Álgebra Linear

Vinicius de Oliveira Rodrigues

5 de setembro de 2025

Sumário

Capítulo 1

Introdução

Neste capítulo, estabeleceremos a notação básica sobre a qual trabalharemos ao longo deste texto.

Também, neste capítulo, trabalharemos um mínimo com as noções de anéis e de corpos. Não é o objetivo deste texto dar uma introdução à Teoria de Corpos ou à Teoria de Anéis. Apenas buscamos introduzir um mínimo sobre a linguagem de corpos que seja suficiente para desenvolver a Teoria da Álgebra Linear.

1.1 Noções de Conjuntos

Utilizaremos, a notação usual de teoria dos conjuntos ao longo deste texto.

Assumiremos, implicitamente, e sem qualquer aprofundamento desnecessário, que estamos trabalhando na *Teoria dos Conjuntos de Zermelo-Fraenkel com o Axioma da Escolha (ZFC)*. O conhecimento sobre o que se trata tal teoria não é, em nenhum aspecto, necessário para a compreensão deste texto. Porém, espera-se o entendimento básico sobre o que é a relação de um conjunto, a relação de pertinência $\in$, a relação de subconjunto $\subseteq$, o entendimento de operações básicas como união, interseção, e diferença de conjuntos, a compreensão de notações como $\{a, b, c\}$, da noção de par ordenado, (a, b).

Também espera-se a compreensão das noções básicas de funções, como o entendimento da notação $f : A \to B$, da noção de domínio e imagem de uma função, injetividade, sobrejetividade, bijetividade, invertibilidade de funções e de contradomínios.

As noções de *operações* em um conjunto aparecerão naturalmente ao longo do texto. Em particular, estabelece-se a seguir o que chamaremos de *operação unária* e de *operação binária*.

Lembramos que $A \times B$ denota o produto cartesiano de dois conjuntos A e B, ou seja, o conjunto de todos os pares ordenados (a, b) com $a \in A$ e $b \in B$. Se $n \geq 1$ e A é um conjunto, escrevemos $A^n = \{(a_1, \ldots, a_n) : a_1, \ldots, a_n \in A\}$.

Definição 1.1.1 (Operações)**.** Uma *operação unária* em um conjunto A é uma função $* : A \to A$.

Ao trabalhar com uma operação unária, frequentemente utilizamos notações especiais. Abrevia-se $*(a)$ como $*a$.

Uma *operação binária* em um conjunto A é uma função $* : A \times A \to A$.

Ao trabalhar com uma operação binária, frequentemente utilizamos notações especiais. Abrevia-se $*(a, b)$ como $a * b$.

Por exemplo: ao lidar-se com números reais, a *soma usual* $+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma operação binária, de modo que $+(a, b) = a + b$.

Da mesma forma, a operação de *oposto* $- : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma operação unária, de modo que $-(a) = -a$.

1.2 Anéis e corpos

Anéis e corpos possuem como objetivo generalizar estruturas numéricas conhecidas que possuem uma soma e um produto, como os números inteiros, racionais, reais e complexos.

Se R é um conjunto, uma **operação binária** em R é uma função $* : R \times R \to R$

Definição 1.2.1. Um *anel* é um conjunto R munido de duas operações binárias, geralmente denotadas por $+$ e $\cdot$, e por dois elementos destacados, geralmente denotados por 0 e 1, tais que, para todos $a, b, c \in R$, valem:

(A1) $(a+b)+c = a+(b+c)$ (associatividade da soma),

(A2) $a+b = b+a$ (comutatividade da soma),

(A3) $a+0 = a$ (elemento neutro),

(A4) existe $x \in R$ tal que $a+x = 0$ (elemento oposto),

(M1) $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ (associatividade do produto),

(M2) $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$ (elemento neutro do produto),

(D1) $a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c$ (distributiva à esquerda),

(D2) $(a+b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$ (distributiva à direita).

Se, além disso, para todos $a, b \in R$ vale que:

(M3) $a \cdot b = b \cdot a$ (comutatividade do produto),

então dizemos que R é um *anel comutativo*.

No contexto de anéis, quando não há confusão, é usual denotar $a \cdot b$ simplesmnete por ab. Além disso, valem as regras usuais de precedência de parênteses, de modo que $a + b \cdot c$ é interpretado como $a + (b \cdot c)$, e **não** como $(a+b) \cdot c$.

Exemplos de anéis incluem os inteiros $\mathbb{Z}$, os números racionais $\mathbb{Q}$, os números reais $\mathbb{R}$ e os números complexos $\mathbb{C}$.

Outro exemplo de anel é o conjunto unitário $\{a\}$ com as operações $a + a = 0$ e $a \cdot a = a$, onde a é qualquer objeto. Denotando-se $1 = 0 = a$, verifica-se facilmente que $\{a\}$ é um anel comutativo. Os anéis dessa forma são chamados de *anéis triviais*.

Os números naturais $\mathbb{N}$ não formam um anel, pois não possuem elementos opostos para a soma.

Vejamos algumas propriedades básicas.

Proposição 1.2.2 (Unicidade do elemento neutro da soma)**.** Seja R um anel. Então só existe um elemento neutro para a soma. Ou seja, se $x \in R$ é tal que para todos $a \in R$ vale $a + x = a$, então $x = 0$.

Demonstração. Como 0 é elemento neutro da soma, temos que $0 + x = x$. Por outro lado, como x é elemento neutro da soma, temos que $x + 0 = x$. Logo, $x = 0$. □

Do mesmo modo, prova-se a unicidade do elemento neutro do produto. Deixamos a redação da demonstração como exercício de fixação ao leitor.

Proposição 1.2.3 (Unicidade do elemento neutro do produto)**.** Seja R um anel. Então só existe um elemento neutro para o produto. Ou seja, se $x \in R$ é tal que para todos $a \in R$ vale $a \cdot x = x \cdot a = a$, então $x = 1$.

Demonstração. Exercício. □

Da mesma forma, os *opostos aditivos* são únicos.

Proposição 1.2.4 (Unicidade dos opostos aditivos)**.** Seja R um anel. Então, para cada $a \in R$, existe um *único* elemento $x \in R$ tal que $a + x = 0$.

Demonstração. A existência de um tal x é garantida pela propriedade A4. Para a unicidade, suponha que x e y são elementos de R tais que $a + x = 0$ e $a + y = 0$. Segue que:

$$x = x + 0 = x + (a + y) = (x + a) + y = 0 + y = y.$$

□

Assim, podemos dar um nome especial para o oposto aditivo de um elemento $a \in R$:

Definição 1.2.5 (Opostos aditivos)**.** Seja R um anel. Então, para cada $a \in R$ o *oposto aditivo* de a, denotado por $-a$, é o único elemento de R que satisfaz $a + (-a) = 0$.

Em particular, veja que $-0 = 0$, pois $0 + 0 = 0$.

Uma propriedade particular interessante do elemento nulo é que ele anula, via multiplicação, qualquer outro elemento.

Notacionalmente, é útil definir uma notação binária para a *diferença* de dois elementos.

Definição 1.2.6 (Diferença)**.** Seja R um anel e $a, b \in R$. A *diferença* de a e b, denotada por $a - b$, é definida como $a + (-b)$.

Algumas propriedades dos elementos opostos são:

Proposição 1.2.7. Seja R um anel e $a, b \in R$. Então:

(i) $-(-a) = a$.

(ii) $-(a + b) = (-a) + (-b)$.

(iii) $-0 = 0$.

(iv) $a \cdot 0 = 0 = 0 \cdot a$.

(v) $(-a)b = a(-b) = -(ab)$.

(vi) $(-a)(-b) = ab$.

(vii) $-a = (-1)a$.

Demonstração. (i) Como $(-a) + a = 0$, temos que $-(-a) = a$.

(ii) Como $(a+b)+((-a)+(-b)) = a+(-a)+b+(-b) = 0+0 = 0$, temos que $-(a+b) = (-a)+(-b)$.

(iii) Note que $0 + 0 = 0$, temos que $-0 = 0$.

(iv) Veja que $0 \cdot a = (0+0) \cdot a = 0 \cdot a + 0 \cdot a$. Assim, $0 = (0 \cdot a) + (-(0 \cdot a)) = [(0 \cdot a) + (0 \cdot a)] + (-(0 \cdot a)) = (0 \cdot a) + [(0 \cdot a) + (-(0 \cdot a))] = 0 \cdot a$.

Analogamente, $a \cdot 0 = 0$.

(v) Note que $ab + (-a)b = [a + (-a)]b = 0b = 0$. Assim, $(-a)b = -(ab)$. Da mesma forma, $a(-b) = -(ab)$.

