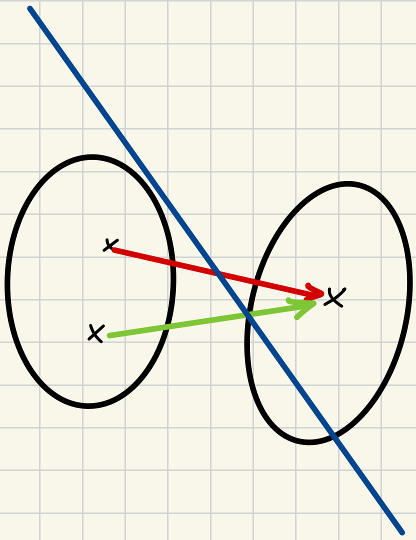
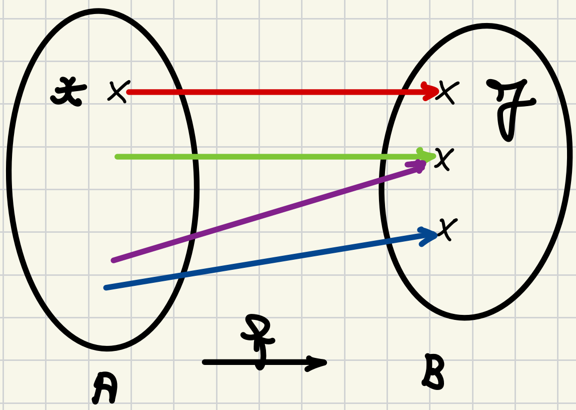
Funcții injective, surjective, bijective

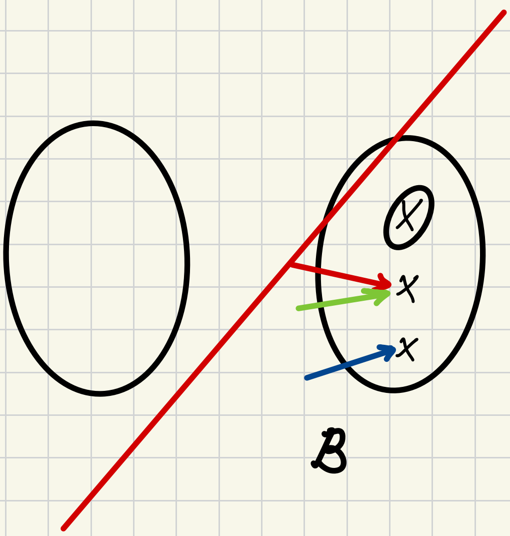
Def.: O funcție $f: A \to B$ s.n. **injectivă** dacă pt. orice $x_1, x_2 \in A$ cu $x_1 \neq x_2$ avem $f(x_1) \neq f(x_2)$.



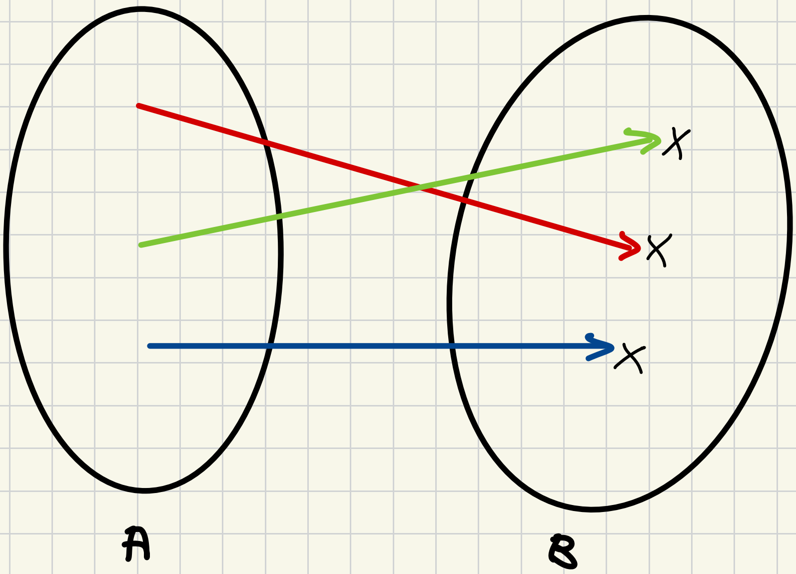
$\Leftrightarrow$ pt. orice $x_1, x_2 \in A$ cu $f(x_1) = f(x_2)$, avem $x_1 = x_2$.

