Observație! Fie $f: G \to H$ morfism de grupuri. Atunci:

1) f surjectiv $\Leftrightarrow \operatorname{Im} f = H$

2) f injectiv $\Leftrightarrow \operatorname{Ker} f = \{1\}$

Pentru 2):

„$\Rightarrow$": $1 \in \operatorname{Ker} f \quad f(1) = 1$

$x \in \operatorname{Ker} f \Rightarrow \underline{f(x)} = 1 = \underline{f(1)} \xRightarrow{f \text{ inj.}} x = 1$

Așadar, $\operatorname{Ker} f = \{1\}$

„$\Leftarrow$": Fie $\underline{f(x) = f(y)} \Rightarrow f(x)^{-1} f(y) = 1$
$x, y \in G$

$\Rightarrow \underbrace{f(x^{-1}) f(y)}_{f(x^{-1}y)} = 1$

$\Rightarrow x^{-1}y \in \operatorname{Ker} f \Rightarrow x^{-1}y = 1 \Rightarrow \underline{y = x}$

Exercițiu: Fie $f: G \to H$ un morfism surjectiv de grupuri. Atunci există o corespondență bijectivă:

$$\{A \mid \operatorname{Ker} f \subset A \leq G\} \underset{\psi}{\overset{\varphi}{\rightleftarrows}} \{B \mid B \leq H\}$$

$\varphi(A) \overset{\text{def.}}{=\!=} f(A)$

$\psi(B) = f^{-1}(B)$

$\psi\varphi = \mathrm{Id}, \ \varphi\psi = \mathrm{Id}$

Subgrupul generat de o mulțime

Propoziție: Fie $(G,\cdot)$ grup și $(H_i)_{i\in I}$ o familie nevidă de subgrupuri. Atunci $\bigcap_{i\in I} H_i \leq G$.

Dem.: $H_i \leq G \Rightarrow 1 \in H_i, (\forall) i$

$$\Rightarrow 1 \in \bigcap_{i\in I} H_i \neq \emptyset$$

$$x, y \in \bigcap_{i\in I} H_i \overset{?}{\Rightarrow} x^{-1}y \in \bigcap_{i\in I} H_i$$

$$(\forall) i \quad x, y \in H_i \xRightarrow{H\leq G} x^{-1}y \in H_i \Rightarrow$$

$$x^{-1}y \in \bigcap_{i\in I} H_i$$

Corolar: Fie $(G,\cdot)$ grup și $\emptyset \neq X \subset G$. Fie $(H_i)_{i\in I}$ familia tuturor subgrupurilor lui G care îl includ pe X. Notăm $\bigcap_{i\in I} H_i \overset{\text{not.}}{=\!=} \langle X \rangle$. Atunci:

(i) $\langle X \rangle \leq G$ și $X \subset \langle X \rangle$

(ii) Dacă $H \leq G$ și $X \subset H$, atunci $\langle X \rangle \subset H$.

Dem.:

(i)

$<X> \leq G$ din propoziția precedentă

$X \subset H_i, (\forall) i \Rightarrow X \subset \underbrace{\bigcap_{i \in I} H_i}_{= <X>}$

(ii) H este neapărat unul dintre H_i, deci $<X> \subset H_i$

Def.: $<X>$ s.m. subgrupul lui G generat de X.

Dacă X este finită, $X = \{x_1, \dots, x_n\}$,

$<X> \overset{\text{not.}}{=\!=} <x_1, \dots, x_n>$

G s.m. finit generat dacă există X finită cu $G = <X>$.

G s.m. ciclic dacă $(\exists)\, g \in G$ cu $G = <g>$.

X s.m. sistem de generatori pentru G dacă $<X> = G$.

Propoziție: Fie $(G, \cdot)$ și $\emptyset \neq X \subset G$. Atunci $<X> =$

$$= \underbrace{\{ y_1^{\varepsilon_1} \dots y_r^{\varepsilon_r} \mid r \in \mathbb{N}^*, y_1, \dots, y_r \in X, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r \in \{1, -1\} \}}_{H}$$

Dem.:

„$\supset$": Fie $y_1^{\varepsilon_1}, \dots, y_r^{\varepsilon_r} \in H$.

