Cálculo Diferencial e Integral II

Vinicius de Oliveira Rodrigues

5 de setembro de 2025

Sumário

Capítulo 1

Introdução

Neste capítulo, introduziremos de forma sucinta algumas noções sobre os espaços $\mathbb{R}^n$.

1.1 Os espaços $\mathbb{R}^n$

Uma forma usual de visualizar o conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais é pensar neste como o conjunto dos pontos de uma reta.

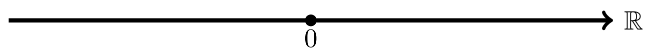


Figura 1.1: A reta real.

Lembremos que $\mathbb{R}^2$ é o conjunto de todos os pares ordenados (x, y), onde $x, y \in \mathbb{R}$. Em símbolos:

$$\mathbb{R}^2 = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}.$$

Em analogia à representação de $\mathbb{R}$ como uma reta, podemos visualizar $\mathbb{R}^2$ como o conjunto dos pontos de um plano Cartesiano.

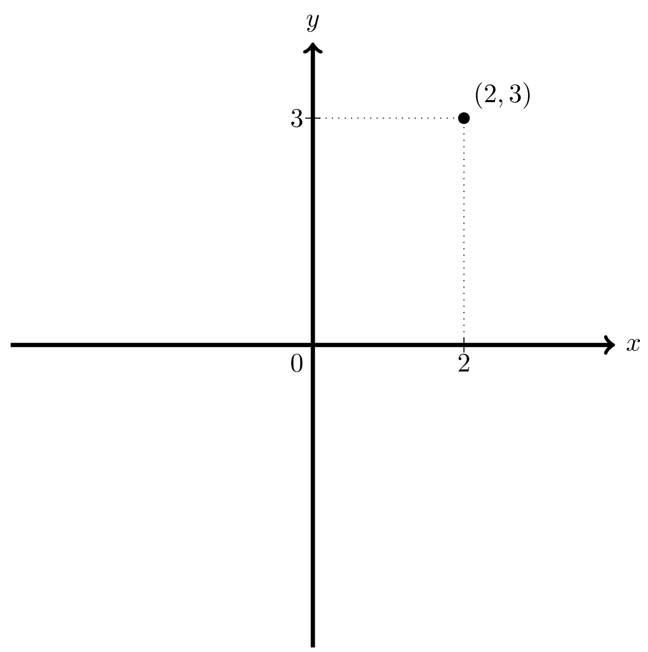


Figura 1.2: O plano Cartesiano.

Por sua vez, o conjunto de todas as triplas ordenadas de números reais é denotado por $\mathbb{R}^3$. Em símbolos:

$$\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) : x, y, z \in \mathbb{R}\}.$$

Seguindo o padrão já comentado, podemos visualizar $\mathbb{R}^3$ como o conjunto dos pontos do espaço tridimensional.

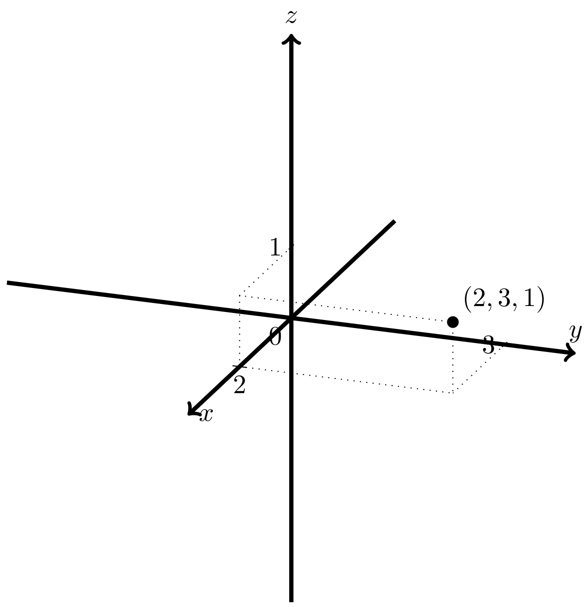


Figura 1.3: O espaço tridimensional.

No geral, para $n \geq 4$, o conjunto $\mathbb{R}^n$ é definido como o conjunto de todas as n-tuplas ordenadas de números reais:

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, \ldots, x_n) : x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}\}.$$

Tal conjunto não possui uma representação gráfica simples a estilo dos anteriores. Porém, a teoria desenvolvida para $\mathbb{R}^n$ é uma extensão natural da teoria desenvolvida para $\mathbb{R}$ e $\mathbb{R}^2$, e possui amplas aplicações práticas e teóricas.

Elementos de $\mathbb{R}^n$ serão frequentemente chamados de *pontos* ou *vetores*. Portanto, neste texto, pontos e vetores serão os mesmos objetos matemáticos, e tais palavras podem ser usadas indistintamente. A palavra *ponto* será usualmente utilizada em situações em que se faz referência a posições no espaço, enquanto a palavra *vetor* é mais utilizada em situações em que pensamos na direção, sentido e comprimento determinados pelo ponto com relação à origem $0 = (0, \ldots, 0)$.

1.2 Operações em $\mathbb{R}^n$

Algumas operações importantes em $\mathbb{R}^n$ incluem soma, produto escalar, produto por escalar e normas. Nesta seção, revisaremos tais operações.

Definição 1.2.1. Sejam $p = (x_1, \ldots, x_n)$ e $q = (y_1, \ldots, y_n)$ dois elementos de $\mathbb{R}^n$, e $\alpha \in \mathbb{R}$ um número real. A *soma* $p + q$ é definida como:

$$p + q = (x_1, \ldots, x_n) + (y_1, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n).$$

A *multiplicação por escalar* αp é definida como:

$$\alpha p = \alpha(x_1, \ldots, x_n) = (\alpha x_1, \ldots, \alpha x_n).$$

O *produto escalar* $p \cdot q$ é definido como:

$$p \cdot q = (x_1, \ldots, x_n) \cdot (y_1, \ldots, y_n) = x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i.$$

A *norma* de p é definida como:

$$\|p\| = \sqrt{p \cdot p} = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}.$$

Vamos lembrar de importantes interpretações geométricas destas operações.

A soma dos vetores $v = (3, 2)$ e $w = (-1, 1)$ pode ser visualizada como o vetor com início da origem e fim no ponto obtido posicionando-se o vetor w com início no ponto final do vetor v, conforme ilustrado abaixo.

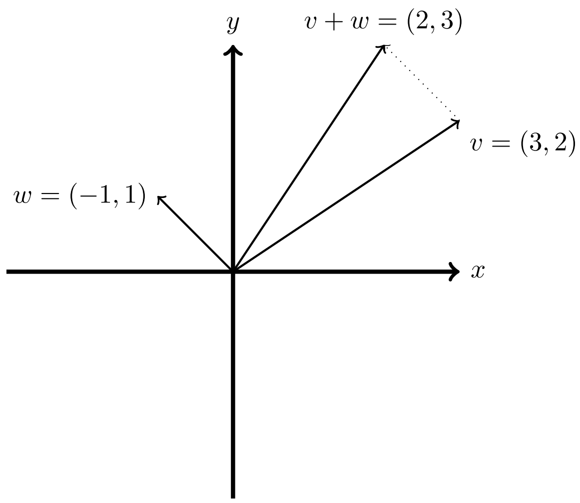


Figura 1.4: Soma de vetores em $\mathbb{R}^2$.