Def.: O funcție $f: A \to B$ s.n. **surjectivă** dacă pt. orice $y \in B$ există $x \in A$ cu $f(x) = y$.





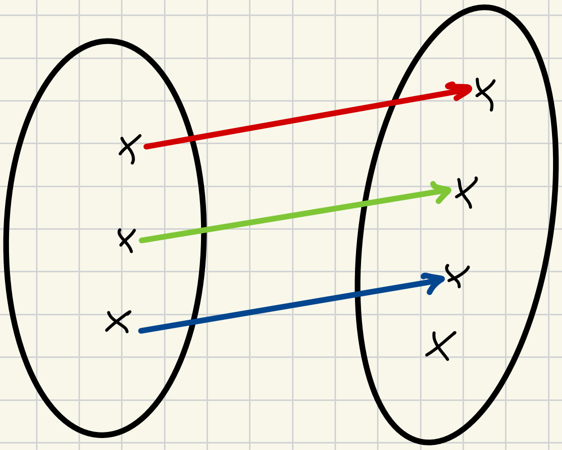
Def: O funcție $f: A \to B$ s.n. bijectivă dacă este injectivă și surjectivă.



$\Leftrightarrow$ pt. orice $y \in B$ există un unic $x \in A$ cu $y = f(x)$.

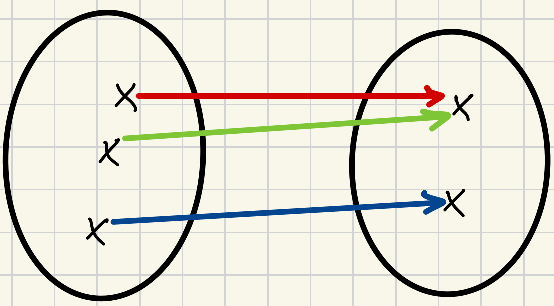
Exemple:

i)



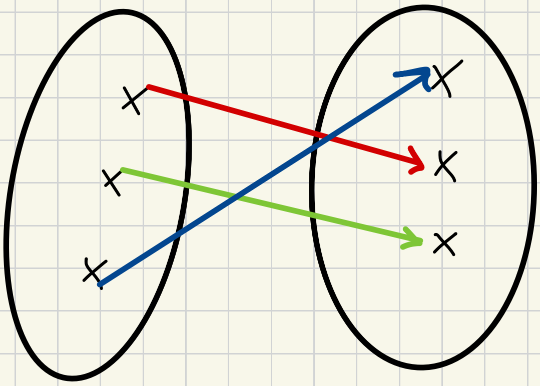
injectivă, dar nu surjectivă

ii)



surjectivă, dar nu injectivă

iii)



Bijectivă

Propoziție: Fie $f: A \to B$, $g: B \to C$ funcții. Atunci:

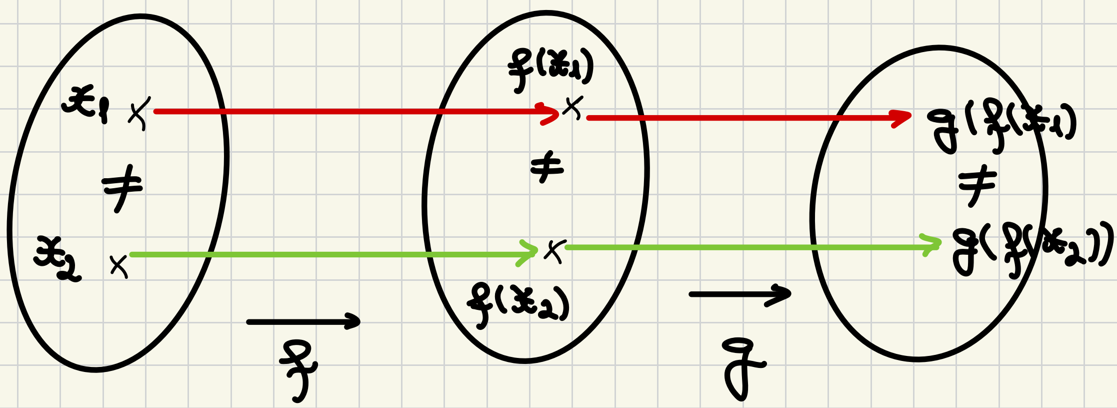
1) f, g injective $\Rightarrow g \circ f$ injectivă
2) f, g surjective $\Rightarrow g \circ f$ surjectivă
3) f, g bijective $\Rightarrow g \circ f$ bijectivă
4) $g \circ f$ injectivă $\Rightarrow f$ injectivă
5) $g \circ f$ surjectivă $\Rightarrow g$ surjectivă

Dem.:

1) Fie $x_1, x_2 \in A$ cu $(g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2)$.
Arăt că $x_1 = x_2$.

$$(g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2) \Rightarrow g(f(x_1)) = g(f(x_2))$$

$$\xrightarrow{g \text{ injectivă}} f(x_1) = f(x_2) \xrightarrow{f \text{ injectivă}} x_1 = x_2$$



2) Fie $y \in C$. Arăt că există $x \in A$ cu $(g \circ f)(x) = y$.

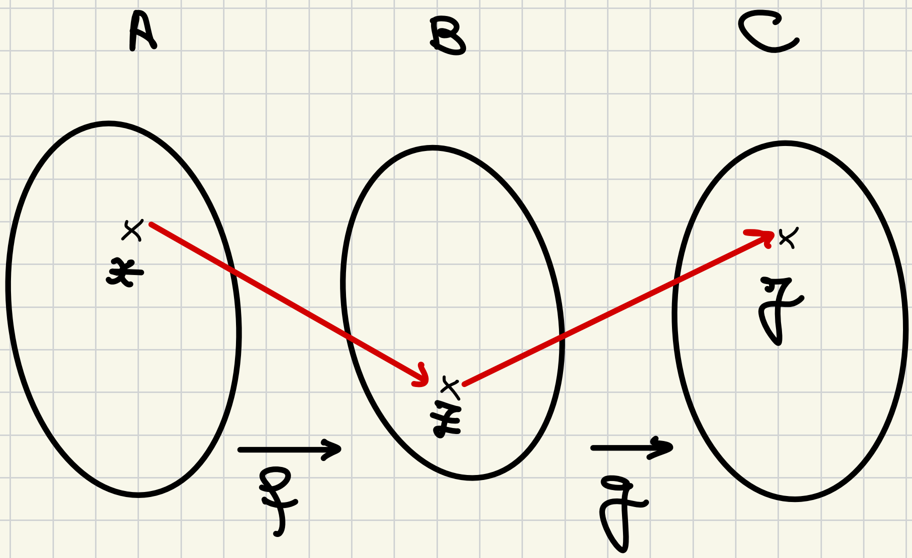
$g(f(x))$

g surjectivă $\Rightarrow (\exists)\ z \in B$ cu $g(z) = y$.

Aleg un astfel de z.

f surjectivă $\Rightarrow (\exists)\ x \in A$ cu $f(x) = z$.

Atunci $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(z) = y$.



