Lin Alg
BP 2013

Matrizen
→ A: $m\times n$ Matrix: m Zeilen, n Spalten
→ transponiert: A^T: Zeile ↔ Spalte
→ konjugiert-": A^H: A^T und $Im(a_{ij})\cdot -1$
→ symmetrisch / hermitesch: $A^T=A$ / $A^H=A$
→ Spur: Summe von diag(A): $\sum_{i\le\min\{m,n\}} a_{ii} = \sum_{i=1}^{n}\lambda_i$

a_{ij}, $i\le m$, $j\le n$

Skalarprodukt (inneres Produkt)
→ $\langle x, \alpha y+\beta z\rangle = \alpha\langle x,y\rangle+\beta\langle x,z\rangle$
→ $\mathbb{R}^n$: $\langle \alpha w+\beta x, y\rangle = \alpha\langle w,y\rangle+\beta\langle x,y\rangle$
$\langle x,y\rangle=\langle y,x\rangle \ \forall x,y\in\mathbb{R}^n$
→ $\mathbb{C}^n$: $\langle \alpha w+\beta x, y\rangle = \bar\alpha\langle w,y\rangle+\bar\beta\langle x,y\rangle$
$\langle x,y\rangle=\overline{\langle y,x\rangle} \ \forall x,y\in\mathbb{C}^n$
→ $\langle x,x\rangle\ge 0$, $\langle x,x\rangle=0 \Rightarrow x=0$
→ Euklidisches SP: $x^T y=\langle x,y\rangle$ $\mathbb{R}^n$
$x^H y=\langle x,y\rangle$ $\mathbb{C}^n$

Norm
→ $\|A\|: E^{m\times n}\to\mathbb{R}_+$
→ $\|A\|\ge 0$, $\|A\|=0 \Rightarrow A=0$
→ $\|\alpha A\| = |\alpha|\cdot\|A\|$
→ $\|A+B\|\le\|A\|+\|B\|$ (Dreiecksungleichung)

induzierte Norm (Vektoren)
$\|x\|=\sqrt{\langle x,x\rangle}$, Skalarprodukt gegeben

induzierte Norm (Matrix)
$\|A\|=\max_{\|x\|_V=1}\|Ax\|_V$, Vektornorm $\|\cdot\|_V$ gegeben

Vektornormen
→ p-Norm: $\|x\|_p=(|x_1|^p+|x_2|^p+\dots)^{1/p}$
→ $p=1$: $\|x\|_1=|x_1|+|x_2|+\dots$
→ $p=2$: $\|x\|_2=(|x_1|^2+|x_2|^2+\dots)^{1/2}=\sqrt{\langle x,x\rangle}=\sqrt{x^Hx}$
→ $p=\infty$: $\|x\|_\infty=\max\{|x_1|,|x_2|,\dots\}$

Winkel zw. Vektoren
$\cos(\alpha)=\frac{\langle x,y\rangle}{\|x\|\|y\|}$

Rechnen mit Matrizen
→ $(\alpha+\beta)A=\alpha A+\beta A$ → $AB\ne BA$ im Allgemeinen
→ $A+B=B+A$ → $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$
→ $A(B+C)=AB+AC$ → $(\alpha A)^{-1}=\frac{1}{\alpha}A^{-1}$
→ $(A+B)^H=A^H+B^H$ → $(A^{-1})^H=(A^H)^{-1}$
→ $(AB)^H=B^HA^H$

Reguläre Matrix
Folgende Aussagen sind äquivalent, $A\in E^{n\times n}$:
→ Rang$(A)=n$ → 0 ist kein EW von A
→ $\det(A)\ne 0$ → Kern$(A)=0$
→ A^{-1} existiert → $Ax=b$ hat 1 Lösung
→ Alle Zeilen-/Spaltenvektoren sind lin. unabhängig

Orthogonale / unitäre Matrix
$\mathbb{R}^{n\times n}$ / $\mathbb{C}^{n\times n}$
→ $A^TA=I$, $A^HA=I$
→ A unitär ⇔ A^{-1} unitär
→ A, B unitär ⇔ AB unitär
→ A unitär: ↦ $\|Ax\|=\|x\|$
↦ $\langle Ax, Ay\rangle=\langle x,y\rangle$

