Exemple:

1) $G=\mathbb{Z}$, $H=m\mathbb{Z}$, $m\geq 2$

$\sim_s = \sim_d \overset{not.}{=\!=} \sim$

$x\sim y \iff x-y\in m\mathbb{Z} \iff m \mid x-y$

$\mathbb{Z}/_{\sim} = \{\hat{0}, \hat{1}, \dots, \widehat{m-1}\} = (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})_s = (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})_d$

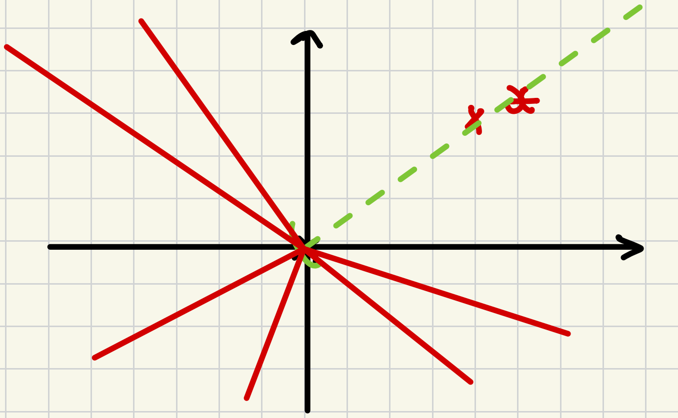
$\hat{i} = i + m\mathbb{Z} = \{a\in\mathbb{Z} \mid m\mid(a-i)\}$

2) $G=(\mathbb{C}^*,\cdot)$, $H=\mathbb{R}_+^*$

$\sim_s=\sim_d=\sim$, $x\sim y \iff x^{-1}y\in\mathbb{R}_+^* \iff$

$\iff (\exists)\ a\in\mathbb{R}_+^*$ a.î. $y = ax$

$\hat{x} = \mathbb{R}_+^* x$



$\mathbb{C}^* = \bigcup$ clase de echivalență

Subgrupuri normale și grupuri factor

Propoziție: Fie G grup, $H\leq G$. Sunt echivalente:

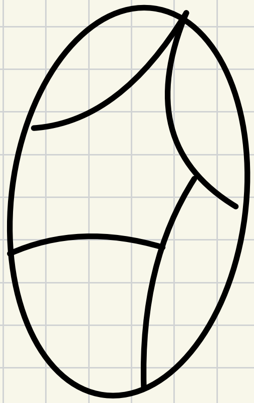
(1) $\sim_s = \sim_d$

(2) $xH=Hx$, $(\forall)\ x\in G$

(3) $(\forall)\ x\in G$, $(\forall)\ h\in H$, $xhx^{-1}\in H$

Dem.:

(1) ⇔ (2) relațiile de echivalență coincid ⇔
⇔ clasele de echivalență corespunzătoare coincid



(2) ⇒ (3) Fie $x \in G$, $h \in H$.

$$xh \in xH = Hx \Rightarrow (\exists)\ h' \in H \text{ a.î. } xh = h'x$$
$$\Downarrow$$
$$xhx^{-1} = h' \in H$$

(3) ⇒ (2)

$xH = Hx$

„$\subseteq$": Fie $xh \in xH$, unde $h \in H$.
Atunci $xh = \underbrace{xhx^{-1}}_{\in H} x \in Hx$.

„$\supseteq$": $hx = x \cdot \underbrace{x^{-1}hx}_{\in H} \in xH$

Def.: Fie G grup și $H \leq G$. Atunci H s.n. **subgrup normal** în G dacă una (deci toate) dintre condițiile (1)–(3) din propoziție este îndeplinită.
Notație: $H \lhd G$

Exemple:

(1) G abelian $\Rightarrow$ orice $H \leq G$ este normal

$(xH = Hx, (\forall)\, x \in G)$

(2) G și $\{1\}$ sunt normale în G

(3) Dacă $[G:H] = 2$, atunci $H \trianglelefteq G$

$|(G/H)_s| = |(G/H)_d| = 2$

$(G/H)_s = \{ \underset{\substack{\| \\ 1\cdot H}}{H}, G \setminus H \}$ $\Rightarrow \sim_s = \sim_d$

$(G/H)_d = \{ \underset{\substack{\| \\ H\cdot 1}}{H}, G \setminus H \}$

(4) G grup

$Z(G) = \{ a \in G \mid a \cdot g = g \cdot a, (\forall)\, g \in G \}$

$Z(G) \trianglelefteq G$

centrul lui G

Grup factor

Fie G grup și $H \trianglelefteq G$.