O produto escalar de $v = (1, 2)$ por 2 e por -2 correspondem a, respectivamente, multiplicar o comprimento do vetor v pelo fator 2, mantendo a direção e sentido, e invertendo o sentido.

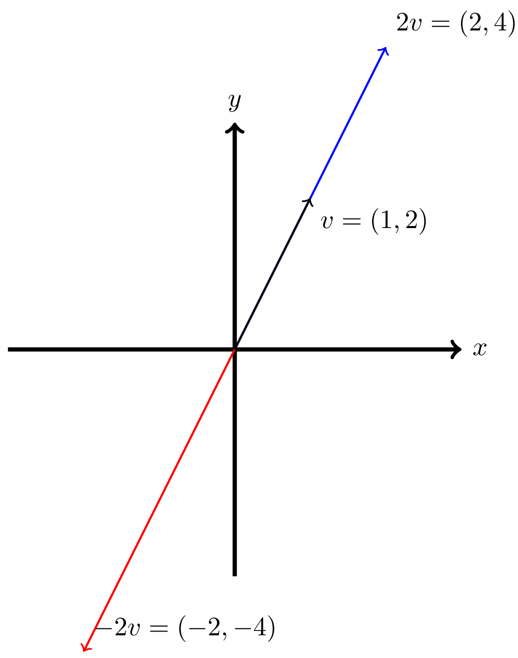


Figura 1.5: Produto por escalar em $\mathbb{R}^2$.

A norma de um vetor $v = (x_1, \ldots, x_n)$ é o comprimento do vetor que parte da origem até o ponto $(x_1, \ldots, x_n)$ utilizando-se a métrica usual (Euclidiana) em $\mathbb{R}^n$. Vendo v como um ponto no espaço, sua norma denota a distância de p até a origem.

Quanto ao produto escalar, algumas propriedades importantes são as seguintes.

Proposição 1.2.2. $p, q, r \in \mathbb{R}^n$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Então:

1. $p \cdot q = q \cdot p$ (comutatividade);
2. $(p + q) \cdot r = p \cdot r + q \cdot r$ (distributividade);

3. $(\alpha p) \cdot q = \alpha(p \cdot q)$ (associatividade com escalares);

4. $p \cdot p = \|p\|^2$.

Demonstração. Escrevamos as coordenadas de p, q, r como $p = (x_1, \ldots, x_n)$, $q = (y_1, \ldots, y_n)$ e $r = (z_1, \ldots, z_n)$.

Para a comutatividade, temos:

$$p \cdot q = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = \sum_{i=1}^{n} y_i x_i = q \cdot p.$$

Para a distributividade, temos:

$$\begin{aligned}
(p+q) \cdot r &= \sum_{i=1}^{n} (x_i + y_i) z_i \\
&= \sum_{i=1}^{n} x_i z_i + \sum_{i=1}^{n} y_i z_i \\
&= p \cdot r + q \cdot r.
\end{aligned}$$

Quanto a associatividade com escalares, temos:

$$(\alpha p) \cdot q = \sum_{i=1}^{n} (\alpha x_i) y_i = \alpha \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = \alpha(p \cdot q).$$

Finalmente, temos:

$$p \cdot p = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = \|p\|^2.$$

□

Algumas propriedades da norma são as seguintes.

Proposição 1.2.3. Sejam $v, w \in \mathbb{R}^n$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Então:

(i) $\|v\| = 0$ se, e somente se, $v = 0$;

(ii) $\|\alpha v\| = |\alpha| \|v\|$;

(iii) $|v \cdot w| \leq \|v\| \|w\|$ (desigualdade de Cauchy-Schwarz);

(iv) $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$ (desigualdade triangular).

Demonstração. Vamos verificar cada uma das propriedades. Escreva $v = (x_1, \ldots, x_n)$ e $w = (y_1, \ldots, y_n)$.

(i) Se $v = 0$, então $\|v\| = \sqrt{0^2 + \ldots + 0^2} = 0$. Reciprocamente, se $\|v\| = 0$, então $\sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} = 0$, o que implica que $x_i = 0$ para todo i, ou seja, $v = 0$.

(ii) Temos que $\|\alpha v\| = \sqrt{(\alpha x_1)^2 + \ldots + (\alpha x_n)^2} = |\alpha| \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2} = |\alpha| \|v\|$.

(iii) Se $w = 0$, então a expressão desejada é $0 \leq 0$, que é verdadeira. Se $w \neq 0$, então, para qualquer que seja o número real t, temos que:

$$\begin{aligned}
0 \leq \|v + tw\|^2 &= (v + tw) \cdot (v + tw) \\
&= v \cdot v + 2t(v \cdot w) + t^2 (w \cdot w) \\
&= \|v\|^2 + 2t(v \cdot w) + t^2 \|w\|^2.
\end{aligned}$$

Pondo $t = \frac{-v \cdot w}{\|w\|^2}$, temos que:

$$\begin{aligned}
0 &\leq \|v\|^2 - 2\frac{(v \cdot w)^2}{\|w\|^2} + \frac{(v \cdot w)^2}{\|w\|^2} \\
&= \|v\|^2 - \frac{(v \cdot w)^2}{\|w\|^2} \\
&\iff (v \cdot w)^2 \leq \|v\|^2 \|w\|^2.
\end{aligned}$$

Assim, temos que $|v \cdot w| \leq \|v\| \|w\|$.

(iv) A desigualdade triangular segue da desigualdade de Cauchy-Schwarz:

$$\|v+w\|^2 = (v+w)\cdot(v+w) = \|v\|^2 + 2v\cdot w + \|w\|^2 \leq \|v\|^2 + 2\|v\|\|w\| + \|w\|^2 = (\|v\|+\|w\|)^2.$$

□

O produto escalar pode ser utilizado para decidir-se ortogonalidade entre vetores. É fato conhecido que vale a recíproca do Teorema de Pitágoras: se $\triangle BAC$ é um triângulo, então o ângulo $\angle ABC$ é reto se, e somente se, sendo a, b, c respectivamente as medidas dos segmentos $\overline{BC}, \overline{AC}, \overline{AB}$, temos que $a^2 = b^2 + c^2$.

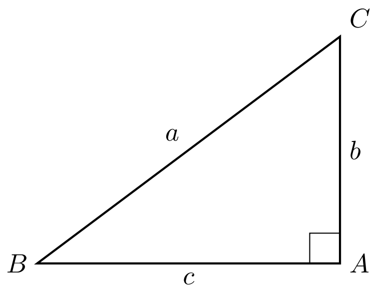
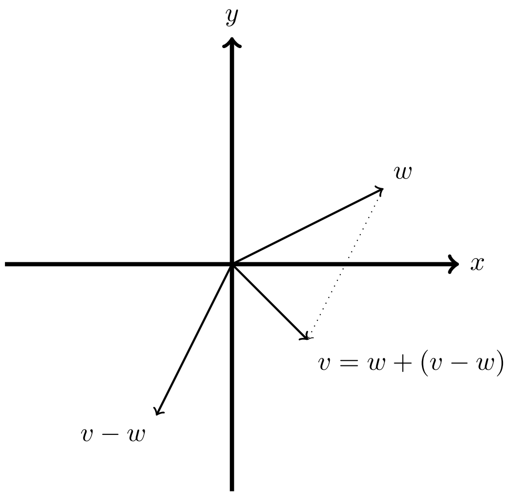


Figura 1.6: Triângulo retângulo.

