Structuri algebrice

Def.: Se numește **operație algebrică binară** (sau **lege de compoziție**) pe o mulțime nevidă A o funcție $f: A \times A \to A$.

$$(a,b) \rightsquigarrow f(a,b)$$

Notații: f, $*$, $\circ$, $+$, $\cdot$, $\sqcap$, $\cap$...

$$f(a,b) \rightsquigarrow a\, f\, b$$
$$a * b$$
$$a \circ b$$
$$\dots$$

Exemple: $(A,*)$, $(\mathbb{N},+)$, $(\mathbb{Z},+)$, $(\mathbb{N},\cdot)$, $(\mathbb{Z},\cdot)$, $(\mathbb{N}^*,+)$, ...

$(\mathcal{P}(X),\cup)$, $(\mathcal{P}(X),\times)$, $(\mathcal{P}(X),\Delta)$, X mulțime

Def.: Dacă $(A,*)$, o submulțime nevidă B a lui A s.n. **parte stabilă** în raport cu $*$ dacă pentru orice $x,y \in B$ avem $x*y \in B$.

Def.: Fie $*$ o lege de compoziție pe A. Atunci $*$:

(i) este **comutativă**, dacă $x*y = y*x$, $(\forall)\, x,y \in A$

(ii) este **asociativă**, dacă $(x*y)*z = x*(y*z)$, $(\forall)\, x,y,z \in A$

(iii) are **element neutru**, dacă $(\exists)\, e \in A$ a.î.

$x * e = e * x = x$, $(\forall)\ x \in A$.

Observație! Dacă $(A, *)$ are element neutru, atunci acesta este unic determinat.

e, e' elemente neutre

$$\Downarrow$$

$$e * e' \overset{e = \text{element}}{\underset{\text{neutru}}{=\!=\!=}} e' \Rightarrow e = e'$$

$$e * e' \overset{e' = \text{element}}{\underset{\text{neutru}}{=\!=\!=}} e$$

Exemple.

1) $(\mathbb{Z}, +)$ comutativă, asociativă, are element neutru 0

2) $(\mathbb{Z}, -)$ nu este comutativă, nu este asociativă, nu are element neutru

$a * 0 = a - 0 = a$

$0 * a = 0 - a = -a$

$(a - b) - c$

$\neq$

$a - (b - c)$

3) $(\mathbb{N}, +)$ comutativă, asociativă, element neutru 0

4) $(\mathbb{N}^*, +)$ comutativă, asociativă, nu are element neutru

Def.: Fie $(A, *)$ o mulțime $\neq \emptyset$ cu o lege de compoziție. Atunci A s.n.:

1) **semigrup**, dacă $*$ este asociativă.

2) **monoid**, dacă $*$ este asociativă și are element neutru

Dacă, în plus, $*$ este comutativă, $(A, *)$ s.n.

semigrup (monoid) comutativ.

exemple: • $(\mathbb{N},+)$, $(\mathbb{N},\cdot)$, $(\mathbb{N}^*,\cdot)$ monoizi comutativi