Rotationsmatrix
→ $R_\alpha=\begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}$ $\mathbb{R}^2$ KEIN EW KEIN EV

Rang
Zeilen ohne alles 0 nach Gaussen
→ rang$(A)\le\min\{m,n\}$
→ rang$(A)=$ rang(A^T)
→ rang$(A+B)\le$ rang$(A)+$ rang(B)
→ rang$(AB)\le\min\{$rang(A), rang$(B)\}$
→ A injektiv ⇔ rang$(A)=n$
→ A surjektiv ⇔ rang$(A)=m$
→ A bijektiv ⇔ rang$(A)=m=n$ (quadr. Matrix)
→ A invertierbar ⇔ rang$(A)=n$ (quadr. Matrix)
→ rang$(A)<n$ ⇔ $\det(A)=0$

Determinante
→ $\det(A)=\det(A^T)$
→ $\det(A^H)=\overline{\det(A)}$
→ $\det(AB)=\det(A)\det(B)$
→ $\det(\alpha A)=\alpha^n\det(A)$ $(A_{n\times n})$
→ $\det(A)=\prod_{i=1}^{n}\lambda_i$
→ $\det(A^{-1})=\det(A)^{-1}=\frac{1}{\det(A)}$
→ $\det(I)=1$
→ 1 Zeile nur 0 ⇒ $\det(A)=0$
→ 2 gleiche Zeilen ⇒ $\det(A)=0$

Manipulation der Matrix
→ Zeilentausch → $\det(A')=-\det(A)$
→ $a_i\cdot\alpha$ → $\det(A')=\alpha\cdot\det(A)$
→ $\det(A)=\det(LR)=\det(R)=\prod r_{ii}$
→ Dreiecksmatrix: $\det(A)=\prod r_{ii}$
$\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}\Rightarrow ad-bc$
$\begin{bmatrix}a&b&c\\d&e&f\\g&h&i\end{bmatrix}\Rightarrow aei+bfg+cdh-gec-hfa-idb$

Ax=b mit LR lösen
→ $A=LR$ berechnen
→ $Lc=b$ nach c auflösen
→ $Rx=c$ nach x auflösen

Inverses von Hand rechnen
A regulär → Inverses existiert
$[A\,|\,I_n]\to[I_n\,|\,A^{-1}]$
→ Gauss von $[A\,|\,I_n]$
→ linken Teil zu I_n machen:
↦ eliminieren durch Jordan (umgek. Gauss)
↦ teilen durch a_{ii}
$A=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}\to A^{-1}=\frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix}d&-b\\-c&a\end{bmatrix}$

Eigenwert
→ $Ax=\lambda x \Rightarrow \lambda$ ist EW von A
→ $A^nx=\lambda^nx$
→ A singulär ($\nexists A^{-1}$) ⇒ $\exists\lambda=0$

Berechnung der EW
→ $A\cdot x=\lambda x\Rightarrow(A-\lambda I)x=0$
→ $\det(A-I\lambda)=0$ lösen:
↦ $A-\lambda I$ gaussen → A'
↦ $\prod a'_{ii}$ ($\chi(A)$: charakter. Polynom)
↦ $\chi(A)=0$ lösen

EW zu EW λ_0
→ $(A-\lambda_0I)x_0=0$ lösen (Gauss)
→ $x_0=0$ KEIN EV

Eigenraum zu EW λ_0
→ $E_{\lambda_0}:=\{v\in V\,|\,Av=\lambda_0v\}\cup\{\vec 0\}$
→ Basis von E_{λ_0}: k lin. unab. EV zu λ_0
k: geometrische Vielfachheit von λ_0

Spektrum
→ Menge aller EW: $\sigma(A):=\{\lambda_0,\dots,\lambda_n\}$

Vielfachheit
→ geom.: $\dim E_{\lambda_0}=n-$ rang$(A-\lambda_0I)$
→ algeb.: $\#\lambda_0$ als Nullstelle von $\chi(A)=0$

Eigenbasis
→ Basis aus EV, existiert nur falls A diagonal.
→ braucht n lin. unabh. EV

Vielfachheit ↔ Diagonalisierbar
Folgende Aussagen sind äquivalent:
→ $GV(\lambda_i)=AV(\lambda_i)$ → paarweise versch. EW
→ A diagonalisierbar → alle EV lin. unabh.
→ Eigenbasis existiert

EV Unabhängigkeit
→ EV zu versch. EW sind lin. unabh.