No aspecto vetorial, dados dois vetores v e w, perceba que o vetor $v + w = v + (-w)$ pode ser representado como o segmento que une as extremidades dos vetores v e $-w$, conforme ilustrado abaixo.



Assim, os vetores v e w são ortogonais, se, e somente se, $\|v-w\|^2 = \|v\|^2 + \|w\|^2$.

Proposição 1.2.4. Sejam $v, w \in \mathbb{R}^n$. Então, v e w são ortogonais se, e somente se, $v \cdot w = 0$.

Demonstração. Notemos que, no geral:

$$\|v-w\|^2 = (v-w)\cdot(v-w) = v\cdot v - 2v\cdot w + w\cdot w = \|v\|^2 - 2v\cdot w + \|w\|^2.$$

Assim, temos que:

$$\begin{aligned} \|v-w\|^2 &= \|v\|^2 + \|w\|^2 \\ &\iff \|v\|^2 - 2v\cdot w + \|w\|^2 = \|v\|^2 + \|w\|^2 \\ &\iff -2v\cdot w = 0 \\ &\iff v\cdot w = 0. \end{aligned}$$

□

1.3 Distância em $\mathbb{R}^n$

A distância entre dois pontos $p, q \in \mathbb{R}^n$ é dada pela métrica usual (Euclidiana), motivada pelo Teorema de Pitágoras.

Definição 1.3.1. Sejam $p, q \in \mathbb{R}^n$. A *distância (usual, também chamada de Euclidiana)* entre p e q é definida como:

$$d(p, q) = \|p - q\| = \sqrt{(p - q) \cdot (p - q)} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (p_i - q_i)^2}.$$

Algumas propriedades básicas da distância são as seguintes.

Proposição 1.3.2. Sejam $p, q, r \in \mathbb{R}^n$. Então:

1. $d(p, q) = 0$ se, e somente se, $p = q$.
2. $d(p, q) = d(q, p)$ (simetria);
3. $d(p, r) \leq d(p, q) + d(q, r)$ (desigualdade triangular).

Demonstração. Vamos verificar cada uma das propriedades.

1. Dados p e q, temos que $d(p, q) = 0$ se, e somente se, $\|p - q\| = 0$, o que ocorre se, e somente se, $p - q = 0$, ou seja, $p = q$.
2. Temos que $d(p, q) = \|p - q\| = |-1|\|p - q\| = \|q - p\| = d(q, p)$.
3. Temos que:

$$\begin{aligned} d(p, r) &= \|p - r\| = \|p - q + q - r\| \\ &\leq \|p - q\| + \|q - r\| = d(p, q) + d(q, r). \end{aligned}$$

□

A seguir, definiremos generalizações da noção de intervalo aberto de $\mathbb{R}$, conceitos essenciais para o futuro estudo de limite, continuidade e diferenciabilidade em $\mathbb{R}^n$.

Definição 1.3.3. Sejam $p \in \mathbb{R}^n$ e $r > 0$. A *bola aberta* de centro p e raio r é o conjunto:

$$B(p, r) = \{q \in \mathbb{R}^n : d(p, q) < r\}.$$

A *bola fechada* de centro p e raio r é o conjunto:

$$\overline{B}(p, r) = \{q \in \mathbb{R}^n : d(p, q) \leq r\}.$$

Uma bola aberta de raio r centrada em p é ilustrada abaixo.

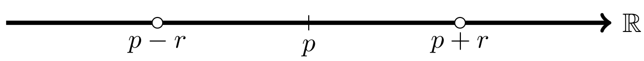


Figura 1.7: Bola aberta de centro p e raio r em $\mathbb{R}$.

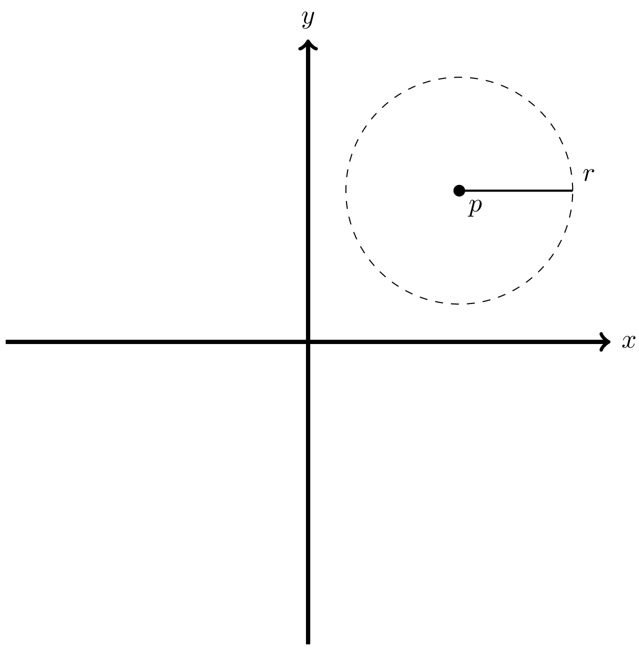


Figura 1.8: Bola aberta de centro p e raio r em $\mathbb{R}^2$.

Capítulo 2

Limites e Continuidade

Neste capítulo, introduziremos as noções gerais de limites e continuidade em $\mathbb{R}^n$.

2.1 Continuidade em $\mathbb{R}^n$

Como acontece no caso unidimensional, intuitivamente, uma função f é contínua em um ponto p de seu domínio se, e somente se $f(x)$ fica tão próximo de $f(p)$ quanto se queira, desde que x esteja suficientemente próximo de p.

Formalmente, temos a definição abaixo.

Definição 2.1.1. Seja $A \subseteq \mathbb{R}^n$ um conjunto e $f : A \to \mathbb{R}^m$ uma função.

Seja $a \in A$. Dizemos que f é contínua em a se, para toda bola aberta B em torno de $f(p)$, existe uma bola aberta B' em torno de p tal que $f[B' \cap A] \subseteq B$.

Equivalentemente, f é contínua em p se, para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $f[B(p, \delta) \cap A] \subseteq B(f(p), \varepsilon)$.

Ou, ainda, f é contínua em p se, para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, para todo $x \in A$, se $d(x, p) < \delta$, então $d(f(x), f(p)) < \varepsilon$.

Dizemos que f é *contínua* se, e somente se, f é contínua em todo ponto de seu domínio A.

