1. $a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0$

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = ax + b$

<u>f bijectivă</u>

f bijectivă $\Leftrightarrow$ f inj. și f surj. $\Leftrightarrow$ $(\forall) y \in \mathbb{R}$ există un unic $x \in \mathbb{R}$ cu $f(x) = y$

Fie $y \in \mathbb{R}$.

$f(x) = y \Leftrightarrow ax + b = y \Leftrightarrow x = \frac{y-b}{a} \in \mathbb{R}$, unic pt. $y \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow f$ bijectivă

$f^{-1}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f^{-1}(y) = \frac{y-b}{a}$

<u>$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 2x+1$ bij.</u>

$g: \{1, 2, 3\} \to \{1, 2, 3, 4\}$, $g(x) = x$

inj., ~~surj.~~

$h: \mathbb{N} \to \mathbb{N}, h(x) = 2x+1$

inj., ~~surj.~~

$h(x) = 0 \Leftrightarrow 2x+1 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2} \notin \mathbb{N}$

2. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^2 + x + 1$

Este f inj., surj.?

$f(x) = x(x+1) + 1$

$$\left.\begin{aligned} f(0) &= 0+1 = 1 \\ f(-1) &= 0+1 = 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow f \text{ nu este injectivă}$$

$0 \neq -1$

Presupunem că $f(x_1)=f(x_2)$, pt. $x_1, x_2 \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x_1^2+x_1+\cancel{1}=x_2^2+x_2+\cancel{1} \Leftrightarrow x_1^2+x_1=x_2^2+x_2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x_1^2+x_1-x_2^2-x_2=0 \Leftrightarrow (x_1-x_2)(x_1+x_2)+(x_1-x_2)=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x_1-x_2)(x_1+x_2+1)=0 \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x_1-x_2=0 \\ \text{sau} \\ x_1+x_2+1=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x_1=x_2 \\ \text{sau} \\ x_1+x_2=-1 \end{array}\right.$

Aleg $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, $x_1 \neq x_2$ a.î. $x_1+x_2=-1$, atunci $f(x_1)=f(x_2)$.

$x_1=0$, $x_2=-1$ $\Rightarrow$ f nu este injectivă

$g:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$ (sau $g:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $(-\frac{1}{2},+\infty)\to\mathbb{R}$)

$g(x)=x^2+x+1$, g injectivă

Fie $y\in\mathbb{R}$. Caut $x\in\mathbb{R}$ pt. care $f(x)=y$.

$f(x)=y \Rightarrow x^2+x+1=y \Leftrightarrow x^2+x+1-y=0$

$\Delta = 1-4(1-y)=1-4+4y$

$= -3+4y$

Pentru $y=0 \Rightarrow \Delta=-3<0$, deci $f(x)=0$ nu are sol. $\Rightarrow$ f nu este surjectivă

Sau $f(x) = x^2+x+1 = x^2 + 2\cdot x\cdot \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} =$

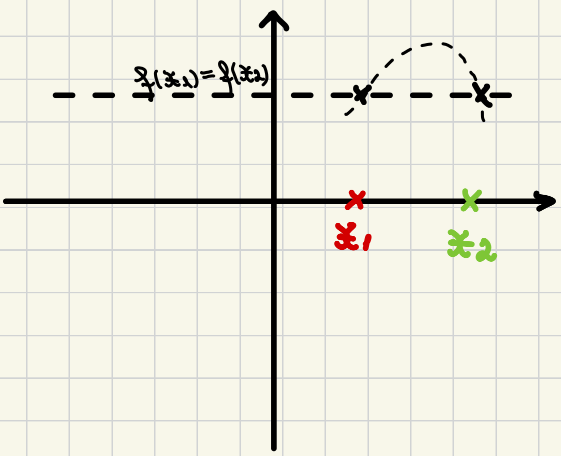
$= \underbrace{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2}_{\geq 0} + \frac{3}{4} \Rightarrow f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$