$y_i \in X \Rightarrow y_i \in <X> \xRightarrow{<X> \text{ subgr.}} y_i^{-1} \in <X>$

$(\forall) i \quad y_i^{\varepsilon_i} \in <X> \xRightarrow{<X> \text{ subgrup}} y_1^{\varepsilon_1}, \dots, y_r^{\varepsilon_r} \in <X>$

„$\supseteq$": Este suficient să arăt că $X \subset H$ și $H \leq G$.

- $X \subset H$

$r = 1$

$y_1 = x$

$\varepsilon_1 = 1$

$x = y_1^{\varepsilon_1} \in H$

- $H \leq G$

$H \neq \emptyset$

$a, b \in H \Rightarrow a^{-1} b \in H$

$a = y_1^{\varepsilon_1} \dots y_r^{\varepsilon_r}, \ r \in \mathbb{N}^*, \ y_1, \dots, y_r \in X$
$\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r \in \{1, -1\}$

$b = z_1^{\omega_1} \dots z_s^{\omega_s}, \ s \in \mathbb{N}^*, \ z_1, \dots, z_s \in X$
$\omega_1, \dots, \omega_s \in \{1, -1\}$

$a^{-1} b = y_r^{-\varepsilon_r} \dots y_1^{-\varepsilon_1} z_1^{\omega_1} \dots z_s^{\omega_s} \in H$, gata!

Exemple:

1) $\langle g \rangle = \{ g^i \mid i \in \mathbb{Z} \}$

2) Dacă G este abelian, $\langle x_1, \dots, x_m \rangle =$
$= \{ x_1^{i_1} x_2^{i_2} \dots x_m^{i_m} \mid i_1, \dots, i_m \in \mathbb{Z} \}$

În notația aditivă:

$(G, +)$

$\langle x_1, \dots, x_m \rangle = \{ i_1 x_1 + \dots + i_m x_m \mid i_1, \dots, i_m \in \mathbb{Z} \}$

$\langle g \rangle = \{ i g \mid i \in \mathbb{Z} \}$

Produs direct de grupuri

Dacă $G_1, \dots, G_n$ grupuri $(n \in \mathbb{N}, n \geq 2)$

Pe $G_1 \times G_2 \times \dots \times G_n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_1 \in G_1, x_2 \in G_2, \dots x_n \in G_n\}$ definim operația

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) \cdot (y_1, y_2, \dots, y_n) \overset{\text{def.}}{=\!=} (x_1 y_1, x_2 y_2, \dots, x_n y_n)$$

Atunci $(G_1 \times G_2 \times \dots \times G_n, \cdot)$ grup [exercițiu]

el. neutru $(1_{G_1}, 1_{G_2}, \dots, 1_{G_n})$

$$(x_1, x_2, \dots, x_n)^{-1} = (x_1^{-1}, x_2^{-1}, \dots, x_n^{-1})$$

s.n. **produsul direct al grupului $G_1, \dots, G_n$**

În plus, pentru fiecare $1 \leq i \leq n$:

$$\pi_i : G_1 \times \dots \times G_n \to G_i$$
$$\pi_i(x_1, \dots, x_n) = x_i$$

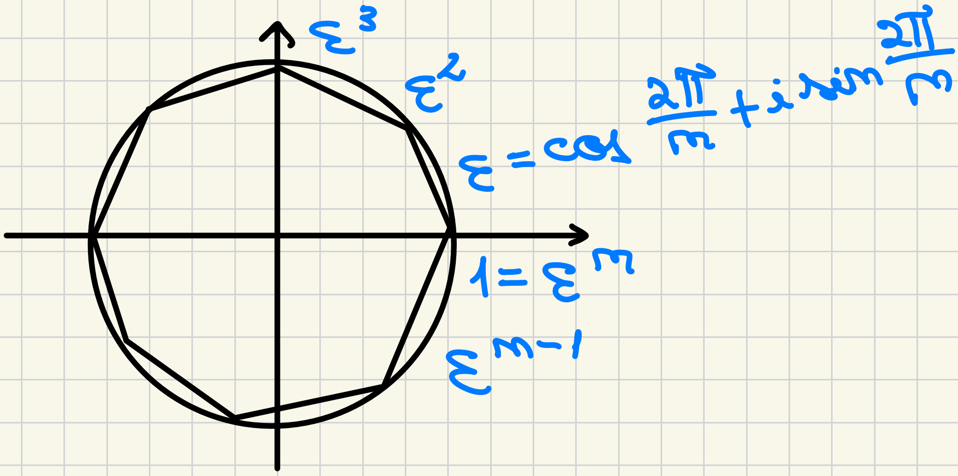
Este morfism surjectiv de grupuri.

