

Mathematical Finance MSc Dissertation MTH775P, 2018/19

# Disquisitiones Arithmeticae

High Performance Computing techniques for  
numerically solving  
financial PDEs

**Mustafa Berke Erdis, ID 180883925**

Supervisor: Dr. Sebastian del Bano Rollin



A thesis presented for the degree of  
Master in Sciences in *Mathematical Finance*

School of Mathematical Sciences  
and *School of Economics and Finance*  
Queen Mary University of London

# Declaration of original work

This declaration is made on July 3, 2019.

**Student's Declaration:** I, Mustafa Berke Erdis, hereby declare that the work in this thesis is my original work. I have not copied from any other students' work, work of mine submitted elsewhere, or from any other sources except where due reference or acknowledgement is made explicitly in the text, nor has any part been written for me by another person.

Referenced text has been flagged by:

1. Using italic fonts, **and**
2. using quotation marks "...", **and**
3. explicitly mentioning the source in the text.

This work is dedicated to my dog Charles Frederick.

# Acknowledgements

Here you thank people that have helped you in the journey.

Vivamus vehicula leo a justo. Quisque nec augue. Morbi mauris wisi, aliquet vitae, dignissim eget, sollicitudin molestie, ligula. In dictum enim sit amet risus. Curabitur vitae velit eu diam rhoncus hendrerit. Vivamus ut elit. Praesent mattis ipsum quis turpis. Curabitur rhoncus neque eu dui. Etiam vitae magna. Nam ullamcorper. Praesent interdum bibendum magna. Quisque auctor aliquam dolor. Morbi eu lorem et est porttitor fermentum. Nunc egestas arcu at tortor varius viverra. Fusce eu nulla ut nulla interdum consectetur. Vestibulum gravida. Morbi mattis libero sed est.

# Abstract

Here you write a short summary, around 10 lines, of your work.

Vivamus vehicula leo a justo. Quisque nec augue. Morbi mauris wisi, aliquet vitae, dignissim eget, sollicitudin molestie, ligula. In dictum enim sit amet risus.

Curabitur vitae velit eu diam rhoncus hendrerit. Vivamus ut elit. Praesent mattis ipsum quis turpis. Curabitur rhoncus neque eu dui. Etiam vitae magna. Nam ullamcorper. Praesent interdum bibendum magna. Quisque auctor aliquam dolor. Morbi eu lorem et est porttitor fermentum. Nunc egestas arcu at tortor varius viverra. Fusce eu nulla ut nulla interdum consectetur. Vestibulum gravida. Morbi mattis libero sed est.

# Preface

Here you write a summary of the work. A paragraph on the motivation, previous work, then maybe a brief chapter by chapter summary.

Vivamus vehicula leo a justo. Quisque nec augue. Morbi mauris wisi, aliquet vitae, dignissim eget, sollicitudin molestie, ligula. In dictum enim sit amet risus. Curabitur vitae velit eu diam rhoncus hendrerit. Vivamus ut elit. Praesent mattis ipsum quis turpis. Curabitur rhoncus neque eu dui. Etiam vitae magna. Nam ullamcorper. Praesent interdum bibendum magna. Quisque auctor aliquam dolor. Morbi eu lorem et est porttitor fermentum. Nunc egestas arcu at tortor varius viverra. Fusce eu nulla ut nulla interdum consectetur. Vestibulum gravida. Morbi mattis libero sed est.

Queen Mary University of London  
12<sup>th</sup> August 2019

# Contents

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>7</b>
1.1	Parabolic Partial Differential Equations . . . . .	8
1.1.1	Heat Equation . . . . .	8
1.1.2	Black Scholes in 1D/2D . . . . .	8
1.1.3	Numerical Methods for Parabolic Differential Equations	9
1.2	Motivation for this work . . . . .	11
1.2.1	The problem of numerical solutions . . . . .	11
1.2.2	The approach to optimizations . . . . .	12
1.3	Timing the Code . . . . .	14
<b>2</b>	<b>Work Done Optimizing</b>	<b>16</b>
2.1	Parallelizing Tridiagonal Systems . . . . .	16
<b>3</b>	<b>Conclusions</b>	<b>17</b>
<b>A</b>	<b>Implementation of the BarrierOptionCVA class</b>	<b>18</b>
<b>B</b>	<b>shorter running title</b>	<b>19</b>



# Chapter 1

## Introduction

The mathematical theory of partial differential equations describing financial markets plays an important role in mathematical finance. In most cases these equations are too complicated to be solved explicitly, therefore different methods of finding approximate numerical solutions are needed.

