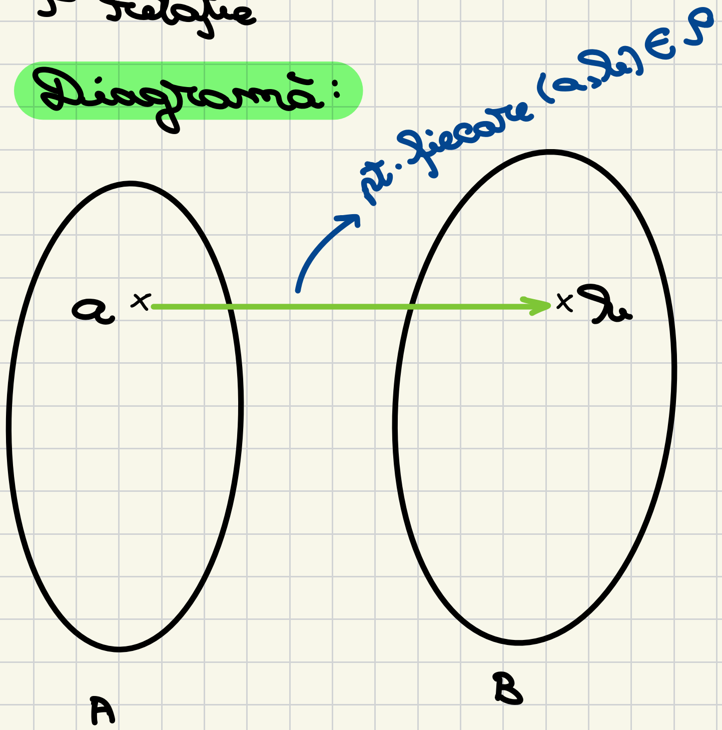
Relații

Def.: Fie A și B mulțimi nevide. Se numește **relație între A și B** o submulțime ρ a lui $A \times B$.
Dacă $(\underset{\underset{A}{\cap}}{a}, \underset{\underset{B}{\cap}}{b}) \in \rho$, scriem $a \rho b$ și spunem că a este în relația ρ cu b.

ρ relație

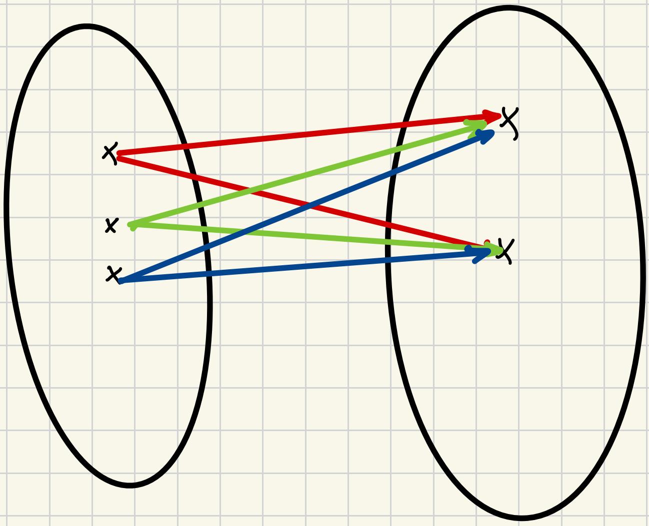
Diagramă:



Exemple:

1) Dacă $f: A \to B$ este funcție, atunci $G_f = \{(a, f(a)) \mid a \in A\}$ $\subset A \times B$.
G_f este o relație între A și B.

2) $\rho = A \times B$ relație
$a \rho b$ pt. orice $a \in A, b \in B$



3) $\rho = \emptyset$ (relația vidă)

4) Dacă A este mulțime nevidă, atunci

$\Delta_A = \{(a,a) \mid a \in A\}$ – relație de la A la A

(relația diagonală pe A)

$\Delta_A = G_{1_A}$

$1_A : A \to A$ funcția identitate

Relația inversă

Dacă $\rho \subset A \times B$ este o relație de la A la B, definim

$\rho^{-1} = \{(b,a) \mid b \in B,\ a \in A,\ a \rho b\} \subset B \times A$ o relație de la B la A.

