Propoziție: Fie A o mulțime nevidă. Următoarele afirmații sunt echivalente:

1) A este finită
2) Orice funcție injectivă $f: A \to A$ este bijectivă
3) Orice funcție surjectivă $f: A \to A$ este bijectivă

Dem.: 1) $\Rightarrow$ 2) A finită

Fie $f: A \to A$ injectivă

$A = \{a_1, \dots, a_n\}$ $(n \in \mathbb{N}^*)$

$f(a_1), \dots, f(a_n)$ sunt oricare două distincte (f injectivă)

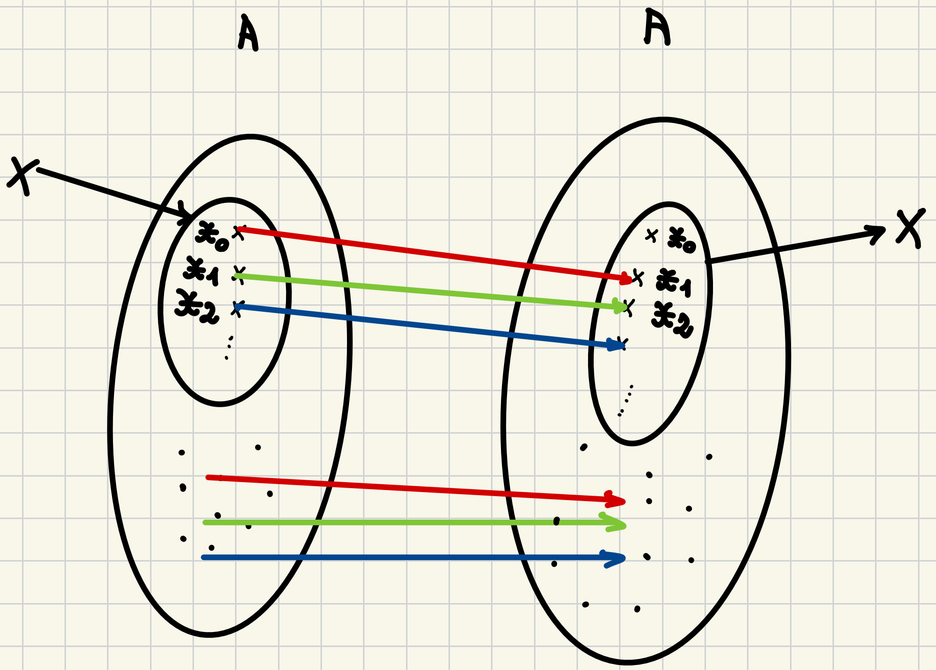
$$\underbrace{\{f(a_1), \dots, f(a_n)\}}_{n \text{ elemente}} \subset \underbrace{A}_{n \text{ elemente}} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \{f(a_1), \dots, f(a_n)\} = A \Rightarrow (\forall)\, x \in A, (\exists)\, 1 \leq i \leq n$ cu $x = f(a_i)$, adică f este și surjectivă, adică bijectivă

2) $\Rightarrow$ 1) Presupunem prin absurd că A ar fi infinită.

Din Prop. $\Rightarrow$ A are o submulțime numărabilă

$X = \{x_0, x_1, \dots\}$ (cu $x_i \neq x_j$ pt. orice $i \neq j$)



Fie $f: A \to A$ definită prin $f(x_i) = x_{i+1}$, pt. orice $i \in \mathbb{N}$

și

$f(a) = a, \forall a \in A \setminus X$

f injectivă

f nu este surjectivă ($x_0 \neq f(x)$ pt. orice $x \in A$)

f nu este bijectivă, contradicție cu 2)

Deci, A este finită.

