Министерство образования Республики Беларусь
Учреждение Образования
БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИНФОРМАТИКИ И РАДИОЭЛЕКТРОНИКИ

Кафедра электронных вычислительных средств

Лабораторная работа № 6
«ИЗУЧЕНИЕ ГРАДИЕНТНЫХ МЕТОДОВ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ НЕЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ»
Вариант 3

Выполнили:
ст. гр. 850702
Маковский Р. А.
Турко В. Д.

Проверил:
Станкевич А. В.

Минск 2020

# Цель работы

Изучить градиентные методы решения задачи нелинейного программирования.

# Исходные данные

ЭВС состоит из двух блоков: процессорного и цифро-аналогового. Вероятности отказа блоков за заданную наработку равны q1 и q2. Потребляемая мощность p1 и p2 . Требуется найти оптимальный резерв для каждого из блоков для заданной общей вероятности отказов не более q0 и минимальной потребляемой мощности. Резерв должен быть нагруженным.

```
q0 = 0.002;
q1 = 0.05;
q2 = 0.02;
p1 = 3; (*Вт*)
p2 = 5; (*Вт*)
```

Целевая функция

```
TargetF := p1 * (x1 + 1) + p2 * (x2 + 1);
```

Ограничение

```
QRestriction := q1^(x1+1) + q2^(x2+1);
```

## Используемые формулы для вычислений

```
EvaluateRestriction[x1_, x2_] := q1^(x1+1) + q2^(x2+1);
GradQ := Grad[QRestriction, {x1, x2}];
EvaluateGradQ1[value1_] := Assuming[x1 == value1, Refine[GradQ[[1]]]];
EvaluateGradQ2[value2_] := Assuming[x2 == value2, Refine[GradQ[[2]]]];
AbsGradQ[x1_, x2_] := Sqrt[EvaluateGradQ1[x1]^2 + EvaluateGradQ2[x2]^2];
EvaluateTargetF[x1_, x2_] := p1 * (x1 + 1) + p2 * (x2 + 1);
GradTargetF := Grad[TargetF, {x1, x2}];
EvaluateGradTarget1[value1_] := Assuming[x1 == value1, Refine[GradTargetF[[1]]]];
EvaluateGradTarget2[value2_] := Assuming[x2 == value2, Refine[GradTargetF[[2]]]];
AbsGradF[x1_, x2_] := Sqrt[EvaluateGradTarget1[x1]^2 + EvaluateGradTarget2[x2]^2];
```

## Функции вывода графиков

```
PlotAllowedPoints[x1_, x2_] := Module[{i = 0, j = 0, array = {{0, 0}}},
   For[i = 0, i ≤ x1, i++, For[j = 0, j ≤ x2, j++, AppendTo[array, {i, j}];];];
   ListPlot[array, PlotStyle → Black]];
PlotRestrictionArea[max1_, max2_] :=
  RegionPlot[QRestriction ≤ q0, {x1, 0, max1}, {x2, 0, max2}, PlotLegends → {QRestriction},
   AxesLabel → Automatic, PlotStyle → LightGray, BoundaryStyle → LightGray];
PlotAllowedArea[max1_, max2_] := Show[PlotRestrictionArea[max1, max2],
   PlotAllowedPoints[max1, max2]];
PointsLength[x1_, y1_, x2_, y2_] := Sqrt[(x2 - x1)^2 + (y2 - y1)^2];
```

# Ход работы

## Решение задачи градиентным методом с дроблением шага

Т.к. в задаче присутствует ограничение по вероятности отказа системы, необходимо добавить условие для проверки ограничения. В случае не выполнения ограничения, движение производится в направлении, противоположном направлению градиента функции суммарной вероятности отказа системы.

```
FindNextPoint[cur1_, cur2_, step_] := Module[{grad1, grad2, new1, new2},
   If[EvaluateRestriction[cur1, cur2] ≤ q0,
    grad1 = EvaluateGradTarget1[cur1];
    grad2 = EvaluateGradTarget2[cur2];,
    grad1 = EvaluateGradQ1[cur1];
    grad2 = EvaluateGradQ2[cur2];
   ];
   new1 = cur1 - grad1 * step;
   new2 = cur2 - grad2 * step;
   Return[{new1, new2}];
  ];
```

Для решения задачи используется градиентный метод с дроблением параметра шага:

λ_k+1 = λ_k / $\sqrt{k}$ .

```
FindMinSplit[init1_, init2_, initStep_, ϵ_] :=
  Module[{k = 1, cur1 = init1, cur2 = init2, curF, nextPoint, array, step, prevF, func},
   step = initStep;
   curF = EvaluateTargetF[init1, init2];
   nextPoint = FindNextPoint[init1, init2, step];
   array = {{init1, init2}};
   While[Abs[cur1 - nextPoint[[1]]] ≥ ϵ || Abs[cur2 - nextPoint[[2]]] ≥ ϵ,
    prevF = EvaluateTargetF[cur1, cur2];
    cur1 = nextPoint[[1]];
    cur2 = nextPoint[[2]];
    curF = EvaluateTargetF[cur1, cur2];
    AppendTo[array, {cur1, cur2}];
    nextPoint = FindNextPoint[cur1, cur2, step];
    k++;
    If[curF > prevF, step = initStep / Sqrt[k]];
   ];
   PrintResult[k, init1, init2, cur1, cur2];
   func = Show[ListPlot[array, PlotRange → {{0, 3}, {0, 3}}, PlotStyle → Orange],
     ListPlot[{{array[[1]][[1]], array[[1]][[2]]}}, PlotStyle → Green, PlotMarkers → "●"],
     ListPlot[{{Last[array][[1]], Last[array][[2]]}}, PlotStyle → Red, PlotMarkers → "●"]];
   Show[PlotAllowedArea[3, 3], func]
  ];
```

Для использования градиентоного метода, предполагаем, что искомые величины непрерывные. После оптимизации из ближайших целочисленных значений выбирается лучшее решение по значению целевой функции и выполнению ограничения.

```
PrintResult[k_, init1_, init2_, x1_, x2_] := Module[{ceil1 = Ceiling[x1],
    ceil2 = Ceiling[x2], floor1 = Floor[x1], floor2 = Floor[x2], ans1 = -1, ans2 = -1},
   Module[{p1, p2, p3, p4, l, ansL},
    p1 = {ceil1, ceil2};
    p2 := {ceil1, floor2};
    p3 := {floor1, floor2};
    p4 = {floor1, ceil1};
    l := {PointsLength[x1, x2, p1[[1]], p1[[2]]], PointsLength[x1, x2, p2[[1]], p2[[2]]],
      PointsLength[x1, x2, p3[[1]], p3[[2]]], PointsLength[x1, x2, p4[[1]], p4[[2]]]};
    ansL = l[[1]];
    If[EvaluateRestriction[p1[[1]], p1[[2]]] ≤ q0,
     ans1 = p1[[1]];
     ans2 = p1[[2]];,
     If[EvaluateRestriction[p2[[1]], p2[[2]]] ≤ q0 && l[[2]] < ansL,
       ansL = l[[2]];
       ans1 = p2[[1]];
       ans2 = p2[[2]];,
       If[EvaluateRestriction[p3[[1]], p3[[2]]] ≤ q0 && l[[3]] < ansL,
         ansL = l[[3]];
         ans1 = p3[[1]];
         ans2 = p3[[2]];,
         If[EvaluateRestriction[p4[[1]], p4[[2]]] ≤ q0 && l[[4]] < ansL,
           ansL = l[[4]];
           ans1 = p4[[1]];
           ans2 = p4[[2]];
          ];];];];];
   Print[Row[{"Количество итераций", k}, "="]];
   Print["Исходный резерв:"];
   Print[Row[{" процессорного блока", Row[{1, init1}, "+"]}, "="]];
   Print[Row[{" цифро-аналогового блока", Row[{1, init2}, "+"]}, "="]];
   If[ans1 == -1 || ans2 == -1, Print["Failed"],
    Print["Необходимое изменение резерва:"];
    Print[Row[{" процессорного блока", x1 - init1}, "="]];
    Print[Row[{" цифро-аналогового блока", x2 - init2}, "="]];
    Print["Итоговый резерв:"];
    Print[Row[{" процессорного блока", Row[{x1, ans1}, "→"]}, "="]];
    Print[Row[{" цифро-аналогового блока", Row[{x2, ans2}, "→"]}, "="]];
    Print[Row[{"Вероятность отказа системы", EvaluateRestriction[ans1, ans2]}, "="]];
    Print[Row[{"Потребляемая мощность системы", EvaluateTargetF[ans1, ans2]}, "="]];];
  ];
```

## Примеры решения задачи при различных стартовых точках

Начальная величина шага

```
λ = 0.05;
```

Константа остановки

```
ϵ = 0.000001;
```

Зеленой точкой отмечена стартовая точка, красной - финальная точка. ОДР представлена серой областью, а разрешенные (целочисленные) значения - черными точками.