(vi) Pelo item anterior, temos que $(-a)(-b) = -[a(-b)] = -(-(ab)) = ab$.

(vii) Finalmente, $(-1)a = -(1 \cdot a) = -a$.

□

Assim, as chamadas “regras de sinais” decorrem das definições iniciais sobre anéis, e as operações numéricas de subtração usuais podem ser vistas como casos particulares de somas, fazendo-se uso da noção de opostos.

Nesse contexto, como podemos encarar a divisão? Para isso, precisamos da noção de *inverso multiplicativo*.

Definição 1.2.8. Seja R um anel e $a \in R$. Dizemos que a é *invertível* se existe $b \in R$ tal que $a \cdot b = b \cdot a = 1$.

É de conhecimento do leitor que não existe um elemento $b \in \mathbb{Z}$ tal que $2 \cdot b = 1$. Assim, 2 não é invertível em $\mathbb{Z}$. Por outro lado, 2 é invertível em $\mathbb{Q}$, pois $2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \cdot 2 = 1$.

Similarmente ao que ocorre com opostos aditivos, os inversos multiplicativos, caso existam, são únicos.

Proposição 1.2.9. Seja R um anel e $a \in R$ um elemento invertível. Então existe um *único* elemento $b \in R$ tal que $a \cdot b = b \cdot a = 1$.

Demonstração. A existência de b é garantida pela definição de elemento invertível. Para a unicidade, suponha que b e c são elementos de R tais que $a \cdot b = b \cdot a = 1$ e $a \cdot c = c \cdot a = 1$.

Segue que $b = b.1 = b(ac) = (ba)c = 1 \cdot c = c$. □

Definição 1.2.10. Seja R um anel e $a \in R$ um elemento invertível. O *inverso multiplicativo* de a, denotado por a^{-1}, é o único elemento de R tal que $a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1$.

Algumas propriedades dos inversos multiplicativos são:

Proposição 1.2.11. Seja R um anel e $a, b \in R$ elementos invertíveis. Então:

(i) ab é invertível e $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$.

(ii) a^{-1} é invertível e $(a^{-1})^{-1} = a$.

(iii) 1 é invertível e $1^{-1} = 1$.

Demonstração. (i) Notemos que $(ab)(b^{-1}a^{-1}) = abb^{-1}a^{-1} = aa^{-1} = 1$. Similarmente, $(b^{-1}a^{-1})(ab) = b^{-1}(a^{-1}a)b = b^{-1}b = 1$. Assim, ab é invertível e $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$.

(ii) Note que $a^{-1}a = aa^{-1} = 1$, logo a^{-1} é invertível e $(a^{-1})^{-1} = a$.

(iii) Como $1 \cdot 1 = 1$, temos que $1^{-1} = 1$.

□

Finalmente, chegamos a noção de corpo. Um corpo é um anel comutativo no qual todo elemento é invertível, a excessão do 0, que deve necessariamente ser diferente de 1.

Definição 1.2.12. Um *corpo* é um anel comutativo $\mathbb{K}$ no qual valem, adicionalmente, as seguintes propriedades:

(NT) $0 \neq 1$ (não trivialidade).

(M4) Para todo $a \in \mathbb{K}$, se $a \neq 0$ então a é invertível (existência de inversos multiplicativos).

Assim, em um corpo, todo elemento não nulo é invertível. De fato, esses são todos, como mostra a proposição a seguir.

Proposição 1.2.13. Seja $\mathbb{K}$ um corpo. Então $0 \in K$ não é invertível.

Demonstração. Suponha por absurdo que 0 é invertível. Então existe $x \in \mathbb{K}$ tal que $0x = 1$. Porém, conforme visto, $0x = 0$, logo, $0 = 1$, violando a não trivialidade do corpo. □

Neste texto, nossos principais exemplos de corpos serão o conjunto dos números reais e o conjunto dos números complexos, e, por vezes, o conjunto dos números racionais, com os quais supomos que o leitor tenha alguma familiaridade, ainda que informal. Porém, como exemplo de um corpo diferente destes, temos:

Exemplo 1.2.14. Seja $\mathbb{F}_2 = \{0, 1\}$, com as operações de soma e produto definidas por:

- $0 + 0 = 0$, $0 + 1 = 1$, $1 + 0 = 1$, $1 + 1 = 0$ (soma módulo 2),
- $0 \cdot 0 = 0$, $0 \cdot 1 = 0$, $1 \cdot 0 = 0$, $1 \cdot 1 = 1$ (produto usual).

Verifica-se que $\mathbb{F}_2$ é um corpo (ver Exercício 1.2).

Exercícios

Exercício 1.1. Prove a Proposição 1.2.3.

Exercício 1.2. Mostre que $\mathbb{F}_2$ é um corpo (ver Exemplo 1.2.14).

Exercício 1.3. Mostre que todo anel em que 0 é invertível é trivial.

Capítulo 2

Sistemas Lineares e Matrizes

Nesse capítulo estudaremos sistemas lineares do ponto de vista teórico e prático. Introduziremos matrizes como uma ferramenta natural para realizar tal estudo, e estudaremos suas propriedades básicas.

2.1 A representação matricial de um sistema linear

No Brasil, é usual um estudo introdutório sobre sistemas lineares de números reais.

Um sistema linear de números reais é, intuitivamente, uma coleção finita de equações da forma:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \tag{2.1}$$

Em que cada a_{ij} e cada b_i é um número real, para $1 \leq i \leq m$ e $1 \leq j \leq n$. Os números a_{ij} são chamados de *coeficientes* do sistema, e os números b_i são chamados de *termos independentes* do sistema.

Caso todos os b_i sejam iguais a zero, dizemos que o sistema é dito *homogêneo.*

Os símbolos $x_1, x_2, \ldots, x_n$ são chamados de *variáveis* do sistema. Resolver um sistema linear consiste em determinar (todos) os valores reais para as variáveis $x_1, x_2, \ldots, x_n$ que satisfaçam todas as equações do sistema.

Exemplo 2.1.1. Considere o seguinte sistema linear:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 5 \\ x_1 - x_2 = 1 \end{cases} \tag{2.2}$$

Nesse caso, temos $m = 2$, $n = 2$, $a_{11} = 2$, $a_{12} = 3$, $a_{21} = 1$, $a_{22} = -1$, $b_1 = 5$ e $b_2 = 1$. As variáveis do sistema são x_1 e x_2. O leitor pode verificar, por meios elementares, que a única solução do sistema é dada por $(x_1, x_2) = (2, 1)$.

Enfatizamos que não é um requisito para a leitura deste texto o conhecimento prévio de técnicas para resolver sistemas lineares, uma vez que um dos objetivos deste capítulo é apresentar técnicas gerais que resolvam qualquer sistema linear.

Aproveitando o exemplo anterior, considere o seguinte sistema linear:

$$\begin{cases} 2y_1 + 3y_2 = 5 \\ y_1 - y_2 = 1 \end{cases} \tag{2.3}$$

O sistema linear da Equação (2.3) é essencialmente o mesmo que o sistema linear da Equação (2.2), apenas com as variáveis renomeadas. Por óbvio, as soluções de ambos os sistemas devem ser as mesmas. Por isso, ao estudar soluções de sistemas lineares, nos preocupamos apenas com os coeficientes dos mesmos.

Assim, para estudar sistemas lineares, podemos definir formalmente objetos matemáticos que agem como “tabelas” de números. Tais objetos são as *matrizes.*

Definição 2.1.2. Seja A um anel e m, n inteiros positivos. Uma *matriz de ordem* $m \times n$ (de m linhas e n colunas) com entradas em A é uma família $A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n}$ de elementos de A.

Podemos ainda a denotar por:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Ou ainda, por:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

E, finalmente, quando m, n são subentendidos, podemos escrever $A = (a_{ij})_{i,j}$.

O conjunto de todas as matrizes de ordem $m \times n$ com entradas em A é denotado por $M_{m \times n}(A)$. Quando $m = n$, dizemos que a matriz é *quadrada* de ordem n e denotamos por $M_n(A)$.

Os elementos a_{ij} são chamados de *coeficientes* de A.

Neste texto, daremos particular atenção para o corpo $A = \mathbb{R}$, ou, com maior generalidade, para corpos.

Exemplo 2.1.3. Seja $(a_{ij})_{i,j} \in M_2(\mathbb{R})$ a matriz dada por:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Então seus coeficientes são $a_{11} = 2$, $a_{12} = 3$, $a_{21} = 1$ e $a_{22} = -1$.

