1. $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} x+1, & \text{pt. } x < 1 \\ 2x, & \text{pt. } x \geq 1 \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} 2x+1, & \text{pt } x < 0 \\ 3x, & \text{pt. } x \geq 0 \end{cases}$$

(i) f bijectivă, $f^{-1} = ?$

f este strict crescătoare pe $(-\infty, 1)$ (1)

f este strict crescătoare pe $[1, +\infty)$ (2)

Pt. $x_1 \in (-\infty, 1)$ și $x_2 \in [1, +\infty)$, avem $f(x_1) = x_1 + 1 < 1+1 = 2$
$\leq 2x_2 = f(x_2)$ (3)

(1), (2), (3) $\Rightarrow$ f - strict crescătoare pe $\mathbb{R}$ $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ f injectivă

Fie $y \in \mathbb{R}$.

1) Dacă $y < 2$, atunci $y - 1 < 1 \Rightarrow f(y-1) = y - 1 + 1 = y$

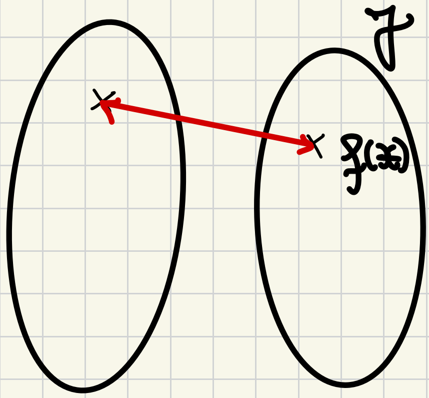
2) Dacă $y \geq 2$, atunci $\frac{y}{2} \geq 1 \Rightarrow f\left(\frac{y}{2}\right) = \cancel{2} \cdot \frac{y}{\cancel{2}} = y$