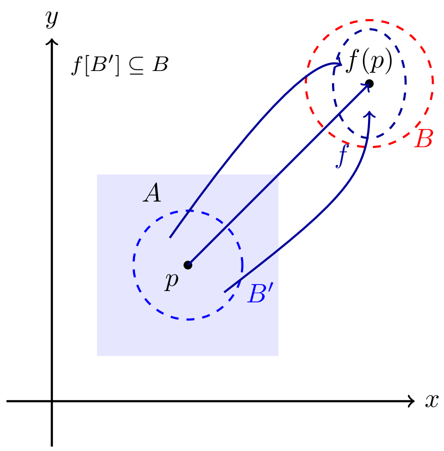


Figura 2.1: Ilustração da continuidade: para toda bola B em torno de $f(p)$, existe uma bola B' em torno de p tal que $f[B'] \subseteq B$.

2.2 Continuidade via funções coordenadas

Se A é qualquer conjunto e $f : A \to \mathbb{R}^m$ é uma função, então para cada $a \in A$, $f(a)$, sendo um elemento de $\mathbb{R}^m$, é um ponto $(y_1, \ldots, y_m)$. As coordenadas y_i são denotadas por $f_i(a)$. Assim, $f(a) = (f_1(a), \ldots, f_m(a))$.

Definição 2.2.1. Seja $f : A \to \mathbb{R}^m$ uma função. As funções coordenadas de f são as únicas funções $f_i : A \to \mathbb{R}$ tal que, para todo $a \in A$, temos $f(a) = (f_1(a), \ldots, f_m(a))$.

Proposição 2.2.2. Seja $A \subseteq \mathbb{R}^n$ um conjunto e $f : A \to \mathbb{R}^m$ uma função.
Então, f é contínua em $p \in A$ se, e somente se, todas as funções coordenadas f_i são contínuas em p.

Demonstração. Primeiro, suponha que f é contínua em p. Vejamos que cada função coordenada f_i é contínua em p.

Para isso, fixamos um $i \in \{1, \ldots, m\}$ e consideramos $\epsilon > 0$.

Como f é contínua em p, existe $\delta > 0$ tal que, para todo $x \in A$, se $d(x, p) < \delta$, então $d(f(x), f(p)) < \epsilon$.

Veremos que o mesmo δ funciona para f_i. De fato, se $d(x, p) < \delta$, então temos:

$$\begin{aligned}
|f_i(x) - f_i(p)| &= \sqrt{(f_i(x) - f_i(p))^2} \\
&= \sqrt{(f_1(x) - f_1(p))^2 + \cdots + (f_m(x) - f_m(p))^2} \\
&= \|f(x) - f(p)\| = d(f(x), f(p)) < \epsilon.
\end{aligned}$$

Portanto, f_i é contínua em p.

Reciprocamente, suponha que para todo i, f_i é contínua em p. Fixamos $\epsilon > 0$ e, para cada i, existe $\delta_i > 0$ tal que, se $d(x, p) < \delta_i$, então $|f_i(x) - f_i(p)| < \epsilon$.

Seja $\delta = \min\{\delta_1, \ldots, \delta_m\}$. Então, se $d(x, p) < \delta$, temos que:

$$\begin{aligned}
d(f(x), f(p)) &= \sqrt{(f_1(x) - f_1(p))^2 + \cdots + (f_m(x) - f_m(p))^2} \\
&< \sqrt{\epsilon^2 + \cdots + \epsilon^2} = \sqrt{m}\epsilon.
\end{aligned}$$

Assim, se de partida, ao invés de ϵ, tomarmos $\delta_1, \ldots, \delta_n$ que funcione para $\epsilon' = \frac{\epsilon}{\sqrt{m}}$, concluiremos que para todo $x \in A$ com $d(x, p) < \delta$, temos que $d(f(x), f(p)) < \epsilon'$. □

2.3 Pontos de acumulação e limites

Ao considerar a continuidade de uma função $f : A \to \mathbb{R}^m$, onde $A \subseteq \mathbb{R}^n$, no caso de $p \in A$ ser um ponto "afastado" do restante de A, é intuitivo que ao se considerar x suficientemente próximo de p, a única possibilidade de escolha de x é p, e, portanto, $f(x)$ estará arbitrariamente próximo de $f(p)$, uma vez que teremos $f(x) = f(p)$.

Formalmente, definimos:

Definição 2.3.1. Seja $A \subseteq \mathbb{R}^n$ um conjunto e p um ponto. Dizemos que p é um *ponto isolado* de A se existe um $\delta > 0$ tal que $B(p, \delta) \cap A = \{p\}$.

Caso isso não ocorra, p é dito um *ponto de acumulação* de A.

Ainda mais, mesmo que $p \notin A$, se para todo $\delta > 0$ existe $x \in B(p, \delta) \cap A \setminus \{p\}$, dizemos que p é um *ponto de acumulação* de A.

Proposição 2.3.2. Seja $A \subseteq \mathbb{R}^n$ um conjunto e $f : A \to \mathbb{R}^m$ uma função. Se $p \in A$ é um ponto isolado de A, então f é contínua em p.

Demonstração. Seja $\epsilon > 0$. Como p é um ponto isolado de A, existe um $\delta > 0$ tal que $B(p, \delta) \cap A = \{p\}$. Assim, se $x \in A$ e $d(x, p) < \delta$, temos que $x = p$. Portanto, $d(f(x), f(p)) = d(f(p), f(p)) = 0 < \epsilon$. Logo, f é contínua em p. □

E quanto a pontos não isolados?

Podemos estudar a continuidade deles a partir da noção de limite. Ao discutir a continuidade de uma função f em p, queremos ver que $f(x)$ fica arbitrariamente próximo de $f(p)$ quando x está suficientemente próximo de p. No caso de isso não ocorrer, o que pode ocorrer?

Uma das opções é que $f(x)$ se aproxime de outro valor $L \in \mathbb{R}^m$, com $L \neq f(p)$.

Definição 2.3.3. Seja $A \subseteq \mathbb{R}^n$ um conjunto, $f : A \to \mathbb{R}^m$ uma função e $p \in \mathbb{R}^n$ um ponto de acumulação de A.

Seja $L \in \mathbb{R}^m$.

Dizemos que L é limite de f em p se, para toda bola aberta B em torno de L, existe uma bola aberta B' em torno de p tal que $f[B' \cap A \setminus \{p\}] \subseteq B$.

Equivalentemente, L é limite de f em p se, para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $f[B(p,\delta) \cap A \setminus \{p\}] \subseteq B(L,\varepsilon)$.

Ou, ainda, L é limite de f em p se, para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, para todo $x \in A \setminus \{p\}$, se $d(x,p) < \delta$, então $d(f(x), L) < \varepsilon$.

Proposição 2.3.4. Seja $A \subseteq \mathbb{R}^n$ um conjunto, $f : A \to \mathbb{R}^m$ uma função e $p \in \mathbb{R}^n$ um ponto de acumulação de A.

Então f possui no máximo um limite em p.

Demonstração. Seja $L_1, L_2 \in \mathbb{R}^m$ limites de f em p.

Suponha por absurdo que $L_1 \neq L_2$. Então $d(L_1, L_2) > 0$.

Seja $R = \frac{d(L_1,L_2)}{2} > 0$. Então, existem $\delta_1, \delta_2 > 0$ tais que, para todo $x \in A \setminus \{p\}$, se $d(x,p) < \delta_1$, então $d(f(x), L_1) < R$ e, se $d(x,p) < \delta_2$, então $d(f(x), L_2) < R$.

