CURS II

§ 4. RELAŢII DE ECHIVALENŢĂ

Fie A şi B două mulţimi. O submulţime $\rho \subseteq A \times B$ se numeşte *relaţie binară* între A şi B. Dacă $(a, b) \in \rho$, unde $a \in A$ şi $b \in B$, spunem că *a este în relaţia* ρ *cu b* şi notăm $a \rho b$. Când scriem $a \rceil \rho\, b$ înseamnă că elementele $a \in A$ şi $b \in B$ nu sunt în relaţia ρ.

Exemple.

1) Dacă $f : A \to B$ este o funcţie, atunci mulţimea $G_f = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B \text{ şi } b = f(a)\}$ este o relaţie binară între A şi B. Mulţimea G_f se numeşte *graficul* funcţiei f. Invers, dacă $G \subseteq A \times B$ este o relaţie între A şi B cu proprietatea că oricare ar fi $a \in A$ există un unic $b \in B$ astfel încât $(a, b) \in G$, atunci putem defini funcţia $f : A \to B$ aşa încât $f(a) = b$. Se observă imediat că $G_f = G$.

2) Fie A o mulţime nevidă şi $\rho = \{(a, X) \in A \times \mathcal{P}(A) \mid a \in X\}$. Aceasta este relaţia de apartenenţă între elementele lui A şi submulţimile lui A. Dacă $a \in A$ şi $X \in \mathcal{P}(A)$, atunci $a \rho X$ este echivalent cu $a \in X$.

Când B = A, o relaţie binară ρ între A şi A se numeşte simplu *relaţie binară pe mulţimea A*. O relaţie binară pe o mulţime se notează de regulă cu unul din simbolurile: ρ, $\sim$, $\Re$, $\equiv$, etc.

Exemple.

1) Fie A o mulţime oarecare. Mulţimea $\Delta_A = \{(a, a) \mid a \in A\}$ se numeşte *diagonala* mulţimii A şi este o relaţie binară pe A.

2) Dacă A este o mulţime de numere naturale, atunci mulţimea

$$\text{„}<\text{''} = \{(m, n) \in A \times A \mid m < n\}$$

este o relaţie binară pe A. În particular, dacă $A = \{1, 2, 3, 4\}$, atunci „<” $= \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 4)\}$.

Definiţia 4.1. O relaţie binară pe A, notată „ρ", se numeşte *relaţie de echivalenţă* dacă următoarele condiţii sunt verificate pentru orice $a, b, c \in A$:

i) $a \rho a$ (reflexivitate);

ii) $a \rho b \Rightarrow b \rho a$ (simetrie);

iii) $a \rho b$ şi $b \rho c \Rightarrow a \rho c$ (tranzitivitate).

Exemple.

1) Dacă se consideră mulţimea numerelor întregi **Z** şi $n \geq 1$ un număr natural, atunci relaţia binară notată „$\equiv$ (mod n)" (*congruenţa modulo n*):

$$a \equiv b \pmod{n} \Leftrightarrow n \mid a - b$$

este o relaţie de echivalenţă pe **Z**.

2) Dacă se consideră pe mulţimea **R** a numerelor reale relaţia ,,~":

$$a \sim b \Leftrightarrow a - b \in \mathbf{Z},$$

aceasta este o relaţie de echivalenţă pe **R**.

Dată o relaţie de echivalenţă ,,ρ" pe A, pentru orice $a \in A$ definim mulţimea:

$$[a] = \{b \in A \mid b \rho a\}.$$

Aceasta se numeşte *clasa de echivalenţă* a elementului *a*.

Clasa de echivalenţă a elementului *a* se mai notează şi astfel: $\hat{a}$, $\tilde{a}$, $\bar{a}$, etc.

Teorema 4.2. Fie A o mulţime nevidă şi „ρ" o relaţie de echivalenţă pe A. Atunci clasele de echivalenţă determinate de „ρ" pe A au proprietăţile:

1) $a \in [a]$ oricare ar fi $a \in A$. În particular, $[a] \neq \emptyset$.

2) $[a] = [b] \Leftrightarrow a \rho b$.