$\Rightarrow$ f surjectivă

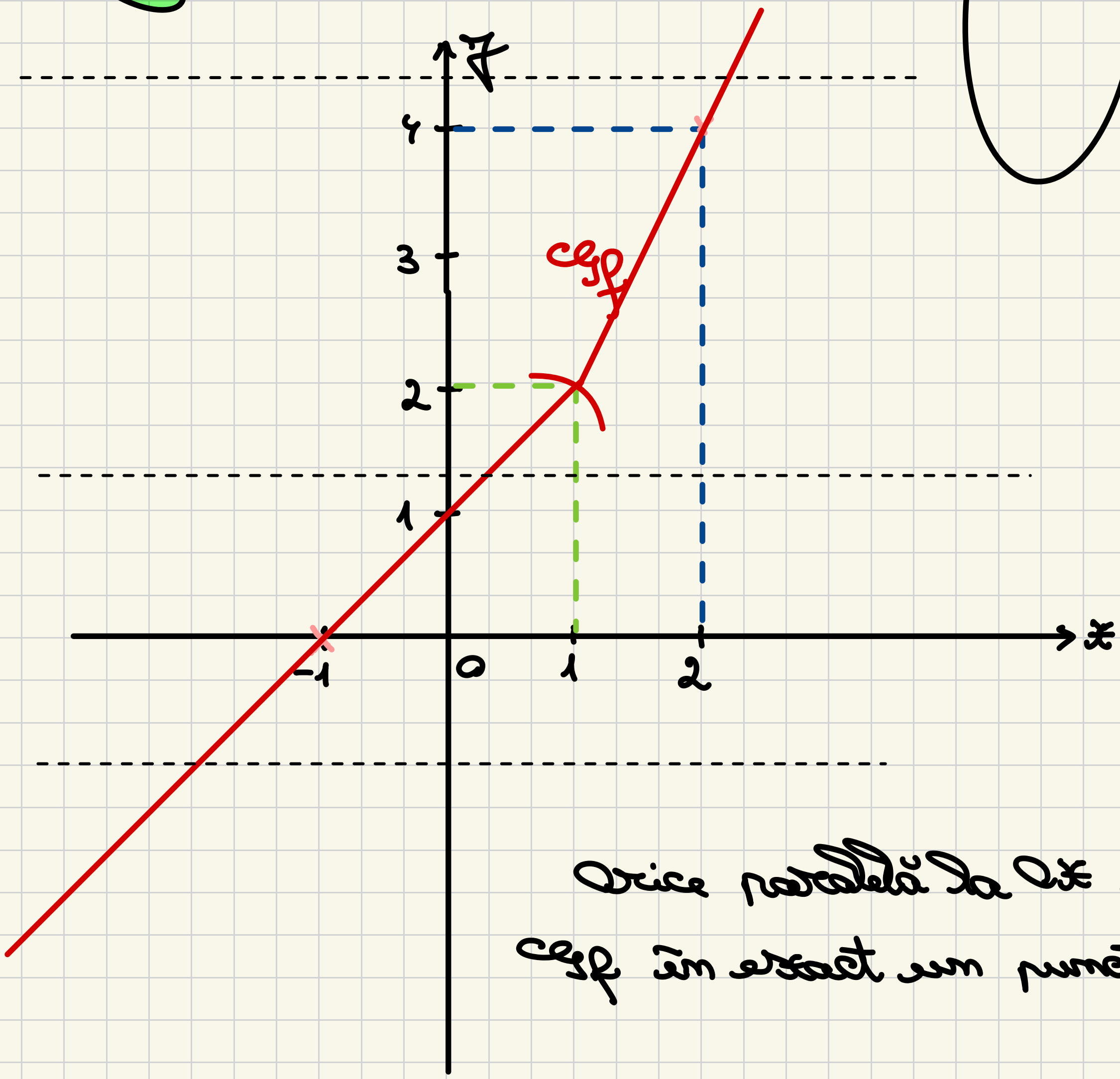
Deci f bijectivă

f bijectivă $\Rightarrow (\exists)\, f^{-1}$, $\forall y \in \mathbb{R} \Rightarrow (\exists)$ un unic $x \in \mathbb{R}$
a.î. $f(x) = y$ și atunci $f^{-1}(y) = x$

