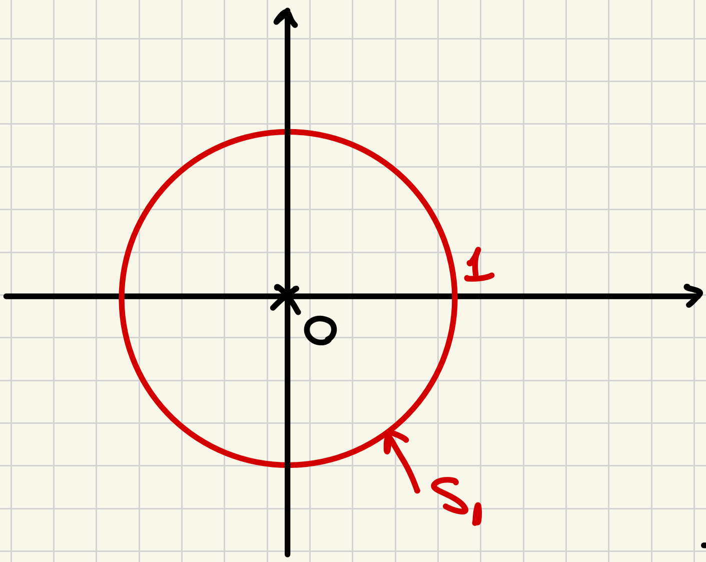
1. Pe $\mathbb{C}^*$ definim $\sim$:

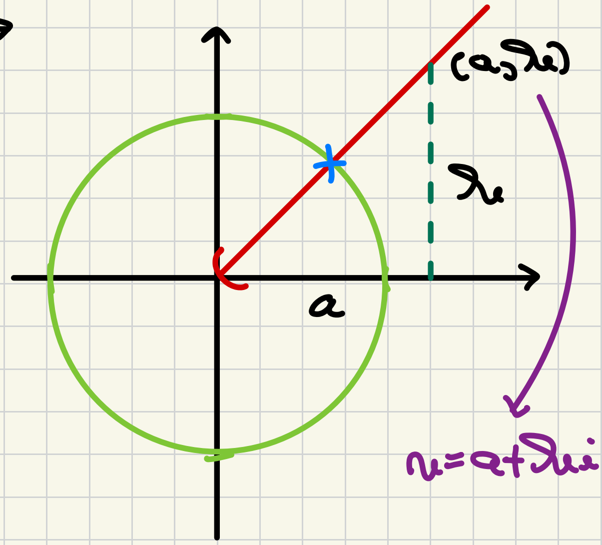
$$u \sim v \iff u \cdot |v| = v \cdot |u|, \ u, v \in \mathbb{C}^*. \iff \frac{u}{|u|} = \frac{v}{|v|}$$

(i) Să se arate că $\sim$ este relație de echivalență.

(ii) Clasa de echivalență a lui $1+i$ = ?

(iii) $\mathbb{C}^*/\sim$ este în bijecție cu $S^1$ = cercul unitate.




(i) 1) Reflexivitate:

$u \in \mathbb{C}^*$

$u \sim u \iff u \cdot |u| = u \cdot |u|$ (A)

2) Simetrie:

$u \sim v \iff u \cdot |v| = v \cdot |u|$

$\Downarrow$

$v|u| = u|v| \Rightarrow v \sim u$

3) Tranzitivitate:

$$\left.\begin{array}{l} u \sim v \\ v \sim z \end{array}\right| \overset{?}{\Rightarrow} u \sim z$$

$$u \sim v \Rightarrow \frac{u}{|u|} = \frac{v}{|v|}$$
$$v \sim z \Rightarrow \frac{v}{|v|} = \frac{z}{|z|}$$
$$\Rightarrow \frac{u}{|u|} = \frac{z}{|z|} \Rightarrow u \sim z$$

$\Rightarrow \sim$ relație de echivalență

$$\left|\frac{v}{|v|}\right| = \frac{1}{|v|} \cdot |v| = 1$$

(ii) $\widehat{1+i} = \{v \in \mathbb{C}^* \mid 1+i \sim v\}$

$$1+i \sim v \Leftrightarrow \frac{1+i}{\sqrt{2}} = \frac{v}{|v|} \Leftrightarrow v = \underbrace{\frac{|v|}{\sqrt{2}}}_{\in \mathbb{R}_+^*}(1+i) \in$$