(ρ^{-1} = relația inversă a lui ρ)

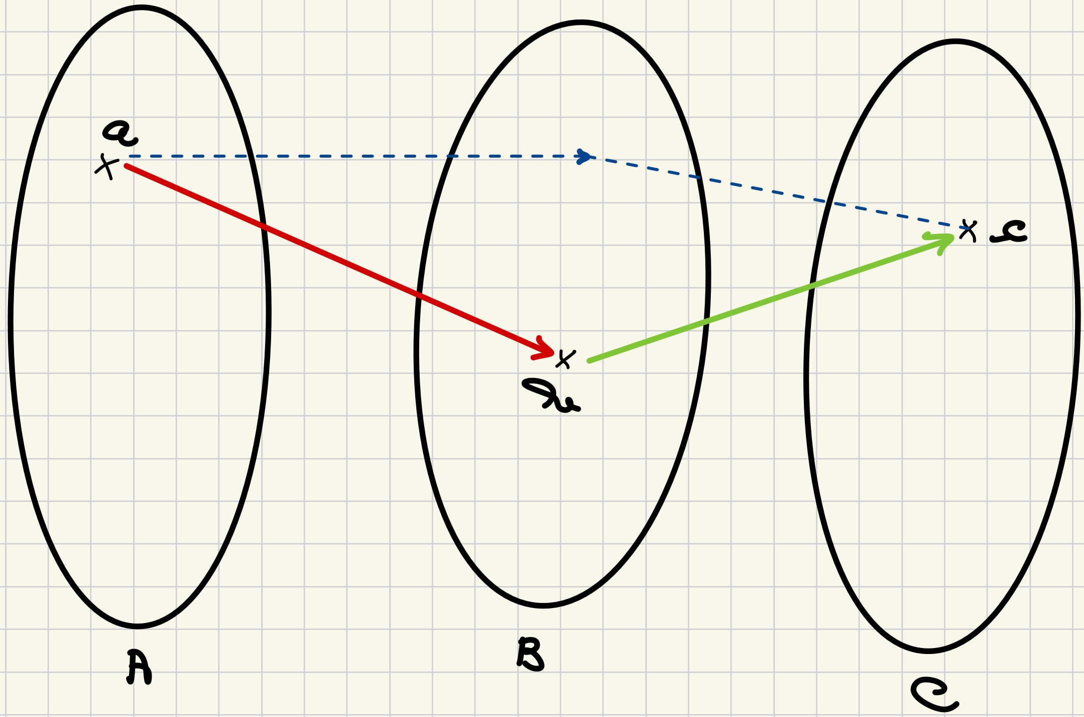
Compunerea relațiilor

Fie $\rho \subset A \times B$, $\omega \subset B \times C$ relații.

Definim compunerea $\omega \circ \rho$ prin:

$\omega \circ \rho = \{(a,c) \mid a \in A,\ c \in C$ și $(\exists)\ b \in B$ a.î.

$a \rho b$ și $b \omega c\}$



Exerciții:

1) Fie $\rho \subset A\times B$ o relație. Atunci $\rho \circ \Delta_A = \Delta_B \circ \rho = \rho$.

2) Fie $\rho \subset A\times B$, $\omega \subset B\times C$, $\gamma \subset C\times D$ relații.
Atunci $(\gamma \circ \omega)\circ \rho = \gamma \circ (\omega \circ \rho)$

3) Fie $f: A\to B$, $g: B\to C$ funcții. Atunci
$G_g \circ G_f = G_{g\circ f}$

4) Fie $\rho \subset A\times B$ și $\omega \subset B\times C$ relații. Atunci
$(\omega\circ\rho)^{-1} = \rho^{-1}\circ \omega^{-1}$

Dacă A este mulțime nevidă, o relație de la A la A s.n. relație pe A.

