1. $(G,\cdot)$ finit

$g \in G$

$$\underset{\substack{\| \\ m}}{o(g)} = \min\{k \in \mathbb{N}^* \mid g^k = 1\}$$

$$g^m = 1, \quad \underset{k \in \mathbb{Z}}{g^k = 1} \iff m \mid k$$

Dacă $|G| = n \Rightarrow \begin{cases} m \mid n \\ \text{Deci } g^n = 1 \end{cases}$

$$\underset{\substack{\downarrow \\ m}}{\langle g \rangle} \le \underset{\substack{\downarrow \\ n}}{G}$$

$(G,+)$

$$o(g) = \min\{k \in \mathbb{N}^* \mid kg = 0\}, \quad kg = \underbrace{g + \dots + g}_{k \text{ ori}}$$

Fie $n \in \mathbb{N}$, $n \ge 2$ şi $\hat{i} \in \mathbb{Z}_n \setminus \{\hat{0}\}$

Arătaţi că $o(\hat{i}) = \dfrac{n}{(i,n)}$.

În particular, $\hat{i}$ este generator al lui $\mathbb{Z}_n$ (adică $\langle \hat{i} \rangle = \mathbb{Z}_n$) $\iff (i,n) = 1$

$(i,n) = d$

$i = d \cdot i'$, $i' \in \mathbb{N}$

$n = d \cdot n'$, $n' \in \mathbb{N}$

Fie $k \in \mathbb{N}^*$.

$\Rightarrow k \cdot \hat{i} = \hat{0}$

$\widehat{ki} = \hat{0} \iff m \mid ki$ $\qquad (i', m') = 1$

$\iff dm' \mid k \cdot di' \qquad k\cancel{d}i' = \cancel{d}m'x$, cu $x \in \mathbb{N}^*$

$\iff m' \mid ki' \iff$

$\overset{(m', i') = 1}{\iff} m' \mid k \iff \dfrac{m}{(i,m)} \mid k$

Deci, $o(\widehat{102}) = ?$ în $\mathbb{Z}_{360}$

$$o(\widehat{102}) = \frac{360}{(102, 360)}$$

$$360 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 2 \cdot 5 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$$

$$102 = 2 \cdot 3 \cdot 17$$

$$o(\widehat{102}) = \frac{360}{2 \cdot 3} = 60$$

2. Fie $\mathbb{Z}_8 \times \mathbb{Z}_{12}$.

$\hat{i} \qquad \bar{i}$

Calculați ordinele elementelor:

$(\hat{2}, \bar{8})$ și $(\hat{6}, \bar{2})$

$$o(\hat{2}) = \frac{8}{(2,8)} = \frac{8}{2} = 4$$

$$o(\bar{8}) = \frac{12}{(8,12)} = \frac{12}{2^2} = 3$$

$\Rightarrow o(\hat{2}, \bar{8}) = [4, 3] = 12$

Dacă G, H sunt grupuri finite și $g \in G$, $h \in H$,

$o((g,h)) = ?$

$o((g,h)) = [o(g), o(h)]$

Fie $m \in \mathbb{N}^*$. Atunci $(g,h)^m = (1_G, 1_H) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (g^m, h^m) = (1_G, 1_H) \Leftrightarrow g^m = 1_G$ și $h^m = 1_H$

$\Leftrightarrow o(g) \mid m$

$o(h) \mid m$

$\Leftrightarrow [o(g), o(h)] \mid m$

$o((g,h)) = [o(g), o(h)]$

Deci

$$o(\hat{6}) = \frac{8}{(6,8)} = \frac{8}{2} = 4$$

$$o(\bar{2}) = \frac{12}{(12,2)} = \frac{12}{2} = 6$$

$\Rightarrow o((\hat{6}, \bar{2})) = [o(\hat{6}) \cdot o(\bar{2})]$

$= [4,6] = 2^2 \cdot 3 = 12$

Arătați că $\mathbb{Z}_8 \times \mathbb{Z}_{12}$ nu este ciclic.

Dacă ar fi ciclic, atunci ar fi $\simeq \mathbb{Z}_{96}$.

$\Leftrightarrow$ Are un element de ordin 96.

$(g,h) \quad o((\hat{g}, \bar{h})) = [o(\hat{g}), o(\bar{h})]$

$o(\hat{g}) \mid 8$

$o(\bar{h}) \mid 12$

$\Downarrow$

$[o(\hat{g}), o(\bar{h})] \mid [8,12] = 24$

Dacă arăt că $o(\hat{g}) \mid [8,12]$
$\Uparrow$
$o(\bar{h}) \mid [8,12]$

Deci $o((\hat{g},\bar{h})) = [o(\hat{g}), o(\bar{h})] \mid 24$

Care sunt elementele de ordin 8 din $\mathbb{Z}_8$?

$\hat{i}$, $(i,8)=1$
$\parallel$
$\hat{1}, \hat{3}, \hat{5}, \hat{7}$

Dar din $\mathbb{Z}_{12}$?

$o(\hat{i}) \mid 12$
$\parallel$
8 , nu se poate!

Deci nu există!

Dar elementele de ordin 6 din $\mathbb{Z}_{12}$?