Seja $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Como p é ponto de acumulação de A, existe $x \in B(p,\delta) \cap A \setminus \{p\}$ tal que $x \in A \setminus \{p\}$.

Assim, $d(x,p) < \delta \leq \delta_1, \delta_2$, logo:

$$\begin{aligned} d(f(x), L_1) &< R \\ d(f(x), L_2) &< R. \end{aligned}$$

Assim, temos que:

$$\begin{aligned} d(L_1, L_2) &\leq d(L_1, f(x)) + d(f(x), L_2) \\ &< R + R = 2R = d(L_1, L_2), \end{aligned}$$

o que é uma contradição. Logo, $L_1 = L_2$. $\square$

Definição 2.3.5. Seja $A \subseteq \mathbb{R}^n$ um conjunto, $f : A \to \mathbb{R}^m$ uma função e $p \in A$ um ponto de acumulação de A.

Então, caso exista, o único limite de f em p é denotado por

$$\lim_{x \to p} f(x).$$

Proposição 2.3.6. Seja $A \subseteq \mathbb{R}^n$ um conjunto, $f : A \to \mathbb{R}^m$ uma função e $p \in A$ um ponto de acumulação de A.

Então f é contínua em p se, e somente se, existe $\lim_{x \to p} f(x) = f(p)$.

Demonstração. Se f é contínua em p, então para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, para todo $x \in A$, se $d(x,p) < \delta$, então $d(f(x), f(p)) < \epsilon$. Por definição, temos imediatamente que $f(p) = \lim_{x \to p} f(x)$.

Agora, suponha que $f(p)$ é limite de f em p. Então, para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, para todo $x \in A \setminus \{p\}$, se $d(x,p) < \delta$, então $d(f(x), f(p)) < \epsilon$.

Resta apenas ver que vale a implicação $d(p,p) < \delta \to d(f(p), f(p)) < \epsilon$. Ora, essa implicação nos diz que se $0 < \delta$ então $0 < \epsilon$, o que é verdade, uma vez que $0 < \epsilon$. $\square$

Proposição 2.3.7. Seja $A \subseteq \mathbb{R}^n$ um conjunto, $f : A \to \mathbb{R}^m$ uma função e $p \in A$ um ponto de acumulação de A.

Seja $L = (L_1, \ldots, L_m) \in \mathbb{R}^m$. Então L é limite de f em p, se, e somente se, para todo i entre 1 e m, L_i é limite de f_i em p.

Demonstração. Primeiro, suponha que L é limite de f em p. Vejamos que cada L_i é limite de f_i em p.

Para isso, fixamos um $i \in \{1, \ldots, m\}$ e consideramos $\epsilon > 0$.

Como L é limite de f em p, existe $\delta > 0$ tal que, para todo $x \in A \setminus \{p\}$, se $d(x,p) < \delta$, então $d(f(x), L) < \epsilon$.

Veremos que o mesmo δ funciona para f_i. De fato, se $d(x,p) < \delta$, então temos:

$$\begin{aligned}|f_i(x) - L_i| &= \sqrt{(f_i(x) - L_i)^2} \\ &= \sqrt{(f_1(x) - L_1)^2 + \cdots + (f_m(x) - L_m)^2} \\ &= \|f(x) - L\| = d(f(x), L) < \epsilon.\end{aligned}$$

Portanto, f_i é limite de f_i em p.

Reciprocamente, suponha que para todo i, L_i é limite de f_i em p. Fixamos $\epsilon > 0$ e, para cada i, existe $\delta_i > 0$ tal que, se $x \in A \setminus \{p\}$ e $d(x,p) < \delta_i$, então $|f_i(x) - L_i| < \epsilon$.

Seja $\delta = \min\{\delta_1, \ldots, \delta_m\}$. Então, se $x \in A \setminus \{p\}$ e $d(x,p) < \delta$, temos que:

$$\begin{aligned}d(f(x), L) &= \sqrt{(f_1(x) - L_1)^2 + \cdots + (f_m(x) - L_m)^2} \\ &< \sqrt{\epsilon^2 + \cdots + \epsilon^2} = \sqrt{m}\epsilon.\end{aligned}$$

Assim, se de partida, ao invés de ϵ, tomarmos $\delta_1, \ldots, \delta_n$ que funcione para $\epsilon' = \frac{\epsilon}{\sqrt{m}}$, concluiremos que para todo $x \in A \setminus \{p\}$ com $d(x,p) < \delta$, temos que $d(f(x), L) < \epsilon'$. □

Capítulo 3

Curvas deriváveis

Curvas (contínuas) são funções contínuas cujo domínio é um intervalo e contradomínio é $\mathbb{R}^n$. Neste capítulo, discutiremos derivabilidade de curvas e retas tangentes.

3.1 Conjuntos abertos em $\mathbb{R}^n$

Definição 3.1.1. Um conjunto $U \subseteq \mathbb{R}^n$ é dito aberto se, para todo $x \in U$, existe um raio $r > 0$ tal que a bola aberta $B(x, r)$ está contida em U.

Proposição 3.1.2. Sobre abertos de $\mathbb{R}^n$, temos as seguintes propriedades.

1. $\mathbb{R}^n$ e o conjunto vazio $\emptyset$ são abertos.
2. A união de qualquer coleção de conjuntos abertos é aberta.
3. A interseção de dois conjuntos abertos é aberta.
4. Bolas abertas são conjuntos abertos.

Demonstração. É imediato que $\mathbb{R}^n$ e $\emptyset$ são abertos.

Se $\mathcal{C}$ é uma coleção de conjuntos abertos, então $\bigcup \mathcal{C} = \bigcup_{U \in \mathcal{C}} U$ é aberto, pois, se $x \in \bigcup \mathcal{C}$, então existe $U \in \mathcal{C}$ tal que $x \in U$. Como U é aberto, existe um raio $r > 0$ tal que $B(x, r) \subseteq U \subseteq \bigcup \mathcal{C}$.

Se $U, V \subseteq \mathbb{R}^n$ são abertos, então $U \cap V$ é aberto, pois, se $x \in U \cap V$, então $x \in U$ e $x \in V$. Assim, existe um raio $r_1 > 0$ tal que $B(x, r_1) \subseteq U$, e um raio $r_2 > 0$ tal que $B(x, r_2) \subseteq V$. Tomando $r = \min\{r_1, r_2\}$, temos $B(x, r) \subseteq U \cap V$.