$\rho \subset A\times A$

$(a,b)\in\rho \iff a\rho b$

$(a,b)\notin\rho \iff a \not\rho\, b$

Def. O relație ρ pe mulțimea $A (\neq \emptyset)$ se numește:

a) **reflexivă**, dacă $a \rho a$ pt. orice $a \in A$

b) **simetrică**, dacă pt. orice $a, b \in A$ cu $a \rho b$, avem și $b \rho a$

c) **tranzitivă**, dacă pt. orice $a, b, c \in A$ cu $a \rho b$ și $b \rho c$, avem și $a \rho c$

d) **antisimetrică**, dacă pt. orice $a, b \in A$ cu $a \rho b$ și $b \rho a$, avem $a = b$

Observație!
- ρ reflexivă $\Leftrightarrow \Delta_A \subset \rho$
- ρ simetrică $\Leftrightarrow \rho^{-1} = \rho$
- ρ tranzitivă $\Leftrightarrow \rho \circ \rho \subset \rho$
- ρ antisimetrică $\Leftrightarrow \rho \cap \rho^{-1} = \Delta_A$

Exemple:

$A = \{1, 2, 3\}$

(i) $\rho = \{(1,1), (1,2), (2,3), (3,2)\}$ – relație pe A

~~reflexivă~~ $(2,2) \notin \rho$

~~simetrică~~ $(1,2) \in \rho$, dar $(2,1) \notin \rho$

~~tranzitivă~~ $(1,2) \in \rho, (2,3) \in \rho$, dar $(1,3) \notin \rho$

~~antisimetrică~~ $(2,3) \in \rho, (3,2) \in \rho$, dar $2 \neq 3$

(ii) $\omega = \{(1,1), (2,2), (3,3), (1,2), (2,1)\}$ – relație pe A

ω reflexivă
simetrică
tranzitivă
~~antisimetrică~~ $1 \rho 2$, $2 \rho 1$, dar $1 \neq 2$

Def.: Fie A o mulțime nevidă. O relație ρ pe A s.n. relație de echivalență dacă ρ este reflexivă, simetrică și tranzitivă.

$$\boxed{\begin{array}{l} a \rho a, \text{ pt. orice } a \\ a \rho b \Rightarrow b \rho a \\ a \rho b, b \rho c \Rightarrow a \rho c \end{array}}$$

$\sim, \equiv, \approx$

Exemple:

1) Δ_A relație de echivalență
2) ω din exemplul precedent (iii) - relație de echivalență
3) Fie $n \in \mathbb{N}^*$. Pe $\mathbb{Z}$ definim relația $\sim$ prin

$$x \sim y \overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow} n \mid x - y$$

$\sim$ relație de echivalență
(relația de congruență modulo n)

$\sim \quad \equiv_n$

reflexivitatea: $x \sim x \iff n \mid x - x = 0$, adev.

$0 = n \cdot 0$

simetria: $x \sim y \Rightarrow n \mid x - y \Rightarrow x - y = kn \Rightarrow$

$y - x = \underbrace{(-k)}_{\in \mathbb{Z}} n$

$\Downarrow$

$n \mid y - x \iff y \sim x$

tranzitivitatea: $x \sim y,\ y \sim z \Rightarrow \left.\begin{matrix} n \mid x - y \\ n \mid y - z \end{matrix}\right\} \Rightarrow$

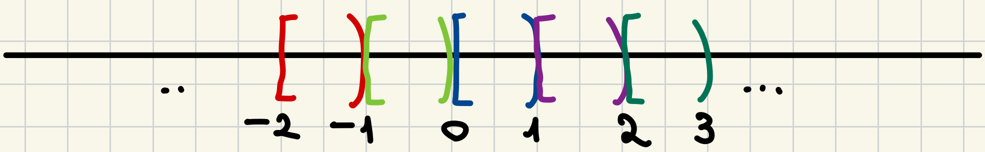
$\Rightarrow \left.\begin{matrix} x - y = kn \\ y - z = pn \\ k, p \in \mathbb{Z} \end{matrix}\right\} \overset{(+)}{\Rightarrow} x - z = (k+p)n, \ (\forall) k, p \in \mathbb{Z}$

$\Downarrow$

$n \mid x - z$

4) Pe $\mathbb{R}^*$ definim $x \rho y \overset{def.}{\iff} xy > 0 \Rightarrow \rho$ relație de echivalență

5) Pe $\mathbb{R}$ definim $x \sim y \overset{def.}{\iff} [x] = [y] \Rightarrow \sim$ relație de echivalență



6) Pe $\mathbb{R}$ definim $x \sim y \overset{def.}{\iff} x - y \in \mathbb{Z} \Rightarrow \sim$ relație de echivalență

7) $\mathcal{P}$ = mulțimea punctelor din plan

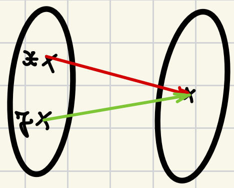
Fixăm $O \in \mathcal{P}$.

