Exemple:

1) Relația de congruență modulo 2 pe $\mathbb{Z}$:

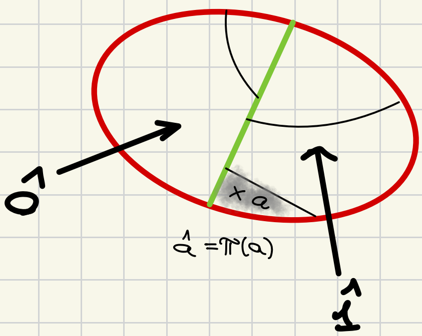
$x, y \in \mathbb{Z} \qquad x \sim y \iff 2 \mid x - y$

$\mathbb{Z}/_\sim$ conține exact două clase de echivalență:

$\hat{0} = \{\ldots, -4, -2, 0, 2, 4, \ldots\} = \hat{2} = \hat{4} = \widehat{-2} = \ldots$

$\hat{1} = \{\ldots, -3, -1, 1, 3, 5, \ldots\} = \hat{3} = \hat{5} = \ldots$

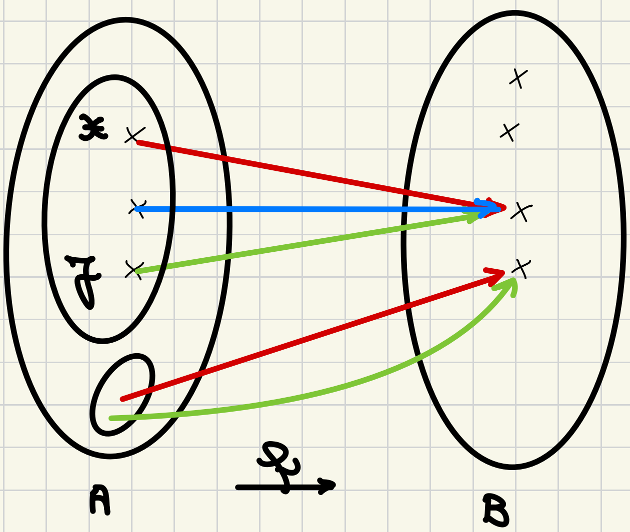
$\mathbb{Z}/_\sim = \{\hat{0}, \hat{1}\}$



2) $f: A \to B$ funcție

$\sim_f$ relație de echivalență pe A

$x \sim_f y \overset{\text{def.}}{\iff} f(x) = f(y)$



Fie ρ o relație de echivalență pe A.

$\pi : A \to A/_{\sim}$

$\pi(a) = \hat{a}$, $(\forall)\, a \in A$

π surjectivă

π - proiecția canonică pe mulțimea factor

Observație! $\sim_\pi = \rho$

$$x \sim_\pi y \Leftrightarrow \pi(x) = \pi(y) \Leftrightarrow \hat{x} = \hat{y} \Leftrightarrow x \rho y$$

Teoremă: (Proprietatea de universalitate a mulțimii factor)

Fie ρ o relație de echivalență pe mulțimea A și $\pi : A \to A/\rho$ proiecția canonică

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\pi"] \arrow[dr, "f"'] & A/\rho \arrow[d, dashed, "\bar{f}"] \\ & B \end{tikzcd}.$$

Atunci pentru orice mulțime B și funcție $f : A \to B$ astfel încât $\rho \subset \sim_f$ [adică $x \rho y \Rightarrow f(x) = f(y)$] există o unică funcție $\bar{f} : A/\rho \to B$ pentru care $\bar{f}\pi = f$.

În plus, $\bar{f}$ este injectivă $\Leftrightarrow \rho = \sim_f$ și $\bar{f}$ este surjectivă $\Leftrightarrow f$ este surjectivă.

Dem.: **Existența lui $\bar{f}$:**

Definim $\bar{f} : A/\rho \to B$ prin $\bar{f}(\hat{a}) = f(a)$, pt. orice $a \in A$

Definiția este corectă (nu depinde de reprezentantul a ales în clasă):

Dacă $\hat{a} = \hat{b}$, atunci $f(a) = f(b)$?

Într-adevăr, $\hat{a} = \hat{b} \Rightarrow a \rho b \xRightarrow{\rho \subset \sim_f} f(a) = f(b)$

Apoi, $(\bar{f}\pi)(a) = \bar{f}(\pi(a)) = \bar{f}(\hat{a}) = f(a)$ pentru orice $a \in A$, adică $\bar{f}\pi = f$

Unicitatea lui $\bar{f}$:

Dacă $\tilde{f} : A/\rho \to B$ este o altă funcție pentru care $\tilde{f}\pi = f$, atunci

$(\tilde{f}\pi)(a) = f(a), (\forall) a \in A$

$\Downarrow$

$\underline{\tilde{f}(\hat{a})} = f(a) = \underline{\bar{f}(\hat{a})}, (\forall) a \in A$

$\Downarrow$

$\tilde{f} = \bar{f}$

$\bar{f}$ injectivă $\Leftrightarrow \rho = \sim_f$

„$\Rightarrow$": Știm deja $\rho \subset \sim_f$. Arăt că are loc și $\sim_f \subset \rho$.