Agora verifiquemos que bolas abertas são abertas. Considere uma bola aberta $B(p, r)$, onde $p \in \mathbb{R}^n$ e $r > 0$. Fixe $q \in B(p, r)$. Devemos ver que existe um raio $s > 0$ tal que $B(q, s) \subseteq B(p, r)$. Como $q \in B(p, r)$, temos $d(q, p) < r$. Assim, podemos tomar $s = r - d(q, p) > 0$. O raio s funciona: de

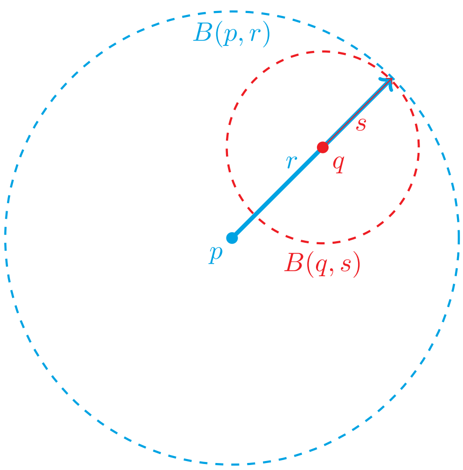


Figura 3.1: Relação de inclusão entre as bolas abertas.

$x \in B(q, s)$, temos que $d(x, q) < s$, e, portanto, $d(x, p) \leq d(x, q) + d(q, p) < s + d(q, p) = r$.

Assim, $x \in B(p, r)$. □

Conjuntos abertos serão importantes ao trabalhar com diferenciabilidade.

3.2 Curvas e diferenciabilidade de curvas

Definição 3.2.1. Uma curva (contínua) em $\mathbb{R}^m$ é uma função contínua $f : I \to \mathbb{R}^m$, onde I é um intervalo de $\mathbb{R}$.

Definição 3.2.2. Seja $I \subseteq \mathbb{R}$ um conjunto aberto e $f : I \to \mathbb{R}^m$ uma função contínua.

Para $s \in I$, dizemos que f é *diferenciável*, ou *derivável* em s se existir o limite a seguir:

$$\lim_{t \to s} \frac{f(s) - f(t)}{s - t} \tag{3.1}$$

Caso f seja diferenciável em s, denotamos tal limite por $f'(s)$, e o chamamos de derivada de f em s.

Se f é diferenciável (derivável) em todos os pontos de I, dizemos que f é *diferenciável (derivável)*.

Observação: o limite na equação (3.1) é o limite da função g cujo domínio é $I \setminus \{s\}$ e dada por $g(t) = \frac{f(s)-f(t)}{s-t}$.

O ponto s é um ponto de acumulação de $I \setminus \{s\}$, pois, se fosse isolado, existiria $\delta > 0$ tal que $B(s, \delta) \cap I \setminus \{s\} = \emptyset$. Ao mesmo tempo, I é aberto, logo, encolhendo δ se necessário, podemos garantir que $B(s, \delta) \subseteq I$. Mas $B(s, \delta)$ possui outros pontos além de s, o que é absurdo.

Proposição 3.2.3. Seja $I \subseteq \mathbb{R}$ um conjunto aberto e $f : I \to \mathbb{R}^m$.

Seja $s \in I$.

Então f é derivável em s se, e somente se, cada função coordenada f_i é derivável em s. Nesse caso, temos que $f'(s) = (f_1'(s), \ldots, f_m'(s))$.

Demonstração. Primeiro, suponha que f é derivável em s.

Temos que existe o limite $f'(t)$ de g em s, onde $g(t) = \frac{f(s)-f(t)}{s-t}$.

Temos que a i-ésima coordenada de g é dada por $g_i(t) = \frac{f_i(s)-f_i(t)}{s-t}$. Logo, a i-ésima coordenada de $f'(s)$ é o limite de g_i em s. Porém, por definição, também é $f_i'(s)$.

Assim, concluímos que $f'(s) = (f_1'(s), \ldots, f_m'(s))$.

Reciprocamente, suponha que cada função coordenada f_i é derivável em s.

Temos que, para cada i, $f_i'(s)$ é o limite de g_i em s, e, portanto, existe o limite de g em s, e este é dado por $(f_1'(s), \ldots, f_m'(s))$. □

Funções deriváveis possuem o que chamamos de retas tangentes.

Definição 3.2.4. Seja $I \subseteq \mathbb{R}$ um conjunto aberto, $a \in I$ e $f : I \to \mathbb{R}^m$ uma função derivável em a tal que $f'(a) \neq 0$.

A reta tangente à trajetória (ou imagem) de f em a é a reta que passa por $f(a)$ e tem direção dada por $f'(a)$, ou seja, é o conjunto r dado por:

$$\{f(a) + tf'(a) : t \in \mathbb{R}\}.$$

Nesse caso, dizemos que r é *uma* reta tangente à trajetória de f em a.

Além disso, temos a melhor aproximação linear possível para f em a.

Definição 3.2.5. Seja $I \subseteq \mathbb{R}$ um conjunto aberto, $a \in I$ e $f : I \to \mathbb{R}^m$ uma função derivável em a.

A *melhor aproximação linear de f em a* é a função $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ dada por:

$$T(t) = f(a) + (t - a)f'(a).$$

Proposição 3.2.6. Seja $I \subseteq \mathbb{R}$ um conjunto aberto, $a \in I$ e $f : I \to \mathbb{R}^m$.

Se f é derivável em a, então a melhor aproximação de f em a, $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$, é a única função afim (ou seja, a única função da forma $T(t) = w + tv$, onde $w, v \in \mathbb{R}^m$) tal que:

(a) $T(a) = f(a)$, e

(b) $\lim_{t\to a} \frac{f(t)-T(t)}{|t-a|} = 0$.

Reciprocamente, f admite uma função $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ afim que satisfaz (a) e (b), então f é derivável em a e T é a melhor aproximação linear de f em a.

Demonstração. Para a primeira parte, primeiro note que $T(a) = f(a) + (a-a)f'(a) = f(a)$.

Agora, vejamos que $\lim_{t\to a} \frac{f(t)-T(t)}{|t-a|} = 0$. De fato, temos:

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to a} \frac{f(t)-T(t)}{|t-a|} &= \lim_{t\to a} \frac{f(t)-f(a)-(t-a)f'(a)}{|t-a|} \\
&= \lim_{t\to a} \frac{f(t)-f(a)}{t-a} - f'(a) \\
&= 0,
\end{aligned}$$

pois $f'(a)$ é o limite de $\frac{f(t)-f(a)}{t-a}$ em a.

Para o resto da proposição, seja $T(t) = w + tv$ uma função afim que satisfaz (a) e (b). Veremos que f é derivável e que T é a melhor aproximação linear de f em a.

Primeiro, por a, temos que $w + av = f(a)$, ou seja, $w = f(a) - av$. Assim, $T(t) = f(a) + (t-a)v$.

Por (b), temos que:

$$\begin{aligned}
0 &= \lim_{t\to a} \frac{f(t)-T(t)}{|t-a|} \\
&= \lim_{t\to a} \frac{f(t)-f(a)-(t-a)v}{|t-a|} \\
&= \lim_{t\to a} \frac{f(t)-f(a)}{t-a} - v.
\end{aligned}$$

Logo:

$$v = \lim_{t\to a} \frac{f(t)-f(a)}{t-a}$$

e, portanto, f é derivável em a e $f'(a) = v$. Assim, T é, por definição a melhor aproximação linear de f em a. $\square$

Capítulo 4

Limites e Continuidade de funções de várias variáveis

Neste capítulo, introduziremos técnicas referentes a análise da continuidade e cálculo de limites de funções de várias variáveis à valores reais.