$\in \{a(1+i) \mid a \in \mathbb{R}_+^*\}$

Dacă $v = a(1+i)$, cu $a \in \mathbb{R}_+^*$, $1+i \sim v$?

$$\frac{v}{|v|} = \frac{a(1+i)}{|a|\sqrt{2}} = \frac{\cancel{a}(1+i)}{\cancel{a}\sqrt{2}} = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$$

$|a(1+i)| =$
$= |a+ai| =$
$= \sqrt{a^2+a^2} = \sqrt{2a^2}$
$= |a|\sqrt{2}$

(iii) $: \mathbb{C}^*/_\sim \to S'$

$$\begin{tikzcd} \mathbb{C}^* \arrow[r, "\pi"] \arrow[dr, "f"'] & \mathbb{C}^*/_\sim \arrow[d, dashed, "\bar{f}"] \\ & S' \end{tikzcd}$$

$\pi(u) = \hat{u}$

Pentru orice funcție $f: \mathbb{C}^* \to S'$ cu proprietatea că $\sim \subset \sim_f$ $[u \sim v \Rightarrow f(u) = f(v)]$

$(\exists!)\ \bar{f}: \mathbb{C}^*/_\sim \to S'$ cu $\bar{f}\pi = f$

$\bar{f}$ surj. $\Leftrightarrow$ $f$ surj.

$\bar{f}$ inj. $\Leftrightarrow$ $\sim = \sim_f$ $[u \sim v \Leftrightarrow f(u) = f(v)]$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{u}{|u|} = \frac{v}{|v|}$$

Iau $\left.\begin{array}{l} f(x) = \dfrac{x}{|x|} \\ |f(x)| = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow f(x) \in S^1$

$x \sim n \Leftrightarrow \dfrac{x}{|x|} = \dfrac{n}{|n|} \Leftrightarrow f(x) = f(n)$

$|f(x)| = \left|\dfrac{x}{|x|}\right| = \dfrac{|x|}{|x|} = 1$

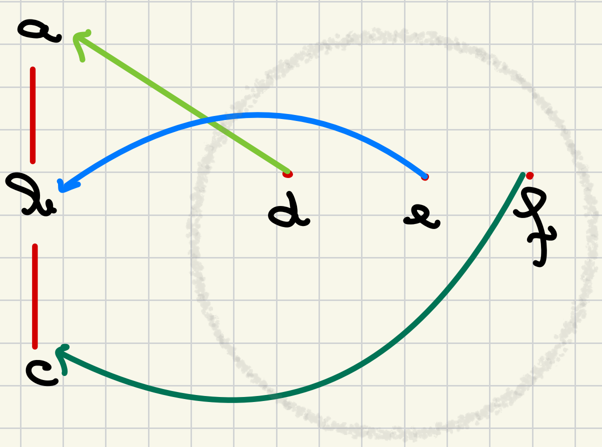
$f$ surj:

Fie $z \in S^1$.

Caut $x$ $f(x) = z$

$f(z) = \dfrac{z}{\underbrace{|z|}_{1}} = z$

2. Arătați că, dacă $f: A \to B$ este morfism de mulțimi ordonate, $f$ bijectivă $\Rightarrow f^{-1}: B \to A$ nu este neapărat morfism de mulțimi ordonate.




$\left.\begin{array}{l} b \leq a \\ f^{-1}(b) = e \end{array}\right| \Rightarrow$

$\Rightarrow f^{-1}(a) = d$

3. Fie $f : A \to B$ un izomorfism de mulțimi ordonate. Atunci $(A, \leq)$ total ordonată $\Leftarrow\Rightarrow$ $\Leftarrow\Rightarrow$ $(B, \leq)$ total ordonată.

"$\Rightarrow$":

$f$ izomorfism de mulțimi ordonate
Fie $x, y \in B$.

$f$ surj. $\Rightarrow (\exists)\ a, b \in A$ a.î. $f(a) = x$, $f(b) = y$

$(A, \leq)$ total ordonată $\Rightarrow a \leq b$ sau $b \leq a$

$$a \leq b \Rightarrow f(a) \leq f(b) \Leftrightarrow x \leq y$$

$$b \leq a \Rightarrow f(b) \leq f(a) \Leftrightarrow y \leq x$$

4. Fie $f : A \to B$ un izomorfism de mulțimi ordonate. Fie $a \in A$. Atunci $a$ este element minimal în $A \Leftarrow\Rightarrow f(a)$ element minimal în $B$.