Neste texto, estudaremos sistemas lineares sobre corpos, com ênfase especial no corpo dos números reais $\mathbb{R}$. O estudo de sistemas lineares sobre corpos, conforme veremos, tem relação direta com o estudo do que é conhecido por *espaço vetorial*, e este é objeto da *Álgebra Linear*.

O estudo de sistemas lineares com coeficientes em anéis é mais geral, e, apesar de possuir muitas semelhanças com o que será apresentado, possui também muitas características próprias estudadas na Teoria de Módulos. Tal estudo não é objeto deste texto.

Definição 2.1.4. Seja $\mathbb{K}$ um corpo e $A = (a_{ij})_{i,j} \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$ uma matriz. O *sistema linear homogêneo associado a* A é o sistema linear dado por:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases} \tag{2.4}$$

Tal sistema linear é denotado por $AX = 0$. O *conjunto solução do sistema linear homogêneo de* A é o conjunto de todas as n-uplas $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ que satisfazem o sistema linear da Equação (2.4).

Se, adicionalmente, $b = (b_1, b_2, \ldots, b_m) \in \mathbb{K}^m$, o *sistema linear associado a* A *e* b é o sistema linear dado por:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \tag{2.5}$$

Tal sistema linear é denotado por $AX = b$.

O *conjunto solução do sistema linear de* A *com coeficientes independentes* b é o conjunto de todas as n-uplas $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ que satisfazem o sistema linear da Equação (2.5).

É imediato que todo sistema linear pode ser expresso na forma matricial, como acima. Assim, o estudo de matrizes pode ser uma ferramenta poderosa no estudo de sistemas lineares.

Exemplo 2.1.5. Seja $(a_{ij})_{i,j} \in M_2(\mathbb{R})$ a matriz dada por:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

O sistema linear homogêneo associado a A é o sistema linear dado por:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 0 \\ x_1 - x_2 = 0 \end{cases}$$

Conforme vimos, o produto matricial é uma operação que nasce naturalmente do estudo de sistemas lineares.

Outra operação pertinente é a soma de matrizes, motivada pelo seguinte fato:

Se $A, B \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ são matrizes e $x \in \mathbb{K}^n$ é solução dos sistemas lineares homogêneos $AX = 0$ e $BX = 0$, então, somando as equações linha-a-linha, x será solução do sistema linear resultante. Os coeficientes desse sistema são dados pela soma dos coeficientes de A e B.

Definição 2.1.6. Sejam $A = (a_{ij})_{i,j} \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ e $B = (b_{ij})_{i,j} \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ matrizes. A *soma de matrizes* $A + B$ é a matriz dada como a seguir.

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{i,j} \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$$

Ou seja:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & \cdots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}$$

2.2 Sistemas Equivalentes

Resgatemos conhecimentos elementares sobre resolução de equações simples: considerando nosso universo de discurso o conjunto dos números reais, como se obtém uma solução para a equação $3x + 2 = 5$? Ora, transformamos tal expressão na equação $3x = 3$, e, após, na equação $x = 1$.

Por que tal processo é válido? Ora, se x é um número real tal que $3x + 2 = 5$, então $3x = 3$, e, se x é um número real tal que $3x = 3$, então $x = 1$. Ou seja, se x é uma solução da equação $3x + 2 = 5$, então necessariamente x é 1. Por outro lado, tais operações são *reversíveis*: se $x = 1$, então $3x = 3$, e, se $3x = 3$, então $3x + 2 = 5$. Assim, podemos dizer, ao menos intuitivamente, que as equações $3x + 2 = 5$, $3x = 3$ e $x = 1$ são *equivalentes*, ou seja, possuem as mesmas soluções.

Perceba que, de modo geral, nosso método de resolução de equações é baseado em transformar uma equação em outra, sucessivamente, preservando todas as suas soluções, de modo a torná-la cada vez mais simples, até que se obtenha uma equação que seja trivialmente resolvida. Como fazer isso de modo generalizado para sistemas lineares? Nesta seção, estudaremos este tema.

O primeiro passo nesta direção é, dentro do nosso formalismo, definir a equivalência entre dois sistemas lineares.

Definição 2.2.1. Seja R um corpo, $A, B \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ matrizes e $b, c \in \mathbb{K}^m$. Dizemos que os sistemas lineares $AX = b$ e $BX = c$ são *equivalentes* se o conjunto solução da equação $AX = b$ é igual ao conjunto solução da equação $BX = c$.

Continuando nosso discurso, consideremos um sistema linear homogêneo qualquer, por exemplo, em $\mathbb{R}$:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 0 \\ 4x_1 + 6x_2 - x_3 = 0 \end{cases} \tag{2.6}$$

Quaisquer $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ que satisfaça tal sistema satisfará também as equações $2x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 0$ e $4x_1 + 6x_2 - x_3 = 0$, bem como a soma destas, $6x_1 + 9x_2 + 4x_3 = 0$, bem como o dobro da primeira, $4x_1 + 6x_2 + 10x_3 = 0$, bem como o dobro da primeira menos o triplo da segunda, $-2x_1 - 3x_2 + 8x_3 = 0$.

Vamos pensar em como sistematizar tal raciocínio. Olhemos para a matriz dos coeficientes do sistema da Equação (2.6):

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 4 & 6 & -1 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Se montarmos um novo sistema obtido pela soma de múltiplos de linhas de A, obtemos um novo sistema linear homogêneo tal que toda solução do sistema original é também solução do novo sistema.

Segundo nosso exemplo, qualquer solução do sistema da Equação (2.6) é também solução do sistema homogêneo associado à matriz B dada por:

$$B = \begin{pmatrix} 6 & 9 & 4 \\ 4 & 6 & 10 \\ -2 & -3 & 8 \end{pmatrix}$$

Para obter a primeira linha de B, somamos a primeira linha de A com a segunda, e para obter a segunda linha de B, multiplicamos a primeira linha de A por 2. Para obter a terceira linha de B, subtraímos o dobro da primeira linha de A com o triplo da segunda linha de A.

Tais operações consistem em obter o que chamamos de *combinações lineares* das linhas de A.

Para melhor expressar tais operações, definamos o seguinte:

Definição 2.2.2. Seja $\mathbb{K}$ um corpo e n um inteiro positivo. Sejam $v = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{K}^n$ e $u = (c_1, \ldots, c_n) \in \mathbb{K}^n$.

Define-se a *soma* de v com u como $v + u = (a_1 + c_1, \ldots, a_n + c_n)$.

Define-se o *produto por escalar* de v por um elemento $b \in \mathbb{K}$ como $b \cdot v = (ba_1, \ldots, ba_n)$.

O elemento nulo de $\mathbb{K}^n$ é o elemento $0 = (0, 0, \ldots, 0)$.

Se $v = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{K}^n$, o *oposto* de v é o elemento $-v = (-a_1, -a_2, \ldots, -a_n)$.

Se $v, w \in \mathbb{K}^n$, a *diferença* de v com w é o elemento $v - w = v + (-w)$.

Elementos de $\mathbb{K}^n$ são chamados de *vetores*.

Proposição 2.2.3. Sejam, $u, v, w \in \mathbb{K}^n$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$. Então:

(i) $u + (v + w) = (u + v) + w$;

(ii) $u + v = v + u$;

(iii) $u + 0 = u$;

(iv) $u + (-u) = 0$;

(v) $\alpha \cdot (\beta \cdot u) = (\alpha\beta) \cdot u$;

(vi) $1 \cdot u = u$;

(vii) $\alpha \cdot (u + v) = \alpha \cdot u + \alpha \cdot v$;

(viii) $(\alpha + \beta) \cdot u = \alpha \cdot u + \beta \cdot u$.