$(G/H)_s = (G/H)_d \overset{\text{not.}}{=\!=} G/H = \{ xH \mid x \in G \}$

$\qquad\qquad \| \text{not.}$

$\qquad\qquad \hat{x}$

Pe G/H definim operația $\cdot$ prin:

$$\hat{x} \cdot \hat{y} \overset{\text{def.}}{=\!=} \widehat{xy}, (\forall)\, x, y \in G$$

Definiția este corectă (nu depinde de reprezentanții x și y aleși).

Dacă $\hat{x} = \hat{x'}$ și $\hat{y} = \hat{y'} \overset{?}{\Rightarrow} \widehat{xy} = \widehat{x'y'}$

$\hat{x} = \hat{x'} \Rightarrow x^{-1}x' \in H$

$\hat{y} = \hat{y'} \Rightarrow y^{-1}y' \in H$

Vrem $(xy) \sim (x'y') \Leftrightarrow (xy)^{-1}x'y' \in H$

$$(xy)^{-1}x'y' = y^{-1}\underbrace{x^{-1}x'}_{\in H}y' = \underbrace{y^{-1}\underbrace{x^{-1}x'}_{\in H}y}_{\in H}\underbrace{y^{-1}y'}_{\in H} \in H$$

Propoziție: $(G/H, \cdot)$ este grup, numit **grupul factor al lui G în raport cu H.** În plus, $\pi : G \to G/H$, $\pi(x) = \hat{x}$, $(\forall)\, x \in G$ este morfism surjectiv de grupuri.

(π = proiecția canonică)

Dem.:

Asociativitate: $(\hat{x} \cdot \hat{y}) \cdot \hat{z} \overset{?}{=} \hat{x} \cdot (\hat{y} \cdot \hat{z})$

$$(\hat{x} \cdot \hat{y}) \cdot \hat{z} = \widehat{xy} \cdot \hat{z} = \widehat{(xy)z}$$

$$\hat{x} \cdot (\hat{y} \cdot \hat{z}) = \hat{x} \cdot \widehat{yz} = \widehat{x(yz)}$$

Elementul neutru: $\hat{1}$

$$\hat{x}\cdot\hat{1}=\widehat{x\cdot 1}=\hat{x}$$
$$\hat{1}\cdot\hat{x}=\widehat{1\cdot x}=\hat{x}$$

orice $\hat{x}$ este **inversabil**.

$$\hat{x}\cdot\widehat{x^{-1}}=\widehat{x\cdot x^{-1}}=\hat{1}=\widehat{x^{-1}}\cdot\hat{x}$$

π morfism de grupuri

$$\pi(xy)=\widehat{xy}=\hat{x}\cdot\hat{y}=\pi(x)\cdot\pi(y)$$

$$\pi: G\to G/\sim$$

Observație! $\operatorname{Ker}\pi=\{x\in G \mid \hat{x}=\hat{1}\}=H$

Exemplu: $G=\mathbb{Z},\ H=m\mathbb{Z},\ m\geq 2$

$$\mathbb{Z}/_{m\mathbb{Z}}=\{\hat{0},\hat{1},\dots,\widehat{m-1}\}$$

$\downarrow$

grup cu $+$

$$\hat{i}+\hat{j}\overset{\text{def.}}{\equiv}\widehat{i+j}$$

Elementul neutru: $\hat{0}$

Simetricul lui $\hat{i}$: $\widehat{-i}$

Se notează $\mathbb{Z}_m$ (grupul claselor de resturi modulo m)

$$\mathbb{Z}_m=\langle\hat{1}\rangle \Rightarrow \mathbb{Z}_m \text{ este ciclic!}$$

