Mulțimi și funcții

Teoria naivă a mulțimilor – Cantor, sec. XIX

Mulțime = o colecție de obiecte bine precizate, numite **elementele mulțimii.**

Apartenența

Dacă A este mulțime și x un obiect, atunci:

- $x \in A$, dacă x este element al lui A;
- $x \notin A$, altfel.

Exemple de mulțimi:

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$, $\mathbb{N}^* = \{1, 2, \dots\}$ – numere naturale

$\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ – numere întregi

$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \,\middle|\, a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0 \right\}$ – numere raționale

$\mathbb{R} \xrightarrow{?} \mathbb{C}$

Mulțime
- listând elementele
- printr-o proprietate satisfăcută de elemente

$\{x \mid x \in \mathbb{N},\ 1 \leq x \leq 4\} = \{1, 2, 3, 4\}$

$\{x \mid P(x) \text{ adev.}\}$

Egalitate: A, B mulțimi

$A = B \overset{\text{def.}}{\iff} (\text{pt. orice } x \quad x \in A \iff x \in B)$

Incluziune: A, B mulțimi

$A \subset B \overset{def.}{\iff} ($pt. orice x $\quad x \in A \Rightarrow x \in B)$

$A \subsetneq B$ A s.m. **submulțime** a lui B

Mulțimea vidă (fără niciun element) $\emptyset$

$\{x \mid x \in \mathbb{N}$ și $x^2 = 3\} = \emptyset$

Proprietăți:

Pentru orice mulțimi A, B, C avem:

(1) $A \subset A$

(2) $A \subset B$ și $B \subset C \Rightarrow A \subset C$

(3) $(A \subset B$ și $B \subset A) \iff A = B$

(4) $\emptyset \subset A$

$\mathbb{N}^* \subset \mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$

Mulțimea părților unei mulțimi

Fie A mulțime. Definim:

$\mathcal{P}(A) = \{B \mid B \subset A\}$ (mulțimea tuturor submulțimilor lui A)

ex.: $A = \{1\}$ $\quad \mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{1\}\}$ – 2 elemente

$A = \{1, 2\}$ $\quad \mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$ – 4 elem.

$A=\{1,2,3\}$ $\quad \mathcal{P}(A)=\{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\},$
$\{1,3\}, \{2,3\}, A\}$ – 8 elem.

$A=\emptyset$ $\quad \mathcal{P}(A)=\{\emptyset\}$ – 1 elem.

! A are n elemente $\Rightarrow$ $\mathcal{P}(A)$ are 2^n elem.

Operații cu mulțimi

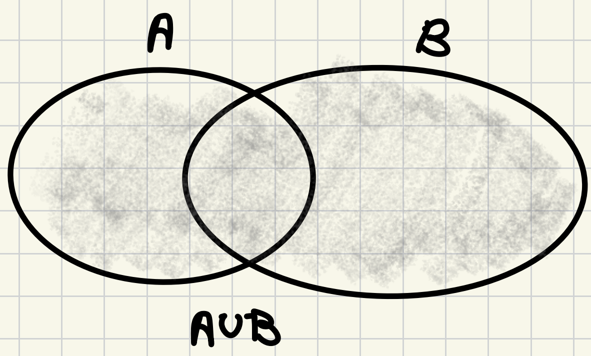
Fie A, B mulțimi. Definim:

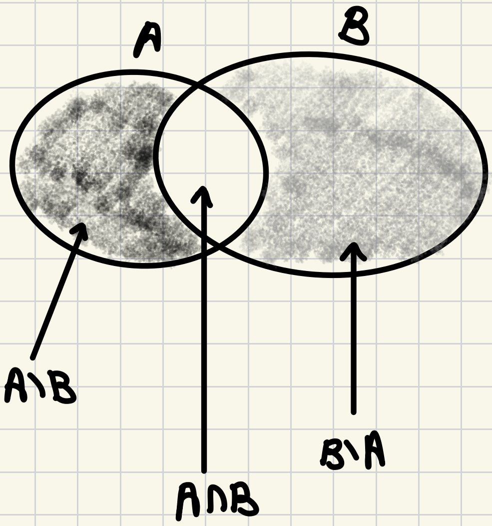
$A\cup B=\{x \mid x\in A \text{ sau } x\in B\}$ – reuniunea