3) Dacă [a] şi [b] sunt două clase de echivalenţă, atunci

$$[a] = [b] \text{ sau } [a] \cap [b] = \emptyset.$$

4) Reuniunea tuturor claselor de echivalenţă este egală cu A.

Demonstraţie. 1) Deoarece $a \rho a$ rezultă că $[a] \neq \emptyset$.

2) Dacă $[a] = [b]$, cum $a \in A$, atunci $a \in [b]$ şi deci $a \rho b$. Invers, presupunem că $a \rho b$. Fie $x \in [a]$; deci $x \rho a$ şi ,,ρ" este tranzitivă; obţinem că $x \rho b$, adică $x \in [b]$. Deci $[a] \subseteq [b]$. Similar rezultă $[b] \subseteq [a]$ şi deci avem egalitatea $[a] = [b]$.

3) Presupunem că $[a] \cap [b] \neq \emptyset$. Deci există $x \in [a] \cap [b]$. Atunci $x \rho a$ şi $x \rho b$. Cum „ρ" este simetrică avem $a \rho x$ şi deci $a \rho b$. Din afirmaţia 2) rezultă că $[a] = [b]$.

4) Rezultă din 1).

Definiţia 4.3. Fie A o mulţime nevidă şi „ρ" o relaţie de echivalenţă pe A. O familie de elemente din A, $(a_i)_{i \in I}$, se numeşte *sistem complet şi independent de reprezentanţi* (pe scurt, SCIR) relativ la relaţia de echivalenţă ρ dacă are următoarele proprietăţi:

i) oricare ar fi $i \neq j$, $a_i \rceil \rho\, a_j$.

ii) oricare ar fi $a \in A$, există $i \in I$ astfel încât $a \rho a_i$.

Se observă că i) şi ii) pot fi formulate concentrat astfel: oricare ar fi $a \in A$ există un unic $i \in I$ astfel încât $a \rho a_i$.

Fiind dată o relaţie de echivalenţă ,,ρ" pe mulţimea nevidă A, există întotdeauna un sistem de reprezentanţi asociat relaţiei „ρ". Într-adevăr, fie $(C_i)_{i \in I}$ mulţimea tuturor claselor de echivalenţă asociate relaţiei „ρ". Cum $C_i \neq \emptyset$ oricare ar fi $i \in I$, conform axiomei alegerii există o familie de elemente $(a_i)_{i \in I}$ astfel încât $a_i \in C_i$, oricare ar fi $i \in I$. Evident că $(a_i)_{i \in I}$ este un sistem de reprezentanţi pentru relaţia ,,ρ". Trebuie să observăm că acest sistem de reprezentanţi nu este unic.

Dacă $(a_i)_{i\in I}$ este un sistem de reprezentanţi relativ la relaţia „ρ", din Teorema 4.2 rezultă că $A = \bigcup_{i\in I} [a_i]$ iar mulţimile $[a_i]$, $i \in I$, sunt disjuncte două câte două.

Exemplu. Pe mulţimea **Z** a numerelor întregi considerăm relaţia „~":

$$a \sim b \Leftrightarrow |a| = |b|.$$

Se observă imediat că „~" este o relaţie de echivalenţă pe **Z**. Dacă $a \in \mathbf{Z}$ avem: $[a] = \{a, -a\}$, dacă $a \neq 0$ şi $[a] = \{0\}$, dacă $a = 0$. Un sistem de reprezentanţi poate fi considerat sistemul de numere: 0, 1, 2, 3, ..., adică mulţimea numerelor naturale **N**. Un alt sistem de reprezentanţi poate fi considerat şi sistemul de numere 0, –1, –2, –3, ..., adică mulţimea numerelor întregi negative.

Definiţia 4.4. Dată relaţia de echivalenţă „ρ" pe A, mulţimea claselor de echivalenţă determinate de „ρ" pe A se notează cu A/ρ şi se numeşte *mulţimea factor* (sau *mulţimea cât*) a lui A prin relaţia „ρ". Funcţia $p : A \to A/\rho$, $p(a) = [a]$, este o funcţie surjectivă şi se numeşte *proiecţia* (*surjecţia*) *canonică* a lui A pe mulţimea factor A/ρ.

