1. Care este cel mai mare ordin posibil al unei permutări din S_5?

Câte permutări din S_5 au acest ordin?

Fie $\sigma \in S_5$, $\sigma \neq e$ $\Rightarrow \sigma = \sigma_1 \ldots \sigma_r$, unde $r \in \mathbb{N}^*$ și $\sigma_1 \ldots \sigma_r$ sunt cicluri disjuncte.

$O_1, \ldots, O_r$ orbitele lui $\sigma_1, \ldots, \sigma_r$ (disjuncte)

$O_1 \cup \ldots \cup O_r \subset \{1, \ldots, 5\}$

$$o(\sigma) = [o(\sigma_1), \ldots, o(\sigma_r)]$$

$$\left.\sum_{i=\overline{1,r}} \underbrace{|O_i|}_{\geq 2} \leq 5 \right| \Rightarrow r \leq 2$$

Cazul I.

$r = 1 \Rightarrow o(\sigma) = |o(\sigma)| \leq 5$

$\Downarrow$ $\Uparrow$

σ ciclu

Cazul II.

$r = 2 \Rightarrow o(\sigma) = |O_1| = |O_2| = 2 \Rightarrow o(\sigma) = 2$

sau

$|O_1| = 3$ și $|O_2| = 2 \Rightarrow o(\sigma) = 6$

Cum numărăm câte sunt?

$(b\ c\ a) = (a\ b\ c)(d\ e)$

$\parallel$

$(c\ a\ b)$

Aleg $\{d, e\} \rightarrow C_5^2 \cdot 2$ moduri

$\frac{5 \cdot 4}{2} \cdot 2 = 20$ de permutări cu ordinul 6

$|\{a,b,c\}| = 3$

$(\underline{a}\ b\ c)$

$(\underline{a}\ c\ b)$

Dacă deg $\{1,2\}$

$$\frac{(3\ 5)(1\ 2)}{(3\ 5\ 4)(1\ 2)}$$

$\{2,4\}$

$(1\ 3\ 5)(2\ 4)$

$(1\ 5\ 3)(2\ 4)$

2. Fie $\mathbb{Z}[i] = \{a+bi \mid a,b \in \mathbb{Z}\}$. Arătați că $(\mathbb{Z}[i],+,\cdot)$ inel. Calculați $U(\mathbb{Z}[i])$.

ale numerelor complexe

Pentru a arăta ca A este inel, arătăm că este subinel într-o mulțime mai mare.

$\underset{\text{subinel}}{A \subset} \underset{\text{inel}}{B}$

$\mathbb{Z}[i] \overset{\text{subinel}}{\subset} \mathbb{C}$

inel

Dacă $x,y \in \mathbb{Z}[i] \Rightarrow \begin{cases} x-y \in \mathbb{Z}[i] \\ xy \in \mathbb{Z}[i] \\ 1 \in \mathbb{Z}[i] \end{cases}$

Fie $x=a+bi$, $y=c+di$, unde $a,b,c,d\in\mathbb{Z}$

$$x-y=a+bi-(c+di)=\underbrace{(a-c)}_{\in\mathbb{Z}}+\underbrace{(b-d)}_{\in\mathbb{Z}}i\in\mathbb{Z}[i]$$

$$xy=(a+bi)(c+di)=ac+adi+bci+bdi^2$$
$$=\underbrace{(ac-bd)}_{\in\mathbb{Z}}+i\underbrace{(ad+bc)}_{\in\mathbb{Z}}\in\mathbb{Z}[i]$$

$$1=1+0\cdot i\in\mathbb{Z}[i]$$

Deci $\mathbb{Z}[i]$ este subinel al lui $\mathbb{C}$ $\Rightarrow$ $(\mathbb{Z}[i],+,\cdot)$ este inel

$$\left(\begin{array}{l} U(\mathbb{Z})=\{1,-1\} \\ a\in U(\mathbb{Z})\Rightarrow(\exists)\ b\in\mathbb{Z}\ \ ab=1\Rightarrow\underbrace{|a|}_{=1}\underbrace{|b|}_{=1}=1 \end{array}\right)$$

$$U(\mathbb{Z}[i])=\{1,-1,i,-i\}$$

$$(i\cdot(-i)=1)$$

Trebuie să demonstrăm că nu mai sunt alte elemente inversabile în afară de acestea.

