1 Matrizes

1.1 Matriz

Uma matriz $A, m \times n (m$ por $n)$ é uma tabela de mn números dispostos em m linhas e n colunas

$$A_{m,n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

A $i-$**ésima linha** de A é

$$\begin{bmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \end{bmatrix}$$

A $j-$**ésima coluna** de A é

$$\begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix}$$

Se $m = n$

dizemos que A é uma **matriz quadrada de ordem** n e os elementos

$$a_{11}, a_{22}, \ldots a_{nn}$$

formam a **diagonal (princinpal)** de A.

1.2 Exemplos

$$A_{2\times 2} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$a_{12} = 2$$

$$[A]_{22} = 4$$

$$B_{2\times 2} = \begin{bmatrix} 2- & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$C_{2\times 3} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & -2 \end{bmatrix}$$

$$c_{23} = -2$$

$$D_{1\times 3} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \end{bmatrix}$$

$$[D]_{12} = -3$$

matriz linha

$$E_{1\times 3} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$e_{21} = 4$$

matriz coluna

$$F_{1\times 1} = \begin{bmatrix} 3 \end{bmatrix}$$

$A = (a_{ij})_{m\times n}$ e $B = (b_{ij})_{p\times q}$ são **iguais** se:

$$m = p$$

$$n = q$$

$$a_{ij} = b_{ij}$$

1.3 Soma de Matrizes

1.3.1 Definição

A **soma** de dias matrizes de **mesmo tamanho** $A = (a_{ij})_{m\times n}$ é definida como sendo a matriz m x n.

$$C = A + B$$

obtida somando-se os elementos correspondes de A e B, ou seja

$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$,

para $i = 1, \dots, m$ e $j = 1, \dots, n$. Escrevemos também $[A + B]_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$.

1.3.2 Exemplo

Considere as matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 4 & 0 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 5 \\ 0 & 3 & -4 \end{bmatrix} \tag{1}$$

Se chamamos de C a soma das duas matrizes A e B, então :

$$C = A + B = \begin{bmatrix} 1 + (-2) & 2 + 1 & -3 + 5 \\ 3 + 0 & 4 + 3 & 0 + (-4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 3 & 7 & -4 \end{bmatrix} \tag{2}$$

2 Multiplicação de Matrizes

2.0.1 Definição

A **multiplicação de uma matriz** $A = (a_{ij})_{m\times n}$ **por um escalar** (número) α é definida pela matriz $m \times n$

$$B = \alpha A$$

obtida multiplicando-se cada elemento da matriz A pelo escalar α, ou seja,

$$b_{ij} = \alpha a_{ij}$$

2.0.2 Exemplo

O produto da matriz $A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 3 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$ pelo escalar -3 é dado por :

$$-3\ A = \begin{bmatrix} (-3)(-2) & (-3)(1) \\ (-3)0 & (-3)3 \\ (-3)5 & (-3)(-4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & -3 \\ 0 & 9 \\ -15 & 12 \end{bmatrix}.$$

2.0.3 Definição

O produto de duas matrizes, tais que o **o número de colunas da primeira matriz é igual ao número de linhas da segunda**, $A = (a_{ij})_{m\times p}$ e $B = (b_{ij})_{p\times n}$ é definido pela matriz $m \times n$

$$C = AB$$

obtida da seguinte forma:

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{ip}b_{pj}$$

para $i = 1, \ldots, m$ e $j = 1, \ldots, n$. Escrevemos tambem $[AB]_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{ip}b_{pj}$

$$\begin{bmatrix} c_{11} & \ldots & c_{1n} \\ \vdots & c_{ij} & \vdots \\ c_{m1} & \ldots & c_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1p} \\ \vdots & & \ldots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \ldots & a_{ip} \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mp} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & \ldots & b_{1j} & \ldots & b_{1n} \\ b_{21} & \ldots & b_{2j} & \ldots & b_{2n} \\ \vdots & & \ldots & \vdots & \\ b_{p1} & \ldots & b_{p2} & \ldots & b_{pn} \end{bmatrix} \tag{3}$$

