Grupuri

Def.: Fie $(A,*)$ monoid cu elementul neutru e. Un element $a\in A$ s.n. simetrizabil (sau inversabil) dacă există $a'\in A$ cu $a*a' = a'*a = e$.

Observație!

a inversabil $\Rightarrow a'$ din definiție este unic determinat

$$a*a'' = a''*a = e \Rightarrow \underline{a''} = a''*e = a''*(a*a') \overset{asoc.}{=\!=} \underbrace{(a''*a)}_{e}*a' = \underline{a'}$$

a' simetricul (sau inversul) lui a

Notăm și $a' = a^{-1}$.

Notația multiplicativă:	Notația aditivă:
$\cdot$	$+$
1	0
a^{-1}	$-a$

Def.: S.n. grup o mulțime nevidă înzestrată cu o operație binară asociativă, astfel încât există element neutru și orice element este simetrizabil.

Dacă operația este și comutativă, grupul s.n. comutativ (sau abelian).

grup = monoid în care orice element este simetrizabil

Notația multiplicativă

$(G, \cdot)$

$(ab)c = a(bc)$

$(\exists)\ 1 \in G$ a.î. $a1 = 1a = a, (\forall) a \in G$

$(\forall) a \in G\ (\exists)\ a^{-1}$ a.î. $aa^{-1} = a^{-1}a = 1$

G abelian $\Leftrightarrow ab = ba, (\forall) a, b \in G$

Notația aditivă

$(G, +)$

$(a+b)+c = a+(b+c)$

$(\exists)\ 0 \in G$ a.î. $a+0 = 0+a = a, (\forall) a \in G$

$(\forall) a \in G, (\exists)\ (-a)$ a.î. $a+(-a) = (-a)+a = 0$

G abelian:

$a+b = b+a, (\forall) a, b$

Exemple:

! grup ≈ descrie simetriile unui „spațiu"

(1) (fundamental)

X mulțime nevidă

$S(X) \stackrel{\text{def.}}{=\!=} \{f \mid f : X \to X$ funcție bijectivă$\}$

$(S(X); \circ)$ grup (grupul simetric al lui X)

→ element neutru: 1_A

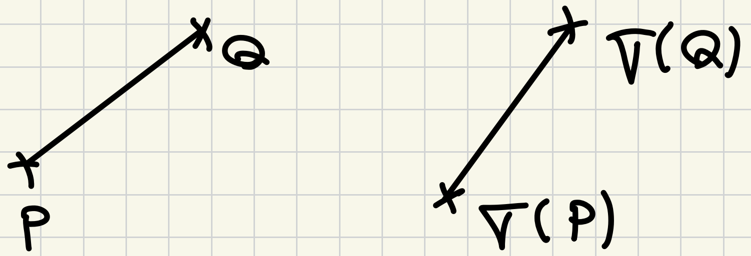
→ simetricul lui f: f^{-1}

($S(X)$ abelian $\Leftrightarrow$ X are cel mult două elemente)

[exercițiu]

(2) $\mathcal{P}$ = mulțimea punctelor din plan

O funcție $T: \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ s.n. izometrie dacă păstrează distanțele



$|PQ| = |T(P)T(Q)|$

Orice izometrie este bijectivă.

Atunci $Izo(\mathcal{P}) = \{T \mid T: \mathcal{P} \to \mathcal{P} \text{ izometrie}\}$

este grup cu $\circ$ [exercițiu]

(3) Dacă $\emptyset \neq X \subset \mathcal{P}$, fie

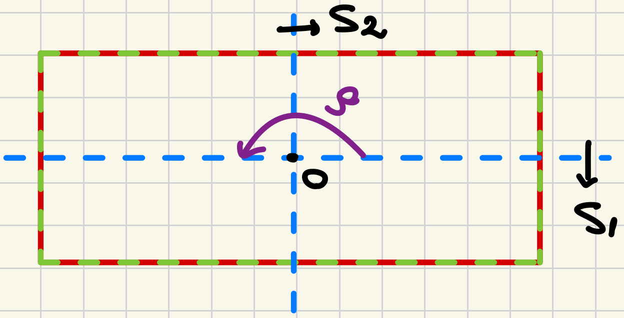
$$Sym(X) = \{T \in Izo(\mathcal{P}) \mid T(X) = X\}$$