Fie $x\in U(\mathbb{Z}[i])\Rightarrow(\exists)\ y\in\mathbb{Z}[i]$ cu $xy=1$ $\Rightarrow$

$$|\alpha+\beta i|=\sqrt{\alpha^2+\beta^2},\ \alpha,\beta\in\mathbb{Z}\qquad |\alpha+\beta i|^2\in\mathbb{N}$$

$$\Rightarrow |x|\cdot|y|=1$$

$$\Rightarrow \underbrace{|x|^2}_{\in\mathbb{N}}\cdot\underbrace{|y^2|}_{\in\mathbb{N}}=1$$

$\Rightarrow |x^2| = 1$

$\Rightarrow |x| = 1$

$x = a + bi$; $a, b \in \mathbb{Z}$

$a^2 + b^2 = 1$

Soluții: $a = 1, b = 0 \Rightarrow x = 1$

$a = -1, b = 0 \Rightarrow x = -1$

$a = 0, b = 1 \Rightarrow x = i$

$a = 0, b = -1 \Rightarrow x = -i$

3. Să se determine toate morfismele de inele $f : \mathbb{Z}[i] \to \mathbb{Z}[i]$.

$$\left(\begin{array}{l} f(x+y) = f(x) + f(y) \\ f(xy) = f(x) \cdot f(y) \\ f(1) = 1 \end{array} \right)$$

$f(m) = m,\ (\forall)\, m \in \mathbb{Z}$

$f(a + bi) = f(a) + f(b) \cdot f(i) = a + b \cdot f(i)$

$f(i) = c + di,\ c, d \in \mathbb{Z}$

$f(i^2) = f(-1) = -1$

$f(i)^2 = (c + di)^2 = c^2 + 2cdi - d^2$

Trebuie ca $f(i^2) = f(i)^2$

$\Rightarrow c^2 - d^2 + 2cdi = -1$

$$\Rightarrow \begin{cases} c^2 - d^2 = -1 \\ 2cd = 0 \Rightarrow c = 0 \text{ sau } d = 0 \end{cases}$$

Pentru $c=0 \Rightarrow d^2=1 \Rightarrow d=\pm 1$

Pentru $d=0 \Rightarrow c^2=-1$, imposibil $(c\in\mathbb{Z})$

$\Rightarrow f(i)=\pm i$

C I. $f(i)=i \Rightarrow f(a+bi)=a+bi$

C II. $f(i)=-i \Rightarrow f(a+bi)=a-bi$

$f(x)=\overline{x}, (\forall) x\in\mathbb{Z}[i]$

Demonstrăm că este morfism de inele.

$f(x+y)=\overline{x+y}=\overline{x}+\overline{y}=f(x)+f(y)$

$f(xy)=\overline{xy}=\overline{x}\cdot\overline{y}=f(x)\cdot f(y)$; $f(1)=1$

Deci $(\exists)$ 2 morfisme de inele $f:\mathbb{Z}[i]\to\mathbb{Z}[i]$.

4. $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]=\{a+b\sqrt{2} \mid a,b\in\mathbb{Z}\}$

Morfismele de inele $f:\mathbb{Z}[\sqrt{2}]\to\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$?

$f(a+b\sqrt{2})=f(a)+f(b)\cdot f(\sqrt{2})$
$=a+b\, f(\sqrt{2})$

$f(\sqrt{2})^2=f(\sqrt{2}^2)=f(2)=2$

$\Rightarrow f(\sqrt{2})\in\{\sqrt{2},-\sqrt{2}\}$

Caz 1. $f(\sqrt{2})=\sqrt{2} \Rightarrow f=\mathrm{Id}$

Caz 2. $f(\sqrt{2})=-\sqrt{2}$

$f(a+b\sqrt{2})=a-b\sqrt{2}$
4 morf. de inele

Fie $x = a + b\sqrt{2}$, $y = c + d\sqrt{2}$

$$f(x+y) = f(a+c+\sqrt{2}(b+d))$$
$$= (a+c) - \sqrt{2}(b+d)$$
$$= a - b\sqrt{2} + c - d\sqrt{2}$$
$$= f(x) + f(y)$$

$$f(xy) = f(ac + 2bd + (ad+bc)\sqrt{2})$$
$$= ac + 2bd - \sqrt{2}(ad+bc)$$

$$f(x)\cdot f(y) = (a - b\sqrt{2})(c - d\sqrt{2})$$
$$= ac - ad\sqrt{2} + 2bd - bc\sqrt{2}$$
$$= ac + 2b - \sqrt{2}(ad+bc)$$