2.0.4 Exemplo

Considere as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 4 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 5 & -4 & 0 \end{bmatrix},$$

Se chamamos de C o produto das duas matrizes A e B, então :

$$C = AB = \begin{bmatrix} 1(-2) + 2\cdot 0 + (-3)5 & 1\cdot 1 + 2\cdot 3 + (-3)(-4) & 0 \\ 3(-2) + 4\cdot 0 + 0\cdot 5 & 3\cdot 1 + 4\cdot 3 + 0(-4) & 0 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} -17 & 19 & 0 \\ -6 & 15 & 0 \end{pmatrix}$$

Observação. No exemplo anterior o produto BA não está definido (porque ?). Entretanto, mesmo quando ele está definido, pode não ser igual a AB, ou seja, o produto de matrizes **não é comutativo**, como mostra o exemplo seguinte

---

2.0.5 Exemplo

Sejam $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, e $B = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$. Então, $AB = \begin{bmatrix} -2 & 7 \\ -6 & 15 \end{bmatrix}$, e $BA = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 9 & 12 \end{bmatrix}$

3 Transposta

A **transposta** de uma matriz $A = (A_{ij})_{m\times n}$ é definida pela matriz $m \times n$.

$$B = A^t$$

$$[A^t]_{ij} = a_{ji}$$

obtida trocando-se as linhas com as colunas, ou seja:

$$b_{ij} = a_{ji}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \qquad A^t = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & -2 \end{bmatrix} \qquad C^t = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

4 Teoremas

Sejam A, B e C matrizes com tamanhos apropriados, α e β escalares. São válidas as seuintes propriedades para as operações matriciais

(a) (Comutatividade) $A + B = B + A$;

(b) (Associatividade) $A + (B + C) = (A + B) + C$;

(c) (Elemento Neutro) A matriz $\bar{0}$ definida por $[\bar{0}]_{ij} = 0$, para $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$ é tal que

$$A + \bar{0} = A,$$

para toda matriz $A, m \times n$. A matriz $\bar{0}$ é chama de **matriz nula** $m \times n$

(d) (Elemento Simétrico) Para cada matriz A, existe uma única matriz $-A$, definida por $[-A]_{ij} = -a_{ij}$, tal que

$$A + (-A) = \bar{0}. \qquad A - B = A + (-B)$$

;

(e) (Associatividade) $\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A$;

(f) (Distributividade) $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta B$;

(g) (Distributividade) $\alpha(A + B) = \alpha A + \beta B$;

(h) (Associatividade) $A(BC) = (AB)C$; $\qquad \underbrace{A^P = A \ldots}_{pvezes}$

(i) (Elemento Neutro) Para cada inteiro positivo p a matriz $p \times p$,

$$I_p = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{bmatrix}, \qquad A^0 = I^n$$

chamada **matriz identidade** é tal que
$Ai_n = I_m A = A$, para toda matriz $A = (a_{ij})_{m \times n}$.

(j) (Distributividade) $A(B + C) = AB + AC$ e $(B + C)A = BA + CA$;

(k) $\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$;

(l) $(A^t)^t = A$;

(m) $(A + B)^t = A^t + B^t$;

(n) $(\alpha A)^t = \alpha A^T$

(o) $(AB)^t = B^t A^t$;

5 Matriz Diagonal

Matriz diagonal $n \times n$ $D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix}$ A é chamada de **nilpotente** se $A^k = \overline{0}$, para algum inteiro positivo k

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}_{n \times n}$$

6 Matriz Simétrica

$A, n \times n$, é **simétrica** se $A^t = A$ e **anti-simétrica** se $A^t = -A$. Se A é simétrica, então $a_{ij} = a_{ji}$
Se A e B são simétricas, então $A + B$ e αA são simétrica
Se A e B são simétricas, então AB é simétrica se, e somente se, $AB = BA$