Demonstração. Escreva $u = (u_1, \ldots, u_n)$, $v = (v_1, \ldots, v_n)$ e $w = (w_1, \ldots, w_n)$. Então:

(i) $u+(v+w) = (u_i)_{i=1}^n + (v_i+w_i)_{i=1}^n = (u_i+(v_i+w_i))_{i=1}^n = ((u_i+v_i)+w_i)_{i=1}^n = (u_i+v_i)_{i=1}^n + (w_i)_{i=1}^n = (u + v) + w$;

(ii) $u + v = (u_i)_{i=1}^n + (v_i)_{i=1}^n = (u_i + v_i)_{i=1}^n = (v_i + u_i)_{i=1}^n = (v_i)_{i=1}^n + (u_i)_{i=1}^n = v + u$;

(iii) $u + 0 = (u_i)_{i=1}^n + (0, \ldots, 0) = (u_i + 0)_{i=1}^n = (u_i)_{i=1}^n = u$;

(iv) $u + (-u) = (u_i)_{i=1}^n + (-u_i)_{i=1}^n = (u_i + (-u_i))_{i=1}^n = (0, \ldots, 0) = 0$;

(v) $\alpha \cdot (\beta \cdot u) = \alpha \cdot (\beta u_i)_{i=1}^n = (\alpha(\beta u_i))_{i=1}^n = ((\alpha\beta)u_i)_{i=1}^n = (\alpha\beta) \cdot (u_i)_{i=1}^n = (\alpha\beta) \cdot u$;

(vi) $1 \cdot u = (1u_i)_{i=1}^n = (u_i)_{i=1}^n = u$;

(vii) $\alpha \cdot (u + v) = \alpha \cdot (u_i + v_i)_{i=1}^n = (\alpha(u_i + v_i))_{i=1}^n = (\alpha u_i + \alpha v_i)_{i=1}^n = (\alpha u_i)_{i=1}^n + (\alpha v_i)_{i=1}^n = \alpha \cdot u + \alpha \cdot v$;

(viii) $(\alpha + \beta) \cdot u = ((\alpha + \beta)u_i)_{i=1}^n = (\alpha u_i + \beta u_i)_{i=1}^n = (\alpha u_i)_{i=1}^n + (\beta u_i)_{i=1}^n = \alpha \cdot u + \beta \cdot u$.

□

Definição 2.2.4. Se $v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{K}^n$, uma *combinação linear de* $v_1, \ldots, v_n$ é uma n-upla da forma $\sum_{i=1}^{n} c_i v_i$, com $c_i \in \mathbb{K}$.

Com essa notação, qual a forma geral para se obter, a partir de uma matriz A uma nova matriz C formada de combinações lineares de linhas de A? Tal matriz C, como A, deve possuir n colunas. Porém, o número de linhas de C não possui limite. Imaginemos que C tem p linhas.

Ora, sendo $A = (a_{ij})_{i,j} \in M_{m\times n}(A)$, cada linha de A pode ser encarada como uma n-upla $a_i = (a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in}) \in A^n$.

Se $1 \leq k \leq p$, a k-ésima linha de C é uma combinação linear de $a_1, \ldots, a_n$, ou seja, é da forma $\sum_{i=1}^{m} b_{ki} a_i$, com $b_{ki} \in \mathbb{K}$. A i-ésima linha de C, é, então, $(\sum_{i=1}^{m} b_{ki} a_{i1}, \ldots, \sum_{i=1}^{m} b_{ki} a_{in})$. Explicitamente:

$$C = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{m} b_{1i} a_{i1} & \cdots & \sum_{i=1}^{m} b_{1i} a_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{i=1}^{m} b_{pi} a_{i1} & \cdots & \sum_{i=1}^{m} b_{pi} a_{in} \end{pmatrix}$$

Ou seja, escolhendo-se uma matriz $B = (b_{ki})_{k,i} \in M_{p\times m}(A)$ e operando os elementos b_{ik} como acima, obtemos uma matriz C de ordem $p \times n$ cujas linhas são combinações lineares das linhas de A, e todas tais matrizes C são equivalentes a A.

Seria útil formalizar tal operação. Tal operação é muito conhecida e chamada de *produto matricial*.

Definição 2.2.5. Sejam m, n, p inteiros positivos, R um anel, e $A = (a_{ij})_{i,j} \in M_{m\times n}(R)$ e $B = (b_{ki})_{k,i} \in M_{p\times m}(R)$ matrizes. O *produto matricial* de B por A, denotado por BA, é a matriz $C \in M_{p\times n}(R)$ dada por:

$$C = BA = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{m} b_{1i} a_{i1} & \cdots & \sum_{i=1}^{m} b_{1i} a_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{i=1}^{m} b_{pi} a_{i1} & \cdots & \sum_{i=1}^{m} b_{pi} a_{in} \end{pmatrix}$$

Ou seja, $C = (\sum_{i=1}^{m} b_{ki} a_{ij})_{k,j} \in M_{p\times n}(R)$.

Conforme esperado, o seguinte resultado é, então, verdadeiro:

Proposição 2.2.6. Seja $\mathbb{K}$ um corpo, $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ e $B \in M_{p\times m}(\mathbb{K})$ matrizes. Então toda solução do sistema linear homogêneo $AX = 0$ é também solução do sistema linear homogêneo $BAX = 0$.

Demonstração. Escreva $A = (a_{ij})_{i,j} \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ e $B = (b_{ki})_{k,i} \in M_{p\times m}(\mathbb{K})$. Seja $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ uma solução do sistema linear homogêneo $AX = 0$.

Devemos ver que para todo k tal que $1 \leq k \leq p$, vale $\sum_{j=1}^{n} (\sum_{i=1}^{m} b_{ki} a_{ij})\, x_j = 0$.

Ora, dado i tal que $1 \leq i \leq m$, temos que $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = 0$. Daí, temos:

$$\sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{m} b_{ki} a_{ij} \right) x_j = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{m} b_{ki} a_{ij} x_j \right) = \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} b_{ki} a_{ij} x_j \right) = \sum_{i=1}^{m} b_{ki} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \right) = \sum_{i=1}^{m} b_{ki} 0 = 0.$$

□

Note, ainda, que a notação $AX = b$ não é por acaso.

Proposição 2.2.7. Seja $\mathbb{K}$ um corpo, $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ e $B \in M_{p\times m}(\mathbb{K})$ matrizes.

Seja $b = (b_1, b_2, \ldots, b_m) \in \mathbb{K}^m$ e $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n$. Considere X a matriz coluna dada por $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ e B a matriz coluna dada por $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$.

Então x é solução do sistema linear $AX = b$ se, e somente se, $AX = B$, ou seja, se, e somente se, sendo $A = (a_{ij})_{i,j}$:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Demonstração. Note que:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^n a_{1j}x_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n a_{mj}x_j \end{pmatrix}$$

Logo, $AX = B$ se, e somente se para cada i tal que $1 \leq i \leq m$, temos $\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = b_i$, ou seja, se, e somente se x é solução do sistema linear $AX = b$. □

A operação de produto de matrizes é, de fato, uma operação de recombinação de linhas, conforme ilustrado a seguir:

Proposição 2.2.8. Sejam $A = (a_{ij})_{i,j} \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ e $B = (b_{ki})_{k,i} \in M_{p\times m}(\mathbb{K})$. Seja $C = BA = (c_{kj})_{k,j} \in M_{p\times n}(\mathbb{K})$ o produto matricial de B por A. Então cada linha de C é uma combinação linear das linhas de A.

Mais especificamente, sendo $L_1, \ldots, L_m$ as linhas de A, e $K_1, \ldots, K_p$ as linhas de B, temos que cada linha C_k de C pode ser escrita como:

$$C_k = \sum_{i=1}^m b_{ki}L_i.$$

Reciprocamente, se $C \in M_{p\times m}(\mathbb{K})$ é uma matriz tal que cada linha de C é uma combinação linear das linhas de A, então existe uma matriz $B \in M_{p\times m}(\mathbb{K})$ tal que $C = BA$.

Demonstração. Utilizando a notação do enunciado, dados k, j tais que $1 \leq k \leq p$ e $1 \leq j \leq n$, temos que o elemento c_{kj} de C é dado por:

$$c_{kj} = \sum_{i=1}^m b_{ki}a_{ij}.$$

Tal elemento é o j-ésimo elemento de C_k e de $\sum_{i=1}^m b_{ki}L_i$, logo, $C_k = \sum_{i=1}^m b_{ki}L_i$.

Reciprocamente, suponha que C é uma matriz tal que cada linha de C é uma combinação linear das linhas de A. Então, para cada k tal que $1 \leq k \leq p$, existem $b_{k1}, b_{k2}, \ldots, b_{km} \in \mathbb{K}$ tais que $C_k = \sum_{i=1}^m b_{ki}L_i$.

Sendo $B = (b_{ki})_{k,i} \in M_{p\times m}(\mathbb{K})$, temos que $C = BA$. □

Exemplo 2.2.9. Seja $\mathbb{R}$ o corpo dos números reais, $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 4 & 6 & -1 \end{pmatrix} \in M_{2\times 3}(\mathbb{R})$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} \in M_{3\times 2}(\mathbb{R})$.

Então:

$$BA = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 4 & 6 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 9 & 4 \\ 4 & 6 & 10 \\ -10 & -21 & -2 \end{pmatrix}$$

Sendo $L_1 = (2, 3, 5)$ e $L_2 = (4, 6, -1)$ as linhas de A, temos que as linhas de BA são dadas por $1L_1 + 1L_2$, $2L_1 + 0L_2$ e $-1L_1 - 3L_2$.