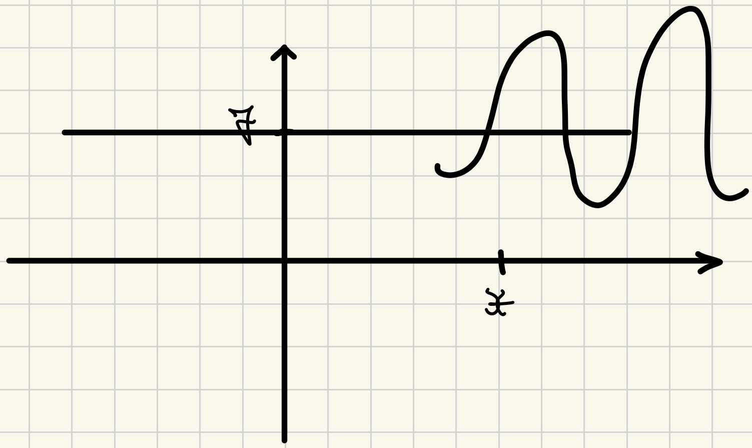
$\Rightarrow$ Nu există x cu $f(x)<0 \Rightarrow$ Nu este surj.

! $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ~ grafic

f injectivă: Orice paralelă la Ox intersectează G_f în cel mult un punct.

f surjectivă: Orice paralelă la Ox intersectează G_f în cel puțin un punct.





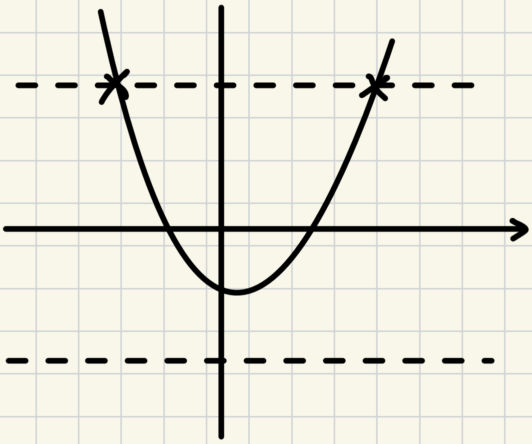
f bijectivă: Orice paralelă la Ox intersectează G_f în exact un punct.

! $a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$

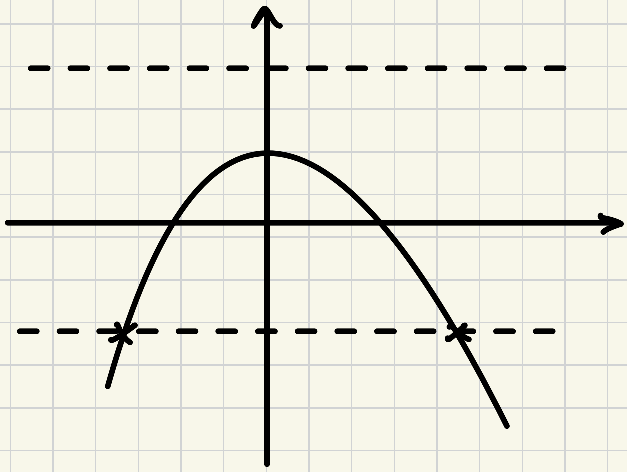
$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x) = ax^2+bx+c$