1) => 3). Fie $f: A \to A$ surjectivă, $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$

f surjectivă $\Rightarrow \{f(a_1), \ldots, f(a_n)\} = A$

cel mult n elemente

$\downarrow$

eliminând eventualele repetiții

n elemente

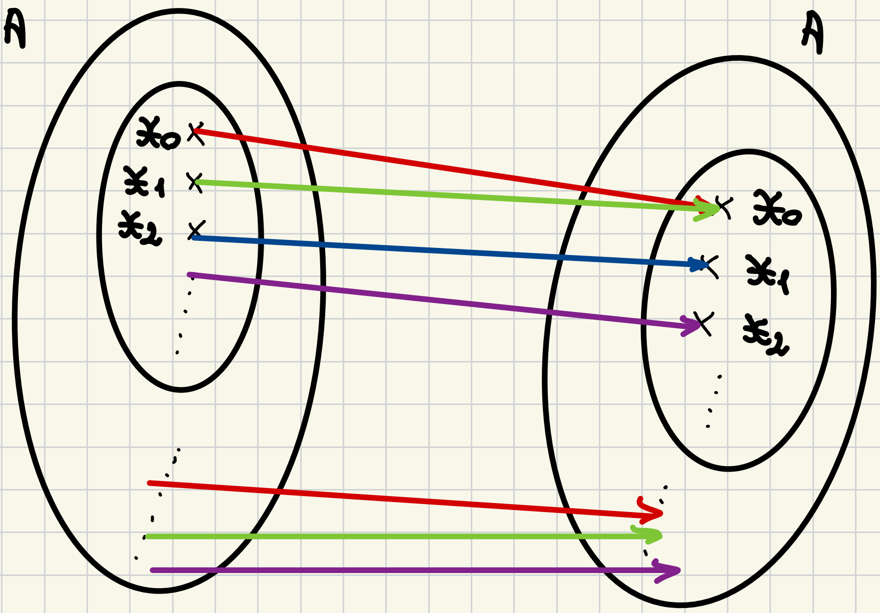
$\Downarrow$

nu există repetiții $\Rightarrow f$ injectivă

$\Rightarrow f$ bijectivă

3) ⇒ 1). Presupunem prin absurd că A este infinită.

Ca la 2) ⇒ 1), fie $X = \{x_0, x_1, \dots\} \subset A$



Fie $f: A \to A$ prin:

$f(x_0) = x_0$

$f(x_i) = x_{i-1}, \forall i \geq 1$

$f(a) = a, \forall a \in A \setminus X$

f surjectivă, f nu este injectivă

Contradicție! $(f(x_0) = f(x_1))$

⇒ A finită

Exercițiu: A infinită, F finită $\subset A \Rightarrow A \setminus F \sim A$

Propoziție: (1) A numărabilă, $X \subset A$, X infinită $\Big\} \Rightarrow X$ numărabilă

(2) A, B mulțimi numărabile ⇒

⇒ $A \cup B$ și $A \times B$ sunt numărabile

Dem.:

(1) $A=\{a_0, a_1, a_2, \dots\}$ $a_i \neq a_j, \forall i \neq j$

$X \subset A$

infinită

Fie i_0 cel mai mic $j \in \mathbb{N}$ cu $a_j \in X$

Fie i_1 cel mai mic $j \in \mathbb{N}$ cu $a_j \in X \setminus \{a_{i_0}\}$

(există pentru că altfel X are un singur element)

i_{m+1} ——— " ——— cu $a_j \in X \setminus \{a_{i_0}, \dots, a_{i_m}\}$

(există pentru că altfel X are $m+1$ elemente)