Exemple:

1) $(\mathbb{Z}, +)$ ciclic $\quad \mathbb{Z} = \langle 1 \rangle = \langle -1 \rangle$

2) $U_n = \{z \in \mathbb{C} \mid z^n = 1\} \leq (\mathbb{C}^*, \cdot)$
$= \{\varepsilon, \varepsilon^2, \dots, \varepsilon^{n-1}, \varepsilon^n = 1\}$
$= \langle \varepsilon \rangle$

U_n ciclic



$n = 2 \quad U_2 = \{1, -1\} = \langle -1 \rangle$

$n = 3 \quad U_1 = \{1\} = \langle 1 \rangle$

3) Fie $n \geq 2$.

$(\mathbb{Z}, +)$

$\underbrace{\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \ldots \times \mathbb{Z}}_{n \text{ de } \mathbb{Z}} = \mathbb{Z}$

$\mathbb{Z}^n$ este finit generat

$e_1 = (1, 0, \ldots, 0)$

$e_2 = (0, 1, \ldots, 0)$

- - - - - - - - - - - - - - -

$e_n = (0, \ldots, 0, 1)$

$\Rightarrow \langle e_1, \ldots, e_n \rangle = \mathbb{Z}^n$

Deci $\mathbb{Z}^n$ este finit generat, dar $\mathbb{Z}^n$ nu este ciclic [exercițiu]

4) G finit $\Rightarrow$ G finit generat

$\langle G \rangle = G$

5) $U_n \times U_n$ finit generat (finit), dar nu este ciclic [exercițiu]

6) $(\mathbb{Q},+)$, $(\mathbb{R},+)$ nu sunt finit generate

[exercițiu]

Observație! Dacă $f: G \to H$ este morfism injectiv de grupuri, atunci $G \simeq f(G) \leq H$.

$f\big|^{f(G)}: G \to f(G)$ izomorfism de grupuri

$\phantom{f\big|^{f(G)}: G \to} \leq H$

X mulțime, $X \neq \emptyset$

$S(X) = \{f \mid f: X \to X$ funcție bijectivă$\}$

$(S(X), \circ)$ grup (grupul simetric al mulțimii X)

Teorema lui Cayley

Orice grup este izomorf cu un subgrup al unui grup simetric.

Dem.: Fie $(G,\cdot)$ grup. Definim funcția

$\varphi: G \to S(G)$

Pentru $g \in G$, $\varphi(g): G \to G$ definită prin:

$\varphi(g)(\underset{G}{\underset{\cap}{x}}) = gx$, pt. orice $x \in G$

$\varphi(g) \in S(G)$, adică $\varphi(g)$ este bijectivă

$\varphi(g)$ **Inj.:** $\varphi(g)(x) = \varphi(g)(y) \Rightarrow gx = gy$

Pentru $x, y \in G$ $\qquad g^{-1} \Downarrow$

$\varphi(g)$ **Surj.:** Fie $u \in G$. Arăt că $\qquad x = y$

există $x \in G$ cu $\varphi(g)(x) = u$

$\Updownarrow$

$gx = u$

$\overset{g^{-1}}{\Updownarrow}$

$x = g^{-1}u$

Așadar, $\varphi(g)$ este bijectivă.

Arăt că:

- φ morfism de grupuri

$$\varphi(gh) \overset{?}{=} \varphi(g)\varphi(h),\ (\forall)\ g,h \in G$$

Fie $x \in G$.

$$\varphi(gh)(x) = (gh)x = ghx$$

$$\begin{aligned}(\varphi(g)\varphi(h))(x) &= \varphi(g)(\varphi(h)(x)) \\ &= \varphi(g)(hx) \\ &= g(hx) \\ &= \underline{ghx}\end{aligned}$$

- φ injectiv

$\Updownarrow$

$\operatorname{Ker}\varphi = \{1\}$

Fie $\boxed{g \in \operatorname{Ker}\varphi} \Rightarrow \varphi(g) = \mathrm{Id}_G \Rightarrow (\forall)\ x \in G$,

$\underbrace{\varphi(g)(x)}_{\substack{\| \\ gx}} = x$

Pt. $x = 1 \Rightarrow g = 1$

$\varphi : G \to S(G)$ morfism injectiv de grupuri

$\Downarrow$ Obs.