Exercițiu: $\mathbb{Z}_m\simeq U_m,\ (\forall)\, m\geq 2$

Teoremă: (Proprietatea de universalitate a grupului factor)

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\pi"] \arrow[dr, "f"'] & G/H \arrow[d, dashed, "\bar{f}"] \\ & A \end{tikzcd}$$

Fie G grup, $H \trianglelefteq G$ și $\pi : G \to G/H$ proiecția canonică. Atunci pentru orice grup A și orice morfism de grupuri $f : G \to A$ cu $H \subset \operatorname{Ker} f$, există un unic morfism de grupuri $\bar{f} : \frac{G}{H} \to A$ cu $\bar{f}\pi = f$. În plus, $\bar{f}$ injectivă $\Leftrightarrow$ $H = \operatorname{Ker} f$ și $\bar{f}$ surjectivă $\Leftrightarrow$ f surjectivă.

Dem.: π proiecția $G \xrightarrow{\pi} G/\sim$, unde $\sim = \sim_s = \sim_d$

Dacă $x, y \in G$, avem $\underline{x \sim y} \Leftrightarrow x^{-1}y \in H \xRightarrow{H \subset \operatorname{Ker} f}$
$\Rightarrow x^{-1}y \in \operatorname{Ker} f \Leftrightarrow f(x^{-1}y) = 1 \Leftrightarrow f(x) = f(y) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \underline{x \sim_f y}$

Observăm că:

- Dacă $H = \operatorname{Ker} f$, atunci este $\Leftrightarrow$ și $\sim = \sim_f$
- Dacă $\sim = \sim_f$, atunci, dacă $x \in \operatorname{Ker} f \Rightarrow$
$\Rightarrow \underline{f(x)} = 1 = \underline{f(1)} \Rightarrow x \sim_f 1 \Rightarrow x \sim 1$

$$1 \sim x$$
$$\Downarrow$$
$$x \in H$$

Deci $\operatorname{Ker} f = H$.

Așadar, $\sim = \sim_f \Leftrightarrow H = \operatorname{Ker} f$

Proprietatea de universalitate pentru mulțimi factor $\Rightarrow (\exists!)$ funcție $\bar{f}: G/H \to A$ cu $\bar{f}\pi = f$.

Atunci $\bar{f}(\pi(x)) = f(x)$, adică $\bar{f}(\hat{x}) = f(x)$, $(\forall)\, x \in G$

$\bar{f}$ morfism de grupuri:

$$\bar{f}(\hat{x} \cdot \hat{y}) = \bar{f}(\widehat{xy}) = f(xy) = f(x) \cdot f(y) = \bar{f}(\hat{x}) \cdot \bar{f}(\hat{y})$$

$\bar{f}$ injectivă $\Leftrightarrow \sim = \sim_f \Leftrightarrow H = \operatorname{Ker} f$

$\bar{f}$ surjectivă $\Leftrightarrow f$ surjectivă

Corolar. **Teorema fundamentală de izomorfism pentru grupuri**

Fie $f: G \to H$ un morfism de grupuri. Atunci $\operatorname{Ker} f \trianglelefteq G$, $\operatorname{Im} f \leq H$ și $(\exists)$ un izomorfism de grupuri $G/\operatorname{Ker} f \simeq \operatorname{Im} f$.

Dem.:

Știm $\operatorname{Ker} f \leq G$ și $\operatorname{Im} f \leq H$

Fie $x \in G$, $k \in \operatorname{Ker} f$. Vreau $xkx^{-1} \in \operatorname{Ker} f$.