3) $\Leftarrow$ 1) + 2)

4) Presupunem $g \circ f$ injectivă.

Fie $x_1, x_2 \in A$ cu $f(x_1) = f(x_2)$.

Vrem $x_1 = x_2$.

$$f(x_1) = f(x_2) \xRightarrow{g} \underbrace{g(f(x_1))}_{(g \circ f)(x_1)} = \underbrace{g(f(x_2))}_{(g \circ f)(x_2)}$$

Cum $g \circ f$ injectivă

$\Downarrow$

$x_1 = x_2 \Rightarrow f$ injectivă

5) Presupunem $g\circ f$ surjectivă.

Fie $z\in C$. Caut $y\in B$ cu $g(y)=z$.

$$\left.\begin{array}{l} g\circ f: A\to C \text{ surj.} \\ z\in C \end{array}\right\} \Rightarrow (\exists)\ x\in A \text{ cu } (g\circ f)(x)=z$$

$$\Rightarrow g(f(x))=z$$

Iar $y=f(x)$.

Exercițiu: Dați exemplu de f și g cu:

- $g\circ f$ injectivă, g neinjectivă
- $g\circ f$ surjectivă, f nesurjectivă

ex.: A mulțime $\neq \emptyset \Rightarrow 1_A: A\to A$ bijectivă

Def.: O funcție $f: A\to B$ s.n. **inversabilă** dacă există o funcție $g: B\to A$ a.î. $g\circ f = 1_A$ și $f\circ g = 1_B$.

Teoremă: Fie $f: A\to B$ o funcție. Atunci:

1) f este **injectivă** $\Leftrightarrow$ există o funcție $g: B\to A$ cu $g\circ f = 1_A$

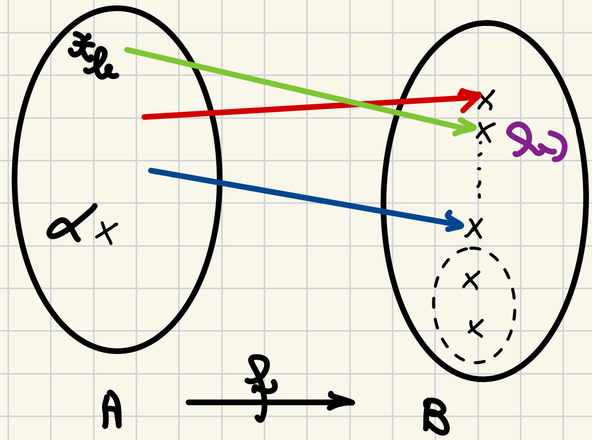
2) f este **surjectivă** $\Leftrightarrow$ există o funcție $h: B\to A$ cu $f\circ h = 1_B$

3) f este **bijectivă** $\Leftrightarrow$ f este **inversabilă**

Dem.:

1) „$\Leftarrow$": $\underset{\substack{\downarrow \\ \text{inj.}}}{g\circ f = 1_A} \xRightarrow[(4)]{\text{Prop. precedentă}} f$ injectivă

„$\Rightarrow$":



Pentru fiecare $y \in B$ pt. care există $x \in A$ cu $f(x) = y$, acest x este unic (deoarece f este inj.)

Notăm cu x_y acest element din A.

Alegem $\alpha \in A$, definim $g: B \to A$ prin

$$g(y) = \begin{cases} x_y, & \text{dacă există } x \in A \text{ cu } f(x) = y \\ \alpha, & \text{în caz contrar} \end{cases}$$