The most commonly used method is finite difference which tries to find approximate solutions to the problem at a discrete set of points, normally on a rectangular grid of points. It is simple to construct and analyse but can compromise performance because of increased computational complexity when there are high dimensions. The alternate direction implicit (ADI) method is used to numerically solve two dimensional parabolic PDEs. ADI schemes give us advantages of implicit finite difference method and computationally only requires to solve tridiagonal matrices [1]. Finally, the Monte Carlo method is used to find the numerical solution when dimensions are too high by calculating an expectation (Feynman-Kac Theorem) [2].

The existing numerical methods for partial differential equations are all constrained by the computational complexity. Motivated by present results and methods employed in high performance computing, we believe there are interesting and challenging topics in numerical solutions of PDEs for finance.

## 1.1 Parabolic Partial Differential Equations

Fusce mauris. Vestibulum luctus nibh at lectus. Sed bibendum, nulla a faucibus semper, leo velit ultricies tellus, ac venenatis arcu wisi vel nisl. Vestibulum diam. Aliquam pellentesque, augue quis sagittis posuere, turpis lacus congue quam, in hendrerit risus eros eget felis. Maecenas eget erat in sapien mattis porttitor. Vestibulum porttitor. Nulla facilisi. Sed a turpis eu lacus commodo facilisis. Morbi fringilla, wisi in dignissim interdum, justo lectus sagittis dui, et vehicula libero dui cursus dui. Mauris tempor ligula sed lacus. Duis cursus enim ut augue. Cras ac magna. Cras nulla. Nulla egestas. Curabitur a leo. Quisque egestas wisi eget nunc. Nam feugiat lacus vel est. Curabitur consectetur.

### 1.1.1 Heat Equation

Fusce mauris. Vestibulum luctus nibh at lectus. Sed bibendum, nulla a faucibus semper, leo velit ultricies tellus, ac venenatis arcu wisi vel nisl. Vestibulum diam. Aliquam pellentesque, augue quis sagittis posuere, turpis lacus congue quam, in hendrerit risus eros eget felis. Maecenas eget erat in sapien mattis porttitor. Vestibulum porttitor. Nulla facilisi. Sed a turpis eu lacus commodo facilisis. Morbi fringilla, wisi in dignissim interdum, justo lectus sagittis dui, et vehicula libero dui cursus dui. Mauris tempor ligula sed lacus. Duis cursus enim ut augue. Cras ac magna. Cras nulla. Nulla egestas. Curabitur a leo. Quisque egestas wisi eget nunc. Nam feugiat lacus vel est. Curabitur consectetur.

### 1.1.2 Black Scholes in 1D/2D

Fusce mauris. Vestibulum luctus nibh at lectus. Sed bibendum, nulla a faucibus semper, leo velit ultricies tellus, ac venenatis arcu wisi vel nisl. Vestibulum diam. Aliquam pellentesque, augue quis sagittis posuere, turpis lacus congue quam, in hendrerit risus eros eget felis. Maecenas eget erat in

sapien mattis porttitor. Vestibulum porttitor. Nulla facilisi. Sed a turpis eu lacus commodo facilisis. Morbi fringilla, wisi in dignissim interdum, justo lectus sagittis dui, et vehicula libero dui cursus dui. Mauris tempor ligula sed lacus. Duis cursus enim ut augue. Cras ac magna. Cras nulla. Nulla egestas. Curabitur a leo. Quisque egestas wisi eget nunc. Nam feugiat lacus vel est. Curabitur consectetur.