$\Downarrow$

$f(k) = 1$

$$f(xkx^{-1}) = f(x)\underbrace{f(k)}_{1} f(x^{-1}) = f(xx^{-1}) = f(1) = 1$$

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\pi"] \arrow[dr, "f'"'] & G/\operatorname{Ker} f \arrow[d, dashed, "\bar{f}"] \\ & \operatorname{Im} f \end{tikzcd}$$

Fie $f': G \to \operatorname{Im} f$,

$f'(x) = f(x)$, $(\forall)\, x \in G$.

f' morfism surjectiv de grupuri

$\boxed{\ker f' = \ker f}$

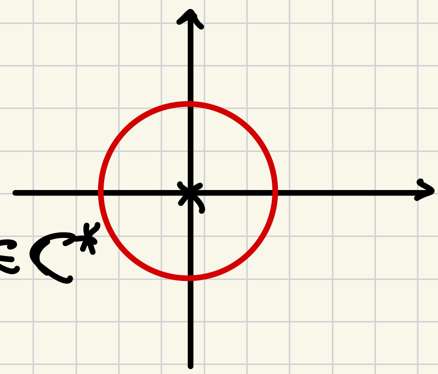
Proprietatea de universalitate $\Rightarrow (\exists!)\ \bar{f}'$ morfism de grupuri cu $\bar{f}'\pi = f'$

$\bar{f}'$ injectiv

$\bar{f}'$ surjectiv $\quad f'$ surjectiv

exemple:

1) Fie $S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$



exercițiu: $S^1 \le (\mathbb{C}^*, \cdot)$

Fie $f : \mathbb{C}^* \to S^1$, $f(z) = \frac{z}{|z|}, (\forall) z \in \mathbb{C}^*$

$$\left|\frac{z}{|z|}\right| = \frac{1}{|z|} \cdot |z| = 1$$

f morfism de grupuri

$$f(z_1 z_2) = \frac{z_1 z_2}{|z_1 z_2|} = \frac{z_1 z_2}{|z_1| \cdot |z_2|} = f(z_1) \cdot f(z_2)$$

$$\ker f = \{z \in \mathbb{C}^* \mid \frac{z}{|z|} = 1\} \subseteq \mathbb{R}^*_+$$

$\Downarrow$

$z = |z| \in \mathbb{R}^*_+$

$\supseteq$ a

$$\frac{a}{|a|} = \frac{a}{a} = 1$$

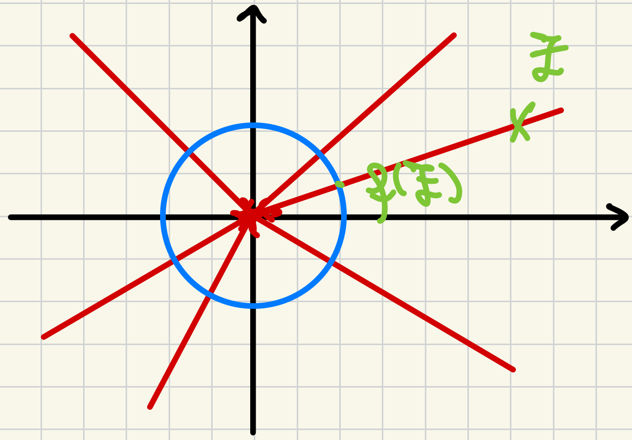
$\operatorname{Im} f = S^1$

$z \in S^1$

$\Downarrow$

$f(z) = \dfrac{z}{|z|} = \dfrac{z}{1} = z$

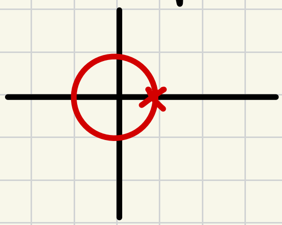
$\mathbb{C}^* / \mathbb{R}_+^* \cong S^1$



2) $f : (\mathbb{R}, +) \to (\mathbb{C}^*, \cdot)$

$f(x) = \cos(2\pi x) + i \sin(2\pi x) = 1 \Leftrightarrow \cancel{2\pi} x = \cancel{2} k \cancel{\pi}$, $k \in \mathbb{Z}$

f morfism de grupuri [exercițiu]



$\operatorname{Im} f = S^1$

$\operatorname{Ker} f = \mathbb{Z}$

$(\mathbb{R}, +)/\mathbb{Z} \cong S^1$

3) G grup

$G/G \cong \{1\}$, $G/\{1\} \cong G$ [exercițiu]

Grupuri ciclice. Ordinul unui element

$(G, \cdot)$ ciclic dacă $(\exists)\, g \in G$ a.î. $G = \langle g \rangle = \{ g^i \mid i \in \mathbb{Z} \}$

