## **CURS II**

# § 4. RELAŢII DE ECHIVALENŢĂ

Fie A şi B două mulțimi. O submulțime  $\rho \subseteq A \times B$  se numește *relație binară* între A şi B. Dacă  $(a, b) \in \rho$ , unde  $a \in A$  şi  $b \in B$ , spunem că *a este în relația*  $\rho$  *cu b* şi notăm a  $\rho$  b. Când scriem a  $\rho$  b înseamnă că elementele  $\alpha \in A$  şi  $\alpha \in B$  nu sunt în relația  $\alpha \in B$ .

## Exemple.

- 1) Dacă  $f: A \to B$  este o funcție, atunci mulțimea  $G_f = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B \text{ si } b = f(a)\}$  este o relație binară între A și B. Mulțimea  $G_f$  se numește *graficul* funcției f. Invers, dacă  $G \subseteq A$  x B este o relație între A și B cu proprietatea că oricare ar f  $a \in A$  există un unic  $b \in B$  astfel încât  $(a, b) \in G$ , atunci putem defini funcția  $f: A \to B$  așa încât f(a) = b. Se observă imediat că  $G_f = G$ .
- 2) Fie A o mulțime nevidă și  $\rho = \{(a, X) \in A \times \mathcal{P}(A) \mid a \in X\}$ . Aceasta este relația de apartenență între elementele lui A și submulțimile lui A. Dacă  $a \in A$  și  $X \in \mathcal{P}(A)$ , atunci a  $\rho$  X este echivalent cu  $a \in X$ .

Când B = A, o relație binară  $\rho$  între A și A se numește simplu *relație binară pe mulțimea A*. O relație binară pe o mulțime se notează de regulă cu unul din simbolurile:  $\rho$ ,  $\sim$ ,  $\Re$ ,  $\equiv$ , etc.

### Exemple.

- 1) Fie A o mulțime oarecare. Mulțimea  $\Delta_A = \{(a, a) \mid a \in A\}$  se numește *diagonala* mulțimii A și este o relație binară pe A.
  - 2) Dacă A este o mulțime de numere naturale, atunci mulțimea

$$,,<" = \{(m, n) \in A \times A \mid m < n\}$$

este o relație binară pe A. În particular, dacă  $A = \{1, 2, 3, 4\}$ , atunci "<" =  $\{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 4)\}$ .

**Definiția 4.1.** O relație binară pe A, notată "p", se numește *relație de echivalență* dacă următoarele condiții sunt verificate pentru orice a, b,  $c \in A$ :

i) a ρ a (reflexivitate);

ii) a  $\rho$  b  $\Rightarrow$  b  $\rho$  a (simetrie);

iii) a  $\rho$  b si b  $\rho$  c  $\Rightarrow$  a  $\rho$  c (tranzitivitate).

### Exemple.

1) Dacă se consideră mulțimea numerelor întregi  $\mathbb{Z}$  și  $n \ge 1$  un număr natural, atunci relația binară notată " $\equiv \pmod{n}$ " (congruența modulo n):

$$a \equiv b \pmod{n} \Leftrightarrow n \mid a - b$$

este o relație de echivalență pe Z.

2) Dacă se consideră pe mulțimea **R** a numerelor reale relația "~":

$$a \sim b \Leftrightarrow a - b \in \mathbf{Z}$$
,

aceasta este o relație de echivalență pe R.

Dată o relație de echivalență " $\rho$ " pe A, pentru orice  $a \in A$  definim mulțimea:

$$[a] = \{b \in A \mid b \cap a\}.$$

Aceasta se numește *clasa de echivalență* a elementului a.

Clasa de echivalență a elementului a se mai notează și astfel: â, ã, ā, etc.

**Teorema 4.2.** Fie A o mulțime nevidă și " $\rho$ " o relație de echivalență pe A. Atunci clasele de echivalență determinate de " $\rho$ " pe A au proprietățile:

- 1)  $\underline{a} \in [\underline{a}]$  oricare ar fi  $\underline{a} \in A$ . În particular,  $[\underline{a}] \neq \emptyset$ .
- 2)  $[a] = [b] \Leftrightarrow a \rho b$ .
- 3) Dacă [a] și [b] sunt două clase de echivalență, atunci

$$[a] = [b]$$
 sau  $[a] \cap [b] = \emptyset$ .

