Exercícios Numéricos (respostas na página 499)

2.1.1. Seja A uma matriz 3×3. Suponha que $X = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}$ é solução do sistema homogêneo $A\,X = \bar{0}$. A matriz A é singular ou não? Justifique.

2.1.2. Se possível, encontre as inversas das seguintes matrizes:

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$;

(b) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$;

(c) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 2 \end{bmatrix}$;

(d) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$;

(e) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$;

(f) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 5 & 9 & 1 & 6 \end{bmatrix}$;

2.1.3. Encontre todos os valores de a para os quais a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & a \end{bmatrix}$ tem inversa.

2.1.4. Se

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & -2 \end{bmatrix},$$

encontre $(A\,B)^{-1}$.

2.1.5. Resolva o sistema $A\,X = B$, se $A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix}$.

2.1.10. (a) Mostre que a matriz $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ é invertível se, e somente se, $ad - bc \neq 0$ e neste caso a inversa é dada por

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

(Sugestão: encontre a forma escalonada reduzida da matriz $[\, A \mid I_2 \,]$, para $a \neq 0$ e para $a = 0$.)

(b) Mostre que se $ad - bc \neq 0$, então o sistema linear

$$\begin{cases} ax + by = g \\ cx + dy = h \end{cases}$$

tem como solução

$$x = \frac{gd - bh}{ad - bc}, \quad y = \frac{ah - gc}{ad - bc}$$

Sugestão para os próximos 4 exercícios: Para verificar que uma matriz B é a inversa de uma matriz A, basta fazer um dos produtos AB ou BA e verificar que é igual a I_n.

2.1.11. Se A é uma matriz $n \times n$ e $A^k = \bar{0}$, para k um inteiro positivo, mostre que

$$(I_n - A)^{-1} = I_n + A + A^2 + \ldots + A^{k-1}.$$

2.1.12. Seja A uma **matriz diagonal**, isto é, os elementos que estão fora da diagonal são iguais a zero ($a_{ij} = 0$, para $i \neq j$). Se $a_{ii} \neq 0$, para $i = 1, \ldots, n$, mostre que A é invertível e a sua inversa é também uma matriz diagonal com elementos na diagonal dados por $1/a_{11}, 1/a_{22}, \ldots, 1/a_{nn}$.

2.1.13. Sejam A e B matrizes quadradas. Mostre que se $A + B$ e A forem invertíveis, então

$$(A + B)^{-1} = A^{-1}(I_n + BA^{-1})^{-1}.$$

2.1. Matriz Inversa (página 92)

2.1.1. A matriz é singular, pois o sistema homogêneo tem solução não trivial (Teorema 2.8 na página 81).

2.1.2. (a)
```
>> A=[1,2,3;1,1,2;0,1,2];
>> B=[A,eye(3)];
>> escalona(B)
[1, 0, 0, 0, 1,-1]
[0, 1, 0, 2,-2,-1]
[0, 0, 1,-1, 1, 1]
```

(b)
```
[1, 0, 0, 3, 2,-4]
[0, 1, 0,-1, 0, 1]
[0, 0, 1, 0,-1, 1]
```

(c)
```
[1,   0,   0,   0, 7/3,-1/3,-1/3,-2/3]
[0,   1,   0,   0, 4/9,-1/9,-4/9, 1/9]
[0,   0,   1,   0,-1/9,-2/9, 1/9, 2/9]
[0,   0,   0,   1,-5/3, 2/3, 2/3, 1/3]
```

(d)
```
[1, 0,   0,  1, -1,    0]
[0, 1,   0,3/2,1/2,-3/2]
[0, 0,   1, -1,  0,    1]
```

(e)
```
[ 1  0  1   1  0  -2 ]
[ 0  1  1   0  0   1 ]
[ 0  0  0  -1  1   1 ]

Continua ? (s/n) n
```

(f)
```
[1, 0,  0,1/4, 5/4,-3/4, 1/2, 0]
[0, 1,  0,1/2,-1/2, 1/2,   0, 0]
[0, 0,  1,1/4, 1/4, 1/4,-1/2, 0]
[0, 0,  0,  0,  -2,  -1,  -2, 1]
```

```
Continua ? (s/n) n
```

2.1.3.
```
>> syms a
>> A=[1,1,0;1,0,0;1,2,a];
>> escalona(A)
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix}$$

```
Continua ?  (s/n) n
```

Para valores de a diferentes de zero a matriz A tem inversa.

2.1.4.
```
>> invA=[3,2;1,3]; invB=[2,5;3,-2];
>> invAB=invB*invA
invAB =      11           19
              7            0
```

2.1.5.
```
>> invA=[2,3;4,1]; B=[5;3];
>> X=invA*B
X =      19
         23
```

2.1.6.

$$\begin{aligned} A^k &= PD^kP^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3^k & 0 \\ 0 & (-1)^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} 3^k & (-1)^k \\ -2\,3^k & 2(-1)^k \end{bmatrix} \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 2(3^k + (-1)^k) & (-1)^k - 3^k \\ 4((-1)^k - 3^k) & 2(3^k + (-1)^k) \end{bmatrix} \end{aligned}$$