### 1.1.3 Numerical Methods for Parabolic Differential Equations

Fusce mauris. Vestibulum luctus nibh at lectus. Sed bibendum, nulla a faucibus semper, leo velit ultricies tellus, ac venenatis arcu wisi vel nisl. Vestibulum diam. Aliquam pellentesque, augue quis sagittis posuere, turpis lacus congue quam, in hendrerit risus eros eget felis. Maecenas eget erat in sapien mattis porttitor. Vestibulum porttitor. Nulla facilisi. Sed a turpis eu lacus commodo facilisis. Morbi fringilla, wisi in dignissim interdum, justo lectus sagittis dui, et vehicula libero dui cursus dui. Mauris tempor ligula sed lacus. Duis cursus enim ut augue. Cras ac magna. Cras nulla. Nulla egestas. Curabitur a leo. Quisque egestas wisi eget nunc. Nam feugiat lacus vel est. Curabitur consectetur.

#### Explicit

Fusce mauris. Vestibulum luctus nibh at lectus. Sed bibendum, nulla a faucibus semper, leo velit ultricies tellus, ac venenatis arcu wisi vel nisl. Vestibulum diam. Aliquam pellentesque, augue quis sagittis posuere, turpis lacus congue quam, in hendrerit risus eros eget felis. Maecenas eget erat in sapien mattis porttitor. Vestibulum porttitor. Nulla facilisi. Sed a turpis eu lacus commodo facilisis. Morbi fringilla, wisi in dignissim interdum, justo lectus sagittis dui, et vehicula libero dui cursus dui. Mauris tempor ligula sed lacus. Duis cursus enim ut augue. Cras ac magna. Cras nulla. Nulla

egestas. Curabitur a leo. Quisque egestas wisi eget nunc. Nam feugiat lacus vel est. Curabitur consectetur.

### **Implicit/CN**

Fusce mauris. Vestibulum luctus nibh at lectus. Sed bibendum, nulla a faucibus semper, leo velit ultricies tellus, ac venenatis arcu wisi vel nisl. Vestibulum diam. Aliquam pellentesque, augue quis sagittis posuere, turpis lacus congue quam, in hendrerit risus eros eget felis. Maecenas eget erat in sapien mattis porttitor. Vestibulum porttitor. Nulla facilisi. Sed a turpis eu lacus commodo facilisis. Morbi fringilla, wisi in dignissim interdum, justo lectus sagittis dui, et vehicula libero dui cursus dui. Mauris tempor ligula sed lacus. Duis cursus enim ut augue. Cras ac magna. Cras nulla. Nulla egestas. Curabitur a leo. Quisque egestas wisi eget nunc. Nam feugiat lacus vel est. Curabitur consectetur.

### **Monte Carlo**

Fusce mauris. Vestibulum luctus nibh at lectus. Sed bibendum, nulla a faucibus semper, leo velit ultricies tellus, ac venenatis arcu wisi vel nisl. Vestibulum diam. Aliquam pellentesque, augue quis sagittis posuere, turpis lacus congue quam, in hendrerit risus eros eget felis. Maecenas eget erat in sapien mattis porttitor. Vestibulum porttitor. Nulla facilisi. Sed a turpis eu lacus commodo facilisis. Morbi fringilla, wisi in dignissim interdum, justo lectus sagittis dui, et vehicula libero dui cursus dui. Mauris tempor ligula sed lacus. Duis cursus enim ut augue. Cras ac magna. Cras nulla. Nulla egestas. Curabitur a leo. Quisque egestas wisi eget nunc. Nam feugiat lacus vel est. Curabitur consectetur.

## 1.2 Motivation for this work

The idea of this project is to study how to take advantage of this parallelism and explore how much faster we can make these calculations.

Being fast when evaluating new information is crucial for operations of hedge funds and investment banks. The aim of this project is to utilize High Performance Computing techniques to speed up the existing numerical methods using hardware and software that can be installed in a trading floor. Industry experience is the driver for the project to make an impact.

**Theorem 1.2.1** ([P99, Theorem 2.3], see also [BS, pg. 45]). *The Gramm matrix for  $E_8$  is:*

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Recall the theorem of Petri 1.2.1 Look at section ??.

