Gloutons

IV - Algorithmes d'approximation, un exemple

1. La variante fractionnaire du problème du sac à dos

Dans cette variante, on autorise à prendre des quantités fractionnaires d'objets.

- n objets $(p_0, v_0), \ldots (p_{n-1}, v_{n-1})$
- Question : trouver $\alpha_0, \ldots \alpha_{n-1}$ appartenant à l'intervalle réel [0;1] tel que
  $\sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i \leq P$
  $\sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i v_i$ est maximale (parmi les solutions qui respectent la contrainte)

Ce problème se résout correctement via un algorithme glouton : on choisit l'objet de ratio $\frac{v_i}{p_i}$ maximal

Démonstration

On commence par trier les objets par ratio décroissant. On suppose que c'est fait :

$\frac{v_0}{p_0} \geq \ldots \frac{v_{n-1}}{p_{n-1}}$

On exclu les cas où n = 0 ou P = 0

La solution gloutonne est alors de la forme : $(1, \ldots 1, \alpha, 0, \ldots 0)$ avec $\alpha \in]0, 1]$ d'indice r et $\sum_{i=0}^{r-1} p_i + \alpha p_r = P$

et la valeur du sac est alors $\sum_{i=0}^{r-1} v_i + \alpha v_r$

Soit $(\alpha_0, \ldots \alpha_{n-1})$ une solution optimale

On a $\sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i p_i = P$ (sauf si $\sum_{i=0}^{n-1} p_i < P$ ce que l'on exclut car cas trivial)

On suppose par l'absurde que cette solution est différente de la gloutonne.

Soit i_0 le plus petit coefficient sur lequel les deux solutions diffèrent :

- Soit $\alpha i_0 < 1$ si $i_0 > r$
- Soit $\alpha i_0 < \alpha$ si $i_0 = r$
- Ce sont les seuls cas possibles sinon la solution $(\alpha_0, \ldots \alpha_{n-1})$ ne respecte pas la contrainte du poids.

$\rightarrow \exists K > r : \alpha_K > 0$ ou $\alpha_r > \alpha$

Différents cas possibles :

1) $i_0 < r$

   On prend $\beta = min\left(\frac{\alpha_K p_K}{P_{i_0}}, \frac{(1-\alpha_{i_0}) p_{i_0}}{p_K}\right)$

   On montre que la solution $\left(\alpha_0 \ldots, \alpha_{i_0} + \frac{\beta}{p_{i_0}}, \alpha_{i_0+1}, \ldots, \alpha_K - \frac{\beta}{p_K}, \ldots\right) = (\alpha_0{}', \ldots, \alpha_{n-1}{}')$

   C'est bien une solution :

   $\sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i{}' p_i = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i p_i + \frac{\beta}{p_{i_0}} - \frac{\beta}{p_K} p_K = P$

   Et la valeur obtenue augmente

   $\sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i{}' v_i = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i v_i + \frac{\beta}{p_{i_0}} - \frac{\beta}{p_K} v_K$ (la somme des deux derniers termes étant $0 \leq$)

Or $i_0 < K$ donc $\frac{v_{i_0}}{p_{i_0}} \geq \frac{v_K}{p_K}$

Donc $\sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i' v_i \geq \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i v_i$

2. $i_0 = r$

   Ce cas sera similaire : il faut remplir le coefficient r au maximum.

2. Approximation de la variante classique
On suppose encore les objets triés par ratio : $\frac{v_0}{p_0} \geq ... \frac{v_{n-1}}{p_{n-1}}$

La solution optimale fractionnaire est de la forme $(1, ...1, \alpha, 0, ...0)$ avec α à l'indice r

Une approximation acceptable du problème initiale est : la meilleure solution entre $(1, ...1, 0, ...0)$ le premier 0 étant à l'indice r et $(0, ...0, 1, 0, ...0)$ le 1 étant à l'indice r.

→ On suppose qu'on a retiré les objets trop gros !

Toute solution au problème "normal" est également une solution au problème fractionnaire.

Soit V la solution optimale au problème classique : $V \leq \sum_{i=0}^{r-1} v_i + \alpha v_r$

Donc :

- soit $\sum_{i=0}^{n-1} v_i \geq \frac{V}{2}$
- soit $v_r \geq \alpha v_r \geq \frac{V}{2}$

Cela s'appelle une $\frac{1}{2}$-approximation : on produit une solution qui est au moins la moitié de l'optimale.