4.1 Regras básicas de Continuidade em $\mathbb{R}^n$

Proposição 4.1.1. Seja $f : \mathbb{R}^n \to R$ uma projeção, ou seja, uma função da forma $f(x_1, \ldots, x_n) = x_i$ para algum $i \in \{1, \ldots, n\}$. Então f é contínua.

Demonstração. Seja $p = (p_1, \ldots, p_n) \in \mathbb{R}^n$ e $\epsilon > 0$.

Note que, dado qualquer $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, temos que:

$$d(f(x), f(p)) = |x_i - p_i| \leq \sqrt{(x_1 - p_1)^2 + \cdots + (x_n - p_n)^2} = d(x, p).$$

Assim, se $d(x, p) < \epsilon$, então $d(f(x), f(p)) < \epsilon$. Logo, tomando $\delta = \epsilon$, vemos que f é contínua em p. □

Proposição 4.1.2. Seja $f : \mathbb{R}^n \to R$ uma função constante, ou seja, uma função da forma $f(x_1, \ldots, x_n) = k$ para algum $k \in \mathbb{R}$. Então f é contínua.

Demonstração. Seja $p = (p_1, \ldots, p_n) \in \mathbb{R}^n$ e $\epsilon > 0$.

Note que, dado qualquer $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, temos que:

$$d(f(x), f(p)) = |k - k| = 0 < \epsilon$$

Assim, escolhendo qualquer $\delta > 0$ (por exemplo, $\delta = 1$), vemos que f é contínua em p. □

Lembremos que se $f, g : A \to \mathbb{R}$, podemos definir as funções $f + g$, $f - g$, fg e $\frac{f}{g}$ (desde que $g(x) \neq 0$ para todo $x \in A$) como a seguir.

Definição 4.1.3. Seja $A \subseteq \mathbb{R}^n$ um conjunto e $f, g : A \to \mathbb{R}$ funções. Então, definimos as funções $f + g : A \to \mathbb{R}$, $f - g : A \to \mathbb{R}$, $fg : A \to \mathbb{R}$ e $\frac{f}{g} : B \to \mathbb{R}$, em que $B = \{x \in A : g(x) \neq 0\}$, por:

$$\begin{aligned}(f+g)(x) &= f(x) + g(x)\\(f-g)(x) &= f(x) - g(x)\\(fg)(x) &= f(x)g(x)\\\left(\frac{f}{g}\right)(x) &= \frac{f(x)}{g(x)}.\end{aligned}$$

Proposição 4.1.4. Seja $A \subseteq \mathbb{R}^n$ um conjunto e $f, g : A \to \mathbb{R}$ funções. Seja $a \in A$ um ponto de acumulação de A.

Sejam $L, S \in \mathbb{R}$ tais que $\lim_{x \to a} f(x) = L$ e $\lim_{x \to a} g(x) = S$.

Então:

(a) $\lim_{x\to a}(f+g)(x) = L+S$;

(b) $\lim_{x\to a}(fg)(x) = LS$;

(c) $\lim_{x\to a}(f-g)(x) = L-S$.

Demonstração. Provaremos primeiro o item (a). Seja dado $\epsilon > 0$.

Como $\lim_{x\to a} f(x) = L$, existe $\delta_f > 0$ tal que, para todo $x \in A\setminus\{a\}$, se $d(x,a) < \delta_f$, então $|f(x)-L| < \frac{\epsilon}{2}$.

Analogamente, como $\lim_{x\to a} g(x) = S$, existe $\delta_g > 0$ tal que, para todo $x \in A\setminus\{a\}$, se $d(x,a) < \delta_g$, então $|g(x)-S| < \frac{\epsilon}{2}$.

Seja $\delta = \min\{\delta_f, \delta_g\}$ Agora, dado $x \in A\setminus\{a\}$ tal que $d(x,a) < \delta$, temos que:

$$\begin{aligned}
|(f+g)(x)-(L+S)| &= |f(x)+g(x)-L-S| \\
&= |(f(x)-L)+(g(x)-S)| \\
&\le |f(x)-L| + |g(x)-S| \\
&< \frac{\epsilon}{2}+\frac{\epsilon}{2} = \epsilon.
\end{aligned}$$

Logo, $\lim_{x\to a}(f+g)(x) = L+S$.

Agora, provaremos o item (b). Seja dado $\epsilon > 0$. Fixe um número positivo M qualquer. Como $\lim_{x\to a} f(x) = L$, existe $\delta_f > 0$ tal que, para todo $x \in A\setminus\{a\}$, se $d(x,a) < \delta_f$, então $|f(x)-L| < M$.

Analogamente, como $\lim_{x\to a} g(x) = S$, existe $\delta_g > 0$ tal que, para todo $x \in A\setminus\{a\}$, se $d(x,a) < \delta_g$, então $|g(x)-S| < M$.

Seja $\delta = \min\{\delta_f, \delta_g\}$

Agora, dado $x \in A\setminus\{a\}$ tal que $d(x,a) < \delta$, temos que:

$$\begin{aligned}
|(fg)(x)-LS| &= |f(x)g(x)-LS| \\
&= |f(x)g(x)-f(x)S+f(x)S-LS| \\
&= |f(x)(g(x)-S)+S(f(x)-L)| \\
&\le |f(x)||g(x)-S| + |S||f(x)-L| \\
&< |f(x)|M + |S|M \\
&= (|f(x)|+|S|)M.
\end{aligned}$$

Notemos que, nessa hipótese, $|f(x)| = |f(x)-L+L| \le |f(x)-L|+|L| < M+|L|$. Logo, $|(fg)(x)-LS| < (M+|L|+|S|)M$.

Tomando, de partida, M tal que $M < 1$ e $M < \frac{\epsilon}{1+|L|+|S|}$, concluímos que $|(fg)(x)-LS| < (M+|L|+|S|)M < (1+|L|+|S|)\frac{\epsilon}{1+|L|+|S|} = \epsilon$.

Logo, $\lim_{x\to a}(fg)(x) = LS$.

Para o item (c), note que $f-g = f+(-1)g$. Como a função constante (-1) é contínua, decorre dos itens anteriores que o limite de $f-g$ em a é $L+(-1)S = L-S$. □

Corolário 4.1.5. Seja $A \subseteq \mathbb{R}^n$ um conjunto e $f, g : A \to \mathbb{R}$ funções e $a \in A$.

Se f, g são contínuas em a, então as funções $f+g$, $f-g$ e fg são contínuas em a.

Demonstração. Se a é ponto isolado de A, então $f, g, f+g, f-g$ e fg são contínuas em a.

Caso contrário, temos, da hipótese de continuidade, que, $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$ e $\lim_{x\to a} g(x) = g(a)$. Daí, da proposição anterior, temos que:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to a}(f+g)(x) &= f(a)+g(a) = (f+g)(a) \\
\lim_{x\to a}(f-g)(x) &= f(a)-g(a) = (f-g)(a) \\
\lim_{x\to a}(fg)(x) &= f(a)g(a) = (fg)(a).
\end{aligned}$$

Assim, $f+g$, $f-g$ e fg são contínuas em a. □

Sobre funções compostas, temos o seguinte resultado.