2.3 Operações com matrizes

Nesta seção, faremos um interlúdio sobre operações gerais de matrizes.

Proposição 2.3.1. Seja R um anel e m, n inteiros positivos. Então $M_{m\times n}(R)$ é, com a soma de matrizes, um *grupo abeliano*, ou seja, satisfaz as seguintes propriedades. Para todos $A, B, C \in M_{m\times n}(R)$:

(i) A soma é associativa, ou seja, $(A + B) + C = A + (B + C)$.

(ii) A soma é comutativa, ou seja, $A + B = B + A$.

(iii) Existe um elemento neutro para a soma, a matriz nula $0_{m\times n} = (0)_{i,j}$.

(iv) Todo elemento tem oposto aditivo, a matriz $-A$ dada por $(-a_{ij})_{i,j}$.

Demonstração. Sejam $A = (a_{ij})_{i,j}, B = (b_{ij})_{i,j}, C = (c_{ij})_{i,j} \in M_{m\times n}(R)$.

(i) Temos que

$$(A+B)+C = (a_{ij}+b_{ij})_{i,j} + (c_{ij})_{i,j} = ((a_{ij}+b_{ij})+c_{ij})_{i,j} = (a_{ij}+(b_{ij}+c_{ij}))_{i,j} = A+(B+C).$$

(ii) Temos que

$$A+B = (a_{ij}+b_{ij})_{i,j} = (b_{ij}+a_{ij})_{i,j} = B+A.$$

(iii) Veja que

$$A+0_{m\times n} = (a_{ij}+0)_{i,j} = (a_{ij})_{i,j} = A.$$

(iv) Note que

$$A+(-A) = (a_{ij}+(-a_{ij}))_{i,j} = (0)_{i,j} = 0_{m\times n}.$$

□

A operação de produto, por sua vez, possui propriedades típicas das de multiplicação em um anel, porém, ela não está definida para quaisquer duas matrizes: os tamanhos devem ser compatíveis.

Proposição 2.3.2. Seja R um anel e m, n, p, q inteiros positivos. Seja $A, A' \in M_{m\times n}(R)$, $B, B' \in M_{p\times m}(R)$ e $C \in M_{q\times p}(R)$ matrizes. Segue que:

(i) O produto é associativo, ou seja, $(CB)A = C(BA)$.

(ii) O produto é distributivo em relação à soma, ou seja, $B(A+A') = BA+BA'$ e $(B+B')A = BA+BA'$.

Demonstração. Sejam $A = (a_{ij})_{i,j} \in M_{m\times n}(R)$, $B = (b_{ki})_{k,i} \in M_{p\times m}(R)$, $C = (c_{lk})_{l,k} \in M_{q\times p}(R)$. Temos que:

$$(CB)A = (\sum_{k=1}^{p} c_{lk}b_{ki})_{l,i}(\sum_{j=1}^{n} a_{ij})_{i,j} = (\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{p} c_{lk}b_{ki}a_{ij})_{l,j}.$$

Por outro lado, temos que:

$$C(BA) = (c_{lk})_{l,k}(\sum_{i=1}^{m} b_{ki}a_{ij})_{k,j} = (\sum_{k=1}^{p}\sum_{j=1}^{n} c_{lk}b_{ki}a_{ij})_{l,j}.$$

Assim, segue a (i).

Para a (ii), temos que, sendo $A' = (a'_{ij})_{i,j} \in M_{m\times n}(R)$:

$$B(A+A') = (b_{ki})_{k,i}(a_{ij}+a'_{ij})_{i,j} = (\sum_{i=1}^{m} b_{ki}(a_{ij}+a'_{ij}))_{k,j} = (\sum_{i=1}^{m} b_{ki}a_{ij} + \sum_{i=1}^{m} b_{ki}a'_{ij})_{k,j} = BA+BA'$$

Analogamente, $(B+B')A = BA+B'A$. □

Em particular, matrizes quadradas formam um anel.

Proposição 2.3.3 (Anel de matrizes)**.** Seja R um anel e n um inteiro positivo. Então $M_n(R)$, com a soma e produto de matrizes, é um anel, cuja identidade multiplicativa é a matriz identidade $I_n = (\delta_{ij})_{i,j}$, onde δ_{ij} é o *símbolo de Kronecker*, ou seja, $\delta_{ij} = 1$ se $i = j$ e $\delta_{ij} = 0$ se $i \neq j$. Mais explicitamente:

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Ainda mais: se m, n são inteiros positivos e $A \in M_{m\times n}(R)$, então $I_mA = A$ e $AI_n = A$.

Demonstração. Note que, para $A = (a_{ij})_{i,j} \in M_{m\times n}(R)$, temos que $I_m A$ é uma matriz de dimensões $m \times n$. Se i, j são tais que $1 \leq i \leq m$ e $1 \leq j \leq n$ o elemento ij de $I_m A$ é dado por $\sum_{k=1}^{n} \delta_{ik} a_{kj} = a_{ij}$.

Analogamente, AI_n é uma matriz de dimensões $m\times n$ e o elemento ij de AI_n é dado por $\sum_{k=1}^{m} a_{ik}\delta_{kj} = a_{ij}$. □

O produto de matrizes não é comutativo.

Exemplo 2.3.4. Seja $A = (a_{ij})_{i,j} \in M_2(\mathbb{R})$ e $B = (b_{ij})_{i,j} \in M_2(\mathbb{R})$ matrizes dadas por:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Então, temos que:

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad BA = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Note que $AB \neq BA$.

Além disso, há matrizes que não são invertíveis.

Exemplo 2.3.5. Considere a matriz $A = (a_{ij})_{i,j} \in M_2(\mathbb{R})$ dada por:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Afirmamos que A não é invertível. De fato, suponha por absurdo que exista uma matriz B tal que $AB = BA = I_2$. Escreva $B = (b_{ij})_{i,j} \in M_2(\mathbb{R})$. Então, temos que:

$$I_n = AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Assim:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = AB = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Em particular, $0 = 1$, o que é absurdo.

2.4 Resolução de Sistemas Homogêneos

Com já o básico operacional de matrizes desenvolvido, ganhamos algumas ferramentas para estudar sistemas lineares.

Proposição 2.4.1. Seja $\mathbb{K}$ um corpo e $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ uma matriz. Se $B \in M_m(\mathbb{K})$ é uma matriz invertível, então o sistema linear homogêneo $AX = 0$ é equivalente ao sistema linear homogêneo $BAX = 0$.

Demonstração. Já vimos que toda solução do sistema linear homogêneo $AX = 0$ é também solução do sistema linear homogêneo $BAX = 0$.

Sendo B^{-1} a inversa de B, segue que toda solução do sistema linear homogêneo $BAX = 0$ é também solução do sistema linear homogêneo $B^{-1}BAX = 0$. Como $B^{-1}BA = A$, temos que $B^{-1}BAX = 0$ é equivalente a $AX = 0$. □

Agora iniciaremos o estudo direto da resolução de sistemas lineares homogêneos. Mais tarde, veremos como resolver sistemas lineares não homogêneos a partir das técnicas que desenvolveremos aqui.

Voltemos a nossa discussão intuitiva. Considere o seguinte sistema linear homogêneo:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 0 \\ x_1 - x_2 = 0 \end{cases}$$

Sistemas homogêneos sempre tem a chamada *solução trivial*: a atribuição do valor 0 a cada variável. Será que o sistema acima possui outras soluções?

Vamos considerar três operações que podemos realizar nesse sistema:

A primeira: multiplicar alguma das linhas por um número não nulo. É imediato que, por exemplo, ao multiplicar a primeira linha por $\frac{1}{2}$, obtemos um sistema equivalente.

$$\begin{cases} x_1 + \frac{3}{2}x_2 = 0 \\ x_1 - x_2 = 0 \end{cases}$$

A segunda: trocar linhas de posição. É imediato que o sistema acima é equivalente ao seguinte:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ x_1 + \frac{3}{2}x_2 = 0 \end{cases}$$

E a terceira: trocar uma linha por ela própria, mais um múltiplo de outra. Por exemplo, o sistema acima é equivalente ao seguinte:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = 0 \\ x_1 + \frac{3}{2}x_2 = 0 \end{cases}$$

Para se obter esse sistema, somamos, na primeira linha, o dobro da segunda. Para obter novamente a primeira linha original a partir do novo sistema, basta subtrair, da nova primeira linha, o dobro da segunda. Logo, os sistemas são equivalentes.