Atunci $(Sym(X), \circ)$ grup, grupul simetriilor lui X

[exercițiu]

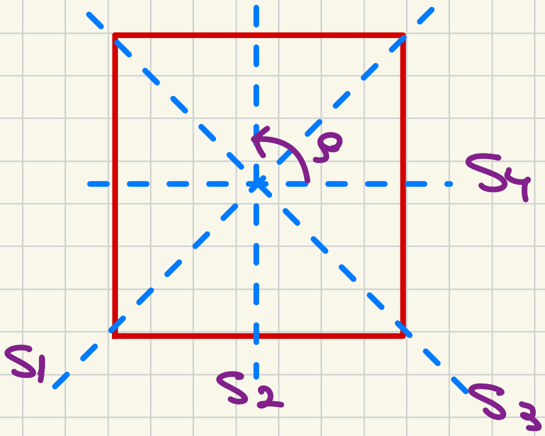
Exemple:

(i) X = „dreptunghi" care nu este pătrat



$Sym(X) = \{ 1_X, S_1, S_2, \rho \}$ [exercițiu]

(ii)

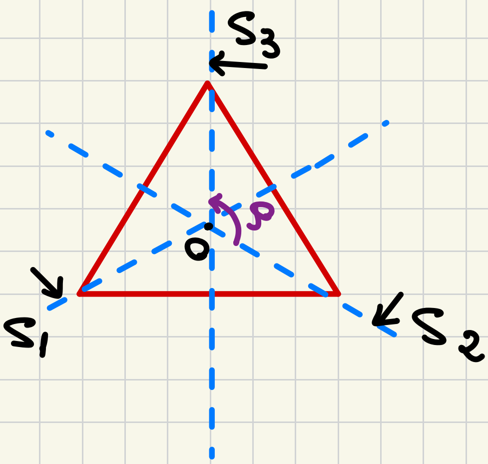


X = „pătrat"

$Sym(X) = \{ 1_X, S_1, S_2, S_3, S_4, \rho, \rho^2, \rho^3 \}$

[exercițiu]

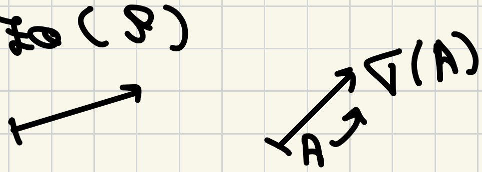
(iii) X = „triunghi echilateral"



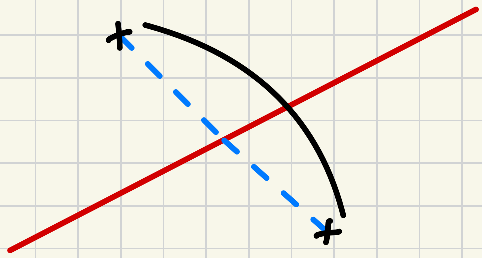
$Sym(X) = \{ 1_X, S_1, S_2, S_3, \rho, \rho^2 \}$

(iv) $Sym(\mathcal{P}) = Izo(\mathcal{P})$

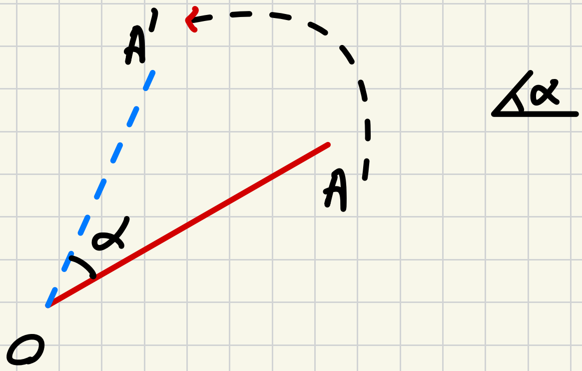
- translații



- simetrii față de o dreaptă



\- rotații



(4) $(A,*)$ monoid

$U(A) = \{a \in A \mid a \text{ simetrizabil}\}$

Atunci $U(A)$ este închisă la $*$ și $(U(A),*)$ este grup (grupul unităților lui A) [exercițiu]