$$f^{-1}(y) = \begin{cases} y-1, & y<2 \\ \frac{y}{2}, & y \geq 2 \end{cases}$$



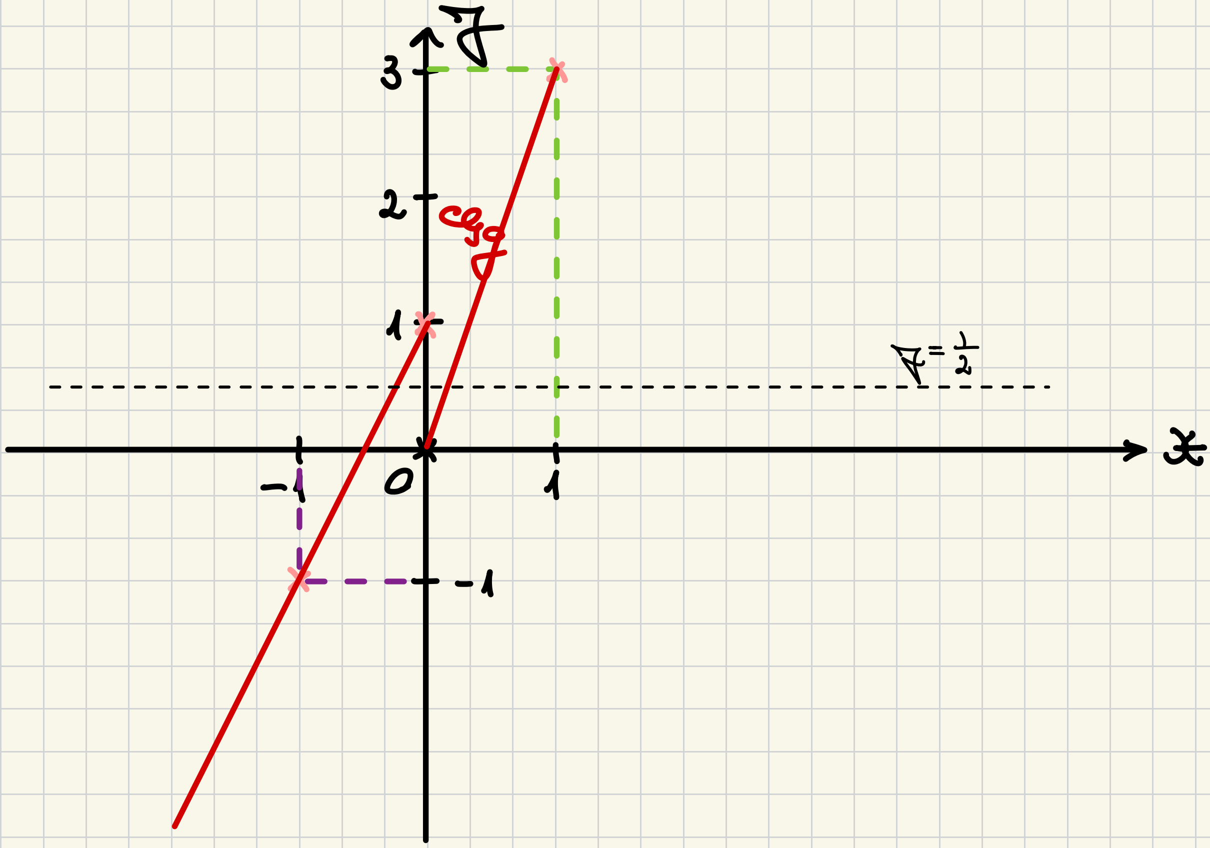
sau



Orice paralelă la Ox intersectează Gf în exact un punct $\Rightarrow$ f bijectivă

(ii) g surjectivă, dar nu este injectivă

Să se determine $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ cu $g\circ h = 1_{\mathbb{R}}$.



$\Rightarrow$ g surjectivă, dar nu este injectivă

Fie $y \in \mathbb{R}$. Caut $x \in \mathbb{R}$ cu $g(x) = y$.

- Dacă $y < 0$, atunci x unic, $x < 0$.

  $g(x) = y \Leftrightarrow 2x + 1 = y \Leftrightarrow x = \frac{y-1}{2}$

- Dacă $y \geq 1$, atunci $g(x) = y \Leftrightarrow 3x = y \Leftrightarrow x = \frac{y}{3}$

- Dacă $y \in [0, 1)$, atunci $g(x) = y$ are 2 soluții:

  1) $x < 0$: $2x + 1 = y \Leftrightarrow x = \frac{y-1}{2}$

  2) $x \geq 0$: $3x = y \Leftrightarrow x = \frac{y}{3}$

$\frac{y-1}{2}$ ×
$\frac{y}{3}$ ×
$\frac{y-1}{2}$ ×
$\frac{y}{3}$ ×

× $y \to y < 0$
× $y \to y \geq 1$
× $y \to y \in [0,1)$

Definim $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h(y) = \begin{cases} \frac{y-1}{2}, & y \in (-\infty, 0) \\ \frac{y}{3}, & y \geq 1 \\ \frac{y}{3}, & y \in [0, 1) \end{cases}$ $\Big\} \; \frac{y}{3}, \; y \in [0, +\infty)$

(iii) $g \circ f = ?$

$g \circ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \begin{cases} 2 \cdot f(x) + 1, & \text{dacă } f(x) < 0 \\ 3 \cdot f(x), & \text{dacă } f(x) \geq 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 2f(x) + 1, & \text{dacă } x \in (-\infty, -1) \\ 3f(x), & \text{dacă } x \in [-1, +\infty) \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 2 \cdot (x+1) + 1, & \text{dacă } x < -1 \\ 3 \cdot (x+1), & \text{dacă } x \in [-1, 1) \\ 3 \cdot 2x, & \text{dacă } x \in [1, +\infty) \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 2x + 3, & x \in (-\infty, -1) \\ 3x + 3, & x \in [-1, 1) \\ 6x, & x \in [1, +\infty) \end{cases}$$

$g \circ f$ este bijectivă?

