1 Sobre as Matrizes

Todo numero real a, não nulo possui um inverso (multiplicativo), ou seja existe um número b, tal que $a\ b = b\ a = 1$. Este número é único e o denotamos por a^{-1}. Apesar da álgebra matricial ser semalhante à álgebra dos números reais, nem todas as matrizes A *não nulas* possuem inversa, ou seja, nem sempre existe uma matriz B, tal que $A\ B = B\ A = I_n$. De início, para que os produtos AB e BA, estejam definidos e sejam iguais é preciso que as matrizes A e B sejam quadradas. Portanto, somente as matrizes quadradas podem ter inversa, o que já diferencia do caso dos números reais, pois todo núymero não nulo tem inverso. Mesmo que entre as matrizes quadradas, muitas não possuem inversa, apesar do conjunto das que não tem inversa ser bem menor do que o conjunto das que tem.

2 Matriz Inversa

2.1 Definição

Uma matriz quadrada $A = (A_{ij})_{n\times m}$ é **invertivel**, ou **não singular**, se existe uma matriz $B = (b_{ij})_{n\times m}$ tal que

$$A\ B = B\ A = I_n,$$

em que I_n é a matriz identidade. A matriz B é chamada de **inversa** de A. Se A não tem inversa, dizemos que A é **não invertível** ou **singular**

2.2 Exemplo

Considere as matrizes

$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} \frac{-1}{2} & \frac{1}{6} \\ 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$

A matriz B é a inversa da matriz A, pois $A\ B = B\ A = I_2$

$A\dot{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

2.2.1 Teorema

Sejam A e B matrizes $n \times n$.

(a) Se $BA = I_n$, então $AB = I_n$

(b) Se $AB = I_n$, então $BA = I_n$

3 Teoremas

3.1

Se a matriz $A = (a_{ij})_{n\times n}$ possui inversa, então a inversa é única

3.2

(a) Se A é invertivel, então A^{-1} tambem o é e

$$(A^{-1})^{-1} = A;$$

(b) Se $A = (a_{ij})_{n\times n}$ e $B = (b_{ij})_{n\times n}$ são matizes invertíveis, então AB é invertivel e

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1};$$

(c) Se $A = (a_{ij})_{n \times n}$ é invertivel, então A^t tambem é invertível e

$$(A^t)^{-1} = (A^-1)^t$$

4 Operação Elementar sobre as linhas

4.1 Definição

Uma **operação elementar sobre as linhas** de uma matriz é uma das seguintes operações;

(a) Trocar a posição de duas linhas da matriz;

(b) Multiplicar uma linha da matriz por um escalar diferente de zero;

(c) Somar a uma linha da matriz um múltiplo escalar de outra linha.

4.2 Definição

Uma matriz $A = (a_{ij})_{m \times n}$ **é equivalente por linhas** a uma matriz $B = (b_{ij})_{m \times n}$, se B pode ser obtida de A aplicando-se uma sequencia de operações elementares sobre as suas linhas.

4.3 Teorema

Seja A uma matriz $n \times n$. As seguintes afirmações são equivalentes:

(a) Existe uma matriz $B, n \times n$ tal que $BA = I_n$

(b) A matriz A é equivalente por linhas à matriz identidade I_n

(c) A matriz A é invertível.

4.4 Exemplo

Vamos encontrar, se existir a inversa de

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

1ª Eliminação

-2x1ª linha + 2ª linha $\longrightarrow$ 2ª linha
-2x1ª linha + 3ª linha $\longrightarrow$ 3ª linha

$$\left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

2ª Eliminação

-1x2ª linha $\longrightarrow$ 2ª linha

$$\left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

-1x2ª linha + 1ª linha $\longrightarrow$ 1ª linha
-1x2ª linha + 3ª linha $\longrightarrow$ 3ª linha

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & -4 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

3ª Eliminação

$\frac{1}{5} \times$ 3łª linha

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{4}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{array}\right]$$

-3x3ª linha + 1ª linha $\longrightarrow$ 1ª linha
2x3ª linha + 2ª linha $\longrightarrow$ 2ª linha

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{7}{5} & \frac{2}{5} & -\frac{3}{5} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{5} & -\frac{3}{5} & \frac{2}{5} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{4}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{array}\right]$$

4.5 Exemplo

Vamos determinar, se existir a inversa da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Para isso devemos escalonar a matriz aumentada

$$[A|I_3] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

1ª eliminação:

-1x1ª linha + 2ª linha $\longrightarrow$ 2ª linha

$$[A|I_3] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

2ª Eliminação

-1x2ª linha $\longrightarrow$ 2ª linha

$$[A|I_3] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

-2x2ª linha + 1ª linha $\longrightarrow$ 1ª linha
-1x2ª linha + 3ª linha $\longrightarrow$ 3ª linha

$$[A|I_3] = \left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right]$$