$A\cap B=\{x \mid x\in A \text{ și } x\in B\}$ – intersecția

$A\setminus B=\{x \mid x\in A \text{ și } x\notin B\}$ – diferența dintre A și B

$A\Delta B=(A\setminus B)\cup(B\setminus A)$ – diferența simetrică a lui A și B





Proprietăți:

Pentru orice mulțimi A, B, C avem:

(1) $A\cap B\subset A\subset A\cup B$

(2) $A\cup B=B\cup A$, $A\cap B=B\cap A$, $A\Delta B=B\Delta A$ COMUTATIVITATE

(3) $(A\cup B)\cup C = A\cup(B\cup C)$, $(A\cap B)\cap C = A\cap(B\cap C)$,

$(A\Delta B)\Delta C = A\Delta(B\Delta C)$ ASOCIATIVITATE

(4) $A\cup(B\cap C) = (A\cup B)\cap(A\cup C)$ DISTRIBUTIVITATE

$A\cap(B\cup C) = (A\cap B)\cup(A\cap C)$

Dem.: (4) $A\cup(B\cap C) = (A\cup B)\cap(A\cup C)$

„$\subset$": Fie $x\in A\cup(B\cap C)$.

Atunci $x\in A$ sau $x\in B\cap C$.

Dacă $x\in A \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x\in A\cup B \\ x\in A\cup C\end{array}\right\} \Rightarrow x\in(A\cup B)\cap(A\cup C)$

Dacă $x\in B\cap C \Rightarrow x\in B$ și $x\in C \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x\in A\cup B \\ x\in A\cup C\end{array}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow x\in(A\cup B)\cap(A\cup C)$

„$\supset$": Fie $x\in(A\cup B)\cap(A\cup C) \Rightarrow$

$\Rightarrow x\in A\cup B$ și $x\in A\cup C$

Dacă $x\in A$, atunci $x\in A\cup(B\cap C)$.

Dacă $x\notin A$, atunci $x\in B$ și $x\in C \Rightarrow x\in B\cap C$

$\Rightarrow x\in A\cup(B\cap C)$.

Exerciții:

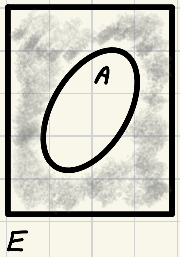
În general, $A\setminus B \neq B\setminus A$.

$(A\setminus B)\setminus C \neq A\setminus(B\setminus C)$

Complementara

Dacă A, E mulțimi și $A \subset E$, atunci complementara lui A în E este $C_E A \overset{def.}{=} E \setminus A$.

(dacă E subînțeles $C_E A \overset{not.}{=} \bar{A}$)



$$\overline{(\bar{A})} = A$$

$$\bar{\emptyset} = E, \quad \bar{E} = \emptyset$$

Exercițiu (Legile lui De Morgan)

Fie $A, B \subset E$, atunci

$$C_E(A \cup B) = (C_E A) \cap (C_E B)$$
$$C_E(A \cap B) = (C_E A) \cup (C_E B)$$

$$\left(\begin{array}{l} \overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B} \\ \overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B} \end{array} \right)$$

Produs cartezian

Fie A, B mulțimi.

$$A \times B \overset{def.}{=} \{(a,b) \mid a \in A, b \in B\}$$

$$(a,b) = (a',b') \iff \begin{cases} a = a' \\ b = b' \end{cases}$$

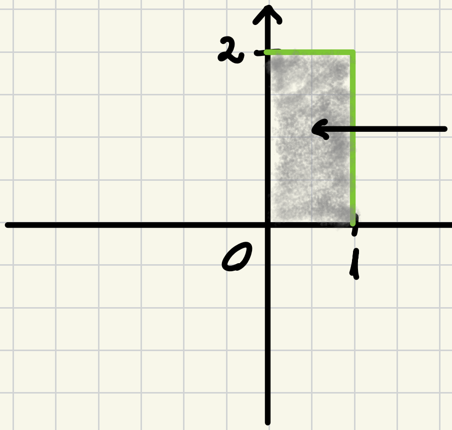
Exemple:

(1) $A = \{1,2,3\}$, $B = \{1,2\}$

$A \times B = \{(1,1), (1,2), (2,1), (2,2), (3,1), (3,2)\}$

! Dacă A, B finite cu n, respectiv m elemente, atunci $A\times B$ are $n\cdot m$ elemente.

(2) $A=[0,1]$, $B=[0,2]$ $(\subset \mathbb{R})$



$A\times B$ = mulțimea punctelor din interiorul sau de pe frontiera dreptunghiului hașurat

(3) $\emptyset \times B = \emptyset$

Mulțimi disjuncte

A, B s.n. **disjuncte** dacă $A\cap B=\emptyset$

Mulțime finită = mulțime care are n elemente, $n\in\mathbb{N}$

A = finită

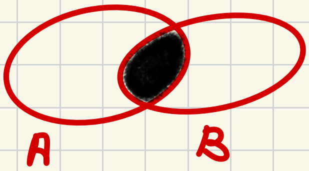
$|A|$ = nr. de elemente ale lui A

Observație! Dacă A și B sunt finite și disjuncte,

$$|A\cup B| = |A|+|B|.$$

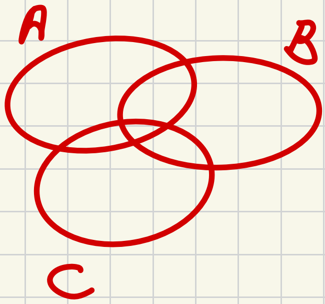
Dacă A și B sunt finite oarecare,

$$|A\cup B| = |A|+|B| - |A\cap B|$$



Dacă A, B, C finite,

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$



Exercițiu: **Principiul includerii și excluderii**

Fie $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$ și $A_1, \dots, A_m$ mulțimi finite. Atunci:

$$|A_1 \cup \dots \cup A_m| = \sum_{1 \leq i \leq m} |A_i| - \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq m} |A_{i_1} \cap A_{i_2}| +$$

$$+ \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < i_3 \leq m} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap A_{i_3}| - \dots +$$

$$+ (-1)^{m-1} |A_1 \cap \dots \cap A_m|$$

Funcții

Fie A, B mulțimi nevide.

O funcție f de la A la B (s.m. definită pe A cu valori în B) este o corespondență care asociază fiecărui $x \in A$ un (unic) element din B, notat cu $f(x)$.

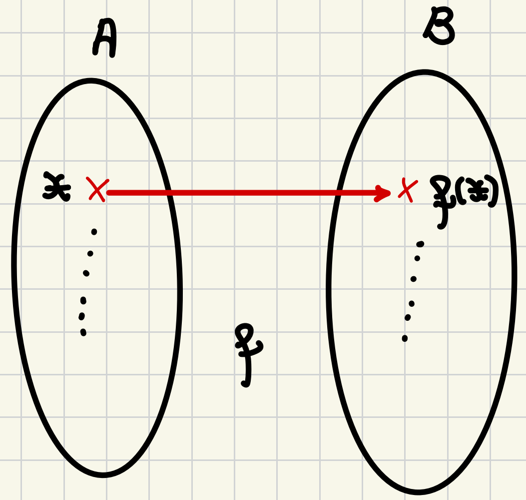
Notație: $f: A \to B$ sau $A \xrightarrow{f} B$

A = domeniul lui f

B = codomeniul lui f

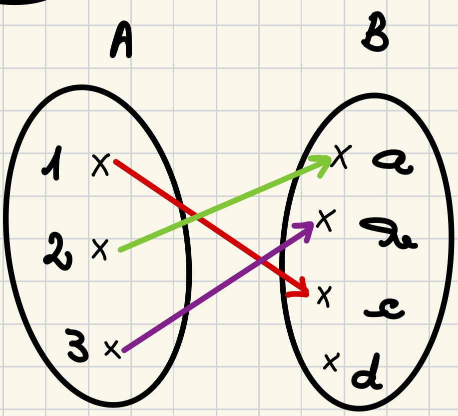
Dacă $x \in A$, $f(x)$ s.m. valoarea lui f în x.