Nossa afirmação é que, utilizando sistematicamente essas três operações, que chamaremos de *operações elementares nas linhas de um sistema linear*, podemos resolver completamente qualquer sistema linear. No nosso exemplo, olhando novamente para o sistema original, e somando na primeira linha o oposto da segunda (o produto da segunda por -1), obtemos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} 0x_1 + \frac{5}{2}x_2 = 0 \\ x_1 - x_2 = 0 \end{cases}$$

Multiplicando a primeira linha por $\frac{2}{5}$ e trocando as linhas de posição, obtemos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ 0x_1 + x_2 = 0 \end{cases}$$

Finalmente, somando na primeira linha, a segunda, obtemos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases}$$

O que mostra que a única solução do sistema original é a solução trivial.

Vamos, nesta seção, sistematizar e formalizar este raciocínio a partir da linguagem de matrizes.

Definição 2.4.2. Sejam m, n inteiros positivos. Chamamos de *operações elementares em linhas* em $M_{m\times n}(\mathbb{K})$ as seguintes operações.

1. Para algum $l \in \{1, \dots, m\}$ e $\lambda \in \mathbb{K}$ não nulo, $e^1_{l\lambda}((a_{ij})_{i,j}) = (b_{ij})_{i,j}$ onde:
$$b_{ij} = \begin{cases} \lambda a_{ij} & \text{se } i = l \\ a_{ij} & \text{caso contrário.} \end{cases}$$
2. Para $l, l' \in \{1, \dots, m\}$, $e^2_{ll'}((a_{ij})_{i,j}) = (b_{ij})_{i,j}$ onde:
$$b_{ij} = \begin{cases} a_{l'j} & \text{se } i = l \\ a_{lj} & \text{se } i = l' \\ a_{ij} & \text{caso contrário.} \end{cases}$$
3. Para $l, l' \in \{1, \dots, m\}$ e $\lambda \in \mathbb{K}$, $e^3_{ll'\lambda}((a_{ij})_{i,j}) = (b_{ij})_{i,j}$ onde:
4. $$b_{ij} = \begin{cases} a_{lj} + \lambda a_{l'j} & \text{se } i = l \\ a_{ij} & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Tais operações elementares correspondem a produtos por certas matrizes.

Definição 2.4.3. Seja m um inteiro positivo. Chamamos de *matrizes elementares* de $M_m(\mathbb{K})$ as seguintes matrizes.

1. Para algum $l \in \{1, \ldots, m\}$ e $\lambda \in \mathbb{K}$ não nulo, $E^1_{l\lambda} = (b_{ij})_{i,j}$, onde:

$$b_{ij} = \begin{cases} \lambda & \text{se } i = j = l \\ 1 & \text{se } i = j \neq l \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

2. Para $l, l' \in \{1, \ldots, m\}$, $E^2_{ll'} = (b_{ij})_{i,j}$, onde:

$$b_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \notin \{l, l'\} \\ 1 & \text{se } i = l, j = l' \\ 1 & \text{se } i = l', j = l \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

3. Para $l, l' \in \{1, \ldots, m\}$ e $\lambda \in \mathbb{K}$, $E^3_{ll'\lambda} = (b_{ij})_{i,j}$, onde:

$$b_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ \lambda & \text{se } i = l, j = l' \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Lema 2.4.4. Sejam m, n inteiros positivos e $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$. Então:

1. Dado $l \in \{1, \ldots, m\}$ e $\lambda \in \mathbb{K}$ não nulo, $E^1_{l\lambda}A = e^1_{l\lambda}(A)$.
2. Dado $l, l' \in \{1, \ldots, m\}$, $E^2_{ll'}A = e^2_{ll'}(A)$.
3. Dado $l, l' \in \{1, \ldots, m\}$ e $\lambda \in \mathbb{K}$, $E^3_{ll'\lambda}A = e^3_{ll'\lambda}(A)$.

Demonstração. Sejam i, j tais que $1 \leq i \leq m$ e $1 \leq j \leq n$. Escreva $A = (a_{ij})_{i,j}$ e, em cada caso, seja $(b_{ij})_{i,j}$ a matriz elementar em questão.

1. Se $i \neq l$, o elemento ij de $E^1_{l\lambda}A$ é dado por $\sum_{k=1}^n b_{ik}a_{kj} = a_{ij}$. Já se $i = l$, o elemento ij de $E^1_{l\lambda}A$ é dado por $\sum_{k=1}^n b_{ik}a_{kj} = \lambda\lambda a_{lj}$. Assim, $E^1_{l\lambda}A = e^1_{l\lambda}(A)$.
2. Se $i \notin \{l, l'\}$, o elemento ij de $E^2_{ll'}A$ é dado por $\sum_{k=1}^n b_{ik}a_{kj} = a_{ij}$. Se $i = l$, o elemento ij de $E^2_{ll'}A$ é dado por $\sum_{k=1}^n b_{lk}a_{kj} = a_{l'j}$. Finalmente, se $i = l'$, o elemento ij de $E^2_{ll'}A$ é dado por $\sum_{k=1}^n b_{l'k}a_{kj} = a_{lj}$. Assim, $E^2_{ll'}A = e^2_{ll'}(A)$.
3. Se $i \neq l$, o elemento ij de $E^3_{ll'\lambda}A$ é dado por $\sum_{k=1}^n b_{ik}a_{kj} = a_{ij}$. Se $i = l$, o elemento ij de $E^3_{ll'\lambda}A$ é dado por $\sum_{k=1}^n b_{lk}a_{kj} = a_{ij} + \lambda a_{l'j}$. Assim, $E^3_{ll'\lambda}A = e^3_{ll'\lambda}(A)$.

□

Lema 2.4.5. Seja m um inteiro positivo e $\mathbb{K}$ um corpo. As matrizes elementares de $M_m(\mathbb{K})$ são invertíveis.

Demonstração. Consideremos $E^1_{l\lambda}$, onde $l \in \{1, \ldots, m\}$ e $\lambda \in \mathbb{K}$ não nulo. É imediato que $I_n = e^1_{l\lambda^{-1}}(E^1_{l\lambda})$, de modo que $I_n = E^1_{l\lambda^{-1}}E^1_{l\lambda}$. Da mesma forma, $I_n = E^1_{l\lambda}E^1_{l\lambda^{-1}}$

Agora consideremos $E^2_{ll'}$, onde $l, l' \in \{1, \ldots, m\}$. É imediato que $I_n = e^2_{ll'}(E^2_{ll'})$, de modo que $I_n = E^2_{ll'}E^2_{ll'}$.

Finalmente, consideremos $E^3_{ll'\lambda}$, onde $l, l' \in \{1, \ldots, m\}$ e $\lambda \in \mathbb{K}$. É imediato que $I_n = e^3_{ll'(-\lambda)}(E^3_{ll'\lambda})$, de modo que $I_n = E^3_{ll'(-\lambda)}E^3_{ll'\lambda}$. Da mesma forma, $I_n = E^3_{ll'\lambda}E^3_{ll'(-\lambda)}$. □

Corolário 2.4.6. Sejam $A, B \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ matrizes tais que A é obtida a partir de B aplicando-se sucessivas operações elementares em linhas. Então os sistemas lineares homogêneos $AX = 0$ e $BX = 0$ são equivalentes.

Estudemos agora o seguinte sistema:

$$\begin{cases} 2x_1 + 6x_2 + 4x_3 + x_4 = 0 \\ 3x_1 - 3x_2 - 4x_3 + x_4 = 0 \end{cases} \tag{2.7}$$

Vamos resolvê-lo utilizando operações elementares em linhas. A matriz associada a esse sistema é:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 4 & 1 \\ 3 & -3 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$

Multiplicando a primeira linha por $\frac{1}{2}$, obtemos:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & \frac{1}{2} \\ 3 & -3 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$

Agora, subtraindo da segunda linha o triplo da primeira, obtemos:

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & \frac{1}{2} \\ 0 & -15 & -12 & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

Multiplicando a segunda linha por $-\frac{1}{15}$, obtemos:

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{4}{5} & \frac{1}{10} \end{pmatrix}$$

Finalmente, subtraindo da primeira linha o triplo da segunda, obtemos:

$$A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ 0 & 1 & \frac{4}{5} & \frac{1}{10} \end{pmatrix}$$

Assim, o sistema da Equação (2.7) é equivalente ao seguinte sistema:

$$\begin{cases} x_1 - \frac{2}{5}x_3 + \frac{1}{5}x_4 = 0 \\ x_2 + \frac{4}{5}x_3 + \frac{1}{10}x_4 = 0 \end{cases} \tag{2.8}$$

Ou, de forma mais simples:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{2}{5}x_3 - \frac{1}{5}x_4 \\ x_2 = -\frac{4}{5}x_3 - \frac{1}{10}x_4 \end{cases}$$

Escolhidos quaisquer valores reais de x_3 e x_4, e utilizando-se as expressões acima para x_1, x_2, obtemos uma solução do sistema original, e todas as soluções do sistema original são obtidas dessa forma. Em outras palavras, o conjunto solução do sistema da Equação (2.7) é dado por:

$$\left\{ \left(\frac{2}{5}x_3 - \frac{1}{5}x_4, -\frac{4}{5}x_3 - \frac{1}{10}x_4, x_3, x_4 \right) \mid x_3, x_4 \in \mathbb{R} \right\}$$

Nosso objetivo é mostrar que esse método é geral. Notemos que o sistema da Equação (2.8) é notável: basta observá-lo para, de imediato, escrever seu conjunto solução.