$\underset{\text{nu e bij.}}{g} \circ \underset{\text{bij.}}{f}$

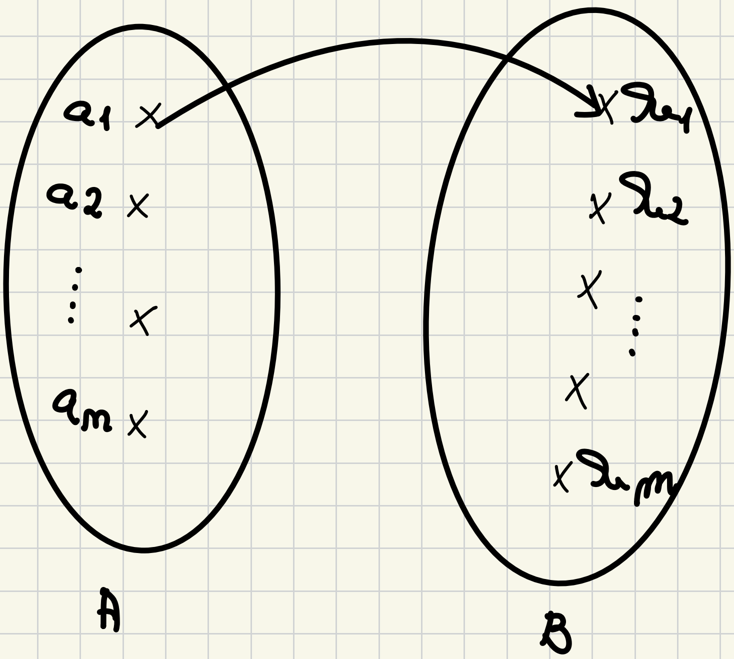
$$\left.\begin{array}{l} \underset{\text{P.p. că e bij.}}{g \circ f = p} \Rightarrow g = \underset{\text{bij.}}{p} \circ \underset{\text{bij.}}{f^{-1}} \end{array}\right\} \Rightarrow g \text{ bijectivă} \Rightarrow \text{Contr.!}$$

$\Rightarrow g \circ f$ nu este bij.

2. $n, m \in \mathbb{N}^*$, $|A| = n$, $|B| = m$

Să se determine:

a) numărul funcțiilor $f: A \to B$

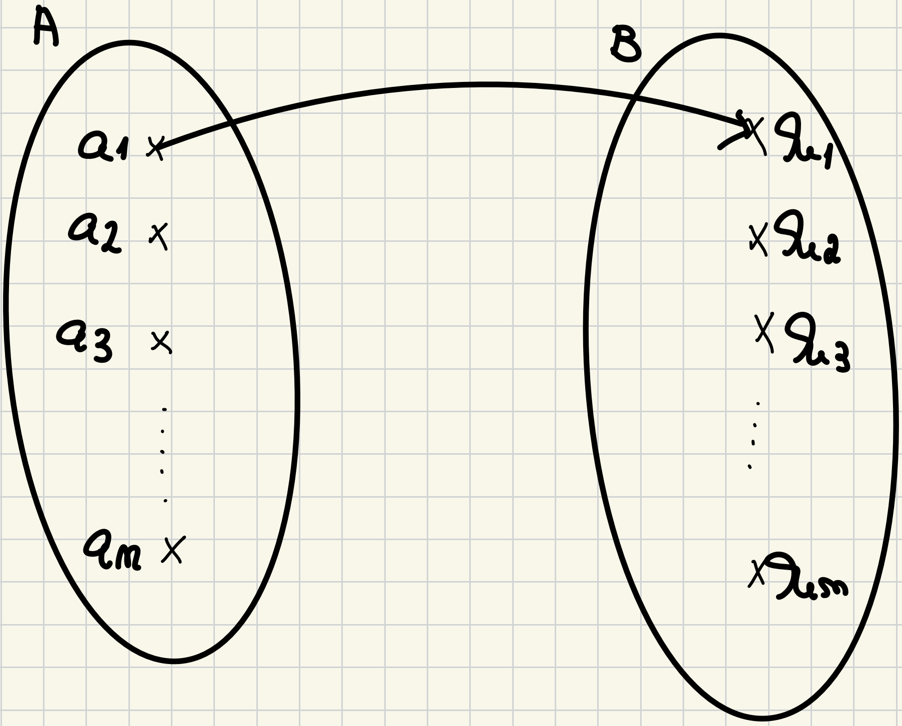


$$\left.\begin{array}{l} f(a_1) - \text{poate fi ales în } n \text{ moduri} \\ f(a_2) - \text{-----------} \ n \text{ moduri} \\ \vdots \\ f(a_m) - \text{-----------} \ n \text{ moduri} \end{array}\right\} \Rightarrow \underbrace{n \cdot n \cdot \ldots \cdot n}_{m \text{ ori}} = n^m$$