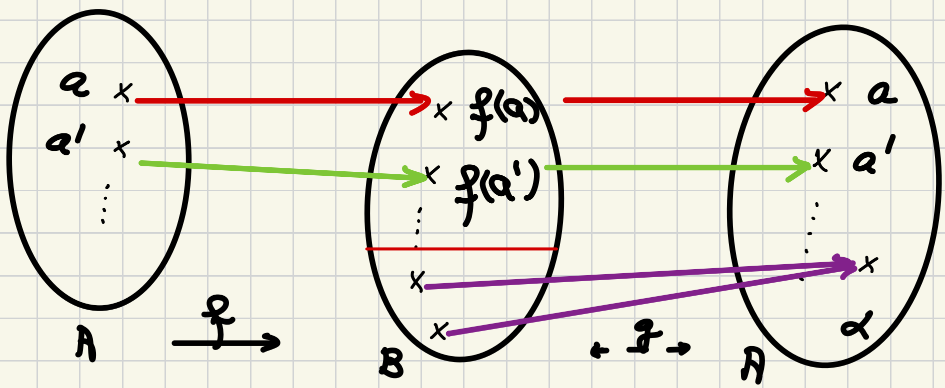
Pentru orice $a \in A$, avem:

$$(g \circ f)(a) = g(\underbrace{f(a)}_{= y}) = x_y = a$$

$x_y = a$

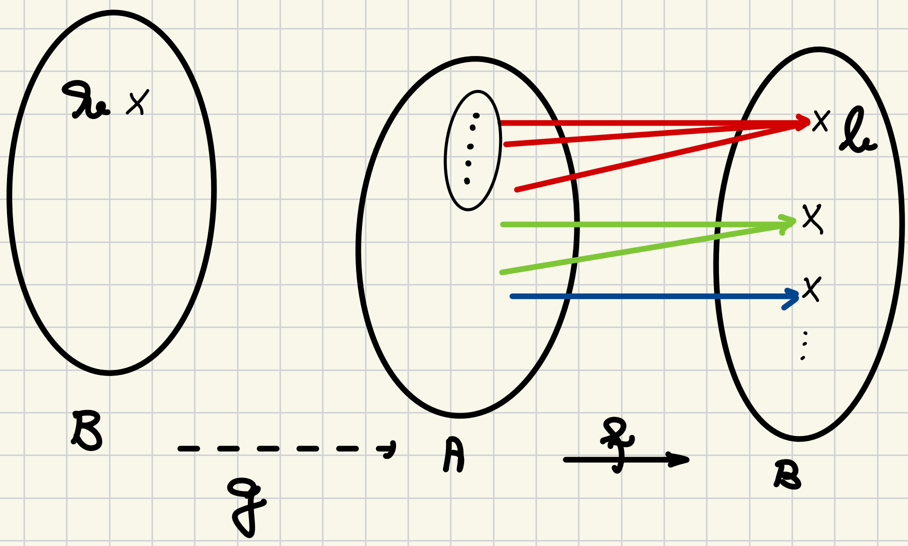
$\Downarrow$

$g \circ f = 1_A$



2) „<=": $\underbrace{f\circ h = 1_B}_{\text{surj.}} \xRightarrow{\text{Prop. 5)}} f$ surjectivă

„=>":



Pentru fiecare $b\in B$ există $x\in A$ cu $f(x)=b$
(posibil mai mulți astfel de x)
Alegem un x_b dintre acești x.

$$f(x_b)=b$$

Definim $h:B\to A$ prin $h(b)=x_b$ pt. orice $b\in B$.
Atunci pt. orice $b\in B$

$$(f\circ h)(b) = f(h(b)) = f(x_b) = b \Rightarrow f\circ h = 1_B$$

3) „<=": Din prop. 4) + 5) $\Rightarrow f$ este bijectivă

„=>":
f bij. $\begin{cases} f \text{ inj.} \overset{(1)}{\Longrightarrow} (\exists)\, g: B\to A \text{ cu } g\circ f = 1_A \\ f \text{ surj.} \overset{(2)}{\Longrightarrow} (\exists)\, h: B\to A \text{ cu } f\circ h = 1_B \end{cases}$

