[7] C. Corral and V. O. Rodrigues. Fin-intersecting mad families. *Filomat*, 38(7):2563–2578, 2022.

[8] M. Foreman and A. Kanamori, editors. *Handbook of set theory.* Springer Science & Business Media, 2009.

[9] M. Goldstern, J. Kellner, and S. Shelah. Cichoń's Maximum. *Ann. Math. (2)*, 190(1):113–143, 2019.

[10] O. Guzmán, M. Hrušák, V. O. Rodrigues, S. Todorčević, and A. H. Tomita. Maximal almost disjoint families and pseudocompactness of hyperspaces. *Topology and its Applications*, 305:107872, 2022.

[11] D. Hilbert. Mathematische probleme. *Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-Physikalische Klasse*, 1900:253–297, 1900.

[12] K. Hrbacek and T. Jech. *Introduction to set theory, revised and expanded.* CRC Press, 2017.

[13] K. Kunen. *The Foundations of Mathematics.* Mathematical logic and foundations. College Publications, 2009.

[14] K. Kunen. *Set Theory.* Studies in logic. College Publications, 2011.

[15] K. Kunen and J. Vaughan, editors. *Handbook of set-theoretic topology.* Elsevier, 1984.

[16] G. Kurepa. Ensembles ordonnés et ramifiés. *Publ. Math. Univ. Belgrade*, 4:1–138, 1935.

[17] Donald A Martin and Robert M Solovay. Internal cohen extensions. *Annals of Mathematical Logic*, 2(2):143–178, 1970.

[18] A. W. Miller. Some properties of measure and category. *Transactions of the American Mathematical Society*, 266(1):93–114, 1981.

[19] V. O. Rodrigues and V. S. Ronchim. Almost-normality of Isbell-Mrówka spaces. *Topology and its Applications*, 288:107470, 2021.

[20] R. M. Solovay and S. Tennenbaum. Iterated cohen extensions and souslin's problem. *Annals of mathematics*, 94(2):201–245, 1971.

[21] E. K. van Douwen. *The integers and topology*, pages 111–167. North-Holland Amsterdam, 1984.