

Part II : Analyse de Programmes

Introduction

Correction : Mon code produit-il le résultat attendu ?

Terminaison : Mon code répond-il un jour ?

Complexité : A quelle vitesse mon programme répond-il ?

Solution 1 : Batteries de Tests. Limitation : On ne peut pas être exhaustif, il peut toujours se produire en situation réelle une configuration non testée.

Solution 2 : Analyse mathématique

Chapitre 1 : Correction

I - Introduction

```
void swap(a,i,j) // échange les cases i et j de a
```

```
void mystery(int len, int* a) {  
    for (int i = 0; i < len; i++) {  
        for (int j = 0; j < len; j++) {  
            if (a[i] < a[j]) swap(a,i,j);  
        }  
    }  
}
```

Ce programme est-il correct ?

- Correct : fait-il ce qu'on attend de lui ?
- Ici : qu'est ce qu'on attend de lui ?

Problème : Il faut préciser ce qu'on attend d'un programme, c'est sa **spécification**.

Entraînement : Écrivons la spécification d'un algorithme de tri.

- On demande que le tableau :
 - soit trié
 - soit une permutation du tableau initial

II - Vocabulaire

Pour préciser ce qu'un programme doit faire, on donne sa **spécification**. Elle est composée de :

- La **précondition** : ce sont les hypothèses que l'on fait sur les arguments.
- La **postcondition** : c'est ce que vérifie le résultat ou éventuellement les modifications effectuées en mémoire.

Un programme est alors **correct** pour une spécification donnée si pour toute entrée du programme qui vérifie la précondition alors la sortie vérifie la postcondition.

```
int incr(int n) {  
    return n+1;  
}
```

Ce programme vérifie la spécification suivante :

- Précondition : n est pair

- Postcondition : $f(n)$ est impair

```
// Function to check if an array is sorted
bool is_sorted(int *a, int n) {
    while (--n >= 1) {
        if (a[n] < a[n - 1])
            return false;
    }
    return true;
}

// Function to shuffle the elements of an array
void shuffle(int *a, int n) {
    int i, t, r;
    for (i = 0; i < n; i++) {
        t = a[i];
        r = rand() % n;
        a[i] = a[r];
        a[r] = t;
    }
}

// BogoSort function to sort an array
void bogosort(int *a, int n) {
    while (!is_sorted(a, n))
        shuffle(a, n);
}
```

Le bogosort tire aléatoirement des permutations d'une liste (ou tableau) jusqu'à l'avoir trié.

Remarque : On parle ici de **correction partielle**. Cela consiste à démontrer que le programme est correct en supposant qu'il termine (même si cette supposition est fausse).

On dit qu'un programme est **correct** lorsque l'on a **correction partielle** + **terminaison**.

III - Correction de programmes impératifs

```
int max_arr(int len, int* a) {
    assert(len > 0);
    int m = a[0];
    for (int i = 1; i < len; i++) {
        m = max(a[i], m);
    }
    return m;
}
```

Spécification de `max_arr` :

- Précondition : $\text{len} > 0$ (le tableau `a` est non vide)
- Postcondition : Renvoie la valeur maximale de `a`, c'est-à-dire $\max_{i \in [0, \text{len}[a[i]$.

Pour cela on utilise la notion **d'invariant de boucle**.

Un invariant de boucle est une propriété mathématique sur les variables du programme qui :

- Est vrai avant la boucle
- Est préservée par une itération de la boucle

Cette propriété sera donc vraie à la fin de l'exécution de la boucle.

Remarque : Cette propriété doit impliquer la postcondition.

Sur l'exemple de `max_arr` : prenons comme invariant :

$$m = \max_{j \in [0, i[} a[j]$$

Vérifions que c'est un bon invariant.

Avant la boucle :

$$m = a[0] \text{ et } i = 1$$

$$\text{Or } \max_{j \in [0, i[} a[j] = a[0] = m$$

Donc l'invariant est vrai

Hérédité :

Si l'invariant est vrai **en début de boucle** montrons qu'il sera vrai en début de boucle suivante. En effet en début de boucle on a $\max_{j \in [0, i[} a[j]$.

Notation : Par convention on note m' et i' les valeurs des variables m et i après une itération de boucle.

$$\text{On a } m' = \max(a[i], m) \text{ et } i' = i + 1$$

$$\text{Donc } m' = \max(a[i], \max_{j \in [0, i[} a[j]) = \max_{j \in [0, i[} a[j]$$

$$\text{Et donc comme } i' = i + 1 : m' = \max_{j \in [0, i'-1[} a[j]$$

$$\text{Puis on a } m' = \max_{j \in [0, i'[} a[j]$$

$$\text{Donc } m = \max_{j \in [0, \text{len}[} a[j]$$

$$\text{Finalement } m = \max_{j \in [0, \text{len}[} a[j]$$

C'est exactement la postcondition.

IV - Correction de programmes Récursifs

```
int fibo(int n) {  
    if (n == 0 || n == 1) {  
        return 1;  
    }  
    return fibo(n-1) + fibo(n-2);  
}
```

Spécification

- Précondition : $n \geq 0$
- Postcondition : renvoie u_n ou u est définie par $u_0 = u_1 = 1$ et $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$

La correction de programme récursifs se démontre par récurrence.

Prenons l'exemple du programme ci-dessus.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose $H(n) : \text{fibonacci}(n) = u_n$

Initialisation

- Si $n = 0$, $\text{fibonacci}(0) = 1 = u_0$

- Si $n = 1$, $fibonacci(1) = 1 = u_1$

Hérédité

On suppose $n > 1$

$fibonacci(n)$ renvoie $fibonacci(n-1) + fibonacci(n-2)$

Par hypothèse de récurrence, comme $n-1 < n$ et $n-2 < n$ et $n-1 \geq 0$, $n-2 \geq 0$.

On a $fibonacci(n-1) = u_{n-1}$

Et $fibonacci(n-2) = u_{n-2}$

Or $u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$

Donc $fibonacci(n) = u_n$

Le programme est donc correct.

Procédons à un autre exemple :

```
int sum_arr(int len, int* a) {
    if (len == 0) return 0;
    return sum_arr(len-1, a) + a[len-1];
}
```

Postcondition : renvoie $\sum_{j=0}^{len-1} a[j]$

On montre par récurrence sur len que la fonction est correcte c'est-à-dire elle vérifie la postcondition.

Si $len = 0$: la fonction renvoie 0. Or $\sum_{j=0}^{len-1} a[j] = 0$.

Si $len > 0$: Par hypothèse de récurrence, $sum_arr(len-1, a)$ renvoie $\sum_{j=0}^{len-1} a[j]$.

Donc $sum_arr(len, a)$ renvoie $a[len-1] + \sum_{j=0}^{len-1} a[j] = \sum_{j=0}^{len-1} a[j]$.

L'invariant de boucle de la version impérative serait $S = \sum_{j=0}^{i-1} a[j]$