Definiremos, abaixo, uma classe de matrizes semelhantes a essa, e, a seguir, mostraremos que para qualquer matriz, existe uma sequência finita de operações elementares em linhas que a transforma em uma matriz dessa classe. A demonstração desse teorema será construtiva, de modo que ela nos dará o algoritmo necessário para resolver qualquer sistema linear homogêneo.

Definição 2.4.7. Seja m, n inteiros positivos e $\mathbb{K}$ um corpo.

Seja $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ e i entre 1 e m.

Dizemos que a i-ésima linha de A possui pivô se ela é não nula e $j \in \{1, \dots, n\}$ tal que $a_{ij} = 1$ e $a_{i'j} = 0$ para todo $i' \neq i$, e, além disso, a_{ij} é o primeiro elemento não nulo da linha. Nesse caso, o elemento a_{ij} é chamado de *pivô* da i-ésima linha de A, e j é a *posição do pivô* da i-ésima linha de A.

Dizemos que uma matriz $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ está na *forma escalonada* se, para todo $i, i' \in \{1, \dots, m\}$ com $i < i'$, valem as seguintes condições.

a) Se a i-ésima linha de A é nula, então a i'-ésima linha de A também é nula.

b) Se a i-ésima linha de A não é nula, então ela possui um pivô.

c) Caso as linhas i, i' de A não são nulas, e $j_i, j_{i'}$ são as posições dos pivôs dessas linhas, então $j_i < j_{i'}$.

Para $i \in \{1, \ldots, m\}$ com $i \leq S$, a posição (i, j_i) é dita ser um *pivô* de A.

Observe que a matriz identidade I_n e a matriz nula estão ambas na forma escalonada.
Como ocorre na discussão, acima, temos:

Teorema 2.4.8. Seja m, n inteiros positivos e $\mathbb{K}$ um corpo. Então, para toda matriz $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ na forma escalonada as soluções do sistema $AX = 0$ são dadas, segundo a notação acima, pelas n-uplas $(x_j : 1 \leq j \leq n)$, onde x_j é qualquer se para nenhum i, (i, j) é um pivô de A. Já se (i, j) é um pivô de A, então $x_j = \sum(-a_{ij'}x_{j'} : j < j'$, j' não é pivô de $A)$.

Teorema 2.4.9. Seja m, n inteiros positivos e $\mathbb{K}$ um corpo. Então, para toda matriz $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$, existe uma sequência finita de operações elementares em linhas que transforma A em uma matriz na forma escalonada.

Demonstração. Provaremos por indução em n.

Se $n = 1$, então A é uma matriz coluna. Se A é nula, então A já está na forma escalonada.

Caso contrário, trocando duas linhas de posição, obtemos uma matriz coluna cujo primeiro elemento é não nulo. Multiplicando a primeira linha pelo inverso de seu novo elemento, obtemos uma matriz coluna cujo primeiro elemento é 1. Finalmente, somando em cada outra linha i não nula o múltiplo da primeira linha pelo oposto do elemento na posição $i1$, obtemos a matriz escalonada abaixo:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Para a hipótese de indução, suponha que toda matriz $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ pode ser escalonada por uma sequência finita de operações elementares em linhas.

Se $A \in M_{m\times(n+1)}(\mathbb{K})$ e $B \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ é a matriz obtida a partir de A eliminando-se a última coluna, então, por hipótese de indução, existe uma sequência finita de operações elementares em linhas que transforma B em uma matriz na forma escalonada. Perceba que se e é uma operação elementar em linhas e π é a operação que elimina de uma matriz sua última coluna, então $e \circ \pi(A) = \pi \circ e(A)$. Logo, sendo $e_1, \ldots e_l$ operações elementares em linhas tais que $e_1 \circ \cdots \circ e_l(B)$ é a matriz na forma escalonada, temos que $\pi \circ e_1 \circ \cdots \circ e_l(A) = e_1 \circ \cdots \circ e_l \circ \pi(A) = e_1 \circ \cdots \circ e_l(B)$ está na forma escalonada.

Ou seja, aplicando-se em A a sequência de operações elementares em linhas $e_1, \ldots e_l$ que escalona B, obtemos uma matriz C que, a menos de sua última coluna, está na forma escalonada, S.

Se A' está já na forma escalonada, não há nada para fazer. Caso contrário:

- Caso 1: existem linhas $i < i'$ de C tais que $C_{i'}$ não é nula e C_i é nula. Como S está na forma escalonada, o único elemento não nulo de $C_{i'}$ está na última coluna. Podemos multiplicá-lo pelo seu inverso e, como no caso base, utilizar esta linha para zerar as outras entradas da última coluna da matriz, e, em seguida, reordená-la para transformá-la em uma matriz na forma escalonada.

- Caso 2: alguma linha não nula não possui pivô. Notemos que cada pivô de S é um pivô de C. Seja c_{ij} o primeiro elemento não nulo de C que não é pivô.

  Se, por absurdo $j \leq n$, c_{ij} não é pivô de S, logo, existe $j' < j$ tal que $c_{ij'}$ é pivô de S. Assim, a i-ésima linha de S possui pivô, e, portanto, a i-ésima linha de C também possui pivô, o que é um absurdo. Logo, o único elemento não nulo de C_i está na última coluna e agimos como no caso anterior.

- Caso 3: existem linhas $i < i'$ de C tais que ambas são não nulas e, sendo $a_{ij}, a_{i'j'}$ os pivôs dessas linhas, $j > j'$.

  Ora, como S está na forma escalonada, isso só é possível se $j = n + 1$. Logo, a i-ésima linha de C é nula, o que implica que a i'-ésima linha de S é nula, mas $a_{i'j'}$ é pivô de S, o que é um absurdo.

□

Proposição 2.4.10. Seja $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ uma matriz e $B \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ uma matriz na forma escalonada equivalente a B. Seja S o número de pivôs de B.

- m representa o número de equações do sistema linear homogêneo $AX = 0$.
- n representa o número de incógnitas do sistema linear homogêneo $AX = 0$.
- O número $S \leq m$ representa o número de variáveis dependentes do sistema linear homogêneo $AX = 0$ – variáveis que são determinadas a partir das demais.
- O número $n - S$ representa o número de variáveis independentes do sistema linear homogêneo $AX = 0$ – variáveis que podem ser escolhidas livremente. Ele é chamado de *grau de liberdade* do sistema linear homogêneo $AX = 0$.
- O sistema linear homogêneo $AX = 0$ possui soluções não triviais se, e somente se $n - S > 0$. Assim, se $m < n$, então o sistema linear homogêneo $AX = 0$ possui soluções não triviais.

2.5 Invertendo matrizes

O processo de escalonamento é uma ferramenta que é útil, também, para inverter matrizes.
Primeiro, definiremos invertibilidades laterais.

Definição 2.5.1. Seja R um anel e $a \in M_n(R)$. Dizemos que a é **invertível à esquerda** se existe $b \in M_n(R)$ tal que $ba = I_n$. Nesse caso, b é chamado de um **inverso à esquerda** de a.
Dizemos que a é **invertível à direita** se existe $c \in M_n(R)$ tal que $ac = I_n$. Nesse caso, c é chamado de um **inverso à direita** de a.

Quando inversos laterais de ambos os lados existem, eles coincidem, e, portanto, o elemento é invertível.

Proposição 2.5.2. Seja R um anel e $a \in M_n(R)$. Se a é invertível à esquerda e à direita, então a é invertível e os inversos laterais coincidem.

Demonstração. Suponha que b é um inverso à esquerda de a e que c é um inverso à direita de a. Então, temos
$$b = b1 = b(ac) = (ba)c = 1c = c.$$
Portanto, $b = c$, e assim a é invertível com (único) inverso $b = c$. □

Veremos mais adiante neste texto que há anéis para os quais existem elementos invertíveis apenas de um lado. Porém, conforme veremos a seguir, isso não ocorre para matrizes quadradas sobre corpos.