$X=\{a_{i_0}, a_{i_1}, \dots, a_{i_m}, \dots\}$

$i_0 < i_1 < \dots < i_m$

$\Rightarrow$ X numărabilă

(2) Fie $A=\{a_0, a_1, a_2, \dots\}$

$B=\{b_0, b_1, b_2, \dots\}$

Atunci $A \cup B = \{a_0, b_0, a_1, b_1, a_2, b_2, \dots\}$

posibil cu repetiții

Elimin toate dublurile

rămâne un șir infinit fără repetiții

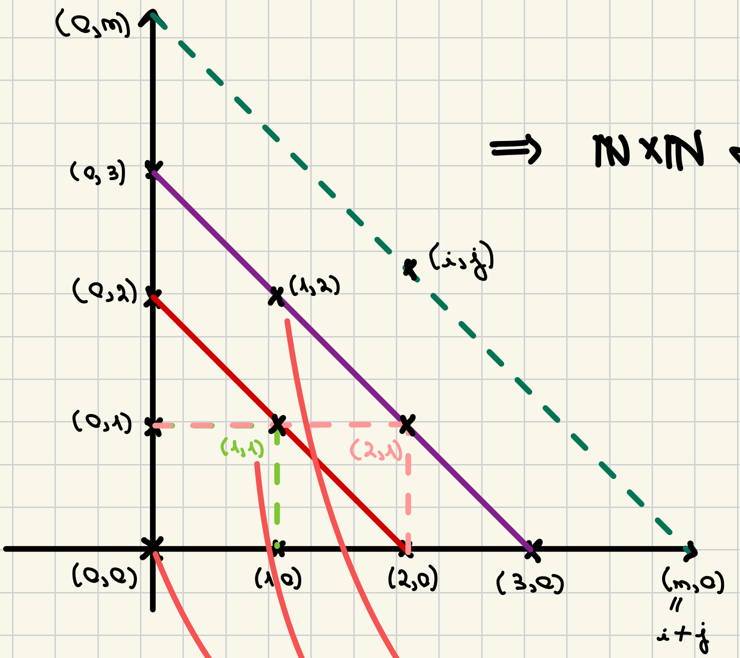
$\Rightarrow$ $A \cup B$ numărabilă

A, B numărabile $\Rightarrow \exists$ $f: A \to \mathbb{N}$ bijectivă și
$g: B \to \mathbb{N}$ bijectivă

Atunci $h: A \times B \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$

$h((a,b)) = (f(a), g(b))$, $(\forall) a \in A, b \in B$ este bijectivă (exercițiu)

$\Rightarrow A \times B \sim \mathbb{N} \times \mathbb{N}$



$\Rightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ numărabilă

$\Rightarrow A \times B$ numărabilă

$\underbrace{(0,0)}, \underbrace{(0,1), (1,0)}, \underbrace{(0,2), (1,1), (2,0)}, \ldots$

Exercițiu: Găsiți explicit o bijecție $f: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$.

Consecințe:

1) $\mathbb{Z}$ este numărabilă

$\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup B$ = numărabilă

$\mathbb{N}$ numărabilă; $B = \{-n \mid n \in \mathbb{N}\}$ numărabilă

$f: \mathbb{N} \to B$ bij., $f(n) = -n$

2) $\mathbb{Q}$ este numărabilă

Funcția $f: \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* \to \mathbb{Q}$

$$f((a,b)) = \frac{a}{b}$$

f surjectivă, f nu este injectivă $\quad (f(1,1) = f(2,2))$

$\Downarrow$

$(\exists)\ g: \mathbb{Q} \to \underbrace{\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*}_{\text{numărabilă}}$ injectivă

$$\mathbb{Q} \sim \underbrace{g(\mathbb{Q})}_{\text{infinită}} \subset \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* \Rightarrow g(\mathbb{Q}) \text{ numărabilă}$$

$\Downarrow$

$\mathbb{Q}$ numărabilă

Propoziție: $\mathbb{R}$ nu este numărabilă

Dem.: Arăt că $(0,1)$ nu este numărabilă.

Scrierea zecimală a unui $x \in (0,1)$

$$x = 0, c_1 c_2 c_3 \ldots\ldots\ldots = \left(\frac{c_1}{10} + \frac{c_2}{10^2} + \frac{c_3}{10^3} + \ldots \right)$$

(scriere unică)

$$c_1, c_2, c_3, \ldots \in \{0, 1, \ldots, 9\}$$

cu restricția $0, \ldots\ldots\ldots 999 \ldots\ldots$

Presupunem prin absurd că $(0,1)$ este numărabilă.