5. Arătați că $|U(\mathbb{Z}[\sqrt{2}])|$ este infinită.

$$(3 - 2\sqrt{2})(3 + 2\sqrt{2}) = 1$$

R inel comutativ

$(U(R), \cdot)$ grup

$a, b \in U(R)$

$\Downarrow$

$ab \in U(R)$

$$(ab)\cdot(b^{-1}\cdot a^{-1}) = 1$$

$U(\mathbb{Z}[\sqrt{2}])$

$\cup$

$a = 3 + 2\sqrt{2}$

$\Downarrow$

$a^2, a^3, \ldots \in U(\mathbb{Z}[\sqrt{2}])$

$a, a^2, a^3, \ldots$

$U(\mathbb{Z}[i])$

$i, \underset{-1}{\underset{\|}{i^2}}, \underset{-i}{\underset{\|}{i^3}}, \underset{1}{\underset{\|}{i^4}}, i, -1, -i, 1$

$(\exists)\ n \in \mathbb{N}^*$ cu $a^n = 1$? NU!

$3+2\sqrt{2} > 1$

$\Downarrow$

$(3+2\sqrt{2})^n > 1, \ (\forall)\ n \in \mathbb{N}^*$

$o(3+2\sqrt{2}) = \infty$

$\Rightarrow$ mulţimea este infinită.

6. R inel comutativ

I ideal în R

$$\begin{cases} x, y \in I \Rightarrow x - y \in I \\ r \in R, x \in I \Rightarrow rx \in I \end{cases}$$

I, J ideale $\Rightarrow I + J = \{a + b \mid a \in I, b \in J\}$ ideal

$I + J$ ideal

$a+b, c+d \in I+J$: $(a+b) - (c+d) = \underset{\in I}{(a-c)} + \underset{\in J}{(b-d)} \in I+J$

$a, c \in I, b, d \in J$

$\underset{\in I}{a} + \underset{\in J}{b} \in I+J$: $r(a+b)$

$r \in R$

$= \underset{\in I}{ra} + \underset{\in J}{rb} \in I+J$

$$IJ = \{ x_1y_1 + \ldots + x_my_m \mid m \in \mathbb{N}^*, x_1, \ldots, x_m \in I, y_1, \ldots, y_m \in J \}$$

<u>IJ ideal</u>

Fie $u, v \in IJ \overset{?}{\Rightarrow} u - v \in IJ$

$u = x_1y_1 + \ldots + x_my_m$, $m \in \mathbb{N}^*$, $x_1, \ldots, x_m \in I$, $y_1, \ldots, y_m \in J$

$v = x_1'y_1' + \ldots + x_m'y_m'$, $m \in \mathbb{N}^*$, $x_1', \ldots, x_m' \in I$, $y_1', \ldots, y_m' \in J$

$u - v = x_1y_1 + \ldots + x_my_m + (-x_1')y_1' + \ldots + (-x_m')y_m'$

$\Rightarrow u - v \in IJ$

Fie $r \in R$, $u \in IJ \Rightarrow ru \in IJ$

$$ru = rx_1y_1 + \ldots + rx_my_m =$$
$$= \underset{\in I}{(rx_1)}\underset{\in J}{y_1} + \ldots + \underset{\in I}{(rx_m)}\underset{\in J}{y_m} \in IJ$$

7. Dacă $I = (a) = \{ra \mid r \in R\}$ și $J = (b)$, atunci $IJ = (ab)$.

"$\supseteq$": $x \in (ab) \Rightarrow (\exists) r \in R$ a.î. $x = rab$

$$\Rightarrow x = \underbrace{(ra)}_{\substack{x_1 \\ \in I}}\underbrace{b}_{\substack{y_1 \\ \in J}} \in IJ$$

"$\subseteq$": $x_1 = r_1a, \ldots, r_ma = x_m$ $\quad r_1, \ldots, r_m \in R$

$y_1 = s_1b, \ldots, s_mb = y_m$ $\quad s_1, \ldots, s_m \in R$

$$\Rightarrow x_1 y_1 + \dots + x_m y_m = r_1 s_1 a + \dots + r_m s_m a =$$
$$= (r_1 s_1 + \dots + r_m s_m) a \in (a)$$