Pe $\mathcal{P}$ definim relația $\sim$ prin

$A \sim B \Leftrightarrow |OA| = |OB|$

Atunci $\sim$ relație de echivalență.

8) Fie $f: A \to B$ funcție. Pe A definim relația $\sim_f$ prin $x \sim_f y \overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow} f(x) = f(y) \Rightarrow \sim_f$ relație de echivalență.



Def: Fie ρ o relație de echivalență pe A. Pentru orice $a \in A$, mulțimea $\{x \in A \mid a \,\rho\, x\} \overset{\text{not.}}{=\!=} \hat{a}$ (sau $[a]$) s.n. clasa de echivalență a lui A (relativ la relația ρ).

Vom nota $A/_\rho = \{\hat{a} \mid a \in A\}$ = mulțimea tuturor claselor de echivalență (în raport cu ρ) = mulțimea factor a lui A în raport cu ρ

Propoziție: Fie ρ relație de echivalență pe A. Atunci:

(i) $a \in \hat{a}$, pt. orice $a \in A$

(ii) Dacă $a, b \in A$, atunci $a \,\rho\, b \Leftrightarrow \hat{a} = \hat{b}$

(iii) Dacă $a, b \in A$ și $a \not\rho\, b$, atunci $\hat{a} \cap \hat{b} = \emptyset$

(iv) Două clase de echivalență sunt sau egale, sau disjuncte.

(v) $\bigcup_{a \in A} \hat{a} = A$

Dem.:

(i) $a \rho a \Rightarrow a \in \hat{a}$

(ii) „$\Rightarrow$": Vrem $\hat{a} = \hat{b}$.

„$\subseteq$": Fie $x \in \hat{a} \Rightarrow a \rho x$

$a \rho b \Rightarrow b \rho a$

$\left.\begin{array}{l} a \rho x \\ b \rho a \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{tranz.}} b \rho x \Rightarrow x \in \hat{b}$

„$\supseteq$": La fel ca „$\subseteq$" (ex.)

„$\Leftarrow$": $\hat{a} = \underbrace{\hat{b}}_{\ni b} \Rightarrow b \in \hat{a} \Rightarrow a \rho b$

(iii) Presupunem prin absurd că există $x \in \hat{a} \cap \hat{b}$

$\Rightarrow x \in \hat{a}$ şi $x \in \hat{b}$

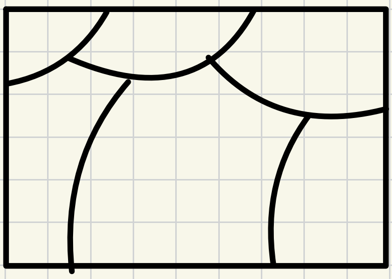
$x \in \hat{a} \Rightarrow a \rho x$

$x \in \hat{b} \Rightarrow b \rho x \xRightarrow{\rho \text{ sim.}} x \rho b$

$a \rho x,\ x \rho b \xRightarrow{\text{tranz.}} a \rho b$ Contradicție!

(iv) $\Leftarrow$ (ii) + (iii)

(v) $\Leftarrow$ (i)



Def.: Fie A o mulțime nevidă. Se numește **partiție a lui** A o mulțime $\{X_i \mid i \in I\}$ de submulțimi nevide ale lui A a.î. $A = \bigcup_{i \in I} X_i$ și $X_i \cap X_j = \emptyset$ pt. orice $i, j \in I$, $i \neq j$.

Propoziție: $A/_\rho$ este o partiție a lui A.