Lema 2.5.3. Seja $A \in M_n(\mathbb{K})$. São equivalentes:

(i) A é invertível.

(ii) A é invertível à esquerda.

(iii) O sistema linear homogêneo $AX = 0$ possui apenas a solução trivial.

(iv) Existe uma sequência finita de operações elementares nas linhas de $M_n(\mathbb{K})$ que transforma A na matriz identidade I_n.

(v) A pode ser escrita como um produto de matrizes elementares.

Demonstração. Façamos a demonstração das implicações.

(i)⇒(ii) Imediato.

(ii)⇒(iii) Suponha que A é invertível à esquerda. Então, existe $B \in M_n(\mathbb{K})$ tal que $BA = I_n$.
Seja $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n$ uma solução do sistema linear homogêneo $AX = 0$. Segue que:
$$A\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix} = 0.$$

Multiplicando ambos os lados da equação por B à esquerda, obtemos

$$BA\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix} = B0 = 0.$$

Ou seja, $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$. Portanto, o sistema linear homogêneo $AX = 0$ possui apenas a solução trivial.

(iii)$\Rightarrow$(iv) Suponha que o sistema linear homogêneo $AX = 0$ possui apenas a solução trivial. Existem operações elementares nas linhas que transformam A em uma matriz escalonada S.

Como o sistema linear homogêneo $AX = 0$ possui apenas a solução trivial, todas as colunas de S possuem pivôs.

Como o número de linhas de S é igual ao número de colunas de S, segue que toda linha i de S possui pivô.

Sejam $j_1, j_2, \ldots, j_n$ as posições dos pivôs de S das linhas $1, 2, \ldots, n$, respectivamente. Temos que $1 \leq j_1 < j_2 < \cdots < j_n \leq n$. Portanto, $j_k = k$ para todo $k = 1, 2, \ldots, n$. Assim, S é uma matriz cuja diagonal é composta de pivôs, e, os elementos fora da diagonal, por estarem em uma coluna com pivô, são nulos. Ou seja, S é a matriz identidade.

(iv)$\Rightarrow$(v) Por hipótese, existem operações elementares $e_1, \ldots, e_k$ tais que $e_k \circ \ldots e_1(A) = I_n$.

Sendo $E_1, \ldots, E_k$ as matrizes elementares correspondentes às operações elementares $e_1, \ldots, e_k$, respectivamente, temos que:

$$E_k \cdots E_1 A = I_n.$$

Como as matrizes elementares são invertíveis, segue que $A = E_1^{-1} \cdots E_k^{-1}$.

Como o inverso de uma matriz elementar é uma matriz elementar, segue que A pode ser escrita como um produto de matrizes elementares.

(v)$\Rightarrow$(i) Suponha que A pode ser escrita como um produto de matrizes elementares. Como as matrizes elementares são invertíveis, segue que A é um produto de matrizes invertíveis, e, portanto, A é invertível.

□

Notemos um fato interessante: na demonstração anterior, a implicação (iv)$\Rightarrow$(v) nos dá um algoritmo sobre como escrever uma matriz invertível como um produto de matrizes elementares.

Vejamos um exemplo de seu funcionamento.

Exemplo 2.5.4. Seja

$$A = \begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\ 1 & 3 & 2\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Queremos escrever A como um produto de matrizes elementares.

Para isso, aplicamos operações elementares nas linhas de A até que ela se transforme na matriz identidade:

$$A \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_3} \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 3 & 2\\ 2 & 1 & 1\end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 - L_1} \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 2\\ 2 & 1 & 1\end{pmatrix} \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1} \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 2\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_2 \leftarrow \frac{1}{3}L_2} \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & \frac{2}{3}\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix} \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 - L_2} \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & \frac{2}{3}\\ 0 & 0 & \frac{1}{3}\end{pmatrix} \xrightarrow{L_3 \leftarrow 3L_3} \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & \frac{2}{3}\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 - \frac{2}{3}L_3} \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} = I_3.$$

Portanto, A pode ser escrita como um produto de matrizes elementares.

Temos que:

$$A = E_1^{-1}E_2^{-1}E_3^{-1}E_4^{-1}E_5^{-1}E_6^{-1}E_7^{-1}.$$

Na expressão acima, E_i^{-1} é a inversa da matriz elementar correspondente à i-ésima operação e_i elementar aplicada.

Se e_i for uma troca de linhas, $E_i^{-1} = E_i$ é a matriz identidade com estas mesmas linhas trocadas.

Se e_i for uma multiplicação de uma linha por um escalar não nulo, E_i^{-1} é a matriz identidade com a mesma linha multiplicada pelo inverso do escalar.

Se e_i for a adição de um múltiplo de uma linha a outra, E_i^{-1} é a matriz identidade com o mesmo múltiplo da mesma linha subtraída da outra. Portanto,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

A demonstração do teorema anterior também nos dá um algoritmo para inverter matrizes: basta aplicar operações elementares nas linhas de A até que ela se transforme em I_n. A inversa será, então, a matriz $E_k \dots E_1$, onde E_i é a matriz elementar correspondente à i-ésima operação elementar aplicada, e_i. Porém, $E_k \dots E_1$ é a matriz $e_k \circ \cdots \circ e_1(I_n)$, ou seja, é a matriz que resulta de aplicar as mesmas operações elementares em I_n.

Já se ao aplicar operações elementares em A chegarmos em uma matriz escalonada diferente da identidade, esta não terá pivôs em todas as colunas (ou seria a identidade), e, portanto, o sistema linear homogêneo $AX = 0$ possuirá soluções não triviais, o que, pela proposição, implica em A não ser invertível.

Exemplo 2.5.5. Consideremos a seguinte matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Para invertê-la, aplicaremos, simultaneamente, as mesmas operações elementares nela e em I_4, até que A se transforme em I_4. A matriz a qual I_4 se transformar será A^{-1}.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 - L_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 + L_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -3 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{L_3 \leftarrow \frac{1}{4}L_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{array}\right) \xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 - 3L_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{L_1 \leftarrow L_1 + L_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{array}\right)$$

Portanto,

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} \\ -\frac{3}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

Exemplo 2.5.6. Consideremos a seguinte matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Vamos tentar invertê-la.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 - L_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 + L_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Observe que a última linha da matriz à esquerda ficou toda nula, enquanto a parte aumentada à direita não é nula. Isso indica que a forma escalonada de A não é a identidade, e, portanto, A não é invertível.

Agora vamos tirar mais alguns corolários teóricos a partir do já exposto.

Corolário 2.5.7. Seja $A \in M_n(\mathbb{K})$. As seguintes afirmações são equivalentes:

(i) A é invertível.

(ii) A é invertível à esquerda.

(iii) A é invertível à direita.

Demonstração. A equivalência (i)$\Leftrightarrow$(ii) já foi estabelecida, e é claro que (i)$\Rightarrow$(iii).

Para ver que (iii)$\Rightarrow$(i), suponha que A é invertível à direita e seja $B \in M_n(\mathbb{K})$ tal que $AB = I_n$.

Segue que B é invertível à esquerda, e, assim, B é invertível e sua inversa é A. Logo, $A = B^{-1}$ é invertível (e sua inversa é B). □

Corolário 2.5.8. Sejam $A_1, A_2, \ldots, A_k \in M_n(\mathbb{K})$ matrizes invertíveis.

Se o produto $A_1A_2 \cdots A_k$ é invertível, então cada matriz A_i é invertível ($i = 1, 2, \ldots, k$).

Demonstração. Provaremos o corolário por indução em k.

Para $k = 1$, o resultado é trivial. Para $k = 2$, suponha que A_1A_2 é invertível. Então, existe $B \in M_n(\mathbb{K})$ tal que $B(A_1A_2) = I_n$. Assim, BA_1 é um inverso à esquerda de A_2, e, portanto, A_2 é invertível. Além disso, B é invertível, e, assim, $A_1 = B^{-1}A_2^{-1}$ é invertível.

Suponha que o resultado seja válido para k. Seja $A_1, A_2, \ldots, A_{k+1} \in M_n(\mathbb{K})$ tais que $A_1A_2 \cdots A_{k+1}$ é invertível. Pelo caso $k = 2$, A_{k+1} é invertível e $A_1A_2 \cdots A_k$ é invertível, e então, por hipótese de indução, $A_1, A_2, \ldots, A_k$ são invertíveis. □

Índice Remissivo