Acum $\boxed{\underline{g} = g\circ 1_B = g\circ(f\circ h) = (g\circ f)\circ h = 1_A\circ h = \underline{h}}$

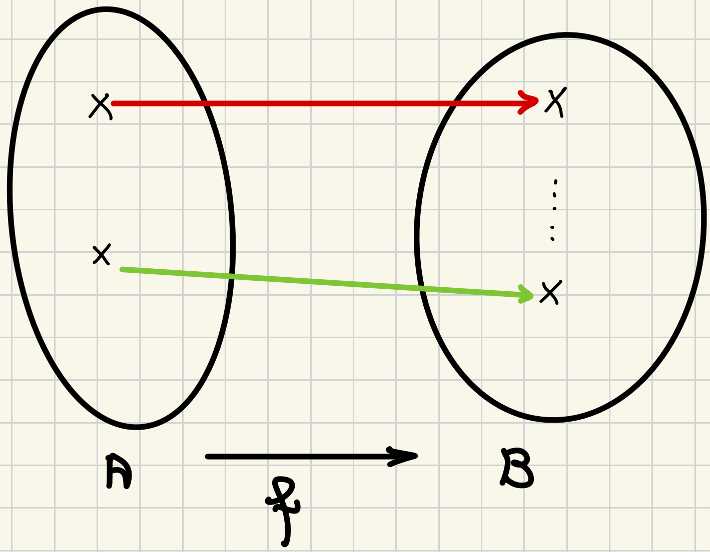
$\Rightarrow f$ este inversabilă (*)

Observație! Dacă $f: A \to B$ este bijectivă (inversabilă), atunci funcția $g: B \to A$ din definiția inv. este unic determinată.

Dacă $g, h: B \to A$ și $\begin{matrix} g \circ f = 1_A, & f \circ g = 1_B, \\ h \circ f = 1_A, & f \circ h = 1_B \end{matrix}$, atunci

$\xrightarrow{(*)} g = h.$

Această g, unic determinată, s.n. **inversa funcției f** și se notează f^{-1}.



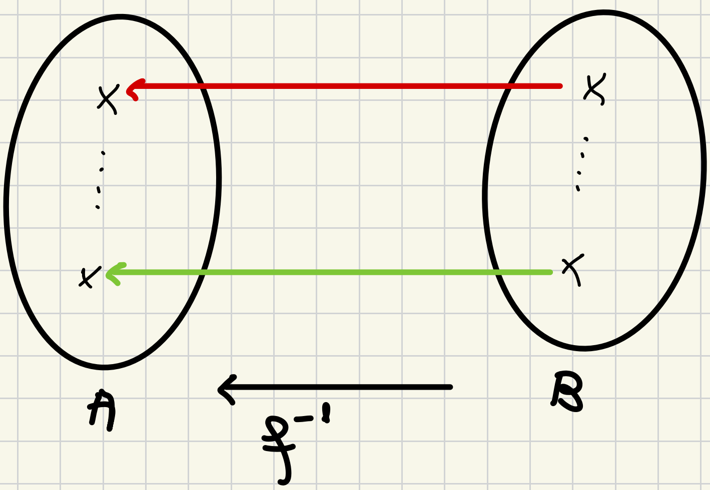


Diagrama lui f^{-1}: schimb sensul săgeților în diagrama lui f

Exerciții:

1. $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ $\Big|$ $\Rightarrow (g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$

f, g bijective

2. A, B mulțimi finite, $|A| = n$, $|B| = m$, $n, m \in \mathbb{N}^*$

i) Câte funcții $f: A \to B$ există?

ii) ------ funcții injective

iii) ------ funcții surjective

iv) ------ funcții bijective

3. Fie A, B mulțimi nevide. Atunci există $f: A \to B$ injectivă $\Leftrightarrow$ există $g: B \to A$ surjectivă.

„Mărimea" mulțimilor

Fie A, B mulțimi finite $(\neq \emptyset)$.