f nu este nici injectivă, nici surjectivă

I) $a>0$

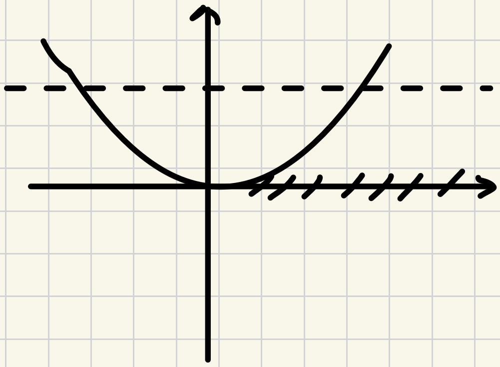


II) $a<0$

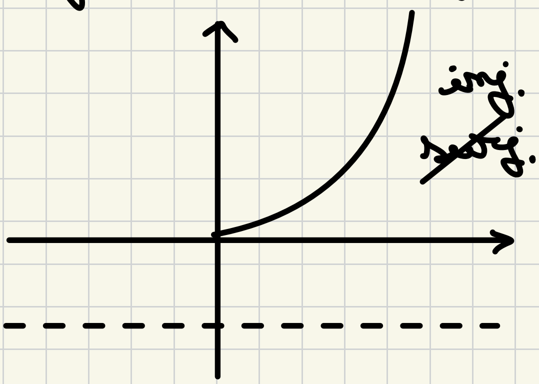


$f: I \to \mathbb{R}$, $I \subset \mathbb{R}$ un interval

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x^2$



$g:[0,+\infty)\to\mathbb{R},\ g(x)=x^2$

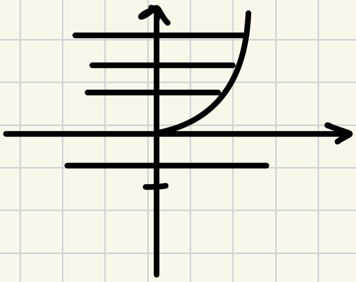


$f: I \to J$

! **f surjectivă**: Orice paralelă la Ox dusă dintr-un punct din J (reprezentat pe Oy) intersectează G_f în cel puțin un punct.

$h:[0,+\infty)\to(-1,+\infty)$

$h(x)=x^2$



inj.

~~surj.~~

$y \geq 0$

$f(x) = y$

$x^2 = y$

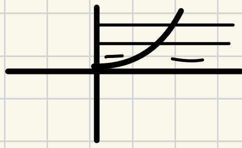
$x = \sqrt{y}$

$f^{-1} : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$

$f^{-1}(y) = \sqrt{y}$

$f : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$

$f(x) = x^2$



inj.

surj.

3. $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ funcții

$g \circ f$ injectivă $\Rightarrow f$ injectivă, dar g nu este neapărat inj.

$g \circ f$ surjectivă $\Rightarrow g$ surjectivă, dar f nu este neapărat surj.

ex.: $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$

$g : \mathbb{R} \to [0, +\infty)$, $g(x) = x^2$

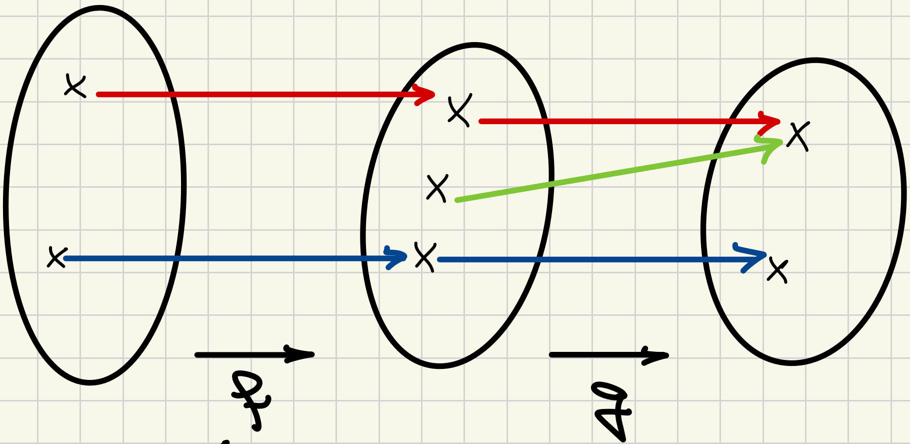
$g \circ f : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$

$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2) = (x^2)^2 = x^4$

$g \circ f$ inj.: $\left.\begin{array}{l}(g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2) \\ x_1, x_2 \in [0, +\infty)\end{array}\right| \Rightarrow x_1^4 = x_2^4$

$\Rightarrow \sqrt{x_1^4} = \sqrt{x_2^4} \Rightarrow x_1^2 = x_2^2 \Rightarrow \sqrt{x_1^2} = \sqrt{x_2^2} \Rightarrow |x_1| = |x_2|$