### 1.2.1 The problem of numerical solutions

Numerical analysis and computer simulations will be undertaken to put theory and observation together to gain insight into the workings of numerical solutions of partial differential equations.

We plan to develop the methods used for heat equation ( $u_t(x, t) = u_{xx}(x, t)$ ) as our basis point. As we go further into the project, the plan is to extend to Black-Scholes model ( $\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} = r(V - S \frac{\partial V}{\partial S})$ ) and variations of Black-

Scholes with increasing complexity such as the Multi-Asset Black-Scholes Model and Heston Stochastic Volatility Model.

First step is to write a simple version on a simple framework that can be calculated by hand and with Excel. Following the verifications, next step is porting the simple version in a high level programming language like python for prototyping and validating all calculations. The penultimate step is moving into a low level programming language such as C++ and utilize high performance computing principles.

High performance computing techniques that can be implemented for CPUs are pipelining and use of SSE/SIMD[3] registers with Advanced Vector Extensions(AVX 512), multithreading with Open Multi-Processing(OpenMP) and compiler intrinsics. In the case of General Purpose GPUs, CUDA or Open Computing Language(OpenCL) can be utilized but can be challenging because of requirement of delicate memory management.

The project will be finalized by comparing the efficiency and speed of different implementations.

## 1.2.2 The approach to optimizations

### 32 bit vs 64 bit

Fusce mauris. Vestibulum luctus nibh at lectus. Sed bibendum, nulla a faucibus semper, leo velit ultricies tellus, ac venenatis arcu wisi vel nisl. Vestibulum diam. Aliquam pellentesque, augue quis sagittis posuere, turpis lacus congue quam, in hendrerit risus eros eget felis. Maecenas eget erat in sapien mattis porttitor. Vestibulum porttitor. Nulla facilisi. Sed a turpis eu lacus commodo facilisis. Morbi fringilla, wisi in dignissim interdum, justo lectus sagittis dui, et vehicula libero dui cursus dui. Mauris tempor ligula sed lacus. Duis cursus enim ut augue. Cras ac magna. Cras nulla. Nulla egestas. Curabitur a leo. Quisque egestas wisi eget nunc. Nam feugiat lacus vel est. Curabitur consectetur.

**Compilers VS/gcc/Intel**

Fusce mauris. Vestibulum luctus nibh at lectus. Sed bibendum, nulla a faucibus semper, leo velit ultricies tellus, ac venenatis arcu wisi vel nisl. Vestibulum diam. Aliquam pellentesque, augue quis sagittis posuere, turpis lacus congue quam, in hendrerit risus eros eget felis. Maecenas eget erat in sapien mattis porttitor. Vestibulum porttitor. Nulla facilisi. Sed a turpis eu lacus commodo facilisis. Morbi fringilla, wisi in dignissim interdum, justo lectus sagittis dui, et vehicula libero dui cursus dui. Mauris tempor ligula sed lacus. Duis cursus enim ut augue. Cras ac magna. Cras nulla. Nulla egestas. Curabitur a leo. Quisque egestas wisi eget nunc. Nam feugiat lacus vel est. Curabitur consectetur.

**AVX/Intrinsics**

Fusce mauris. Vestibulum luctus nibh at lectus. Sed bibendum, nulla a faucibus semper, leo velit ultricies tellus, ac venenatis arcu wisi vel nisl. Vestibulum diam. Aliquam pellentesque, augue quis sagittis posuere, turpis lacus congue quam, in hendrerit risus eros eget felis. Maecenas eget erat in sapien mattis porttitor. Vestibulum porttitor. Nulla facilisi. Sed a turpis eu lacus commodo facilisis. Morbi fringilla, wisi in dignissim interdum, justo lectus sagittis dui, et vehicula libero dui cursus dui. Mauris tempor ligula sed lacus. Duis cursus enim ut augue. Cras ac magna. Cras nulla. Nulla egestas. Curabitur a leo. Quisque egestas wisi eget nunc. Nam feugiat lacus vel est. Curabitur consectetur.