	$f(a_1)$	$f(a_2)$	...	$f(a_m)$
	*	*		*

alfabet: $\{x_1, \ldots, x_n\}$

b) numărul funcțiilor injective $f: A \to B$

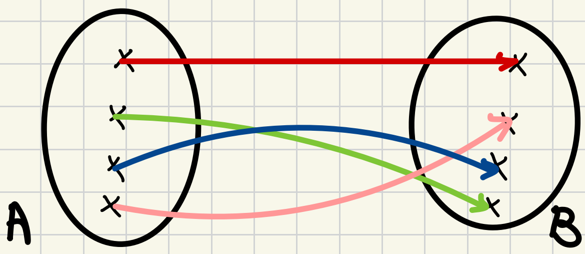


$f(a_1)$ poate fi ales în n moduri
$f(a_2)$ poate fi ales în $n-1$ moduri
$\vdots$
$f(a_m)$ poate fi ales în $n-m+1$ moduri $\Bigg\} \Rightarrow (*)$

Dacă $m > n \Rightarrow f(a_1), \ldots, f(a_m)$ nu pot fi distincte $\Rightarrow$ 0 funcții

$$(*)\quad n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-m+1) = \frac{n!}{(n-m)!}$$

c) numărul funcțiilor bijective $f: A \to B$



Pentru $n \neq m$, numărul funcțiilor bijective este 0.
Pentru $n = m$:

$f: A \to B$ este injectivă $\Leftrightarrow$ f este bijectivă

Numărul lor este $\frac{m!}{(m-m)!} = m!$

d) numărul funcțiilor surjective $f: A \to B$

Dacă $n < m$, nu există funcții surjective.
Dacă $n \geq m$:

$f: A \to B$ nesurjective

Fie $X_1 = \{f: A \to B \mid f(a) \neq b_1, \forall a \in A\}$

$$\Downarrow$$

$b_1 \notin f(A)$

$X_2 = \{f: A \to B \mid f(a) \neq b_2, \forall a \in A\}$

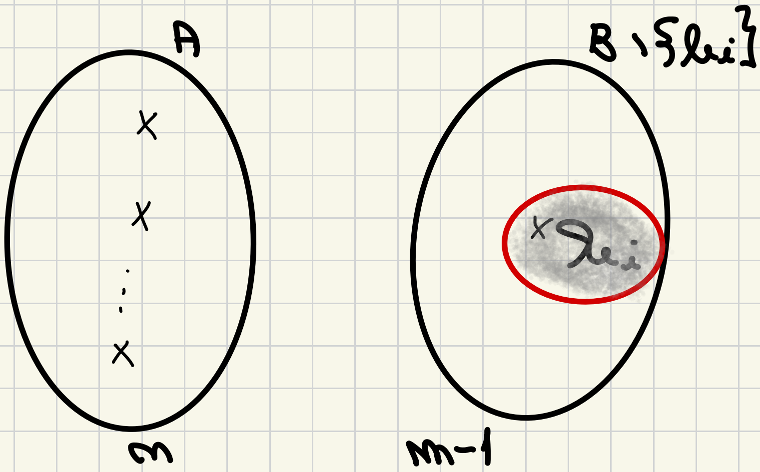
- -

$X_m = \{f: A \to B \mid f(a) \neq b_m, \forall a \in A\}$

$|\text{Mulțimea funcțiilor nesurjective}| = |X_1 \cup X_2 \cup \ldots \cup X_m|$

$$= \sum_{1 \leq i \leq m} |X_i| - \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq m} |X_{i_1} \cap X_{i_2}| + \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < i_3 \leq m} |X_{i_1} \cap X_{i_2} \cap X_{i_3}|$$

$$- \ldots + (-1)^{k+1} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_k < \ldots < m} |X_{i_1} \cap X_{i_2} \cap \ldots \cap X_{i_k}| \ldots + (-1)^{m+1} |X_1 \cap \ldots \cap X_m|$$



$$\underbrace{(m-1)(m-1)\cdot\ldots\cdot(m-1)}_{n \text{ ori}} = (m-1)^n$$

$$|X_i| = (m-1)^n$$

$$= C_m^1 (m-1)^n - C_m^2 (m-2)^n + C_m^3 (m-3)^n - \ldots +$$

$$+ (-1)^{m-1} \cdot C_m^{m-1}$$

nr. funcțiilor surjective $= m^n -$