1. A mulțime numărabilă ($A \sim \mathbb{N}$)

Arătați că:

a) $\mathcal{P}_{fin}(A) \overset{def.}{=\!=} \{X \mid X \subset A,\ X \text{ finită}\}$ numărabilă

mulțimea părților finite a lui A

b) $\mathcal{P}(A)$ nu este numărabilă

---

a)

$\mathcal{P}_{fin(A)} = \mathcal{P}_0 \cup \mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2 \cup \ldots = \bigcup\limits_{n \geq 0} \mathcal{P}_n$, unde

$\mathcal{P}_n = \{X \mid X \subset A, |X| = n\}$

pt. fiecare $n \geq 0$

$\mathcal{P}_0 = \{\emptyset\}$

$\mathcal{P}_1 = \{\{a\} \mid a \in A\}$

$\mathcal{P}_2 = \{\{a, b\} \mid a, b \in A, a \neq b\}$

$\left.\begin{array}{l} \mathcal{P}_1 \sim A \\ \varphi : A \to \mathcal{P}_1 \text{ bijectivă} \\ \varphi(a) = \{a\} \end{array}\right\} \Rightarrow \mathcal{P}_1$ numărabilă

$A \times A = \{(a, b) \mid a, b \in A\}$

$\psi : A \times A \to \mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2$ surjectivă (1)

numărabilă

$\psi((a, b)) = \begin{cases} \{a, b\}, \text{ dacă } a \neq b \\ \{a\}, \text{ dacă } a = b \end{cases}$

ψ surjectivă

$\{a\} = \psi((a, a))$

$\{a, b\} = \psi((a, b))$

(1) $\Rightarrow (\exists)\ \psi' : \mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2 \to A \times A$ injectivă $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \underbrace{\mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2}_{\text{infinită}} \sim \underbrace{\psi'(\mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2)}_{\Downarrow} \subset \underbrace{A \times A}_{\text{numărabilă}}$$

$\mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2$ numărabilă

bij. $\Big|$ $\Rightarrow \mathcal{P}_1$ numărabilă

inf.

$\Downarrow$

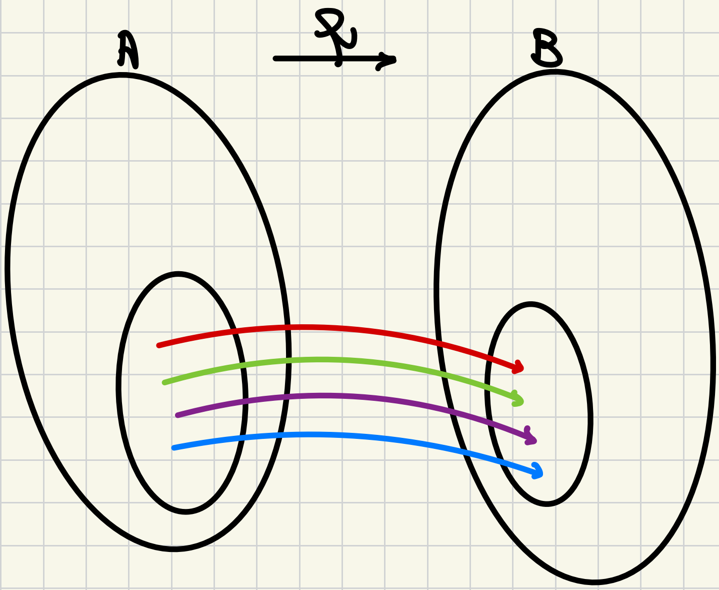
$\mathcal{P}_2$ numărabilă

Fie $f : A \to B$ bij.

Ar. că $\mathcal{P}_{fin}(A) \sim \mathcal{P}_{fin}(B)$?

Definim $\varphi : \mathcal{P}_{fin}(A) \to \mathcal{P}_{fin}(B)$

$\quad\quad\quad\quad X$



$\varphi(X) \overset{def.}{=\!=} f(X) =$

$\{ f(x) \mid x \in X \}$

φ bijectivă ?

Inj.: $X, Y \subset A$

finite

$\varphi(X) = \varphi(Y) \Rightarrow f(X) = f(Y) \Rightarrow X = Y$

„$X \subset Y$":

$x \in X \Rightarrow f(x) \in f(X) = f(Y) \Rightarrow$

$\Rightarrow f(x) \in f(Y) \Rightarrow (\exists)\ z \in Y \quad f(x) = f(z)$

$\Downarrow f$ inj.

$x = z \in Y$

„$Y \subset X$":

Surj.:

Fie $Y \subset B$, Y finită

Atunci

pentru că f este bijectivă

$f(\underbrace{f^{-1}(Y)}_{\subset A \text{ finită}}) = Y$

(pentru că f este injectivă)

$\in \mathcal{P}_{fin}(A)$

$\varphi(f^{-1}(Y)) = Y$

În plus, și $\mathcal{P}(A) \sim \mathcal{P}(B)$ (exercițiu)

A numărabilă $\Rightarrow \mathcal{P}_{fin}(A)$ numărabilă

$A \sim \mathbb{N}$, $\mathcal{P}_{fin}(A) \sim \mathcal{P}_{fin}(\mathbb{N})$

$h : \mathcal{P}_2 \to \underbrace{\mathbb{N} \times \mathbb{N}}_{\text{numărabilă}} \Rightarrow \mathcal{P}_2$ numărabilă

$h(\{a,b\}) = (\min\{a,b\}, \max\{a,b\})$

h injectivă

$\{c,d\}$

$h: P_n \to \underbrace{\mathbb{N}\times\dots\times\mathbb{N}}_{n \text{ ori}}$ inj.