**Multithreading/OpenMP**

Fusce mauris. Vestibulum luctus nibh at lectus. Sed bibendum, nulla a faucibus semper, leo velit ultricies tellus, ac venenatis arcu wisi vel nisl. Vestibulum diam. Aliquam pellentesque, augue quis sagittis posuere, turpis lacus congue quam, in hendrerit risus eros eget felis. Maecenas eget erat in

sapien mattis porttitor. Vestibulum porttitor. Nulla facilisi. Sed a turpis eu lacus commodo facilisis. Morbi fringilla, wisi in dignissim interdum, justo lectus sagittis dui, et vehicula libero dui cursus dui. Mauris tempor ligula sed lacus. Duis cursus enim ut augue. Cras ac magna. Cras nulla. Nulla egestas. Curabitur a leo. Quisque egestas wisi eget nunc. Nam feugiat lacus vel est. Curabitur consectetur.

## CUDA

Fusce mauris. Vestibulum luctus nibh at lectus. Sed bibendum, nulla a faucibus semper, leo velit ultricies tellus, ac venenatis arcu wisi vel nisl. Vestibulum diam. Aliquam pellentesque, augue quis sagittis posuere, turpis lacus congue quam, in hendrerit risus eros eget felis. Maecenas eget erat in sapien mattis porttitor. Vestibulum porttitor. Nulla facilisi. Sed a turpis eu lacus commodo facilisis. Morbi fringilla, wisi in dignissim interdum, justo lectus sagittis dui, et vehicula libero dui cursus dui. Mauris tempor ligula sed lacus. Duis cursus enim ut augue. Cras ac magna. Cras nulla. Nulla egestas. Curabitur a leo. Quisque egestas wisi eget nunc. Nam feugiat lacus vel est. Curabitur consectetur.

## 1.3 Timing the Code

### Windows API

Fusce mauris. Vestibulum luctus nibh at lectus. Sed bibendum, nulla a faucibus semper, leo velit ultricies tellus, ac venenatis arcu wisi vel nisl. Vestibulum diam. Aliquam pellentesque, augue quis sagittis posuere, turpis lacus congue quam, in hendrerit risus eros eget felis. Maecenas eget erat in sapien mattis porttitor. Vestibulum porttitor. Nulla facilisi. Sed a turpis eu lacus commodo facilisis. Morbi fringilla, wisi in dignissim interdum, justo lectus sagittis dui, et vehicula libero dui cursus dui. Mauris tempor ligula



sed lacus. Duis cursus enim ut augue. Cras ac magna. Cras nulla. Nulla egestas. Curabitur a leo. Quisque egestas wisi eget nunc. Nam feugiat lacus vel est. Curabitur consectetur.

### **Chrono Library**

Fusce mauris. Vestibulum luctus nibh at lectus. Sed bibendum, nulla a faucibus semper, leo velit ultricies tellus, ac venenatis arcu wisi vel nisl. Vestibulum diam. Aliquam pellentesque, augue quis sagittis posuere, turpis lacus congue quam, in hendrerit risus eros eget felis. Maecenas eget erat in sapien mattis porttitor. Vestibulum porttitor. Nulla facilisi. Sed a turpis eu lacus commodo facilisis. Morbi fringilla, wisi in dignissim interdum, justo lectus sagittis dui, et vehicula libero dui cursus dui. Mauris tempor ligula sed lacus. Duis cursus enim ut augue. Cras ac magna. Cras nulla. Nulla egestas. Curabitur a leo. Quisque egestas wisi eget nunc. Nam feugiat lacus vel est. Curabitur consectetur.