Diagrama asociată lui f



! În diagrama asociată lui f, din fiecare element al lui A pleacă exact o săgeată către un element al lui B.

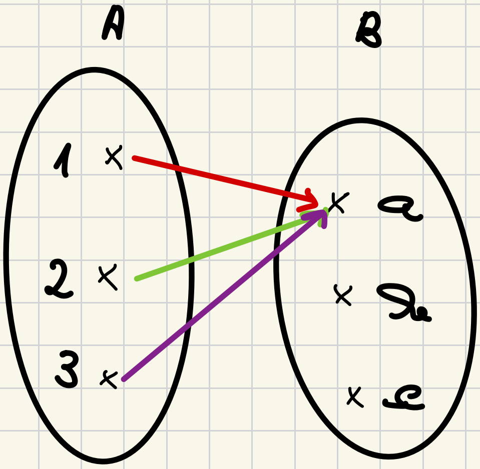
ex.:



funcție

$f: A \to B$

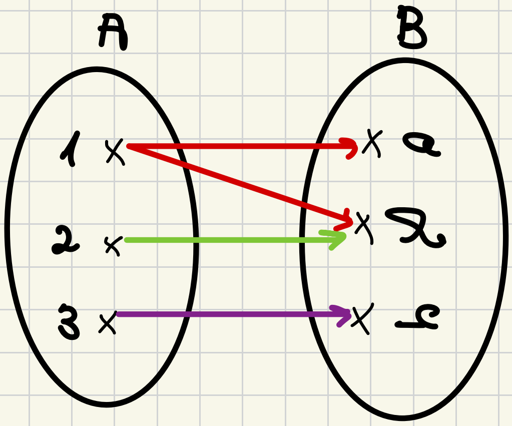
$f(1) = c$, $f(2) = a$, $f(3) = b$



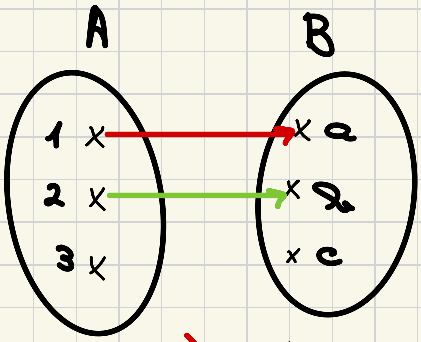
funcție

$f: A \to B$

$f(1) = f(2) = f(3) = a$



~~funcție~~



~~funcție~~

Egalitate:

Două funcții f și g sunt egale dacă au același domeniu, același codomeniu și $f(x) = g(x)$, pt. orice x din domeniu.