Fie $x_1, x_2, \ldots$ elementele ei (fără repetiții)

$$x_1 = 0, c_{11}\, c_{12}\, c_{13} \,----$$

$$x_2 = 0, c_{21}\, c_{22}\, c_{23} \,----$$

$$x_3 = 0, c_{31}\, c_{32}\, c_{33} \,----$$

$$-----------------$$

Alegem cifre $d_1, d_2, d_3, \dots$ a.î. $d_1 \neq c_{11}, 0, 9$

$d_2 \neq c_{22}, 0, 9$

$d_3 \neq c_{33}, 0, 9$

- - - - - - - - - -

Atunci $x = 0{,}d_1 d_2 d_3 \dots \in (0,1)$

$x \neq x_1$, pt. că $d_1 \neq c_{11}$

$x \neq x_2$, pt. că $d_2 \neq c_{22}$

- - - - - - - - - - - - - - - - - -

Contradicție! (x nu apare în listă)

Deci, $(0,1)$ nu este numărabilă.

Dacă $\mathbb{R}$ ar fi numărabilă $\Rightarrow (0,1)$ numărabilă

Contradicție!

Exercițiu: Găsiți $f : (0,1) \to \mathbb{R}$ bijectivă.

Exercițiu: $A_1, A_2, \dots$ numărabile $\Rightarrow \bigcup A_i$ numărabilă

$\mathbb{N} \sim \mathbb{Z} \sim \mathbb{Q}$

$\mathbb{N} < \mathbb{R}$

Propoziție: Fie A mulțime nevidă.

Atunci $A < \mathcal{P}(A)$, $\mathcal{P}(A) = \{X \mid X \subset A\}$

Dem.:

$f : A \to \mathcal{P}(A)$

$f(a) = \{a\}$, $\forall a \in A$

f injectivă

$\Rightarrow A \leq \mathcal{P}(A)$

Arăt că $A \nsim \mathcal{P}(A)$.

Presupunem prin absurd că există $g: A \to \mathcal{P}(A)$ bijectivă.

Fie $X = \{a \in A \mid a \notin g(a)\}$

$X \subset A$, deci $X \in \mathcal{P}(A)$

Cum g este surjectivă $\Rightarrow (\exists)\ x \in A$ cu $g(x) = X$

Avem două posibilități:

1) $x \in X \Rightarrow x \notin \underset{X}{\underset{\parallel}{g(x)}}$ Contradicție!

2) $x \notin X \Rightarrow x \in g(x) \xRightarrow[X]{\text{def. lui}} x \in X$ Contradicție!

Așadar, $A \not\sim \mathcal{P}(A)$.

Imagini și preimagini

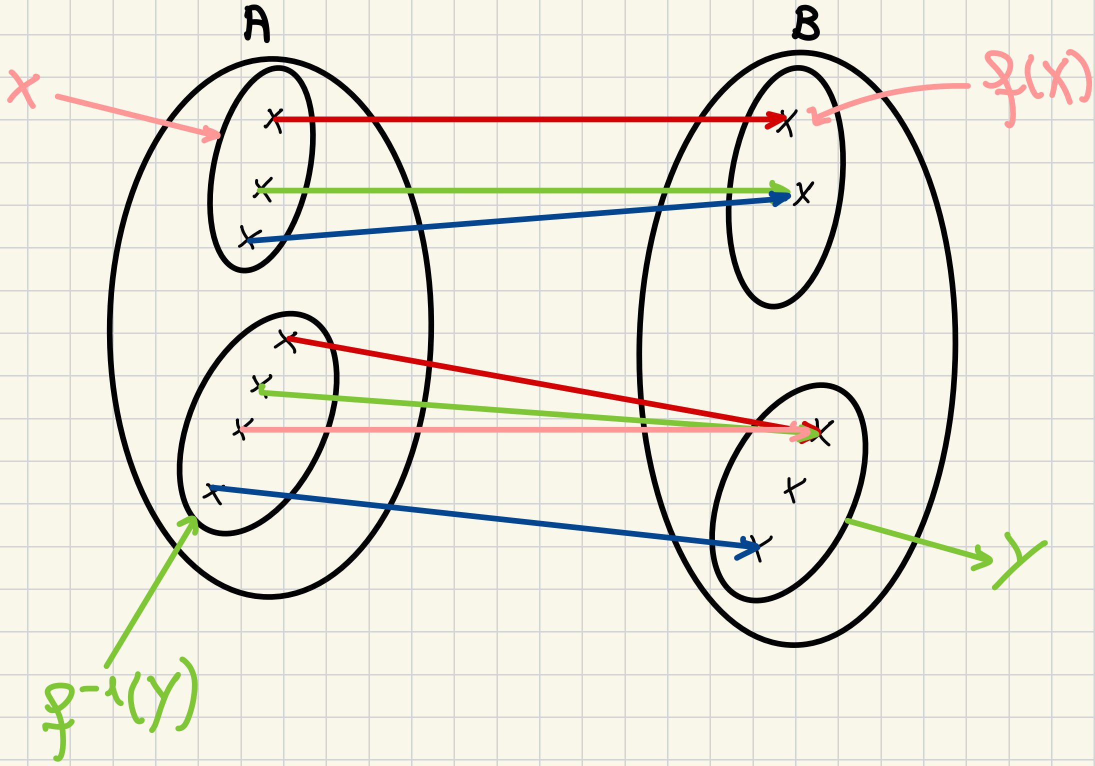
Def.: Fie $f: A \to B$ funcție.

