TEHNICA DE PROGRAMARE "GREEDY"

1. Planificarea optimă a unor spectacole într-o singură sală

Considerăm n spectacole $S_1, S_2, \dots, S_n$ pentru care cunoaştem intervalele lor de desfăşurare $[s_1, f_1), [s_2, f_2), \dots, [s_n, f_n)$, toate dintr-o singură zi. Având la dispoziţie o singură sală, în care putem să planificăm un singur spectacol la un moment dat, să se determine numărul maxim de spectacole care pot fi planificate fără suprapuneri. Un spectacol S_j poate fi programat după spectacolul S_i dacă $s_j \geq f_i$.

De exemplu, să considerăm $n = 7$ spectacole având următoarele intervale de desfăşurare:

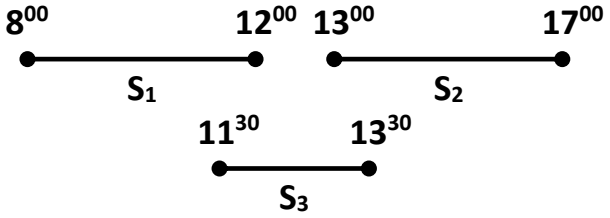
S_1: $[10^{00}, 11^{20})$
S_2: $[09^{30}, 12^{10})$
S_3: $[08^{20}, 09^{50})$
S_4: $[11^{30}, 14^{00})$
S_5: $[12^{10}, 13^{10})$
S_6: $[14^{00}, 16^{00})$
S_7: $[15^{00}, 15^{30})$

Se observă faptul că numărul maxim de spectacole care pot fi planificate este 4, iar o posibilă soluţie este S_3, S_1, S_5 şi S_7. Atenţie, soluţia nu este unică (de exemplu, o altă soluţie optimă este S_3, S_1, S_5 şi S_6)!

Deoarece dorim să găsim o rezolvare de tip Greedy a acestei probleme, vom încerca planificarea spectacolelor folosind unul dintre următoarele criterii:

a) în ordinea crescătoare a duratelor;
b) în ordinea crescătoare a orelor de început;
c) în ordinea crescătoare a orelor de terminare.

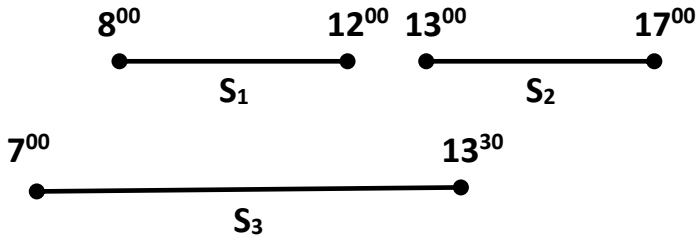
În cazul utilizării criteriului a), se observă uşor faptul că nu vom obţine întotdeauna o soluţie optimă. De exemplu, să considerăm următoarele 3 spectacole:



Aplicând criteriul a), vom planifica prima dată spectacolul S_3 (deoarece durează cel mai puţin), iar apoi nu vom mai putea planifica nici spectacolul S_1 şi nici spectacolul S_2,

deoarece ambele se suprapun cu spectacolul S_3, deci vom obține o planificare formată doar din S_3. Evident, planificarea optimă, cu număr maxim de spectacole, este S_1 și S_2.

De asemenea, în cazul utilizării criteriului b), se observă ușor faptul că nu vom obține întotdeauna o soluție optimă. De exemplu, să considerăm următoarele 3 spectacole:



Aplicând criteriul b), vom planifica prima dată spectacolul S_3 (deoarece începe primul), iar apoi nu vom mai putea planifica nici spectacolul S_1 și nici spectacolul S_2, deoarece ambele se suprapun cu el, deci vom obține o planificare formată doar din S_3. Evident, planificarea optimă este S_1 și S_2.