$G \simeq \varphi(G) \leq S(G)$

Relații de echivalență asociate unui subgrup

Fie $(G,\cdot)$ grup și $H \leq G$

Pe G definim relațiile $\sim_s$ și $\sim_d$ prin

$x, y \in G$ $\quad x \sim_s y \iff x^{-1}y \in H$

$\qquad\qquad x \sim_d y \iff xy^{-1} \in H$

Atunci $\sim_s$ și $\sim_d$ sunt relații de echivalență.

reflexivă: $x \sim_s x \Rightarrow \underbrace{x^{-1}x}_{1} \in H$

simetrică: $x \sim_s y \Rightarrow x^{-1}y \in H \Rightarrow (x^{-1}y)^{-1} \in H$

$\Rightarrow y^{-1}x \in H \Rightarrow y \sim_s x$

tranzitivă: $x \sim_s y,\ y \sim_s z \Rightarrow x^{-1}y,\ y^{-1}z \in H \Rightarrow$

$\Rightarrow \underbrace{x^{-1}y\,y^{-1}z}_{x^{-1}z} \in H \Rightarrow x \sim_s z$

$\sim_s$ relația de echivalență la stânga indusă de H

$\sim_d$ relația de echivalență la dreapta indusă de H

Clasa de echivalență a unui $x \in G$:

$\{y \in G \mid x \sim_s y\} = \{xh \mid h \in H\} \overset{\text{not.}}{=\!=} xH$

$\Updownarrow$

$x^{-1}y \in H$

$x^{-1}y = h \in H$

$y = xh$

Clasa lui 1:

$1H = H$

$G/\sim_s = \{xH \mid x \in G\}$

not: $(G/H)_s$

clasele la stânga modulo H

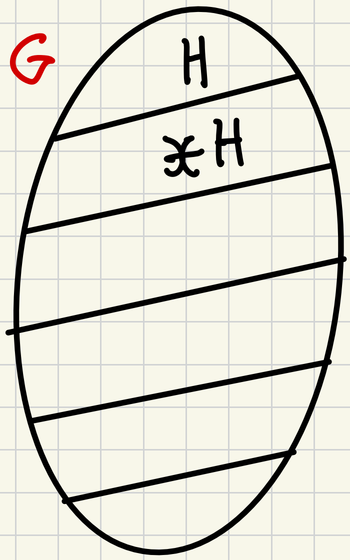
$xH = yH$
$\Updownarrow$
$x \sim_s y$
$\Updownarrow$
$x^{-1}y \in H$

Orice xH este în bijecție cu H.

$H \to xH$ bijectivă

$h \to xh$

G



$\sim_d$ clasa lui x este

$Hx = \{hx \mid h \in H\}$

Clasa lui 1: $H1 = H$

$$G/_{\sim_d} = \{Hx \mid x \in G\}$$

$\| \text{not.}$

$(G/H)_d$

Clase la dreapta modulo H

Observație! $1H = H1$

În general, $xH \neq Hx$.

$G = S_3 = S(\{1, 2, 3\})$

$H = \langle (1\ 2) \rangle = \{e, (1\ 2)\}$

$x = (1\ 3)$

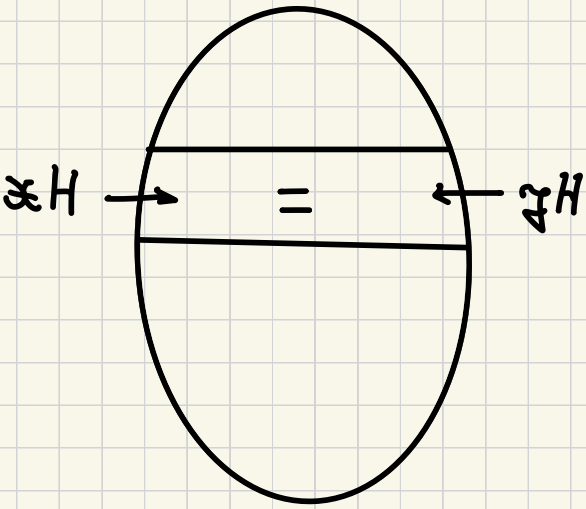
$xH \neq Hx$

Propoziție: Există o bijecție între $(G/H)_s$ și $(G/H)_d$.