(5) $(\mathbb{Z},+)$, $(\mathbb{Q},+)$, $(\mathbb{R},+)$, $(\mathbb{C},+)$, $(\mathbb{Q}^*,\cdot)$, $(\mathbb{R}^*,\cdot)$, $(\mathbb{C}^*,\cdot)$ grupuri abeliene

Notația multiplicativă:

$G, H, \ldots$

$\cdot \quad \cdot$

$1_G \quad 1_H$

$\| \quad \|$

$1 \quad 1$

Def.: Fie G și H grupuri. O funcție $f: G \to H$ s.n. morfism de grupuri dacă
$f(xy) = f(x) \cdot f(y)$, $(\forall)$ $x, y \in G$.

Observație! Dacă $f: G \to H$ morfism de grupuri, atunci:

$f(1) = 1$ $\quad (f(1_G) = 1_H)$

$f(x)^{-1} = f(x^{-1})$

$$f(1_G) = f(1_G \cdot 1_G) = f(1_G) \cdot f(1_G)$$

$$\Downarrow f(1_G)^{-1}$$

$$1_H = f(1_G)$$

$$f(x) \cdot f(x^{-1}) = f(x \cdot x^{-1}) = f(1) = 1$$

$$\Downarrow f(x)^{-1}$$

$$f(x^{-1}) = f(x)^{-1}$$

Def.: Un morfism de grupuri $f: G \to H$ s.n. izomorfism de grupuri dacă este bijectiv.
G, H sunt izomorfe dacă $(\exists)$ $f: G \to H$ izomorfism.
Scriem $G \simeq H$.

f, g morfisme de grupuri
$\Downarrow$
$g \circ f$ morfism de grupuri

Observație!

f, g izomorfisme $\Rightarrow$
$\Rightarrow g \circ f$ izomorfism

1) $Id_G : G \to G$ izomorfism

2) $G \xrightarrow{f} H \xrightarrow{g} K$

G, H, K grupuri

3) $f: G \to H$ izomorfism de grupuri $\Rightarrow$

$\Rightarrow f^{-1}: H \to G$ este morfism de grupuri, deci și izomorfism

4) Fie $f: G \to H$ morfism de grupuri. Atunci f izomorfism de grupuri $\Leftrightarrow (\exists)\ g: H \to G$ morfism de grupuri cu $gf = Id_G$ și $fg = Id_H$

Exemple:

1) $f: (\mathbb{Z}, +) \to (\mathbb{Z}, +)$, $f(x) = 2x$, f morfism de grupuri (izomorfism)

2) $f: (\mathbb{Q}, +) \to (\mathbb{Q}, +)$, $f(x) = 2x$, f izomorfism de grupuri

3) $f: (\mathbb{R}, +) \to (\mathbb{R}_+^*, \cdot)$, $f(x) = 2^x$, f izomorfism de grupuri

Notații într-un grup:

$(G, \cdot)$

$a \in G$, $m \in \mathbb{Z}$

$$a^n \overset{def.}{=\!=} \begin{cases} \underbrace{a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ ori}} & \text{, pentru } n>0 \\ 1 & \text{, pentru } n=0 \\ \underbrace{a^{-1} \cdot \ldots \cdot a^{-1}}_{n \text{ ori}} & \text{, pentru } n<0 \end{cases}$$

$(G,+)$

na

$= (\underbrace{a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ ori}})^{-1}$