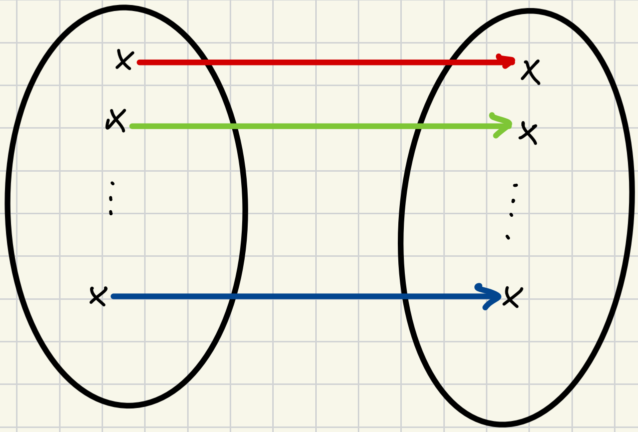
$|A| = n, \ |B| = m$

(I) A și B au același număr de elemente

$n = m$

(II) B are cel puțin atâtea elemente ca A

$n \leq m$



<u>Def.</u>: Fie A, B mulțimi nevide (oarecare). Spunem că:

(1) A și B sunt echipotente (notăm $A \sim B$) dacă $(\exists)$ $f: A \to B$ bijectivă (A și B au „aceeași mărime").

(2) $A \leq B$ dacă $(\exists)$ o funcție injectivă $f: A \to B$ (B este cel puțin la fel de mare ca A).

(3) $A < B$ dacă $A \leq B$ și $A \nsim B$ (i.e. nu este adevărat că $A \sim B$).

Observație! Se poate că $A \subset B$, $A \neq B$, dar $A \sim B$.

ex.: $\mathbb{N}^* \subsetneq \mathbb{N}$ $\qquad$ $\mathbb{N}^* \sim \mathbb{N}$ $\quad f: \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}, \ f(x) = x - 1$

Exerciții: A, B, C mulțimi nevide. Atunci:

1) $A \sim A$

2) $A \sim B \Rightarrow B \sim A$

3) $A \sim B$ și $B \sim C \Rightarrow A \sim C$

4) $A \leq A$

5) $A \leq B$ și $B \leq C \Rightarrow A \leq C$

6)** (Teorema Cantor-Schröder-Bernstein)

$A \leq B$, $B \leq C$, $A \sim C \Rightarrow A \sim B$

7)** $A \leq B$ și $B \leq A \Rightarrow A \sim B$

Mulțimi infinite și mulțimi numărabile

Def.:

1) A **finită** dacă $A = \emptyset$ sau $A \sim \{1, \dots, n\}$ pt. un $n \in \mathbb{N}^*$

2) A **infinită** dacă nu este finită

3) A **numărabilă** dacă $A \sim \mathbb{N}$

$f : \mathbb{N} \to A$ bij.

Elem. lui A se pot organiza într-un șir infinit (fără repetiții)

$f(0), f(1), f(2), \dots$, cu $f(i) \neq f(j)$, pt. orice $i \neq j$

Propoziție: Fie A o mulțime infinită. Atunci A are o submulțime numărabilă, în particular $\mathbb{N} \leq A$.

Dem.: $A \neq \emptyset \Rightarrow (\exists)\, x_0 \in A$.

A infinită $\Rightarrow A \setminus \{x_0\} \neq \emptyset$

Alegem $x_1 \in A \setminus \{x_0\}$

$A \setminus \{x_0, x_1\} \neq \emptyset$ (A infinită)

Alegem $x_2 \in A \setminus \{x_0, x_1\}$

Continui recurent $\Rightarrow$

$x_0, x_1, \dots$ de el. din A

cu $x_i \neq x_j$, $\forall\, i \neq j$

Atunci $X = \{x_0, x_1, \dots\} \subset A$

$\downarrow$

numărabilă