# Chapter 2

## Work Done Optimizing

### 2.1 Parallelizing Tridiagonal Systems

Fusce mauris. Vestibulum luctus nibh at lectus. Sed bibendum, nulla a faucibus semper, leo velit ultricies tellus, ac venenatis arcu wisi vel nisl. Vestibulum diam. Aliquam pellentesque, augue quis sagittis posuere, turpis lacus congue quam, in hendrerit risus eros eget felis. Maecenas eget erat in sapien mattis porttitor. Vestibulum porttitor. Nulla facilisi. Sed a turpis eu lacus commodo facilisis. Morbi fringilla, wisi in dignissim interdum, justo lectus sagittis dui, et vehicula libero dui cursus dui. Mauris tempor ligula sed lacus. Duis cursus enim ut augue. Cras ac magna. Cras nulla. Nulla egestas. Curabitur a leo. Quisque egestas wisi eget nunc. Nam feugiat lacus vel est. Curabitur consectetur.

# Chapter 3

## Conclusions

Fusce mauris. Vestibulum luctus nibh at lectus. Sed bibendum, nulla a faucibus semper, leo velit ultricies tellus, ac venenatis arcu wisi vel nisl. Vestibulum diam. Aliquam pellentesque, augue quis sagittis posuere, turpis lacus congue quam, in hendrerit risus eros eget felis. Maecenas eget erat in sapien mattis porttitor. Vestibulum porttitor. Nulla facilisi. Sed a turpis eu lacus commodo facilisis. Morbi fringilla, wisi in dignissim interdum, justo lectus sagittis dui, et vehicula libero dui cursus dui. Mauris tempor ligula sed lacus. Duis cursus enim ut augue. Cras ac magna. Cras nulla. Nulla egestas. Curabitur a leo. Quisque egestas wisi eget nunc. Nam feugiat lacus vel est. Curabitur consectetur.

# Appendix A

## Implementation of the BarrierOptionCVA class

Vivamus vehicula leo a justo. Quisque nec augue. Morbi mauris wisi, aliquet vitae, dignissim eget, sollicitudin molestie, ligula. In dictum enim sit amet risus. Curabitur vitae velit eu diam rhoncus hendrerit. Vivamus ut elit. Praesent mattis ipsum quis turpis. Curabitur rhoncus neque eu dui. Etiam vitae magna. Nam ullamcorper. Praesent interdum bibendum magna. Quisque auctor aliquam dolor. Morbi eu lorem et est porttitor fermentum. Nunc egestas arcu at tortor varius viverra. Fusce eu nulla ut nulla interdum consectetur. Vestibulum gravida. Morbi mattis libero sed est.

## Appendix B

### Additional details on the Gundermanian determinant

Vivamus vehicula leo a justo. Quisque nec augue. Morbi mauris wisi, aliquet vitae, dignissim eget, sollicitudin molestie, ligula. In dictum enim sit amet risus. Curabitur vitae velit eu diam rhoncus hendrerit. Vivamus ut elit. Praesent mattis ipsum quis turpis. Curabitur rhoncus neque eu dui. Etiam vitae magna. Nam ullamcorper. Praesent interdum bibendum magna. Quisque auctor aliquam dolor. Morbi eu lorem et est porttitor fermentum. Nunc egestas arcu at tortor varius viverra. Fusce eu nulla ut nulla interdum consectetur. Vestibulum gravida. Morbi mattis libero sed est.

# Bibliography

- [1] Thomas, James W. *Numerical Partial Differential Equations: Finite Difference Methods.*, pp. 164, Springer, 1998.
- [2] Klebaner, Fima C. *Introduction to Stochastic Calculus with Applications.*, pp. 155, Imperial College Press, 2005.
- [3] Kusswurm, Daniel. *Modern x86 Assembly Language Programming: 32-Bit, 64-Bit, SSE, and AVX.* Apress, 2015.
- [P99] William Petri, *Analysis of infinitely generated frog complexes*, Rendicoti Ranæ Analysorum, 234 (**4**), 34–21, 2015
- [Ross] Sheldon Ross, *An Elementary Introduction to Mathematical Finance*, 3rd Edition, Cambridge University Press, 2011
- [Hull] John C. Hull, *Options, Futures, and Other Derivatives*, 8th Edition, Pearson Education, 2011
- [BS] Fischer Black and Myron Scholes, *The Pricing of Options and Corporate Liabilities*, Journal of Political Economy 81 **3**, 637–654, (1973)