Reguli de calcul

- Dacă $ab = 1 \Rightarrow b = a^{-1}$ și $a = b^{-1}$
- $(a^{-1})^{-1} = a$
- $ab = ac \Longrightarrow b = c$ (simplificare la stânga)
- $ba = ca \Rightarrow b = c$ (simplificare la dreapta)
- Pentru $a, b \in G$, ecuația $ax = b$ are exact o soluție $x = a^{-1}b$.
- $(a_1 a_2 \ldots a_n)^{-1} = x \Rightarrow a_1^{-1} \cdot a_2^{-1} \cdot \ldots \cdot a_n^{-1} = x$

Tabla unui grup

– ca la monoizi –

Fie $(G, \cdot)$ monoid. Atunci G grup $\Leftrightarrow$ pe fiecare linie și pe fiecare coloană fiecare element apare exact o dată.

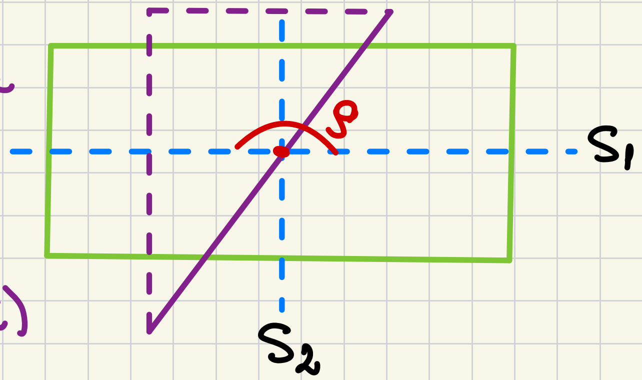
Exemplu:

$Sym(X) = \{1_X, S_1, S_2, R\}$

X dreptunghi, ~~pătrat~~

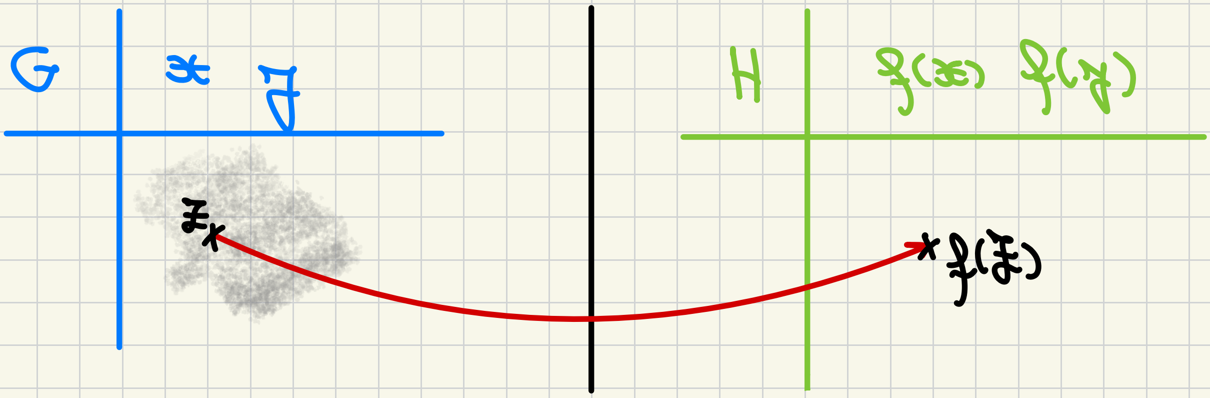
	1_X	s_1	s_2	ρ
1_X	1_X	s_1	s_2	ρ
s_1	s_1	1_X	ρ	s_2
s_2	s_2	ρ	1_X	s_1
ρ	ρ	s_2	s_1	1_X

abelian (tabla este simetrică față de diagonala principală)



Exercițiu: Tablele lui $S(\{1,2,3\})$ și $Sym(\Delta)$

Observație! $G \cong H \iff$



<u>dicționar</u>

$G \xrightarrow{f} H$ bijectivă (izomorf. de grupuri)

op. G	op. H
x	$\to f(x)$
y	$\to f(y)$
$\vdots$	$\vdots$

Exercițiu:

$S(\{1,2,3\}) \cong Sym(\Delta)$

Dacă $X = \{1, \dots, n\}$

$S(X) \overset{\text{not.}}{=\!=} S_n$

Subgrupuri

Def.: Fie $(G,\cdot)$ grup. O submulțime nevidă H a lui G s.n. **subgrup** dacă:

$$\begin{cases} x,y\in H \Rightarrow xy\in H \\ x\in H \Rightarrow x^{-1}\in H \end{cases}$$

Vom scrie $H\leq G$.

