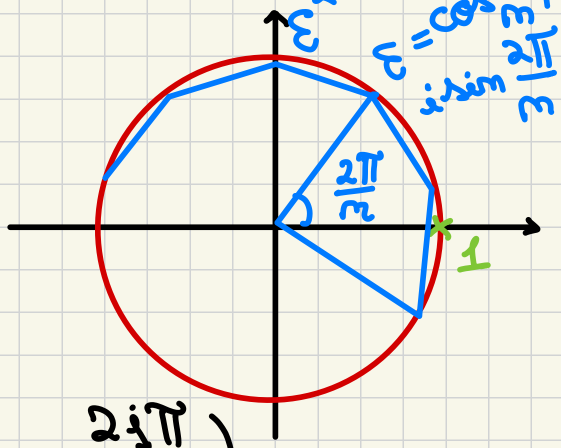
1. Arătați că $(\mathbb{Z}_n,+) \simeq (U_n,\cdot)$, $n \geq 2$

$$\mathbb{Z}_n = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \{\hat{0}, \hat{1}, \dots, \widehat{n-1}\} = \langle \hat{1} \rangle$$

$$U_n = \{z \in \mathbb{C} \mid z^n = 1\} = \{1, \varepsilon, \varepsilon^2, \dots, \varepsilon^{n-1}\} = \langle \varepsilon \rangle$$

$\varepsilon = \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}$



Fie $f: \mathbb{Z}_n \to U_n$

$$f(\hat{j}) = \varepsilon^j \left(= \cos\frac{2j\pi}{n} + i\sin\frac{2j\pi}{n}\right)$$

f este corect definită

$\hat{j} = \hat{j'} \Rightarrow n \mid j - j' \Rightarrow j - j' = kn,\ k \in \mathbb{Z}$

$\Downarrow$

$\varepsilon^{j-j'} = \varepsilon^{kn} = (\varepsilon^n)^k = 1$, $\varepsilon^n = 1$

$\Downarrow$

$\varepsilon^j = \varepsilon^{j'}$

f bijectivă ?

f morfism de grupuri

$f(\hat{j} + \hat{k}) \overset{?}{=} f(\hat{j}) \cdot f(\hat{k})$

$f(\hat{j} + \hat{k}) = f(\widehat{j+k}) = \varepsilon^{j+k} = \varepsilon^j \cdot \varepsilon^k = f(\hat{j}) \cdot f(\hat{k})$

$X/_Y \simeq \mathbb{Z}$. Cum arăt?

$$\boxed{\begin{array}{l} X \xrightarrow{f} Z \text{ morfism de grupuri} \\ \text{surj. și } \ker f = Y \end{array}} \Rightarrow X/_Y \simeq Z$$

Vrem $\mathbb{Z}/_{n\mathbb{Z}} \simeq U_n$

$f : \mathbb{Z} \to U_n$ morfism de grupuri surj. și $\ker f = n\mathbb{Z}$

$f(i) = \varepsilon^i$

2. $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, +)$ grup – produsul direct al $(\mathbb{Z}, +)$ și $(\mathbb{Z}, +)$

$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$

$\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ nu este ciclic

$(\Leftrightarrow \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \not\simeq \mathbb{Z})$

Presupunem prin absurd că este ciclic, deci generat de un element (a, b) $a, b \in \mathbb{Z}$

$$\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} = \langle (a, b) \rangle = \{ i(a, b) \mid i \in \mathbb{Z} \}$$

$$\underset{(1,0)}{\cup} \quad = \{ (ia, ib) \mid i \in \mathbb{Z} \}$$

$(\exists)\ i \in \mathbb{Z}$ a.î. $(ia, ib) = (1, 0)$

$ib = 0 \Rightarrow \cancel{i = 0}$ sau $b = 0$

$\Downarrow$

$ia = 0$, contradicție!

$(0, 1) = (ja, jb) \Rightarrow a = 0$

3. $m \geq 2$

$\mathbb{Z}^m$ nu este ciclic

4. $m \geq 2$

$U_m \times U_m$ nu este ciclic

$$\Updownarrow$$

$\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_m$ nu este ciclic

I $\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_m = \langle (\hat{a}, \hat{b}) \rangle = \{ i(\hat{a}, \hat{b}) \mid i \in \mathbb{Z} \}$

$$= \{ (i\hat{a}, i\hat{b}) \mid i \in \mathbb{Z} \}$$

$$= \{ (\widehat{ia}, \widehat{ib}) \mid i \in \mathbb{Z} \}$$

$(\hat{0}, \hat{1}) = (\widehat{ia}, \widehat{ib})$

$m \mid ia, \; m \mid ib - 1$

$\hat{i} \cdot \hat{b} = \hat{1} \Rightarrow \hat{b}$ inversabil în $(\mathbb{Z}_m, \cdot) \Rightarrow (b, m) = 1$

$\hat{i} \cdot \hat{a} = \hat{0} \quad / \hat{a}^{-1}$

$\hat{i} = \hat{0}$

II Presupunem că $\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_m$ este ciclic. $\Rightarrow$

$|\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_m| = m^2$

$\Rightarrow \mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_m \simeq \mathbb{Z}_{m^2}$

$$\mathbb{Z}_{m^2} = \langle \bar{1} \rangle \longrightarrow \text{ordin } m^2$$

$\mathbb{Z}_n <\hat{1}>$

$\Downarrow$

$\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n$ are un element de ordin n^2

$(\forall)(\hat{a},\hat{b}) \in \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n$

$n(\hat{a},\hat{b}) = (\hat{0},\hat{0}) \Rightarrow n^2 | n$, contradicție!