$X \subset \mathbb{N}$

$|X| = n$

$X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$

$x_1 < x_2 < \dots < x_n$

$h(X) = (x_1, \dots, x_n)$

$P_{fin}(\mathbb{N}) = P_0 \cup \underbrace{P_1 \cup \dots}_{\text{numărabilă}}$

$A^n \to P_1 \cup P_2 \cup \dots \cup P_n$

$(x_1, \dots, x_n) \to \{x_1, \dots, x_n\}$

b) $P(A) \sim P(\mathbb{N})$

nu este numărabilă ?

$P_{inf}(\mathbb{N}) = \{X \mid X \subset \mathbb{N},\ X \text{ infinită}\} \subset P(\mathbb{N})$

Dacă arăt că $P_{inf}(\mathbb{N})$ este nenumărabilă

$\Rightarrow P(\mathbb{N})$ nenumărabilă

O submulțime infinită X a lui $\mathbb{N}$ se poate scrie sub forma:

$X = \{x_1, x_2, x_3, \dots\}$ cu $x_1 < x_2 < x_3 < \dots$

Presupunem prin absurd că $\mathcal{P}_{inf}(\mathbb{N})$ este numărabilă $\Rightarrow$ Elementele $X_1, X_2, X_3, \dots$

$X_1 = \{x_{11}, x_{12}, \dots\}$, $x_{11} < x_{12} < \dots$

$X_2 = \{x_{21}, x_{22}, \dots\}$, $x_{21} < x_{22} < \dots$

- - - - - - - - - - - - - - -

$X_m = \{x_{m1}, x_{m2}, \dots\}$, $x_{m1} < x_{m2} < \dots$

Aleg $a_1 \in \mathbb{N}$, $a_1 \neq x_{11}$

Aleg $a_2 \in \mathbb{N}$, $a_2 \neq x_{22}$ şi $a_2 > a_1$

Aleg $a_3 \in \mathbb{N}$, $a_3 \neq x_{33}$ şi $a_3 > a_2$

$\vdots$

Aleg $a_{m+1} \in \mathbb{N}$, $a_{m+1} \neq x_{m+1, m+1}$ şi $a_{m+1} > a_m$

$Y = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_m, \dots\}$, $a_1 < a_2 < a_3 < \dots < a_m < \dots$

$Y \in \mathcal{P}_{inf}(\mathbb{N})$ şi $Y \neq X_m$ $(\forall) m$

$Y = X_1 \Rightarrow a_1 = x_{11}$ fals

$Y = X_2 \Rightarrow a_2 = x_{22}$ fals

$Y = X_m \Rightarrow a_m = x_{mm}$ fals

Contradicţie!

$\Rightarrow \mathcal{P}(A)$ nu este numărabilă

2. $f: A \to B$ funcție

Pe A avem relația $\sim_f$

$$x \sim_f y \iff f(x) = f(y)$$

$\sim_f$ este relație de echivalență

1) Reflexivitate:

$$x \sim_f x \iff f(x) = f(x) \ (A)$$

2) Simetrie:

$$x \sim_f y \overset{?}{\Rightarrow} y \sim_f x$$

$$\Updownarrow$$

$$f(x) = f(y) \Rightarrow f(y) = f(x) \Rightarrow y \sim_f x$$

3) Tranzitivitate:

$$\left.\begin{array}{l} x \sim_f y \\ y \sim_f z \end{array}\right\} \overset{?}{\Rightarrow} x \sim_f z$$

$$\left.\begin{array}{l} x \sim_f y \Rightarrow f(x) = f(y) \\ y \sim_f z \Rightarrow f(y) = f(z) \end{array}\right\} \Rightarrow f(x) = f(z) \Rightarrow x \sim_f z$$

3. Pe $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ definim ρ:

$$(a, b)\ \rho\ (c, d) \overset{\text{def.}}{\iff} a + d = b + c \iff a - b = c - d$$

ρ relație de echivalență

1) Reflexivitate:

$(a,b)\,\rho\,(a,b),\ (\forall)\ a,b\in\mathbb{N} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a+b=b+a$ (A)

2) Simetrie:

$(a,b)\,\rho\,(c,d) \overset{?}{\Rightarrow} (c,d)\,\rho\,(a,b)$

$\Downarrow \qquad\qquad \Uparrow$

$a+d=b+c \Rightarrow c+b=d+a$

3) Tranzitivitate:

$\left.\begin{array}{l}(a,b)\,\rho\,(c,d)\\(c,d)\,\rho\,(e,f)\end{array}\right\} \overset{?}{\Rightarrow} (a,b)\,\rho\,(e,f)$

$(a,b)\,\rho\,(c,d) \Leftrightarrow a+d=b+c$

$(c,d)\,\rho\,(e,f) \Leftrightarrow c+f=d+e$ (+)

$a+\cancel{d}+\cancel{c}+f=b+\cancel{c}+\cancel{d}+e$

$a+f=b+e \Leftrightarrow (a,b)\,\rho\,(e,f)$

$\widehat{(5,2)}=?$

$\{(a,b)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N} \mid a-b=\underbrace{5-2}_{3}\}$

$=\{(b+3,b) \mid b\in\mathbb{N}\}$

$=\{(3,0),(4,1),(5,2),\dots\}$

4. Pe $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^*$ avem $\sim$ definită prin:

$(a,b)\sim(c,d) \Leftrightarrow ad=bc$

a) $\sim$ rel. de echivalență

b) $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^*/_\sim$ este în bijecție cu $\mathbb{Q}$

1) Reflexivitate:

$$(a,b)\sim(a,b) \iff ab=ba \ (A)$$

2) Simetrie:

$$(a,b)\sim(c,d) \overset{?}{\Rightarrow} (c,d)\sim(a,b)$$

$$(a,b)\sim(c,d) \iff ad=bc \Rightarrow cb=da \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (c,d)\sim(a,b)$$

3) Tranzitivitate:

$$\left.\begin{aligned}(a,b)\sim(c,d)\ (1)\\ (c,d)\sim(e,f)\ (2)\end{aligned}\right\} \overset{?}{\Rightarrow} (a,b)\sim(e,f)$$

$$(1) \Rightarrow ad=bc \Rightarrow \frac{a}{b}=\frac{c}{d}$$
$$(2) \Rightarrow cf=de \Rightarrow \frac{c}{d}=\frac{e}{f}$$

$$\Rightarrow \frac{a}{b}=\frac{e}{f} \Rightarrow af=be \iff (a,b)\sim(e,f)$$

$$\widehat{(a,b)}=\left\{(c,d)\ \middle|\ c\in\mathbb{Z}, d\in\mathbb{Z}^* \text{ a.î. } \frac{a}{b}=\frac{c}{d}\right\}$$

$$\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^*/_\sim=\{\widehat{(a,b)} \mid (a,b)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^*\}$$

Fie $f: \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^*/_\sim \longrightarrow \mathbb{Q}$

$$f(\widehat{(a,b)})=\frac{a}{b}$$

Arătăm că f este corect definită.

Dacă $\widehat{(a,b)} = \widehat{(c,d)} \overset{?}{\Rightarrow} \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

$\widehat{(a,b)} = \widehat{(c,d)} \Rightarrow (a,b) \sim (c,d) \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ (A)

$\Rightarrow f$ este corect definită

Injectivitatea:

Presupunem $f(\widehat{(a,b)}) = f(\widehat{(c,d)}) \overset{?}{\Rightarrow} \widehat{(a,b)} = \widehat{(c,d)}$

$$\Downarrow$$

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow (a,b) \sim (c,d)$$

Surjectivitatea:

$q \in \mathbb{Q} \Rightarrow (\exists)\ \widehat{(a,b)} \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*/_{\sim}$ a.î. $f(\widehat{(a,b)}) = q$

$q = \frac{m}{n}$, $m \in \mathbb{Z}$ și $n \in \mathbb{Z}^*$

Atunci $f(\widehat{(m,n)}) = \frac{m}{n} = q$

q.e.d.!

5. A, $\sim$ rel. de echivalență

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\pi"] \arrow[dr, "f"'] & A/_{\sim} \arrow[d, dashed, "\exists!\, \bar f"] \\ & B \end{tikzcd}$$

f → funcție

$\pi(x) = \hat{x}$, $(\forall)\ x \in A$

$\sim\ \subset\ \sim_f$

(adică $x \sim y \Rightarrow f(x) = f(y)$)

$\exists!\ \bar f$ cu $\bar f \pi = f$

$\bar f$ inj. $\Leftrightarrow\ \sim\ =\ \sim_f$

Și

$\bar{f}$ surj. $\Leftrightarrow$ f surj.

$A = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$

$\sim \quad (a,b) \sim (c,d) \Leftrightarrow ad = bc \Leftrightarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\pi"] \arrow[dr, "f"'] & A/\sim \arrow[d, dashed, "\bar{f}"] \\ & \mathbb{Q} \end{tikzcd}$$

Fie $f : A \to \mathbb{Q}$, $f((a,b)) = \frac{a}{b}$

$(a,b) \sim (c,d) \Leftrightarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow f((a,b)) = f((c,d))$

$\Leftrightarrow (a,b) \sim_f (c,d) \Rightarrow \sim = \sim_f \Rightarrow (\exists!)\ \bar{f} : A/\sim \to \mathbb{Q}$ ...

Și $\bar{f}$ inj.

f surj. $\Rightarrow$ $\bar{f}$ surj.