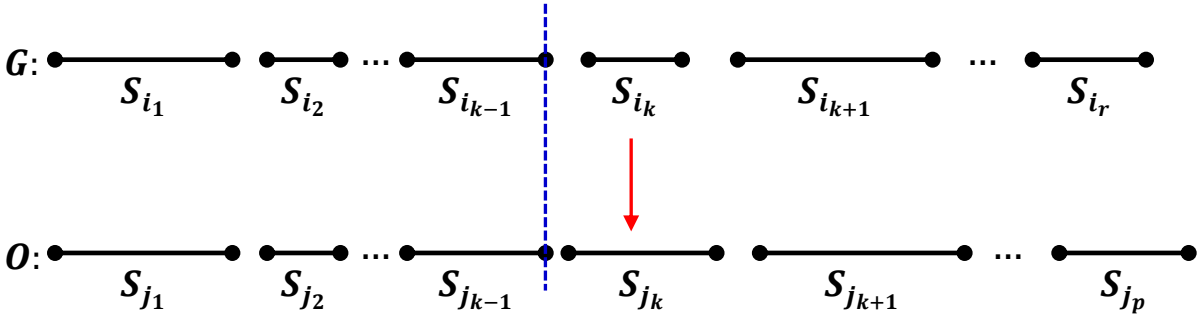
În cazul utilizării criteriului c), se observă faptul că vom obține soluțiile optime în ambele exemple prezentate mai sus:

- în primul exemplu, vom planifica mai întâi spectacolul S_1 (deoarece se termină primul), apoi nu vom putea planifica spectacolul S_3 (deoarece se suprapune cu S_1), dar vom putea planifica spectacolul S_2, deci vom obține planificarea optimă formată din S_1 și S_2;
- în al doilea exemplu, vom proceda la fel și vom obține planificarea optimă S_1 și S_2.

Practic, criteriul c) este o combinație a criteriilor a) și b), deoarece un spectacol care durează puțin și începe devreme se va termina devreme!

Pentru a demonstra optimalitatea criteriului c) de selecție, vom utiliza o demonstrație de tipul *exchange argument*: vom considera o soluție optimă furnizată de un algoritm oarecare (nu contează metoda utilizată!), diferită de soluția furnizată de algoritmul de tip Greedy, și vom demonstra faptul că aceasta poate fi transformată, element cu element, în soluția furnizată de algoritmul de tip Greedy. Astfel, vom demonstra faptul că și soluția furnizată de algoritmul de tip Greedy este tot optimă!

Fie G soluția furnizată de algoritmul de tip Greedy și o soluție optimă O, diferită de G, obținută folosind orice alt algoritm:



Deoarece soluția optimă O este diferită de soluția Greedy G, rezultă că există un cel mai mic indice k pentru care $S_{i_k} \neq S_{j_k}$. Practic, este posibil ca ambii algoritmi pot să selecteze, până la pasul $k-1$, aceleași spectacole în aceeași ordine, adică $S_{i_1} = S_{j_1}, \dots, S_{i_{k-1}} = S_{j_{k-1}}$. Spectacolul S_{j_k} din soluția optimă O poate fi înlocuit cu spectacolul S_{i_k} din soluția Greedy G fără a produce o suprapunere, deoarece:

- spectacolul S_{i_k} începe după spectacolul $S_{j_{k-1}}$, deoarece spectacolul S_{i_k} a fost programat după spectacolul $S_{i_{k-1}}$ care este identic cu spectacolul $S_{j_{k-1}}$, deci $s_{i_k} \geq f_{i_{k-1}} = f_{j_{k-1}}$;
- spectacolul S_{j_k} se termină după spectacolul S_{i_k}, adică $f_{j_k} \geq f_{i_k}$, deoarece, în caz contrar ($f_{j_k} < f_{i_k}$) algoritmul Greedy ar fi selectat spectacolul S_{j_k} în locul spectacolului S_{i_k};
- spectacolul S_{i_k} se termină înaintea spectacolului $S_{j_{k+1}}$, adică $f_{i_k} \leq s_{j_{k+1}}$, deoarece am demonstrat anterior faptul că $f_{i_k} \leq f_{j_k}$ și $f_{j_k} \leq s_{j_{k+1}}$ (deoarece spectacolul $S_{j_{k+1}}$ a fost programat după spectacolul S_{j_k}).

Astfel, am demonstrat faptul că $f_{j_{k-1}} \leq s_{i_k} < f_{j_k} \leq s_{j_{k+1}}$, ceea ce ne permite să înlocuim spectacolul S_{j_k} din soluția optimă O cu spectacolul S_{i_k} din soluția Greedy G fără a produce o suprapunere. Repetând raționamentul anterior, putem transforma primele r elemente din soluția optimă O în soluția G furnizată de algoritmul Greedy.