Observație! 1) Fie $H\neq\emptyset$, $H\subset G$. Atunci:

$$H\leq G \Leftrightarrow (\forall)\, x,y\in H,\ x^{-1}y\in H$$

„$\Rightarrow$": Fie $x,y\in H$.

$$\left.\begin{matrix} x\in H \Rightarrow x^{-1}\in H \\ y\in H \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^{-1}y\in H$$

„$\Leftarrow$": Fie $x\in H$.

$$x\in H \Rightarrow \underbrace{x^{-1}x}_{=1}\in H$$

Apoi $\left.\begin{matrix} x\in H \\ 1\in H \end{matrix}\right\} \Rightarrow \underbrace{x^{-1}\cdot 1}_{=x^{-1}}\in H$

Fie $x,y\in H$.

Știm $\left.\begin{matrix} x^{-1}\in H \\ y\in H \end{matrix}\right\} \Rightarrow \underbrace{(x^{-1})^{-1}y}_{=xy}\in H$

2) $H \leq G \Rightarrow (H, \cdot)$ grup

3) $G \leq G$, $\{1\} \leq G$

Exemple: 1) $(\mathbb{Z}, +) \leq (\mathbb{Q}, +) \leq (\mathbb{R}, +) \leq (\mathbb{C}, +)$

$(\mathbb{Q}^*, \cdot) \leq (\mathbb{R}^*, \cdot) \leq (\mathbb{C}^*, \cdot)$

$(\mathbb{R}_+^*, \cdot) \leq (\mathbb{R}^*, \cdot)$

2) Fie $n \in \mathbb{N}^*$ și $U_n = \{z \in \mathbb{C} \mid z^n = 1\}$

Atunci $U_n \leq (\mathbb{C}^*, \cdot)$

$1 \in U_n$ (deci $U_n \neq \emptyset$)

$$z_1, z_2 \in U_n \stackrel{?}{\Longrightarrow} z_1^{-1} z_2 \in U_n$$

$$(z_1^{-1} z_2)^n = (z_1^{-1})^n \cdot z_2^n = (\underbrace{z_1^n}_{1})^{-1} \cdot \underbrace{z_2^n}_{\overset{\shortparallel}{1}} = 1$$

U_n = grupul rădăcinilor complexe de ordin n ale unității

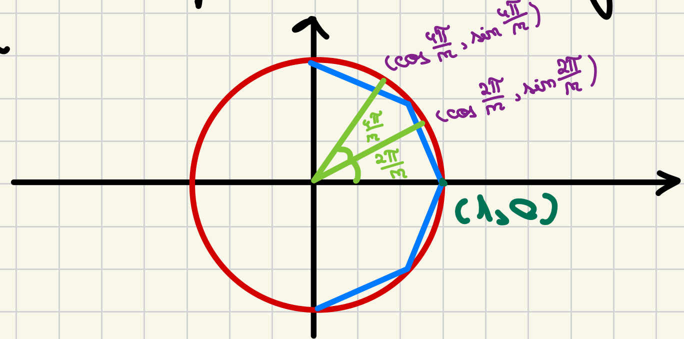
$|U_n| = n$

$$U_n = \left\{ \cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n} \;\middle|\; 0 \leq k \leq n-1 \right\}$$

$n = 1$ $\quad U_1 = \{1\}$

$n = 2$ $\quad U_2 = \{1; -1\}$

$n \geq 3$: elementele lui $U_n \rightsquigarrow$ vârfurile unui poligon regulat cu n laturi