Proposição 4.1.6. Sejam $f : A \to \mathbb{B}$ e $g : B \to \mathbb{R}^k$, onde $A \subseteq \mathbb{R}^m$ e $B \subseteq \mathbb{R}^n$ são conjuntos tais que $f(A) \subseteq B$. Seja $a \in \mathbb{R}^n$ um ponto de acumulação de A e $L \in B$.
Se $\lim_{x\to a} f(x) = L$ e g é contínua em L, então $\lim_{x\to a}(g \circ f)(x) = g(L)$.

Demonstração. Seja dado $\epsilon > 0$.
Como g é contínua em L, existe $\eta > 0$ tal que, para todo $y \in B$, se $d(y, L) < \eta$, então $d(g(y), g(L)) < \epsilon$.
Como $\lim_{x\to a} f(x) = L$ e g é contínua em L, existe $\delta > 0$ tal que, para todo $x \in A\setminus\{a\}$, se $d(x, a) < \delta$, então $d(f(x), L) < \eta$.
Agora, dado $x \in A \setminus \{a\}$ tal que $d(x, a) < \delta$, temos que $d(f(x), L) < \eta$, logo, $d((g \circ f)(x), g(L)) < \epsilon$.
Assim, $\lim_{x\to a}(g \circ f)(x) = g(Lssssss)$. □

Como consequência, temos os seguintes corolários.

Corolário 4.1.7. Sejam $f : A \to \mathbb{B}$ e $g : B \to \mathbb{R}^k$, onde $A \subseteq \mathbb{R}^m$ e $B \subseteq \mathbb{R}^n$ são conjuntos tais que $f(A) \subseteq B$. Seja $a \in A$ um ponto de acumulação de A e $L \in B$.
Se $\lim_{x\to a} f(x) = L$ e g é contínua em L, então $\lim_{x\to a}(g \circ f)(x) = g(L)$.

Corolário 4.1.8. Sejam $f : A \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$, com $A \subseteq \mathbb{R}^n$, e $a \in \mathbb{R}^n$ um ponto de acumulação de A.
Se $\lim f(x) = L \neq 0$ e f é contínua em a, $\lim_{x\to a} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{L}$.

Demonstração. Note que a função $g : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ dada por $g(x) = \frac{1}{x}$ é contínua em todo ponto de seu domínio. □

Corolário 4.1.9. Sejam $f : A \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$, com $A \subseteq \mathbb{R}^n$, e $a \in A$.
Se f é contínua em a, então $\frac{1}{f}$ é contínua em a.

Sobre composição de funções, temos também o seguinte resultado.

Proposição 4.1.10. Sejam $f : A \to \mathbb{R}^n$, com $A \subseteq \mathbb{R}^m$, e a ponto de acumulação de A.
Suponha que exista $\lim_{x\to a} f(x) = L \in \mathbb{R}^n$.
Então, para todo $u : U \to A$, com $U \subseteq \mathbb{R}^k$ e α ponto de acumulação de U, se:

(a) Existe uma bola aberta B em torno de α tal que para todo $t \in B \cap U \setminus \{u\}$, temos que $u(t) \neq \alpha$.

(b) $\lim_{t\to\alpha} u(t) = a$.

Então $\lim_{t\to\alpha}(f \circ u)(t) = L$.

Demonstração. Seja dado $\epsilon > 0$.
Como $\lim_{x\to a} f(x) = L$, existe $\delta > 0$ tal que, para todo $x \in A\setminus\{a\}$, se $d(x, a) < \eta$, então $d(f(x), L) < \epsilon$.
Como $\lim_{t\to\alpha} u(t) = a$, existe $\delta_u > 0$ tal que, para todo $t \in U\setminus\{\alpha\}$, se $d(t, \alpha) < \delta_u$, então $d(u(t), a) < \eta$.
Além disso, existe $\delta' > 0$ tal que para todo $t \in B(\alpha, \delta')$ com $t \neq \alpha$, temos que $u(t) \neq \alpha$.
Seja $\delta = \min\{\delta_u, \delta'\}$.
Agora, dado $t \in U\setminus\{\alpha\}$ tal que $d(t, \alpha) < \delta$, temos que $d(u(t), a) < \delta_u$ e $u(t) \neq \alpha$, logo, $d((f\circ u)(t), L) < \epsilon$.
Assim, $\lim_{t\to\alpha}(f \circ u)(t) = L$. □

Com isso, temos o seguinte.

Corolário 4.1.11 (Teste das curvas)**.** Sejam $f : A \to \mathbb{R}$, com $A \subseteq \mathbb{R}^m$, e p ponto de acumulação de A.
Sejam $u, v : I \to A$, com $I \subseteq \mathbb{R}$ um intervalo aberto contínuas em $\alpha \in I$ e $u(\alpha) = v(\alpha) = p$.
Se existir o limite L de f em p, então $L = \lim_{t\to\alpha}(f \circ u)(t) = \lim_{t\to\alpha}(f \circ v)(t)$.
Em particular:

- Se $f \circ u$ ou $f \circ v$ não possuirem limites em α, então f não possui limite em p.

- Se $f \circ u$ e $f \circ v$ possuírem limites em α, mas $\lim_{t\to\alpha}(f \circ u)(t) \neq \lim_{t\to\alpha}(f \circ v)(t)$, então f não possui limite em p.

- Se $f \circ u$ e $f \circ v$ possuírem limites em α, e ambos forem iguais, o teste é inconclusivo, mas outras curvas podem ser testadas.

4.2 O Teorema do Confronto

Proposição 4.2.1. Sejam $f, g, h : A \to \mathbb{R}$ uma função, onde $A \subseteq \mathbb{R}^m$.

Sejam $p \in A$ um ponto de acumulação de A e $L \in \mathbb{R}$.

Suponha que existe uma bola aberta B em torno de p tal que, para todo $x \in B \cap A \setminus \{p\}$, temos que $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$.

Nessas hipóteses, se $\lim_{x \to p} f(x) = \lim_{x \to p} h(x) = L$, então $\lim_{x \to p} g(x) = L$.

Demonstração. Seja dado $\epsilon > 0$.

Como $\lim_{x \to p} f(x) = L$, existe $\delta_f > 0$ tal que, para todo $x \in A \setminus \{p\}$, se $d(x, p) < \delta_f$, então $|f(x) - L| < \epsilon$.

Analogamente, como $\lim_{x \to p} h(x) = L$, existe $\delta_h > 0$ tal que, para todo $x \in A \setminus \{p\}$, se $d(x, p) < \delta_h$, então $|h(x) - L| < \epsilon$.

Por fim, existe $\delta_g > 0$ tal que, para todo $x \in B(p, \delta_g)$, se $x \in A \setminus \{p\}$, então $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$.

Seja $\delta = \min\{\delta_f, \delta_h, \delta_g\}$.

Seja $x \in A \setminus \{p\}$ tal que $d(x, p) < \delta$, então $-\epsilon < f(x) - L \leq g(x) - L \leq h(x) - L < \epsilon$, logo, $|g(x) - L| < \epsilon$, ou seja, $d(g(x), L) < \epsilon$. □

Índice Remissivo