4) Reuniunea tuturor claselor de echivalență este egală cu A.

*Demonstrație*. 1) Deoarece a  $\rho$  a rezultă că [a]  $\neq \emptyset$ .

- 2) Dacă [a] = [b], cum  $a \in A$ , atunci  $a \in [b]$  și deci  $a \rho b$ . Invers, presupunem că  $a \rho b$ . Fie  $x \in [a]$ ; deci  $x \rho a$  și " $\rho$ " este tranzitivă; obținem că  $x \rho b$ , adică  $x \in [b]$ . Deci [a]  $\subseteq$  [b]. Similar rezultă [b]  $\subseteq$  [a] și deci avem egalitatea [a] = [b].
- 3) Presupunem că  $[a] \cap [b] \neq \emptyset$ . Deci există  $x \in [a] \cap [b]$ . Atunci  $x \rho a$  și  $x \rho b$ . Cum " $\rho$ " este simetrică avem a  $\rho x$  și deci a  $\rho b$ . Din afirmația 2) rezultă că [a] = [b].
  - 4) Rezultă din 1).

**Definiția 4.3.** Fie A o mulțime nevidă și " $\rho$ " o relație de echivalență pe A. O familie de elemente din A,  $(a_i)_{i\in I}$ , se numește *sistem complet și independent de reprezentanți* (pe scurt, SCIR) relativ la relația de echivalență  $\rho$  dacă are următoarele proprietăți:

- i) oricare ar fi  $i \neq j$ ,  $a_i \mid \rho \mid a_j$ .
- ii) oricare ar fi  $a \in A$ , există  $i \in I$  astfel încât a  $\rho$   $a_i$ .

Se observă că i) și ii) pot fi formulate concentrat astfel: oricare ar fi  $a \in A$  există un unic  $i \in I$  astfel încât a  $\rho$   $a_i$ .

Fiind dată o relație de echivalență " $\rho$ " pe mulțimea nevidă A, există întotdeauna un sistem de reprezentanți asociat relației " $\rho$ ". Într-adevăr, fie  $(C_i)_{i\in I}$  mulțimea tuturor claselor de echivalență asociate relației " $\rho$ ". Cum  $C_i \neq \emptyset$  oricare ar fi  $i \in I$ , conform axiomei alegerii există o familie de elemente  $(a_i)_{i\in I}$  astfel încât  $a_i \in C_i$ , oricare ar fi  $i \in I$ . Evident că  $(a_i)_{i\in I}$  este un sistem de reprezentanți pentru relația " $\rho$ ". Trebuie să observăm că acest sistem de reprezentanți nu este unic.

Dacă  $(a_i)_{i\in I}$  este un sistem de reprezentanți relativ la relația "p", din Teorema 4.2 rezultă că  $A = \bigcup [a_i]$  iar mulțimile  $[a_i]$ ,  $i \in I$ , sunt disjuncte două câte două.  $i \in I$ 

**Exemplu.** Pe mulțimea **Z** a numerelor întregi considerăm relația "~":

$$a \sim b \Leftrightarrow |a| = |b|$$
.

Se observă imediat că "~" este o relație de echivalență pe **Z**. Dacă  $a \in \mathbf{Z}$  avem:  $[a] = \{a, -a\}$ , dacă  $a \neq 0$  și  $[a] = \{0\}$ , dacă a = 0. Un sistem de reprezentanți poate fi considerat sistemul de numere: 0, 1, 2, 3, ..., adică mulțimea numerelor naturale **N**. Un alt sistem de reprezentanți poate fi considerat și sistemul de numere 0, -1, -2, -3, ..., adică mulțimea numerelor întregi negative.

**Definiția 4.4.** Dată relația de echivalență " $\rho$ " pe A, mulțimea claselor de echivalență determinate de " $\rho$ " pe A se notează cu A/ $\rho$  și se numește *mulțimea factor* (sau *mulțimea cât*) a lui A prin relația " $\rho$ ". Funcția p : A  $\rightarrow$  A/ $\rho$ , p(a) = [a], este o funcție surjectivă și se numește *proiecția* (*surjecția*) *canonică* a lui A pe mulțimea factor A/ $\rho$ .