"$\Rightarrow$":

Fie $y \in B$ a.î. $y \leq f(a)$.
Arăt că $y = f(a)$.

$y \leq f(a)$

$\Downarrow f^{-1}$ morfism de mulțimi ordonate

$$f^{-1}(y) \leq f^{-1}(f(a)) = a \xRightarrow[\text{minimal}]{a \text{ element}}$$

$$\Rightarrow f^{-1}(y) = a \Rightarrow f(f^{-1}(y)) = f(a) \Rightarrow y = f(a) \Rightarrow$$

$f(a)$ element minimal în $B$

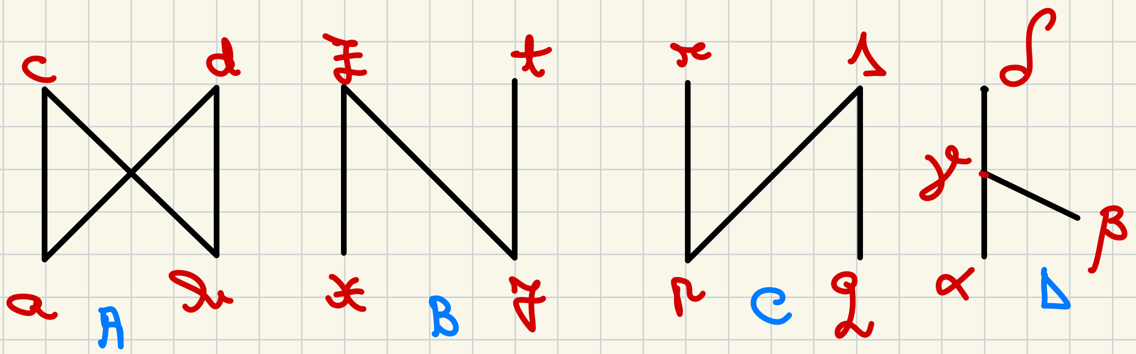
„$\Leftarrow$":

$f^{-1}$ izomorfism de mulțimi ordonate
$f(a)$ element minimal în $B$ $\Big\} \Rightarrow \underbrace{f^{-1}(f(a))}_{a}$

este element minimal în $A$

5. $A, B, C, D$ mulțimi ordonate cu diagramele Hasse:

(i)




a) $B$ și $C$ izomorfe

b) $A, B, D$ oricare două neizomorfe

c) $A, B, C, D$ el. min., el. max., min., max.

$A \rightarrow$ el. minimale $\rightarrow a, b$

maximale $\rightarrow c, d$

$B \rightarrow x, y$

$z, t$

$C \to$ $p, q$
$r, s$

$D \to \alpha, \beta$
$\delta$

$B \xrightarrow{f} C$

| | |
|---|---|
| $x$ | $q$ |
| $y$ | $p$ |
| $z$ | $s$ |
| $t$ | $r$ |

6. Fie $X \neq \emptyset$.

$Func(X, X) = \{ f \mid f : X \to X \text{ funcție} \}$

$(Func(X, X), \circ)$ monoid

Comutativ $\iff |X| = 1$

Asociativitate:

$(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$ (A)

Elementul neutru:

$f \circ e = e \circ f = f$

$e =$ funcția identitate $1_X$

$f \circ 1_X = 1_X \circ f = f$

Deci $(Func(X,X), \circ)$ monoid

**Comutativitatea:**

$f \circ g = g \circ f$

„<=": $|X| = 1 \Rightarrow Func(X,X) = \{1_X\} \Rightarrow$ „$\circ$" comut.

„=>": Presupunem comutativ $\Rightarrow f \circ g = g \circ f$

Presupunem prin absurd că $|X| \geq 2$

Fie $a, b \in X$, $a \neq b$

Fie $f, g : X \to X$

$f(x) = a$, $(\forall)\ x \in X$

$g(x) = b$, $(\forall)\ x \in X$

$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(a) = b$

$(f \circ g)(x) = a$

$\Rightarrow g \circ f \neq f \circ g \Rightarrow |X| = 1$