Fie $(x, y) \in \sim_f$, adică $f(x) = f(y) \Rightarrow \bar{f}(\hat{x}) = \bar{f}(\hat{y})$

$\xRightarrow{\bar{f} \text{ inj.}} \hat{x} = \hat{y} \Rightarrow x \rho y$, adică $(x, y) \in \rho$

„<=": Fie $\hat{x}, \hat{y} \in A/\rho$ cu $\bar{f}(\hat{x}) = \bar{f}(\hat{y})$.

Atunci $f(x) = f(y) \Rightarrow x \sim_f y \Rightarrow x \rho y \Rightarrow$

$\Rightarrow \hat{x} = \hat{y}$

$\bar{f}$ surj. $\Leftrightarrow f$ surj.

„=>": $\bar{f}$ surj., π surj. $\Rightarrow \underbrace{\bar{f} \circ \pi}_{= f}$ surj.

„<=": f surj. $\Rightarrow \bar{f} \circ \pi$ surj. $\Rightarrow \bar{f}$ surj.

Exemplu:

Pe $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ fie relația ρ definită astfel:

$$(a,b)\, \rho\, (c,d) \overset{def.}{\Longleftrightarrow} a + d = b + c$$

Atunci ρ este relație de echivalență [exercițiu].

Apoi

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{N} \times \mathbb{N} \arrow[r, "\pi"] \arrow[dr, "f"'] & \mathbb{N} \times \mathbb{N}/\rho \arrow[d, dashed, "\bar{f}"] \\
& \mathbb{Z}
\end{tikzcd}$$

proiecția canonică

Fie $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$, $f((a,b)) = a - b$.

$\rho \overset{?}{\subset} \sim_f$

$x \rho y \Rightarrow f(x) = f(y)$

$(a,b)\, \rho\, (c,d) \Leftrightarrow a + d = b + c \Leftrightarrow a - b = c - d \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow f((a,b)) = f((c,d)) \Leftrightarrow (a,b) \sim_f (c,d)$

Așadar, $\rho = \sim_f \xRightarrow{\text{Prop. unică}} (\exists!)\ \bar{f}$ cu $\bar{f}\pi = f$

$\bar{f}$ este și injectivă

f surjectivă

$$\mathbb{Z} \ni n = \begin{cases} f((n,d)) , & \text{dacă } n \geq 0 \\ f((0,-n)) , & \text{dacă } n < 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow \bar{f}$ surj. $\Rightarrow \bar{f}$ bijectivă

Exercițiu:

$\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*, \rho$

$(a,b)\ \rho\ (c,d) \Leftrightarrow ad = bc$

Atunci ρ relație de echivalență și $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^*/_\rho \sim \mathbb{Q}$

Relații de ordine

Def.: O relație pe o mulțime nevidă s.n. **relație de ordine** dacă este reflexivă, tranzitivă și antisimetrică.

De aici, avem notația $\leq$.

$$\boxed{\begin{array}{l} a \leq a, \text{ pt. orice } a \in A \\ a \leq b,\ b \leq c \Rightarrow a \leq c \\ a \leq b \text{ și } b \leq a \Rightarrow a = b \end{array}}$$

Relație de ordine ~ relație de ordine parțială (poset)

$(A, \leq)$ s.n. mulțime ordonată (sau parțial ordonată)

$(A, \leq)$ este total ordonată dacă pentru orice $a, b \in A$ avem $a \leq b$ sau $b \leq a$

Exemple:

1) $(\mathbb{N}, \leq), (\mathbb{Z}, \leq), (\mathbb{R}, \leq)$ total ordonate

$\leq$ cea uzuală

$2 \nmid 3$
$3 \nmid 2$

2) $(\mathbb{N}, |)$ mulțime ordonată, dar nu total ordonată

$a | b \Leftrightarrow (\exists)\ k \in \mathbb{N}$ cu $b = ka$ (a îl divide pe b)

$(\mathbb{Z}, |)$ nu este ordonată

$$\left.\begin{array}{l} 2 \mid -2 \\ -2 \mid 2 \\ 2 \neq -2 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{nu este antisimetrică.}$$

3) X mulțime

$(\mathcal{P}(X), \subset)$ mulțime ordonată

este total ordonată $\Leftrightarrow$ X are cel mult un element

4) $A = \{a, b, c, d, e\}$

$\rho = \{(a,a), (b,b), (c,c), (d,d), (e,e), (a,c), (a,d), (a,e), (b,c), (b,d), (b,e), (c,e), (d,e)\}$