$\Rightarrow x_1 = x_2$, adevărat



nu este surjectivă

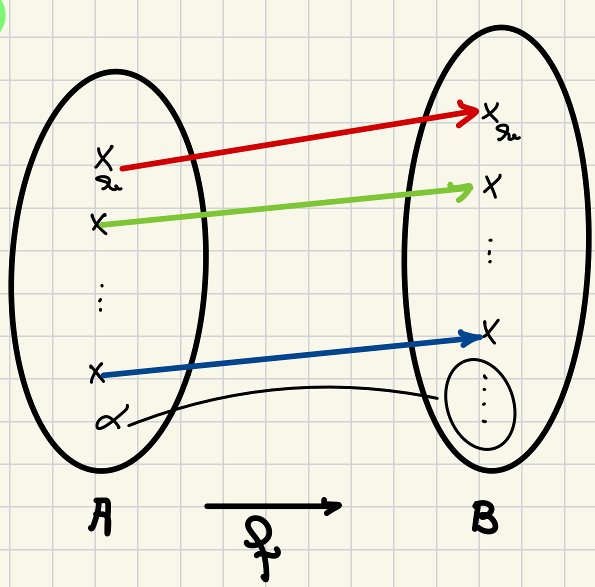
nu este injectivă

4. Fie A, B mulțimi nevide. Atunci există $f: A \to B$ injectivă $\Leftrightarrow$ există $g: B \to A$ surjectivă.

$A \leq B$ dacă $(\exists)$ $f: A \to B$ injectivă

$(\Leftrightarrow (\exists)\ g: B \to A$ surj.$)$

„$\Rightarrow$":



$g: B \to A$

$g(y) = x_y$

$g(y') = \alpha,\ \alpha \in A$

sau f inj. $\Rightarrow (\exists)\ g: B \to A$ cu $g \circ f = \underset{\text{surj.}}{1_A} \Rightarrow (\exists)\ g: B \to A$ surj.

„$\Leftarrow$": Presupunem că $(\exists)\ g: B \to A$ surj. $\Rightarrow (\exists)\ h: A \to B$ cu $\underset{\text{inj.}}{g \circ h} = \underset{\text{inj.}}{1_A}$, h injectivă

5. $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ | $\Rightarrow (g\circ f)^{-1} = f^{-1}\circ g^{-1}$

f, g bijective

$f^{-1}: B \to A$

$g^{-1}: C \to B$

$\Rightarrow$ Vor fi $f^{-1}\circ g^{-1}: C \to A$

$(g\circ f)^{-1}: C \to A$

Fie $y \in C$. Arătăm că $\underbrace{(g\circ f)^{-1}(y)}_{x} = (f^{-1}\circ g^{-1})(y)$.

$\Rightarrow (g\circ f)(x) = y$

$g(f(x)) = y$

$x = (f^{-1}\circ g^{-1})(y) = f^{-1}(g^{-1}((g\circ f)(x))) =$

$= f^{-1}(g^{-1}(g(f(x)))) = f^{-1}(f(x)) = x$, q.e.d.

Sau: Dacă $u: A \to B$ este bijectivă, atunci u este inversabilă și există o unică funcție $v: B \to A$ cu $v\circ u = 1_A$ și $u\circ v = 1_B$, $\underline{v = u^{-1}}$.

Vrem $(g\circ f)^{-1} = f^{-1}\circ g^{-1}$.

Dar

$(f^{-1}\circ g^{-1})\circ(g\circ f) = f^{-1}\circ g^{-1}\circ g\circ f$

$= f^{-1}\circ \underbrace{1_B \circ f} = f^{-1}\circ f = 1_A$

$$(g\circ f)\circ(f^{-1}\circ g^{-1}) = g\circ \underbrace{f\circ f^{-1}}_{1_B}\circ g^{-1} = \underbrace{g\circ 1_B}\circ g^{-1}$$

$$= g\circ g^{-1} = 1_C$$

$$\Rightarrow f^{-1}\circ g^{-1} = (g\circ f)^{-1}$$