3) $\mathrm{Izo}(\mathcal{P}) \leq S(\mathcal{P})$

$$\mathrm{Sym}(X),\ (\forall)\ X \neq \emptyset,\ X \subset \mathcal{P}$$

4) $(\mathbb{Z}, +)$

Fie $m \in \mathbb{N}$. Atunci

$$m\mathbb{Z} \overset{def.}{=\!=} \{ma \mid a \in \mathbb{Z}\} \leq \mathbb{Z}$$

$m\mathbb{Z} \neq \emptyset$

$$x, y \in m\mathbb{Z} \Rightarrow y - x \in m\mathbb{Z}$$

$\Downarrow$

$$x = ma;\ y = mb;\ a, b \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow y - x = mb - ma = m(b-a) \in m\mathbb{Z}$$

Propoziție: Dacă $H \leq (\mathbb{Z}, +) \Rightarrow (\exists)\ m \in \mathbb{N}$ cu $H = m\mathbb{Z}$

Dem.: Dacă $H = \{0\}$, atunci $H = 0\mathbb{Z}$

Dacă $H \neq \{0\}$, atunci H conține elemente >0.

$\Downarrow$

$(\exists)\ a \in H, a \neq 0$: $a > 0$, gata!; $a < 0 \overset{H \leq \mathbb{Z}}{\Longrightarrow} \underbrace{-a}_{>0} \in H$, gata!

Fie m cel mai mic element strict pozitiv din H.

Arăt că $H = m\mathbb{Z}$

„$\supset$": $m \in H \Rightarrow m + m = 2m \in H \Rightarrow$

$\Rightarrow 2m + m = 3m \in H, \ldots$

Inducție după $k \geq 1$ că $km \in H$

(exercițiu)

Dacă $a \in \mathbb{Z}, a < 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow (-a)m \in H \Rightarrow -(-am) \in H$

$$\underbrace{\qquad}_{qm}$$

„C": Fie $x \in H$.

Împart x la m (în $\mathbb{Z}$).

$$\boxed{\begin{aligned} &x = q \cdot m + r, \; q, r \in \mathbb{Z} \\ &0 \leq r < m \end{aligned}}$$

$$\left.\begin{aligned} &r = \underbrace{x}_{\in H} - \underbrace{qm}_{\in H} \\ &0 \leq r < m \end{aligned}\right\} \xRightarrow[\text{lui } m]{\text{minimalitatea}} \boxed{r = 0}$$

$\Downarrow$

$x = qm \in m\mathbb{Z}$

Transportul subgrupurilor prin morfisme:

Propoziție: Fie $f : G \to H$ morfism de grupuri.

Atunci:

(1) $A \leq G \Rightarrow f(A) \leq H$

(2) $B \leq H \Rightarrow f^{-1}(B) \leq G$

În particular, $\mathrm{Im} f \overset{\text{def.}}{=\!=} f(G) \leq H$

$\mathrm{Ker} f \overset{\text{def.}}{=\!=} f^{-1}(\{1\}) =$

$= \{g \in G \mid f(g) = 1\} \leq G$

nucleul lui f

imaginea lui f

Dem :

1) $f(A) \neq \emptyset$ $\quad \ni 1$

$$u, v \in f(A) \overset{?}{\Longrightarrow} u^{-1}v \in f(A)$$

$$\Downarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} u = f(x) \\ v = f(y) \\ x, y \in A \end{array}\right\} \Rightarrow u^{-1}v = f(x)^{-1} f(y)$$

$$= f(x^{-1})\, f(y)$$

$$= f(\underbrace{x^{-1}y}_{\in A}) \in f(A)$$

2) $\underbrace{f^{-1}(B)}_{\ni 1} \neq \emptyset$

$$x, y \in f^{-1}(B) \Rightarrow f(x), f(y) \in B \Rightarrow f(x)^{-1} f(y) \in B$$

$$\Rightarrow f(x^{-1}y) \in B \Rightarrow x^{-1}y \in f^{-1}(B)$$