(i) Dacă $X \subset A$, mulțimea $\{f(x) \mid x \in X\}$ se numește imaginea lui X prin f și se notează $f(X)$.

$[f(X) \subset B]$

(ii) Dacă $Y \subset B$, mulțimea $\{x \in A \mid f(x) \in Y\}$ se numește preimaginea (sau imaginea inversă) a lui Y prin f și se notează cu $f^{-1}(Y)$.

$(f^{-1}(Y) \subset A)$



Exercițiu: $f: A \to B$ funcție. Atunci:

(1) $X_1 \subset X_2 \subset A \Rightarrow f(X_1) \subset f(X_2)$

(2) $Y_1 \subset Y_2 \subset B \Rightarrow f^{-1}(Y_1) \subset f^{-1}(Y_2)$

(3) $X_1, X_2 \subset A \Rightarrow f(X_1 \cup X_2) = f(X_1) \cup f(X_2)$

(4) $Y_1, Y_2 \subset B \Rightarrow f^{-1}(Y_1 \cup Y_2) = f^{-1}(Y_1) \cup f^{-1}(Y_2)$

(5) $X_1, X_2 \subset A \Rightarrow f(X_1 \cap X_2) \subset f(X_1) \cap f(X_2)$

(dacă f este injectivă avem egalitate)

(6) $Y_1, Y_2 \subset B \Rightarrow f^{-1}(Y_1 \cap Y_2) = f^{-1}(Y_1) \cap f^{-1}(Y_2)$

(7) $Y \subset B \Rightarrow f(f^{-1}(Y)) \subset Y$

(dacă f surjectivă avem egalitate)

(8) $X \subset A \Rightarrow f^{-1}(f(X)) \supset X$

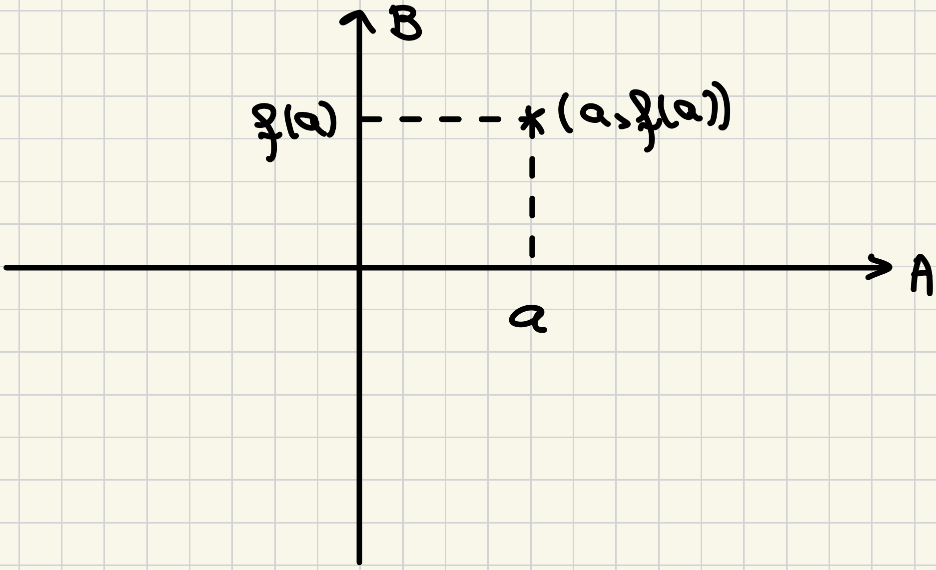
(dacă f injectivă avem egalitate)