Aditiv: $G = \langle g \rangle = \{ ig \mid i \in \mathbb{Z} \}$

exemple:

$(\mathbb{Z}, +) = \langle 1 \rangle$;

$(\mathbb{Z}_m, +) = \langle \hat{1} \rangle$, $(\forall)\, m \in \mathbb{N}^*$

ciclice

$\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} = \mathbb{Z}_m$

$m = 1$: $\mathbb{Z}/1 \cdot \mathbb{Z} = \mathbb{Z}/\mathbb{Z} = \{\hat{0}\}$

$\mathbb{Z}/1 \cdot \mathbb{Z} = \mathbb{Z}_1$

Teoremă: Fie G un grup ciclic. Atunci $G \simeq (\mathbb{Z},+)$ sau $G \simeq (\mathbb{Z}_m,+)$ pentru un $m \in \mathbb{N}^*$.

Dem.: Fie $G = \langle g \rangle = \{g^i \mid i \in \mathbb{Z}\}$

Definim $f:(\mathbb{Z},+) \to G$, $f(i) = g^i$, $(\forall)\ i \in \mathbb{Z}$

f morfism de grupuri: $f(i+j) = g^{i+j} = g^i \cdot g^j = f(i) \cdot f(j)$

f surjectivă

$\operatorname{Ker} f \leq (\mathbb{Z},+) \Rightarrow (\exists)\ m \in \mathbb{N}$ cu $\operatorname{Ker} f = m\mathbb{Z}$

Dacă $m = 0 \Rightarrow \operatorname{Ker} f = 0$

$$\left.\begin{array}{l} \mathbb{Z}/0\mathbb{Z} \simeq \operatorname{Im} f = G \\ \mathbb{Z}/0\mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z} \end{array}\right| \Rightarrow G \simeq \mathbb{Z}$$

Dacă $m > 0$:

$$\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \simeq \operatorname{Im} f = G \Rightarrow G \simeq \mathbb{Z}_m$$

$$\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} = \mathbb{Z}_m$$

Def.: Fie G grup și $g \in G$. **Ordinul lui g**, notat $o(g)$, este:

- $|\langle g \rangle|$, dacă $\langle g \rangle$ este finit
- ∞, dacă $\langle g \rangle$ este infinit

Observație!

1) Dacă $o(g) = \infty \Rightarrow \langle g \rangle \simeq (\mathbb{Z}, +)$

$f : \mathbb{Z} \to \langle g \rangle$

$f(i) = g^i$ are $\ker = 0$, adică este injectivă

$(\forall)\ i, j \in \mathbb{Z}$ $\quad g^i = g^j \Leftrightarrow i = j$

$g^i = 1 \Leftrightarrow i = 0$

2) $o(g) = 1 \Leftrightarrow g = 1$ $\qquad f : \mathbb{Z} \to \langle g \rangle$, $f(i) = g^i$, $\ker f = m\mathbb{Z}$

3) Dacă $o(g) = m \geq 2$, atunci:

$g^m = 1$

$g^i = 1 \Leftrightarrow m \mid i$

$\langle g \rangle = \{1; g; g^2; \dots; g^{m-1}\}$

$o(g) =$ cel mai mic $m \in \mathbb{N}^*$ cu $g^m = 1$

Propoziție: Dacă G este grup finit și $g \in G \Rightarrow$
$\Rightarrow o(g) \mid |G|$

Dem.: $o(g) = |\langle g \rangle| \mid |G|$ (Teorema lui Lagrange)

Propoziție: Dacă G grup cu $|G| = p$, p prim $\Rightarrow$
$\Rightarrow G \simeq (\mathbb{Z}_p, +)$

Dem.: Fie $g \in G \setminus \{1\}$

$$\left.\begin{array}{l} \{1\} \neq \langle g \rangle \leq G \\ 1 \neq |\langle g \rangle| \mid |G| = p \end{array}\right| \Rightarrow |\langle g \rangle| = p$$

$\Downarrow$

$|\langle g \rangle| = G$

$\wr|$

$\mathbb{Z}_p$