Așadar, o relație de echivalență pe A determină o partiție a lui A.

Reciproc: O partiție $\{X_i \mid i \in I\}$ a lui A determină o relație de echivalență ρ pe A, astfel pt. $a, b \in A$ $\quad a \rho b \overset{def.}{\Longleftrightarrow} (\exists)\ i \in I$ cu $a, b \in X_i$

Exerciții:

1) ρ relație de echivalență și partiția asociată lui ρ este $\{X_i \mid i \in I\}$

2) Dacă ρ este relație de echivalență (pe A), am văzut că $A/_\rho$ este o partiție a lui A. Atunci relația de echivalență pe A asociată partiției $A/_\rho$ este exact ρ.

3) ($\Leftarrow$ 1) + 2)) Există o bijecție între:
- mulțimea relațiilor de echivalență pe A
- mulțimea partițiilor lui A

Exemplu: $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$\rho = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5), (6,6), (1,3), (3,1), (1,4), (4,1), (3,4), (4,3), (2,5), (5,2)\}$

ρ este relație de echivalență pe A

Clasele de echivalență:

$\hat{1} = \{1,3,4\} = \hat{3} = \hat{4}$

$\hat{2} = \{2,5\} = \hat{5}$

$\hat{6} = \{6\}$

$$A/_\rho = \{\hat{1}, \hat{2}, \hat{6}\}$$
$$= \{\{1,3,4\}, \{2,5\}, \{6\}\}$$

$\downarrow$

partiție a lui A

Fie acum partiția:

$\{\{1,2\}, \{3,4\}, \{5,6\}\}$ a lui A

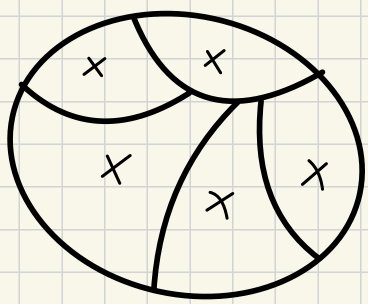
Relația de echivalență asociată este:

$\{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5), (6,6),$
$(1,2), (2,1), (3,4), (4,3), (5,6), (6,5)\}$

Pentru exemplele 1) - 8):

1) Δ_A $\quad \hat{a} = \{a\} \; \forall a$

$A/_{\Delta_A} = \{\{a\} \mid a \in A\}$



S = A

2) $\omega = \{(1,1), (2,2), (3,3), (1,2), (2,1)\}$

$\hat{1} = \hat{2} = \{1,2\}, \quad \hat{3} = \{3\}$

$A/_\omega = \{\{1,2\}, \{3\}\}$

3) $\hat{0} = \{\dots, -2n, -n, 0, n, 2n, 3n, \dots\}$ toți multiplii lui n

$\hat{1} = \{\dots, -2n+1, -n+1, 1, n+1, 2n+1, 3n+1, \dots\}$ numerele întregi care dau restul 1 la împărțirea cu n

$\vdots$

$\widehat{n-1} = \{\dots, -n-1, -1, n-1, 2n-1, 3n-1, \dots\}$ rest n-1 la împărțirea cu n

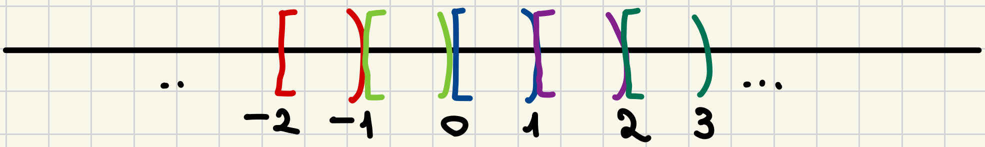
$\mathbb{Z}/_{\sim} = \{\hat{0}, \hat{1}, \dots, \widehat{n-1}\}$ n elemente

4) Dacă $x > 0$, $\hat{x} = (0, +\infty)$

$x < 0$, $\hat{x} = (-\infty, 0)$

$\mathbb{R}^*/_{\rho} = \{(0, +\infty), (-\infty, 0)\}$

5)