Graficul unei funcții

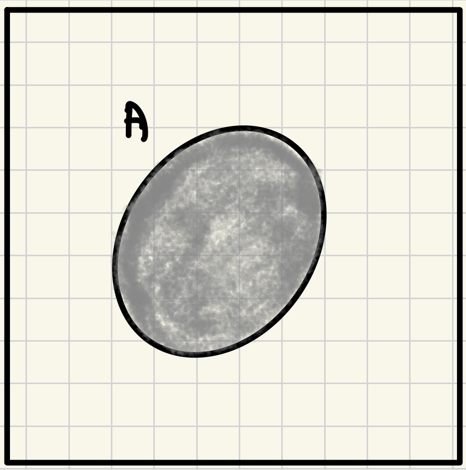
$f: A \to B$ funcție

Graficul lui f este mulțimea

$$G_f = \{(a, f(a)) \mid a \in A\} \subset A \times B$$



Funcția caracteristică a unei mulțimi



E → mulțime „mare”

$A \subset E$

Funcția caracteristică a lui A

$$\chi_A : E \to \{0, 1\}$$

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{dacă } x \in A \\ 0, & \text{altfel} \end{cases}$$

Observație! În teoria naivă a mulțimilor apar paradoxuri.

Fie mulțimea:

$$A = \{ X \mid X \text{ mulțime și } X \notin X \}$$

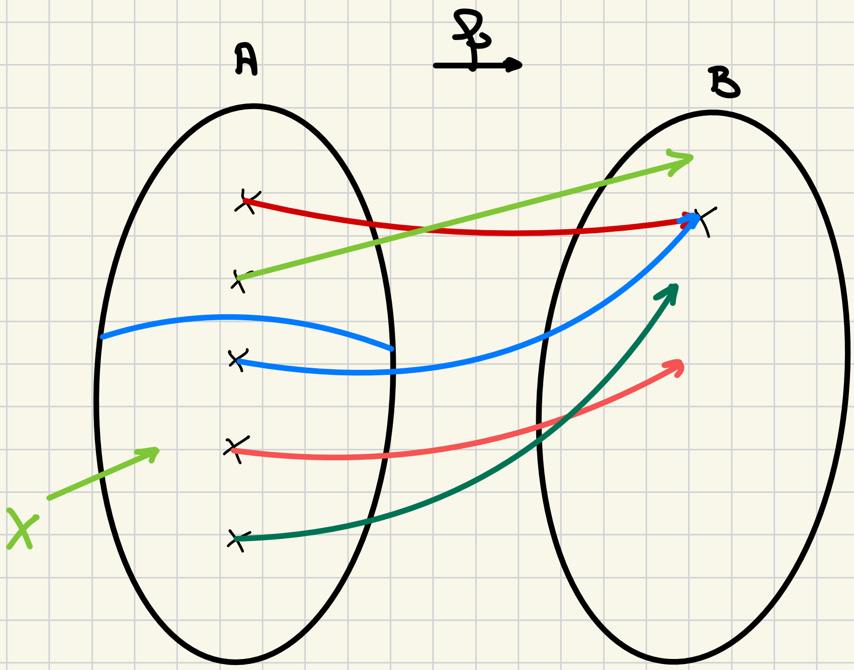
2 posibilități:

- $A \in A \Rightarrow A \notin A$, contradicție
- $A \notin A \Rightarrow A \in A$, contradicție

Restricții și corestricții

$f : A \to B$ funcție

- Dacă $\emptyset \neq X \subset A$, atunci funcția $g : X \to B$, $g(x) = f(x)$, $(\forall)\ x \in X$ s.n. **restricția lui f la X.**