$G \ni g$

$\downarrow$

$o(g)$ finit

$(\forall)\ i \in \mathbb{Z}$ cu $g^i = 1 / ig = 0$

$\Downarrow$

$o(g) | i$

Fie $(\hat{a},\hat{b})$ un element de ordin n^2.

5. Fie $f: G \to H$ un izomorfism de grupuri.

$g \in G \rightsquigarrow f(g) \in H$

Atunci $\underset{\text{în } G}{o(g)} = \underset{\text{în } H}{o(f(g))}$

(I) • $o(g) = \infty \Leftrightarrow (g^i = 1$ doar pentru $i = 0)$

(II) • $o(g) = n \in \mathbb{N}^* \Leftrightarrow \begin{cases} n \text{ este cel mai mic număr} \\ \text{natural} > 0 \text{ cu } g^n = 1 \end{cases}$

(I) Presupun că $o(g)=\infty$.

Arăt că $o(f(g))=\infty$.

Presupun că $f(g)^i=1$. Arăt că $i=0$.

$$f(g)^i=1 \Rightarrow f(g^i)=1=f(1)$$

$$\xRightarrow{f \text{ inj.}} g^i=1 \xRightarrow{o(g)=\infty} i=0$$

(II) Presupun că $o(g)=m$

$$\begin{cases} g^m=1 \\ i>0,\ g^i=1 \Rightarrow i\geq m \end{cases}$$

Atunci $f(g)^m=f(g^m)=f(1)=1$

Dacă $i>0$ și $f(g)^i=1 \Rightarrow f(g^i)=f(1) \Rightarrow g^i=1$
$\Rightarrow i\geq m$

$\Rightarrow o(f(g))=m$

6. Să se calculeze ordinele elementelor din $\mathbb{Z}_{12}$.

$o(\hat{0})=1$

$o(\hat{1})=12$

$o(\hat{2})=6$

$o(\hat{3})=4$

$o(\hat{4})=3$

$o(\hat{5})=12$

$o(\hat{6})=2$

$o(\hat{7})=12$

$o(\hat{8}) = 3$

$o(\hat{9}) = 4$

$o(\hat{10}) = 6$

$o(\hat{11}) = 12$

7. $U_n \leq (\mathbb{C}^*, \cdot)$, $n \geq 2$

$\downarrow$

ordin n

Să se arate că U_n este singurul subgrup cu n elemente al lui $(\mathbb{C}^*, \cdot)$.

Fie $H \leq (\mathbb{C}^*, \cdot)$ cu $|H| = n$.

Fie $z \in H \Rightarrow o(z) \mid |H| = n$, $n = k \cdot o(z)$

$$z^{o(z)} = 1 \Rightarrow z^n = z^{k \cdot o(z)} = \left(z^{o(z)}\right)^k = 1$$

$$\Downarrow$$

$$\underline{z \in U_n}$$

$\Rightarrow \underset{n \text{ elemente}}{H} \subset \underset{n \text{ elemente}}{U_n} \Rightarrow H = U_n$

8. G finit generat dacă $(\exists)$ $g_1, \dots, g_n \in G$ a.î.

$G = \langle g_1, \dots, g_n \rangle$

$$= \{ x_1^{\varepsilon_1} \dots x_r^{\varepsilon_r} \mid r \in \mathbb{N}^*,\ x_1, \dots, x_r \in \{g_1, \dots, g_n\},\ \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r \in \{1, -1\} \}$$

$$g_1 g_2 g_1^{-1} g_2^{-1} g_3 g_1$$

Dacă G este abelian,

$$\langle g_1,\dots,g_n\rangle = \{g_1^{k_1}\dots g_n^{k_n} \mid k_1,\dots,k_n\in\mathbb{Z}\}$$

Arătați că $(\mathbb{Z}^n,+)$ finit generat, $(\forall)\ n\in\mathbb{N}^*$

$$(a_1, a_2, \dots, a_n) =$$
$$(a_1, 0,\dots,0)+(0, a_2, 0,\dots,0)+\dots+$$
$$(0,\dots,0,a_n) = a_1\underbrace{(1,0,\dots,0)}_{e_1} + a_2\underbrace{(0,1,0,\dots,0)}_{e_2}+$$
$$\dots + a_n\underbrace{(0,\dots,0,1)}_{e_n}$$

$$= a_1e_1+\dots+a_ne_n$$

$$\mathbb{Z}^n = \langle e_1,\dots,e_n\rangle$$

Vom arăta că $(\mathbb{Q},+)$ nu este finit generat.
$(\mathbb{R},+)$