Pentru a încheia demonstrația, trebuie să mai demonstrăm faptul că ambele soluții conțin același număr de spectacole, respectiv $r = p$. Presupunem prin absurd faptul că $r \neq p$. Deoarece soluția O este optimă, rezultă faptul că $p > r$ (altfel, dacă $p < r$, ar însemna că soluția optimă O conține mai puține spectacole decât soluția Greedy G, ceea ce i-ar contrazice optimalitatea), deci există cel puțin un spectacol $S_{j_{r+1}}$ în soluția optimă O care nu a fost selectat în soluția Greedy G. Acest lucru este imposibil, deoarece am demonstrat anterior faptul că orice spectacol S_{j_k} din soluția optimă se termină după spectacolul S_{i_k} aflat pe aceeași poziție în soluția Greedy (adică $f_{j_k} \geq f_{i_k}$), deci am obține relația $f_{i_r} \leq f_{j_r} \leq s_{j_{r+1}}$, ceea ce ar însemna că spectacolul $S_{j_{r+1}}$ ar fi trebuit să fie selectat și în soluția Greedy G! În concluzie, presupunerea că $r \neq p$ este falsă, deci $r = p$.

Astfel, am demonstrat faptul că putem transforma soluția optimă O în soluția G furnizată de algoritmul Greedy, deci și soluția furnizată de algoritmul Greedy este optimă!

În concluzie, algoritmul Greedy pentru rezolvarea problemei programării spectacolelor este următorul:

- sortăm spectacolele în ordinea crescătoare a orelor de terminare;
- planificăm primul spectacol (problema are întotdeauna soluție!);
- pentru fiecare spectacol rămas, verificăm dacă începe după ultimul spectacol programat și, în caz afirmativ, îl planificăm și pe el.

Citirea datelor de intrare are complexitatea $\mathcal{O}(n)$, sortarea are complexitatea $\mathcal{O}(n \log_2 n)$, programarea primului spectacol are complexitatea $\mathcal{O}(1)$, testarea spectacolelor rămase are complexitatea $\mathcal{O}(n-1)$, iar afișarea planificării optime are cel mult complexitatea $\mathcal{O}(n)$, deci complexitatea algoritmului este $\mathcal{O}(n \log_2 n)$.

În continuare, vom prezenta implementarea algoritmului în limbajul Python:

```
# functie folosita pentru sortarea crescătoare a spectacolelor
# în raport de ora de sfârșit (cheia)
def cheieOraSfârșit(sp):
    return sp[2]

# citim datele de intrare din fișierul text "spectacole.txt"
fin = open("spectacole.txt")
# lsp = lista spectacolelor, fiecare spectacol fiind memorat
# sub forma unui tuplu (ID, ora de început, ora de sfârșit)
lsp = []
crt = 1
for linie in fin:
    aux = linie.split("-")
    # aux[0] = ora de început a spectacolului curent
    # aux[1] = ora de sfârșit a spectacolului curent
    lsp.append((crt, aux[0].strip(), aux[1].strip()))
    crt = crt + 1
fin.close()

# sortăm spectacolele în ordinea crescătoare a timpilor de sfârșit
lsp.sort(key=cheieOraSfârșit)

# posp = o listă care conține o programare optima a spectacolelor,
# inițializată cu primul spectacol
posp = [lsp[0]]
# parcurgem restul spectacolelor
for sp in lsp[1:]:
    # dacă spectacolul curent începe după ultimul spectacol
    # programat, atunci îl programăm și pe el
    if sp[1] >= posp[len(posp)-1][2]:
        posp.append(sp)

# scriem datele de ieșire în fișierul text "programare.txt"
fout = open("programare.txt", "w")
fout.write("Numarul maxim de spectacole: "+str(len(posp))+"\n")
fout.write("\nSpectacolele programate:\n")
for sp in posp:
    fout.write(sp[1]+"-"+sp[2]+" Spectacol "+str(sp[0])+"\n")
fout.close()
```

Pentru exemplul de mai sus, fişierele text de intrare şi de ieşire sunt următoarele:

spectacole.txt	programare.txt
10:00-11:20 09:30-12:10 08:20-09:50 11:30-14:00	Numarul maxim de spectacole: 4 Spectacolele programate: 08:20-09:50 Spectacol 3

12:10-13:10 14:00-16:00 15:00-15:30	10:00-11:20 Spectacol 1 12:10-13:10 Spectacol 5 15:00-15:30 Spectacol 7

Încheiem prezentarea acestei probleme precizând faptul că este tot o problemă de planificare, forma sa generală fiind următoarea: "*Se consideră n activități pentru care se cunosc intervalele orare de desfășurare și care partajează o resursă comună. Știind faptul că activitățile trebuie efectuate sub excludere reciprocă* (*respectiv*, *la un moment dat resursa comună poate fi alocată unei singure activități*)*, să se determine o modalitate de planificare a unui număr maxim de activități care nu se suprapun.*".