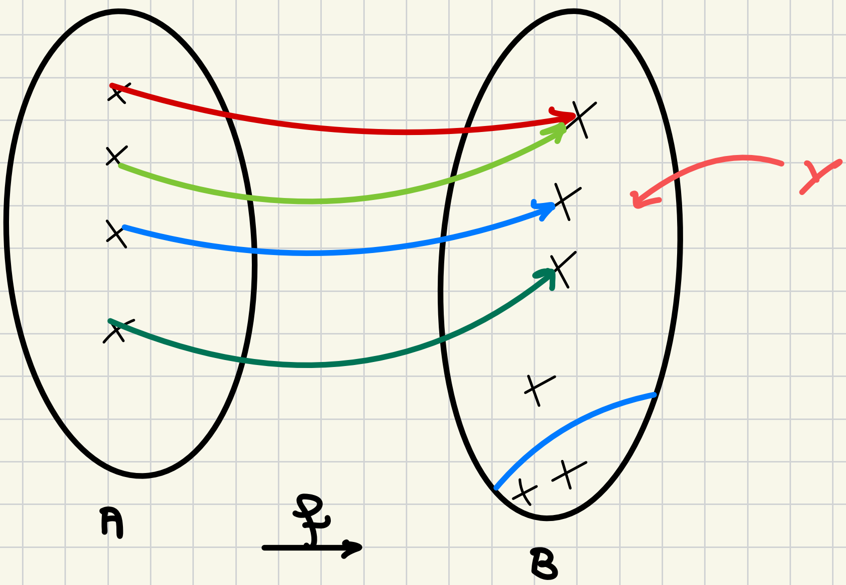


Notație: $g = f_{|X}$

• Dacă $Y \subset B$ şi $\underbrace{\operatorname{Im} f}_{= f(A)} \subset Y$, atunci funcţia $h: A \to Y$,

$h(a) = f(a)$, $(\forall)\ a \in A$ s.n. **corestricţia lui f la Y.**

Notaţie: $h = f^{|Y}$



• Dacă $\emptyset \neq X \subset A$ şi $Y \subset B$ a.î. $f(X) \subset Y$

$$(f_{|X})^{|Y} \overset{\text{not.}}{=} f_{|X}^{|Y}$$

Produs cartezian al unei familii de mulţimi

$A, B \neq \emptyset$

$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$

$$(a, b) = (a', b') \Leftrightarrow \begin{cases} a = a' \\ b = b' \end{cases}$$

$n \in \mathbb{N}^*$ $\quad A_1, \dots, A_n \neq \emptyset$

$A_1 \times \dots \times A_n = \{(a_1, \dots, a_n) \mid a_1 \in A_1, \dots, a_n \in A_n\}$

$(a_1, \dots, a_n) = (b_1, \dots, b_n) \Leftrightarrow a_1 = b_1, \dots, a_n = b_n$

Dacă $I \neq \emptyset$ și $(A_i)_{i \in I}$ este o familie de mulțimi nevide, indexată de I:

$$i \in I \rightsquigarrow A_i \text{ mulțime}$$

Produsul cartezian al familiei $(A_i)_{i \in I}$ este mulțimea tuturor funcțiilor:

$f : I \to \bigcup_{i \in I} A_i$ cu proprietatea că $f(i) \in A_i$ pentru orice $i \in I$

formal

$(x_i)_{i \in I}$, unde $x_i = f(i)$, $(\forall) i$

notație

$$\prod_{i \in I} A_i = \{ (x_i)_{i \in I} \mid (\forall) i \in I \text{ avem } x_i \in A_i \}$$

$$(x_i)_{i \in I} = (y_i)_{i \in I} \Leftrightarrow (\forall) i \in I, x_i = y_i$$

Pentru fiecare $j \in I$ avem o funcție surjectivă

$$\pi_j : \prod_{i \in I} A_i \to A_j$$ proiecția canonică pe poziția j

$$\pi_j\left((x_i)_{i \in I} \right) = x_j$$

Mulțime cel mult numărabilă = finită sau numărabilă