**Definiția 4.5.** O *partiție* a unei mulțimi nevide A este <u>o familie de submulțimi</u> nevide disjuncte două câte două ale lui A și a cărei reuniune este A.

**Exemplu.** Mulțimile  $A_n = \{2n, 2n + 1\}, n \in \mathbb{N}$ , formează o partiție a lui  $\mathbb{N}$ .

Mulţimea factor  $A/\rho$  este o partiţie a lui A, deci o relaţie de echivalenţă pe A dă naştere unei partiţii. Reciproc, dacă  $(A_i)_{i\in I}$  este o partiţie a lui A definim o relaţie de echivalenţă pe A astfel: a  $\sim$  b dacă şi numai dacă există i  $\in$  I astfel încât a, b  $\in$   $A_i$ . Clasele de echivalenţă ale lui " $\sim$ " sunt chiar submulţimile  $A_i$ . Aşadar putem enunţa următorul rezultat:

**Propoziția 4.6.** Dacă A este o mulțime nevidă, atunci asocierea  $\rho \to A/\rho$  definește o bijecție de la mulțimea relațiilor de echivalență pe A la mulțimea partițiilor lui A. *Demonstrație*. Exercițiu.

**Definiția 4.7.** Fie  $f: A \to B$  o funcție. Definim pe A o relație  $\rho_f$  astfel:

$$a \rho_f a' \Leftrightarrow f(a) = f(a').$$

ρ<sub>f</sub> se numește *relația asociată funcției f*.

Se observă că  $\rho_f$  este o relație de echivalență pe A, iar mulțimea factor  $A/\rho_f$  se descrie astfel:

$$A/\rho_f = \{ f^{-1}(b) \mid b \in Im f \}.$$

**Exemplu.** Relația de echivalență pe **R** asociată funcției  $f: \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ ,  $f(x) = \cos(2\pi x) + i\sin(2\pi x)$  este următoarea:  $x \rho_f y$  dacă și numai dacă  $x - y \in \mathbf{Z}$ .

În general, orice relație de echivalență este asociată unei funcții. Mai precis, dacă  $\rho$  este o relație de echivalență pe o mulțime nevidă A, iar p : A  $\rightarrow$  A/ $\rho$  este *proiecția* (surjecția) canonică, atunci  $\rho = \rho_p$ .

**Teorema 4.8.** (<u>Proprietatea de universalitate a mulțimilor factor</u>) Fie A o mulțime nevidă și " $\rho$ " o relație de echivalență pe A. Fie  $f: A \to B$  o funcție și " $\rho_f$ " relația de echivalență pe A asociată funcției f. Dacă  $\rho \subseteq \rho_f$ , atunci există o unică funcției  $\overline{f}: A/\rho \to B$  cu proprietatea că  $\overline{f}$  o p = f. Mai mult:

- 1)  $\overline{f}$  este injectivă  $\Leftrightarrow \rho = \rho_f$ .
- 2)  $\overline{f}$  este surjectivă  $\Leftrightarrow$  f este surjectivă.

Demonstrație. Definim  $\overline{f}: A/\rho \to B$  astfel:  $\overline{f}([a]) = f(a)$ . Mai întâi vom arăta că funcția este bine definită, adică [a] = [b] implică f(a) = f(b). Deoarece [a] = [b] rezultă că a  $\rho$  b și cum  $\rho \subseteq \rho_f$  obținem a  $\rho_f$  b, deci  $\underline{f}(a) = f(b)$ . Este clar acum că  $\overline{f}$  o p = f. Din această relație rezultă și unicitatea funcției  $\overline{f}$ .

- 1)  $\overline{f}$  este injectivă dacă și numai dacă  $\overline{f}([a]) = \overline{f}([b]) \Rightarrow [a] = [b]$ . Dar  $\overline{f}([a]) = \overline{f}([b]) \Leftrightarrow f(a) = f(b) \Leftrightarrow a \rho_f b$  și ca să obținem [a] = [b] trebuie ca  $\rho_f \subseteq \rho$ , deci egalitate.
  - 2) Se observă că Im  $\overline{f} = \text{Im } f$ .

Corolarul 4.9. Fie A o mulțime nevidă și  $f: A \to B$  o funcție surjectivă. Atunci există o funcție bijectivă  $\overline{f}: A/\rho_f \to B$ .