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$

$g: \mathbb{R} \to [0, +\infty)$, $g(x) = x^2$

$f \neq g$

Funcția identitate a unei mulțimi

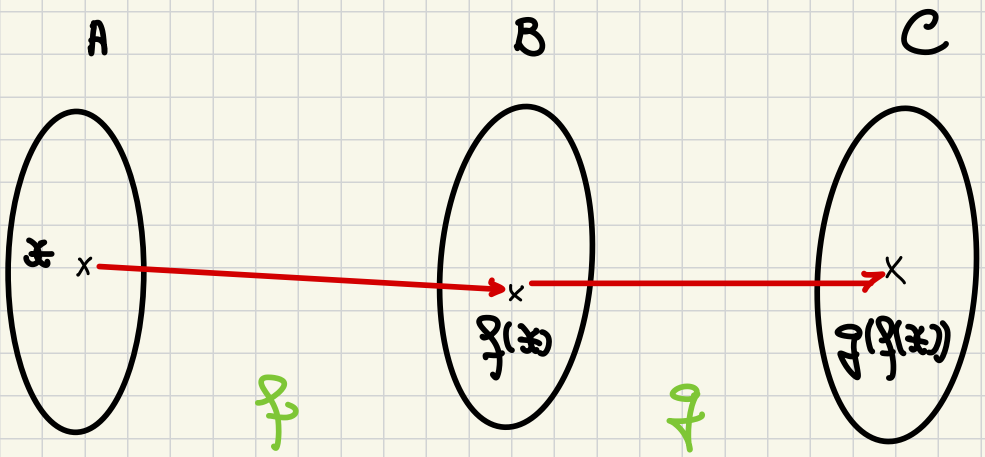
$A \neq \emptyset$

1_A (sau I_A sau $Id\,A$)

$1_A: A \to A$, $1_A(x) = x$ pt. orice $x \in A$

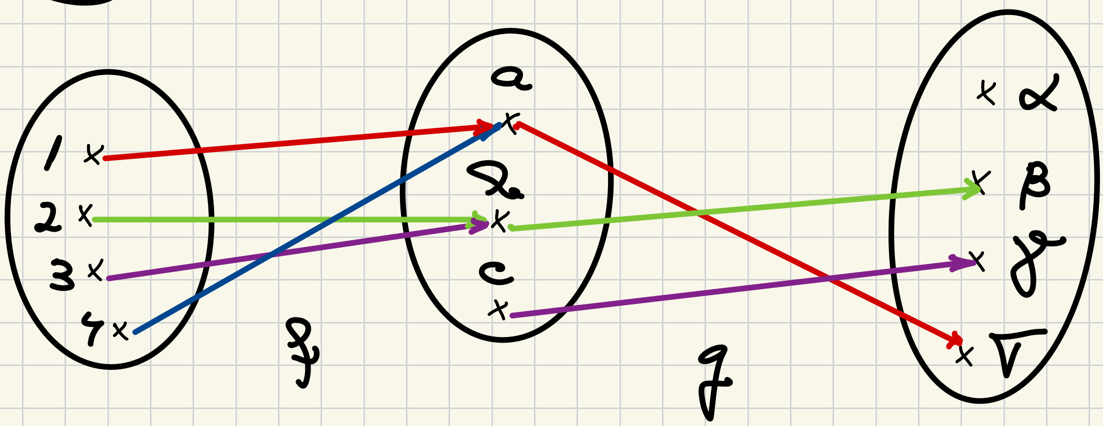
Compunerea funcțiilor

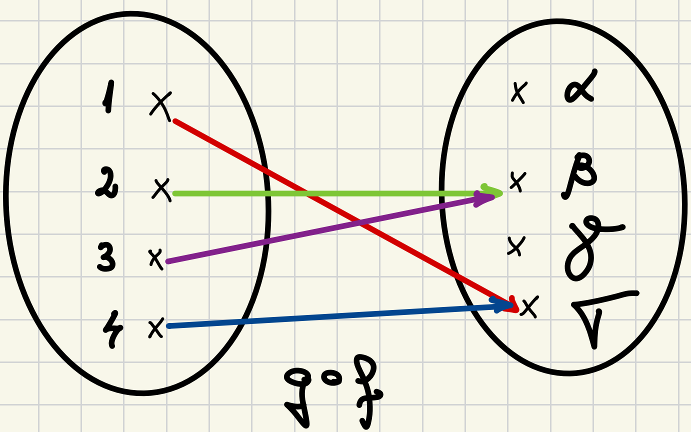
Dacă $f: A \to B$ și $g: B \to C$ sunt funcții, atunci compunerea lui g cu f, notată $g \circ f$ (sau gf) este funcția $g \circ f: A \to C$, $(g \circ f)(x) = g(\underbrace{f(x)}_{B})$ pt. orice $x \in A$.



! $g \circ f$ are sens doar dacă domeniul lui g = codomeniul lui f

ex.





Observație!