• $(\mathbb{N}^*\setminus\{1\},\cdot)$ semigrup comutativ
~~monoid~~

• $(\mathbb{N}^*,+)$, $([1,+\infty),+)$ semigrupuri comutative
~~monoizi~~

• X mulțime $\neq \emptyset$

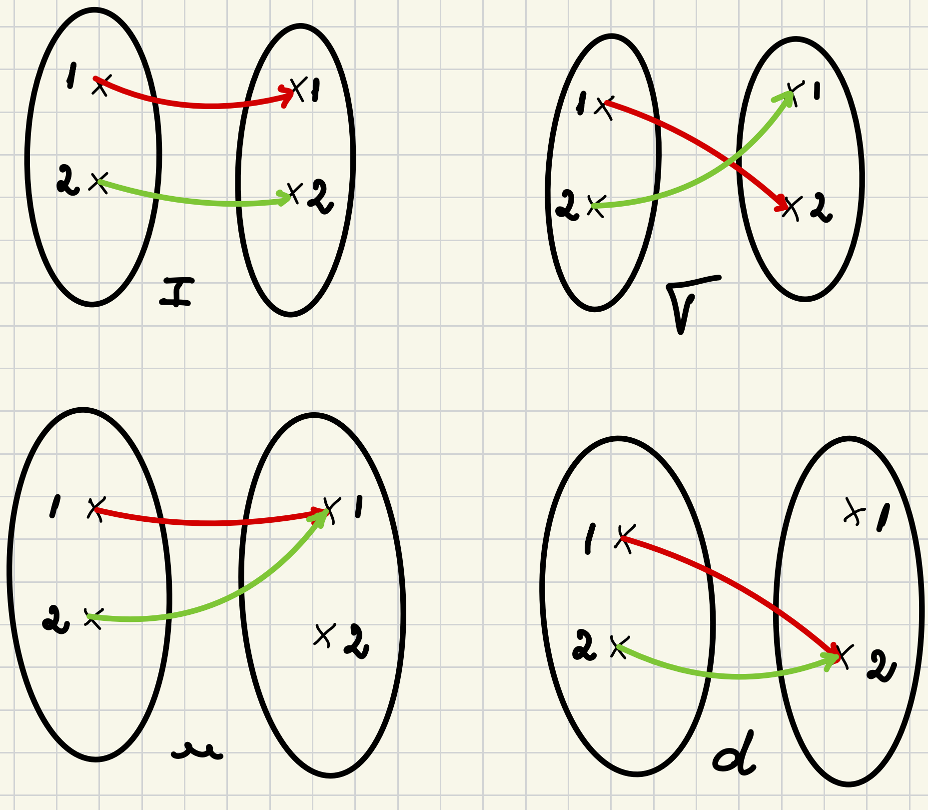
$\mathrm{Func}(X,X) = \{f \mid f: X \to X \text{ funcție}\}$

$(\mathrm{Func}(X,X), \cdot)$ monoid [el. neutru 1_X]

<u>Ex.</u> comutativ $\Leftrightarrow$ X are cel mult un element

Tabla unui semigrup (exemplu)

$X = \{1,2\}$ $\qquad$ $\mathrm{Func}(X,X) = \{ I, \sqrt{\ }, u, d \}$



$\circ$	I	∇	u	d
I	I	∇	u	d
∇	∇	I	d	u
u	u	u	u	u
d	d	d	d	d

$*$	z	y
x		$x*y$
y	$y*z$	

- $(\mathcal{P}(X), \cup)$ monoid [$\emptyset$ = element neutru]
  comutativ

- $(\mathcal{P}(X), \cap)$ monoid [X = element neutru]
  comutativ

Notații uzuale pentru monoizi:

$a \cdot b = ab$

- multiplicativă $(A, \cdot)$ el. neutru 1
- aditivă $(A, +)$ el. neutru 0

$a \in A$, $n \in \mathbb{N}$

$$a^n \overset{def.}{=} \begin{cases} 1, \text{ dacă } n = 0 \\ \text{recurent: } a^1 = a \\ \quad a^n = a^{n-1} \cdot a, (\forall)\, n \geq 2 \end{cases}$$

$(A, +)$ $\quad na \quad$ $0a$ = el. neutru 0

$1a = a$

$na = (n-1)a + a$

$n \geq 2$

Reguli de calcul în monoizi

- **asociativitatea generalizată**

$$(x_1x_2)x_3 = x_1(x_2x_3) \qquad x_1x_2x_3$$

$$((x_1x_2)x_3)x_4 = (x_1(x_2x_3))x_4 =$$
$$= (x_1x_2)(x_3x_4) = x_1((x_2x_3)x_4) = x_1(x_2(x_3x_4))$$

$x_1x_2x_3x_4$

$x_1, x_2, \dots, x_n$

- $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$

  $(a^n)^m = a^{nm}$

  $(\forall) a \in A, (\forall) n, m \in \mathbb{N}$

- Dacă $(A, \cdot)$ monoid comutativ:

  $(ab)^n = a^n b^n, (\forall) a, b \in A, (\forall) n \in \mathbb{N}$

  $(ab)^2 = abab$

Morfisme

Def.: Fie $(A, \cdot)$ și $(B, *)$ monoizi cu element neutru 1_A și 1_B. O funcție $f: A \to B$ s.n. morfism de monoizi dacă:

$$\begin{cases} f(x \cdot y) = f(x) * f(y), (\forall) x, y \in A \\ f(1_A) = 1_B \end{cases}$$

Dacă, în plus, f este bijectivă, s.n. izomor-

Morfism de monoizi.

Exemple:

1) $f:(\mathbb{R},\cdot)\to([0,+\infty),\cdot)$, $f(x)=x^2$
morfism de monoizi

2) $f:(\mathbb{R},+)\to((0,+\infty),\cdot)$, $f(x)=2^x$

$$\left.\begin{array}{l} f(x+y)=2^{x+y}=2^x\cdot 2^y=f(x)\cdot f(y) \\ f(0)=2^0=1 \\ f \text{ bijectivă} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow f$ este izomorfism de monoizi

3) $\varphi:(\mathcal{P}(X),\cup)\to(\mathcal{P}(X),\cap)$
$\varphi(Y)=C_X Y$, $(\forall)\ Y\subset X$
φ este izomorfism de monoizi

Doi monoizi A,B sunt izomorfi dacă $(\exists)\ f:A\to B$ un izomorfism de monoizi.