Fie $\hat{i} \in \mathbb{Z}_{12}$, $o(\hat{i}) = 6 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{12}{(i,12)} = 6 \Leftrightarrow (i,12) = 2 \Leftrightarrow i \in \{2, 10\}$$

3. Fie $(G,\cdot)$ grup și $x,y \in G$ cu $xy = yx$.
Dacă $o(x) = n$, $o(y) = m$ și $(n,m) = 1$,
arătați că $o(xy) = nm$.

$(xy)^k = x^k y^k$, $(\forall)\, k \in \mathbb{Z}$

$xy\, xy \dots xy$

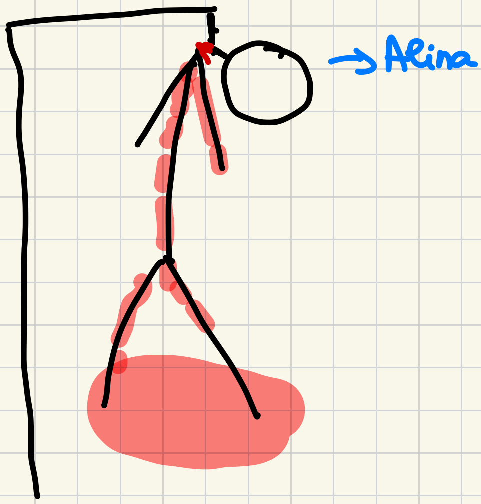
$$(xy)^2 = xyxy$$

$$= x^2y^2 \qquad x^{-1}\ y^{-1} \qquad yx = xy$$

$xy^n = y^n x,\ (\forall)\, n \in \mathbb{N}^*$ – trebuie să arăt (prin inducție)

$n \to n+1$

$$xy^{n+1} = xy^n y = y^n xy = y^n y x = y^{n+1}x$$



$n \in \mathbb{N}^*$

$n \to n+1$

$$(xy)^{n+1} = (xy)^n(xy)$$
$$= x^n y^n xy$$
$$= x^n x y^n y = x^{n+1}y^{n+1}$$

$$(xy)^{mn} = x^{mn}y^{mn}$$
$$= (x^n)^m \cdot (y^m)^n$$

$\downarrow 1 \qquad \downarrow 1$

$$= 1$$

Arătăm că, dacă $(xy)^p = 1$, $p \in \mathbb{N}^*$, atunci $mn \le p$.

$$\Rightarrow x^p y^p = 1 \Rightarrow$$

$\Rightarrow y^{p} = x^{-p} \in \langle x\rangle \cap \langle y\rangle$

$y^p \in \langle y \rangle$ → subgrupul lui G de ordin m

$x^{-p} \in \langle x \rangle$ → subgrupul lui G de ordin m

$\langle x\rangle \cap \langle y\rangle \leq \langle x\rangle \Rightarrow |\langle x\rangle \cap \langle y\rangle| = o(\langle x\rangle)=m$

$\langle x\rangle \cap \langle y\rangle \leq \langle y\rangle \Rightarrow |\langle x\rangle \cap \langle y\rangle| = o(\langle y\rangle)=m$

$(m,m)=1$

$\Rightarrow |\langle x\rangle \cap \langle y\rangle| = 1$

$\Rightarrow y^{p} = 1 = x^{p}$

$\left.\begin{array}{l} o(x)=m \mid p \\ o(y)=m \mid p \end{array}\right\} \Rightarrow m\cdot m \mid p \Rightarrow m\cdot m \leq p \Rightarrow$

$\Rightarrow (x,y) = m.$

4. Arătați că, dacă $m,m \geq 2$ și $(m,m)=1$, atunci $\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_m \simeq \mathbb{Z}_{mm}$.

Fie $(\hat{1},\bar{1}) \in \mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_m$.

$o((g,h)) = [o(g), o(h)]$, $(g,h) \in G\times H$

$o((\hat{1},\bar{1})) = [o(\hat{1}), o(\bar{1})] = [m,m] = mm$

în $\mathbb{Z}_m$ în $\mathbb{Z}_m$

$\Downarrow$

$\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n$ este ciclic $\Rightarrow \simeq \mathbb{Z}_{mn}$

5. Să se determine:

(i) ordinele elementelor lui S_3

(ii) subgrupurile lui S_3

(i) $e, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix},$

$(2\ 3) \quad (1\ 2) \quad (1\ 2\ 3)$

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

$(3\ 2\ 1) \quad (1\ 3)$

$e \to$ ord 1

$(1\ 2) \quad (2\ 3) \quad (1\ 3) \to$ ord 2

$(1\ 2\ 3) \quad (3\ 2\ 1) \to$ ord 3

(ii) Fie $H \leq S_3 \Rightarrow |H| \mid |S_3| \Rightarrow |H| \mid 6$

1) $|H| = 1 \Rightarrow H = \{e\}$

2) $|H| = 2 \Rightarrow H = \{e, \sigma \mid o(\sigma) = 2\}$

$\Rightarrow H = \{e, (1\ 3)\}$

$H = \{e, (1\ 2)\}$

$H = \{e, (2\ 3)\}$

3) $|H| = 3 \Rightarrow H = \{e, \sigma, \sigma^2\}$

Fie $\sigma \in H \setminus \{e\}$. Atunci $o(\sigma) \mid 3 \Rightarrow o(\sigma) = 3 \Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow \langle \sigma \rangle \mid 3 \\ \langle \sigma \rangle \subset H \end{array}\right| \Rightarrow H = \langle \sigma \rangle$$

4) $|H| = 6 \Rightarrow H = S_3$