$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$

$g \circ f : A \to C$

$f \circ g$ are sens doar dacă $A = C$

$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} A$

$g \circ f : A \to A$

$f \circ g : B \to B$

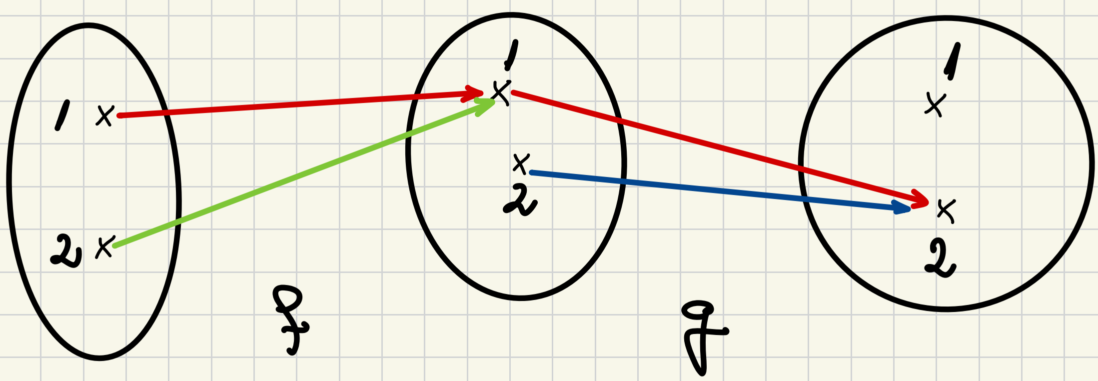
Pt. $A = B$,

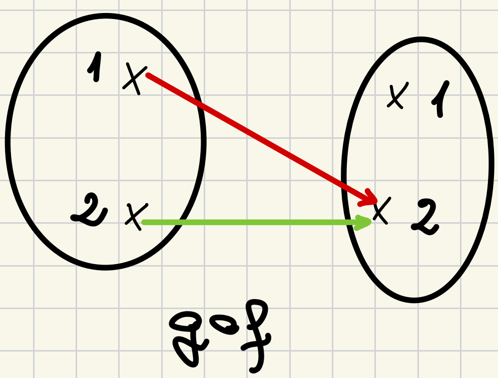
$A \xrightarrow{f} A \xrightarrow{g} A$

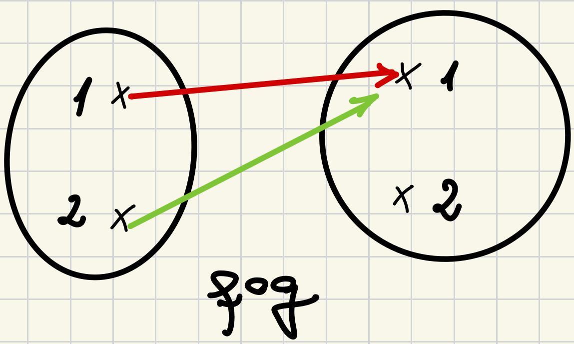
$g \circ f, f \circ g : A \to A$

! În general, $g \circ f \neq f \circ g$.

ex.:







Propoziție:

Fie $f:A\to B$, $g:B\to C$, $h:C\to D$ funcții. Atunci:

1) $f\circ 1_A = f = 1_B\circ f$
2) $(h\circ g)\circ f = h\circ (g\circ f)$

Dem.:

1) $A \xrightarrow{1_A} A \xrightarrow{f} B$

$f\circ 1_A : A\to B$
$f : A\to B$

$$x\in A \Rightarrow \underline{(f\circ 1_A)}(x) = f(1_A(x)) = f(x)$$

2) $B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{h} D$

$(h\circ g)\circ f : A\to D$

$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{h\circ g} D$

$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$

$A \xrightarrow{g\circ f} C \xrightarrow{h} D$

$h\circ (g\circ f) : A\to D$

Fie $x\in A$, atunci

$$\begin{aligned}((h\circ g)\circ f)(x) &= (h\circ g)(f(x))\\ &= h(g(f(x)))\\ &= h((g\circ f)(x))\\ &= (h\circ(g\circ f))(x)\end{aligned}$$