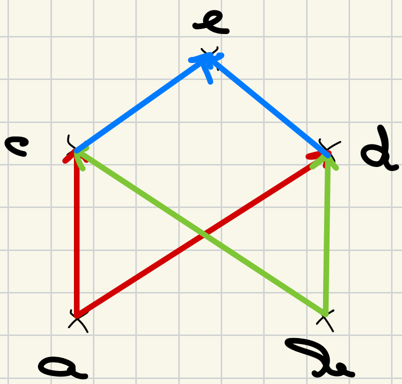
ρ relație de ordine pe A (exercițiu)

Diagrama Hasse a unei mulțimi ordonate, finite

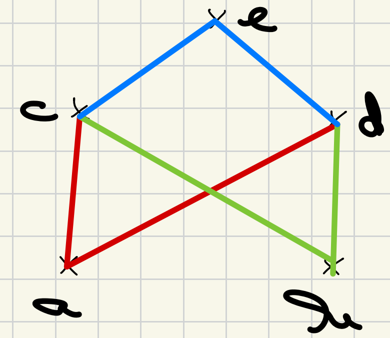
$(A, \leq)$

graf orientat
vârfurile = elementele lui A
pt. $x, y \in A$ am o muchie $x \longrightarrow y \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x \leq y,\ x \neq y$
și $x \leq z \leq y \Rightarrow z = x$ sau $z = y$

Exemplu: (A, ρ) din 4)



$x \leq y \Leftrightarrow x = y$ sau pot ajunge de la x la y pe săgeți



Se pot elimina săgețile pentru simplificare, dar atunci contează poziționarea (cel care este mai sus este „mai mare").

Elemente speciale

$(A, \leq)$ mulțime ordonată

- $a \in A$ s.n. **minim** al lui A (sau cel mai mic element al lui A) dacă $a \leq x$ pentru orice $x \in A$

- $a \in A$ s.n. **maxim** al lui A (sau cel mai mare element al lui A) dacă $x \leq a$ pentru orice $x \in A$

- $a \in A$ s.n. **element minimal** dacă $x \leq a \Rightarrow x = a$ ($\Leftrightarrow$ nu există $x \leq a$, $x \neq a$)

- $a \in A$ s.n. **element maximal** dacă $a \leq x \Rightarrow x = a$

Exemple:

1) Ex. din 4):

Nu există minim.
Maxim $= e$
Elemente minimale $= a, b$
Element maximal: e

Observație! 1) Se poate să nu existe elemente speciale într-o mulțime.

ex.: $(\mathbb{R}, \leq)$ nu are minim, maxim, elemente minimale, elemente maximale

2) a minim (maxim) ⇒ a element minimal (maximal), este chiar singurul
Dacă există minim (maxim), el este unic.

3) O mulțime finită are și elemente minimale și elemente maximale.

2) $(\mathbb{N}, \leq)$ minim 0
nu are elemente maximale (deci nici maxim)

3) $(\mathbb{N}^*, |)$ minim 1
nu are elemente maximale $a | 2a$
$a \neq 2a$

4) $(\mathbb{N}^* \setminus \{1\}, |)$ ~~$a \nmid x$ pt. orice $x \geq 2$~~
nu are minim
elemente minimale: toate numerele naturale prime

5) $(\mathcal{P}(X), \subset)$ minim $\emptyset$
maxim X

6) (A, Δ_A) Orice element este minimal și maximal.

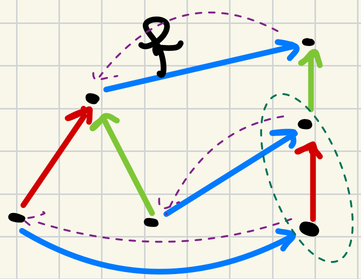
Def: Fie $(A, \leq)$ și $(B, \leq)$ mulțimi ordonate. O funcție $f: A \to B$ s.n. **morfism de mulțimi ordonate** (sau funcție crescătoare) dacă pentru orice $x, y \in A$, cu $x \leq y$, avem $f(x) \leq f(y)$.

Un morfism $f: A \to B$ s.n. **izomorfism de mulțimi ordonate** dacă există un morfism de mulțimi ordonate $g: B \to A$ pentru care $g \circ f = 1_A$ și $f \circ g = 1_B$.

Dacă mulțimi ordonate A și B s.n. **izomorfe** dacă există un izomorfism de mulțimi ordonate $f: A \to B$.

Observație! 1) $f: A \to B$ izomorfism de mulțimi ordonate $\Rightarrow f$ bijectivă

2) $(\exists)$ un morfism bijectiv care nu este izomorfism



bij., cresc.

nu este izomorfism

$g = f^{-1}$ nu este morfism

3) Dacă A și B sunt izomorfe, ele au aceleași proprietăți.

Exerciții:

(i) A total ordonată $\Leftrightarrow$ B total ordonată

(ii) A are elemente maximale $\Leftrightarrow$ B are elemente maximale

$f : A \to B$ izomorfism

$a \in A$ element maximal $\Leftrightarrow$ $f(a)$ element maximal