## Старт из области, где выполняется ограничение

```
FindMinSplit[2.5, 1.8, λ, ϵ]
```

Количество итераций = 108 538

Исходный резерв:

процессорного блока = 1 + 2.5

цифро-аналогового блока = 1 + 1.8

Необходимое изменение резерва:

процессорного блока = − 0.811391

цифро-аналогового блока = − 1.16749

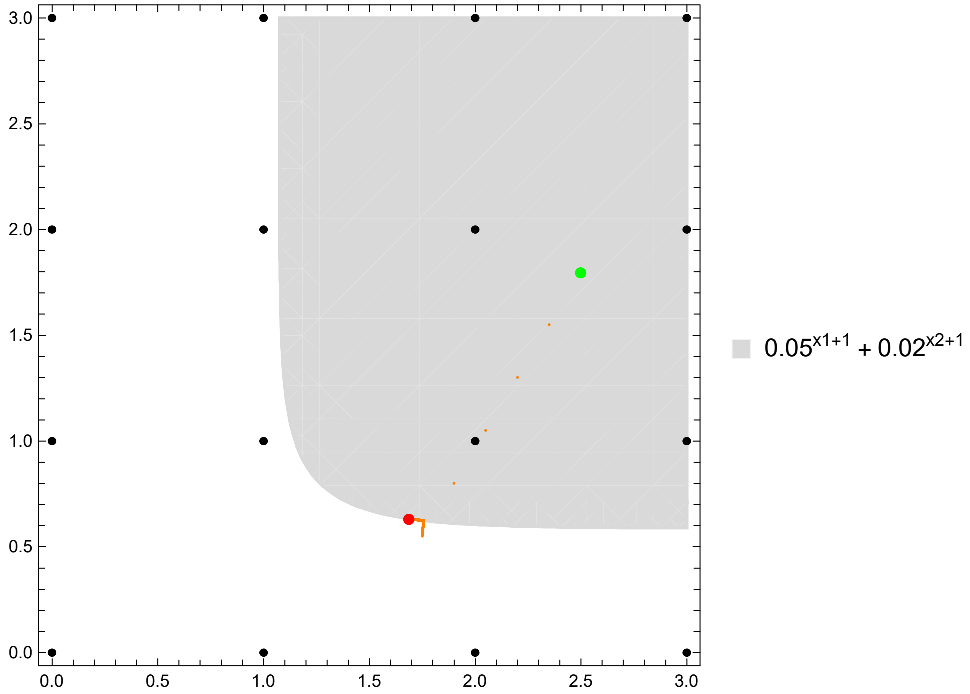
Итоговый резерв:

процессорного блока = 1.68861 → 2

цифро-аналогового блока = 0.632509 → 1

Вероятность отказа системы = 0.000525

Потребляемая мощность системы = 19



**FindMinSplit**[2, 2, $\lambda$, $\epsilon$]

Количество итераций = 34 033

Исходный резерв:

процессорного блока = 1 + 2

цифро-аналогового блока = 1 + 2

Необходимое изменение резерва:

процессорного блока = −0.712769

цифро-аналогового блока = −1.21926

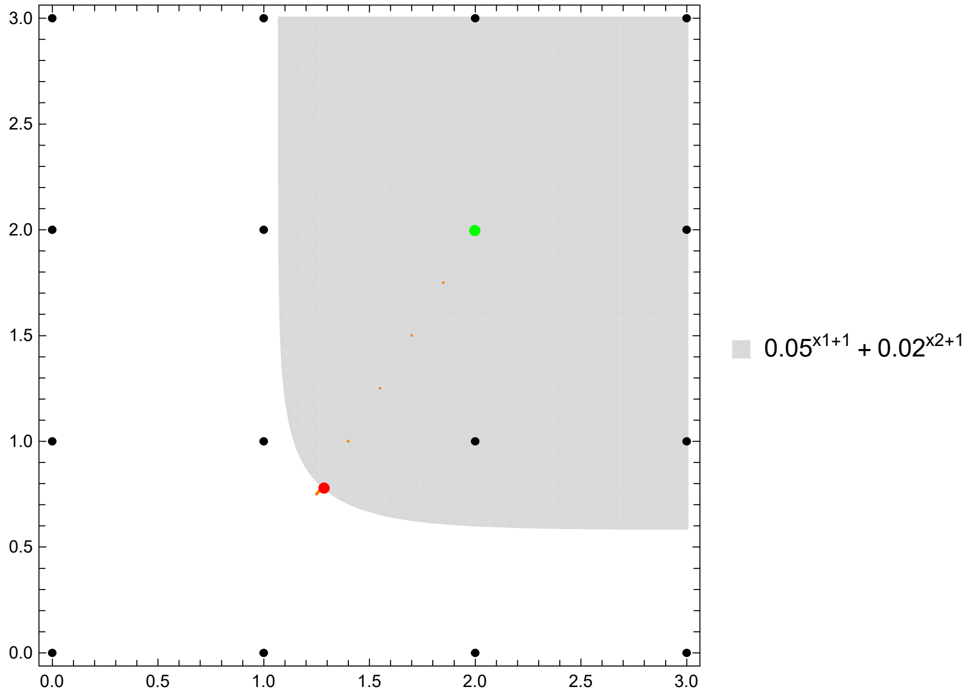
Итоговый резерв:

процессорного блока = 1.28723 → 2

цифро-аналогового блока = 0.780744 → 1

Вероятность отказа системы = 0.000525

Потребляемая мощность системы = 19



**FindMinSplit**[2, 1, λ, ϵ]

Количество итераций = 105 810

Исходный резерв:

процессорного блока = 1 + 2

цифро-аналогового блока = 1 + 1

Необходимое изменение резерва:

процессорного блока = −0.334182

цифро-аналогового блока = −0.364236

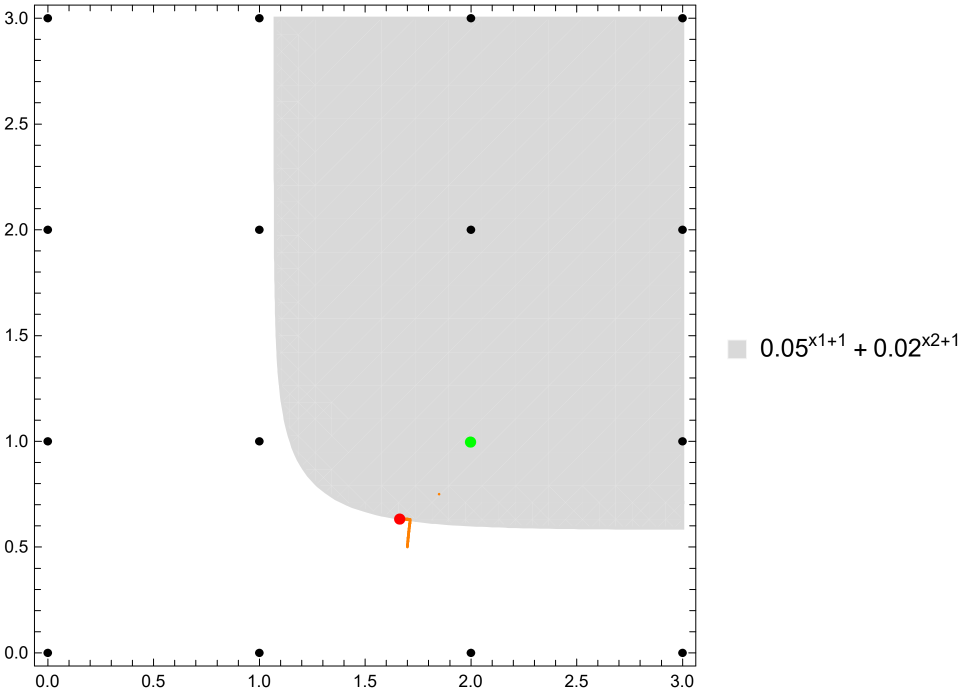
Итоговый резерв:

процессорного блока = 1.66582 → 2

цифро-аналогового блока = 0.635764 → 1

Вероятность отказа системы = 0.000525

Потребляемая мощность системы = 19



## Старт из области где не выполняется ограничение

**FindMinSplit**[0, 0, λ, ϵ]

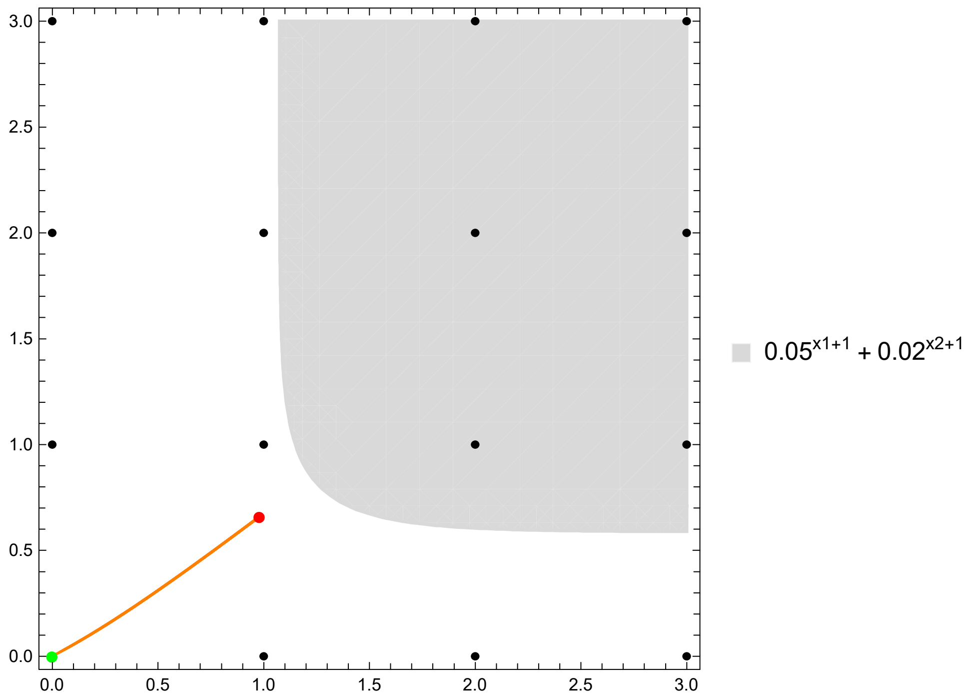
Количество итераций = 158 118

Исходный резерв:

процессорного блока = 1 + 0

цифро-аналогового блока = 1 + 0

Failed



```
FindMinSplit[2, 0, λ, ϵ]
```

Количество итераций = 134 252

Исходный резерв:

процессорного блока = 1 + 2

цифро–аналогового блока = 1 + 0

Необходимое изменение резерва:

процессорного блока = −0.00853407

цифро–аналогового блока = 0.605335

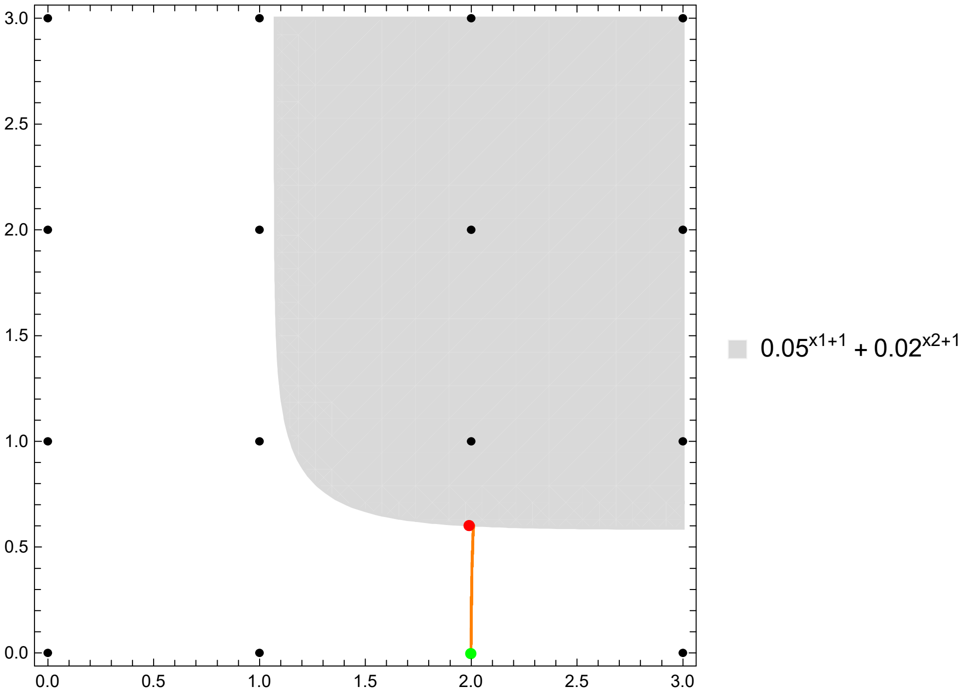
Итоговый резерв:

процессорного блока = 1.99147 → 2

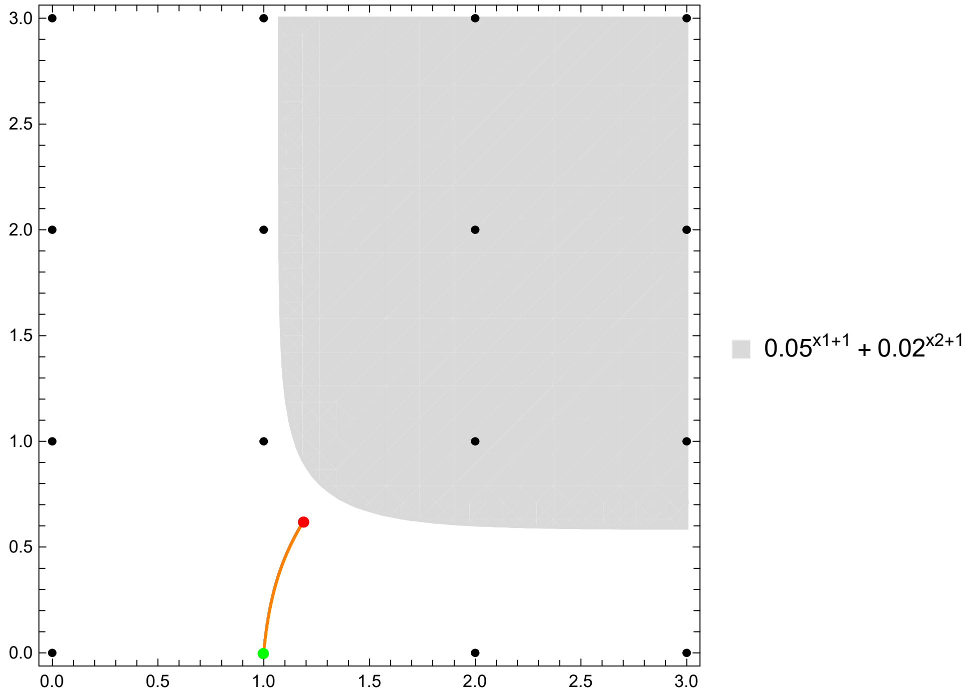
цифро–аналогового блока = 0.605335 → 1

Вероятность отказа системы = 0.000525

Потребляемая мощность системы = 19



```
FindMinSplit[1, 0, λ, ϵ]
Количество итераций = 116 719
Исходный резерв:
 процессорного блока = 1 + 1
 цифро-аналогового блока = 1 + 0
Необходимое изменение резерва:
 процессорного блока = 0.189841
 цифро-аналогового блока = 0.623222
Итоговый резерв:
 процессорного блока = 1.18984 → 2
 цифро-аналогового блока = 0.623222 → 1
Вероятность отказа системы = 0.000525
Потребляемая мощность системы = 19
```




Для одного из приведенных примеров (первый из примеров, со стартовой точкой вне ОДР) не удалось найти входящее в ОДР решение. Это связано с тем, что процесс останавливался по величине изменения шага и необходимая точность шага достигалась до нахождения решения.

# Вывод

В лабораторной работе мы познакомились с градиентными методами решения задач нелинейного программирования. В частности, искали оптимальное резерв для блоков ЭВС градиентным методом с дроблением шага. Для чего необходимо было решать задачу в предположении, что количество резервных блоков является непрерывной величиной, а после нахождения решения производился поиск по ближайшим целочисленным значениям.