Dem.: Definim $\varphi : (G/H)_s \to (G/H)_d$, prin:

$\varphi(xH) = Hx^{-1}$, $(\forall)\ x \in G$

φ corect definită?



Dacă $xH = yH$, este $Hx^{-1} = Hy^{-1}$?

$$\Downarrow$$

$$x^{-1}y \in H \Rightarrow x^{-1}(y^{-1})^{-1} \in H$$

$$\Downarrow$$

$$x^{-1} \sim_d y^{-1}$$

φ injectivă

$$\varphi(xH) = \varphi(yH) \Rightarrow Hx^{-1} = Hy^{-1}$$
$$\Rightarrow x^{-1} \sim_d y^{-1} \Rightarrow x^{-1}(y^{-1})^{-1} \in H$$
$$\Rightarrow x^{-1}y \in H \Rightarrow x \sim_s y \Rightarrow xH = yH$$

φ surjectivă

$$Hx = \varphi(x^{-1}H)$$

Consecință: Dacă una dintre cele două mulțimi $(G/H)_s$ și $(G/H)_d$ este finită, și cealaltă este finită și $|(G/H)_s| = |(G/H)_d|$

$\downarrow$ not.

$[G:H]$ s.m.

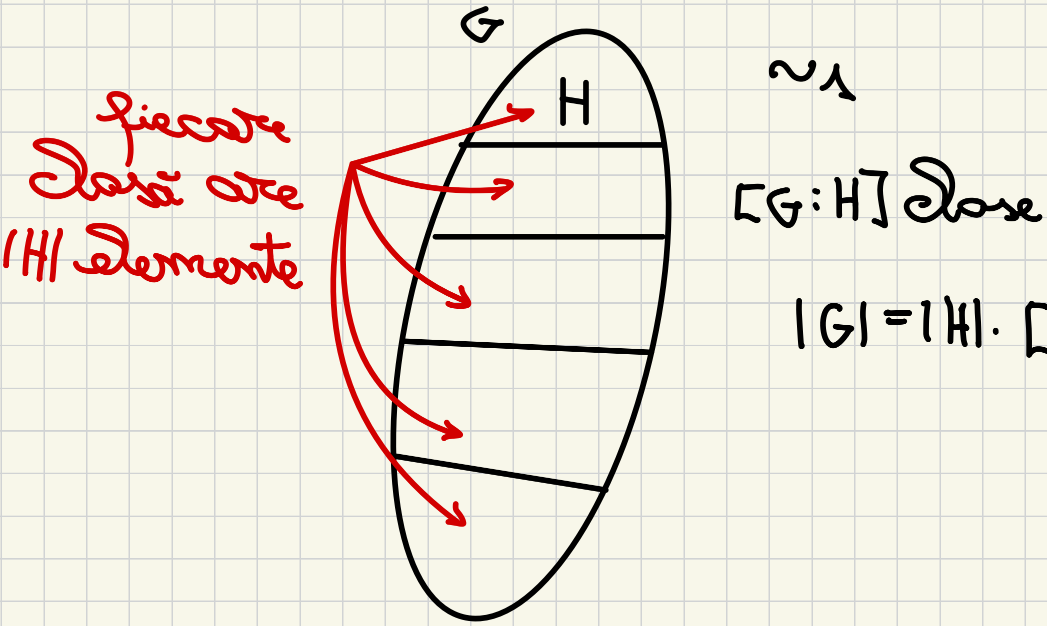
indicele lui H în G

Spunem că H are indice finit în G.

Teorema lui Lagrange:

Fie G un grup finit și $H \leq G$. Atunci $|G| = |H| \cdot [G:H]$. În particular, $|H| \mid |G|$.

Dem.:



$$|G| = |H| \cdot [G:H]$$

Terminologie: G finit

$|G|$ = ordinul lui G