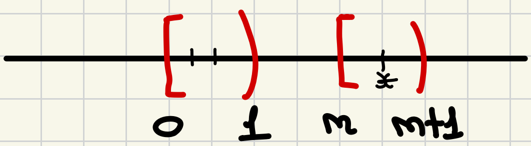
$\hat{0} = [0, 1)$ ... $\mathbb{R}/_{\sim} = \{\dots, \widehat{-1}, \hat{0}, \hat{1}, \dots\}$

$\hat{1} = [1, 2)$

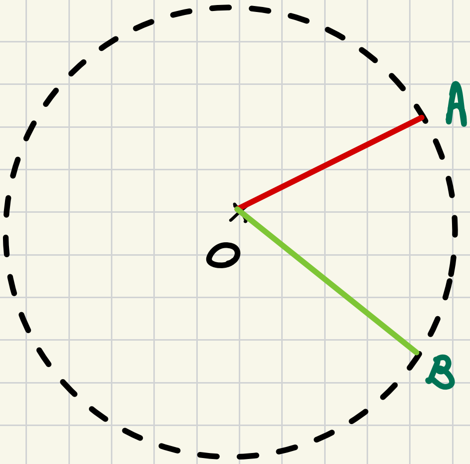
$\hat{n} = [n, n+1)$

6) $\hat{x} = \{\dots, x-2, x-1, x, x+1, x+2, \dots\}$

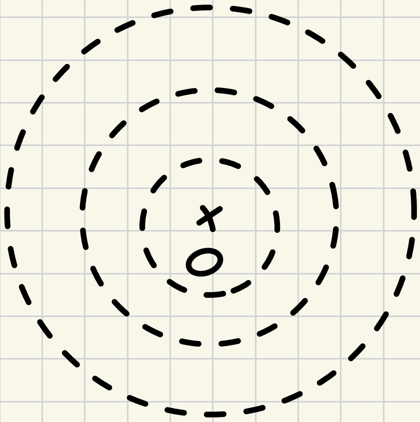
$\mathbb{R}/_{\sim} = \{\hat{x} \mid x \in [0, 1)\}$



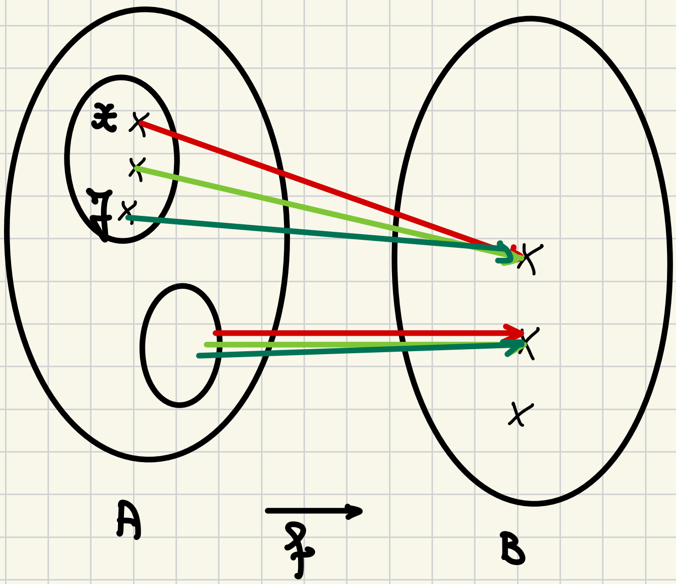
7)



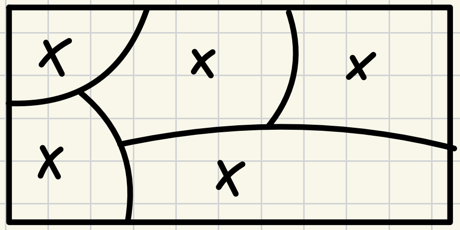
$\hat{A}$ = cercul de centru O și rază $|OA|$



8)



Def.: Fie ρ o relație de echivalență pe A. S.n. sistem de reprezentanți (pt. clasele de echivalență) o submulțime $S \subset A$ care conține exact un element din fiecare clasă de echivalență.



3) $S = \{0, 1, \ldots, n-1\}$