Exerciții:

1) $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$

$$\left.\begin{array}{l} A,B,C \text{ monoizi} \\ f,g \text{ (izo)morfisme de monoizi} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow g\circ f$ (izo)morfism de monoizi

2) $A \xrightarrow{f} B$ izomorfism de monoizi $\Rightarrow$

$\Rightarrow B \xrightarrow{f^{-1}} A$ izomorfism de monoizi

3) $f: A \to B$ morfism de monoizi ($\cdot$ peste tot)

$\Rightarrow f(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(x_1) f(x_2) \dots f(x_n)$, $(\forall)\, n \geq 2$,

$(\forall)\, x_1, \dots, x_n \in A$

Monoidul liber generat de o mulțime

Fie X o mulțime $\neq \emptyset$.

$X =$ alfabet

$FM(X) =$ mulțimea tuturor cuvintelor finite formate cu alfabetul X, incluzând cuvântul vid

cuvânt: $x_1 x_2 \dots x_n$, $n \in \mathbb{N}^*$, $x_1, \dots, x_n \in X$

$$x_1 \dots x_n = y_1 \dots y_m \Leftrightarrow \begin{cases} n = m \\ x_1 = y_1 \\ \text{- - - - - -} \\ x_n = y_m \end{cases}$$

$X = \{a, b\}$

$\sqcup$

a

b

aa

ab

ba

bb

$\vdots$

Pe $FM(X)$ definesc operația $*$ = concatenarea cuvintelor

$$x_1 \dots x_n * y_1 \dots y_m \stackrel{def.}{=} x_1 \dots x_n y_1 \dots y_m$$

(pentru cuvinte nevide)

$$x_1 \dots x_n * \sqcup = x_1 \dots x_n$$

$$\sqcup * x_1 \dots x_n = x_1 \dots x_n$$

$$\sqcup * \sqcup = \sqcup$$

$(FM(X), *)$ monoid cu elementul neutru $\sqcup$

$\downarrow$

comutativ $\Leftrightarrow |X| = 1$

$X = \{a\}$

$\sqcup, a, aa, aaa, \dots$

monoidul liber generat de X

$i : X \to FM(X)$

$i(x) = x, (\forall) x \in X$ funcție injectivă

Teoremă: (Proprietatea de universalitate a monoidului liber)

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "i"] \arrow[dr, "f"'] & FM(X) \arrow[d, dashed, "\bar{f}"] \\ & A \end{tikzcd}$$

Fie X mulțime nevidă, $FM(X)$ monoidul liber generat de X. Atunci pentru orice monoid A și orice funcție $f : X \to A$, există un unic morfism de monoizi $\bar{f} : FM(X) \to A$ pentru care $\bar{f} \circ i = f$

$(\Leftrightarrow \bar{f}_{|X} = f)$

Dem.: (schiță)

Definim $\bar{f}: FM(X) \to A$ prin $\bar{f}(\sqcup) = 1_A$, $\bar{f}(x_1 \dots x_n) \overset{def.}{=\!=} f(x_1) f(x_2) \cdot \ldots \cdot f(x_n)$, $(\forall) n \in \mathbb{N}^*$

$x_1, \dots, x_n \in X$

Atunci $\bar{f}$ este morfism de monoizi [exercițiu]

$\bar{f} i = f$

$\bar{f}(x) \overset{?}{=} f(x)$, $(\forall) x \in X$

Unicitatea:

Dacă $\tilde{f}: FM(X) \to A$ este morfism de monoizi cu $\tilde{f} i = f$, atunci $(\tilde{f} i)(x) = f(x) \Rightarrow \tilde{f}(x) = f(x)$, $(\forall) x \in X$

$n \geq 1$ $\quad \tilde{f}(x_1 \dots x_n) =$

$\tilde{f}(x_1 * \dots * x_n) =$

$\tilde{f}(x_1) \tilde{f}(x_2) \dots \tilde{f}(x_n) =$

$f(x_1) \cdot f(x_2) \cdot \ldots \cdot f(x_n) = \bar{f}(x_1 \dots x_n) \Rightarrow \tilde{f} = \bar{f}$