Definiţia 4.5. O *partiţie* a unei mulţimi nevide A este o familie de submulţimi nevide disjuncte două câte două ale lui A şi a cărei reuniune este A.

Exemplu. Mulţimile $A_n = \{2n, 2n + 1\}$, $n \in \mathbf{N}$, formează o partiţie a lui **N**.

Mulţimea factor A/ρ este o partiţie a lui A, deci o relaţie de echivalenţă pe A dă naştere unei partiţii. Reciproc, dacă $(A_i)_{i\in I}$ este o partiţie a lui A definim o relaţie de echivalenţă pe A astfel: $a \sim b$ dacă şi numai dacă există $i \in I$ astfel încât $a, b \in A_i$. Clasele de echivalenţă ale lui „~" sunt chiar submulţimile A_i. Aşadar putem enunţa următorul rezultat:

Propoziţia 4.6. Dacă A este o mulţime nevidă, atunci asocierea $\rho \to A/\rho$ defineşte o bijecţie de la mulţimea relaţiilor de echivalenţă pe A la mulţimea partiţiilor lui A.

Demonstraţie. Exerciţiu.

Definiţia 4.7. Fie $f : A \to B$ o funcţie. Definim pe A o relaţie ρ_f astfel:

$$a\ \rho_f\ a' \Leftrightarrow f(a) = f(a').$$

ρ_f se numeşte *relaţia asociată funcţiei f.*

Se observă că ρ_f este o relaţie de echivalenţă pe A, iar mulţimea factor A/ρ_f se descrie astfel:

$$A/\rho_f = \{f^{-1}(b) \mid b \in \mathrm{Im}\, f\}.$$

Exemplu. Relaţia de echivalenţă pe **R** asociată funcţiei $f : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$, $f(x) = \cos(2\pi x) + i\sin(2\pi x)$ este următoarea: $x\ \rho_f\ y$ dacă şi numai dacă $x - y \in \mathbf{Z}$.

În general, orice relaţie de echivalenţă este asociată unei funcţii. Mai precis, dacă ρ este o relaţie de echivalenţă pe o mulţime nevidă A, iar $p : A \to A/\rho$ este *proiecţia* (*surjecţia*) *canonică*, atunci $\rho = \rho_p$.

Teorema 4.8. (Proprietatea de universalitate a mulţimilor factor) Fie A o mulţime nevidă şi „ρ" o relaţie de echivalenţă pe A. Fie $f : A \to B$ o funcţie şi „ρ_f" relaţia de echivalenţă pe A asociată funcţiei f. Dacă $\rho \subseteq \rho_f$, atunci există o unică funcţie $\overline{f} : A/\rho \to B$ cu proprietatea că $\overline{f} \circ p = f$. Mai mult:

1) $\overline{f}$ este injectivă $\Leftrightarrow \rho = \rho_f$.
2) $\overline{f}$ este surjectivă $\Leftrightarrow$ f este surjectivă.

Demonstraţie. Definim $\overline{f} : A/\rho \to B$ astfel: $\overline{f}([a]) = f(a)$. Mai întâi vom arăta că funcţia este bine definită, adică $[a] = [b]$ implică $f(a) = f(b)$. Deoarece $[a] = [b]$ rezultă că $a \, \rho \, b$ şi cum $\rho \subseteq \rho_f$ obţinem $a \, \rho_f \, b$, deci $f(a) = f(b)$. Este clar acum că $\overline{f} \circ p = f$. Din această relaţie rezultă şi unicitatea funcţiei $\overline{f}$.

1) $\overline{f}$ este injectivă dacă şi numai dacă $\overline{f}([a]) = \overline{f}([b]) \Rightarrow [a] = [b]$. Dar $\overline{f}([a]) = \overline{f}([b]) \Leftrightarrow f(a) = f(b) \Leftrightarrow a \, \rho_f \, b$ şi ca să obţinem $[a] = [b]$ trebuie ca $\rho_f \subseteq \rho$, deci egalitate.

2) Se observă că $\mathrm{Im}\, \overline{f} = \mathrm{Im}\, f$.

Corolarul 4.9. Fie A o mulţime nevidă şi $f : A \to B$ o funcţie *surjectivă*. Atunci există o funcţie bijectivă $\overline{f} : A/\rho_f \to B$.