Kontrolle
→ $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i=$ Spur(A)
→ $\prod_{i=1}^{n}\lambda_i=\det(A)$

Frédéric Vogel
12-919-246

Lin Alg
BP 2013

QR-Zerlegung
→ $A = Q \cdot R$, $A \in \mathbb{E}^{m\times n}$, $Q \in \mathbb{E}^{m\times n}$, $R \in \mathbb{E}^{n\times n}$

Berechnung von Q (Spaltenweise)
→ q_i := i-te Spalte von Q
→ $q_1 = \frac{a_1}{\|a_1\|}$
→ $\tilde{q}_k = a_k - \sum_{j=1}^{k-1} q_j \langle q_j, a_k \rangle$
→ $q_k = \frac{\tilde{q}_k}{\|\tilde{q}_k\|}$

Berechnung von R (Elementweise)
→ $r_{1,1} = \|a_1\|$
→ $r_{j,k} = \langle q_j, a_k \rangle \quad j = 1, \dots, k-1$
→ $r_{k,k} = \|\tilde{q}_k\|$

$\underset{A}{\begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}} = \underset{\substack{Q \\ \text{orthonormal}}}{\begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}} \cdot \underset{\substack{R \\ \text{obere } \Delta\text{-Matrix}}}{\begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot \end{bmatrix}}$

QR Allgemeines
→ $R = Q^T A$ | → $Q^H Q = I_n = Q^T Q$

Definitheit
→ reel sym. oder herm. und pos. def. ("spd") => regulär
→ sym./herm. ist pos. def. <=> Cholesky-Zerlegung mit $\tilde{R}$ eine obere Δ-Matrix mit pos. diag

Definition
→ Matrix A quadratisch
→ $x^T A x > 0 \ \forall x \neq 0$ => positiv definit
→ $x^T A x \geq 0 \ \forall x \neq 0$ => positiv semidefinit
→ $x^T A x < 0 \ \forall x \neq 0$ => negativ definit
→ $x^T A x \leq 0 \ \forall x \neq 0$ => negativ semidefinit

EW's
→ $\forall \lambda > 0$ => positiv definit
→ $\forall \lambda \geq 0$ => positiv semidefinit
→ $\forall \lambda < 0$ => negativ definit
→ $\forall \lambda \leq 0$ => negativ semidefinit

Gauss-Verfahren
→ Matrix A reel symmetrisch (und quadr.)
→ Gaussen ohne Vertauschen mit n pos. Pivot

Singulärwertzerlegung
→ $A \in \mathbb{E}^{m\times n}$
→ $A = U \Sigma V^H$
→ $U \in \mathbb{E}^{m\times m}$, unitär
→ $\Sigma \in \mathbb{E}^{m\times n}$, Diagonalmatrix: $\left[\begin{array}{c|c} \overbrace{\begin{matrix}\sigma_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \sigma_r\end{matrix}}^{r = \text{rang}(A)} & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right]$
→ $V^H \in \mathbb{E}^{n\times n}$, unitär
→ $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_r > 0$
→ $\sigma_i^2 = \lambda_i$ von $A^T A$ und $A A^T$
→ V enthält EV von EW von $A^T A$ (orthonorm.)
→ U enthält EV von EW von $A A^T$ (orthonorm.)
→ Spektralnorm von A: $\|A\|_2 = \sigma_1$

Berechnung
→ $X = A^T A$, $Y = A A^T$ berechnen
→ EW von X berechnen (= EW von Y)
→ $\sqrt{EW}$ sortieren nach Grösse (↓) => $\sigma_1, \dots \sigma_r$
→ EV zu EW von X berechnen, orthonorm. mit $\vec{x}$
  ↳ V (Spalten)
→ EV zu EW von Y berechnen, orthonorm. mit $\vec{y}$
  ↳ U (Spalten)
→ $A = U \cdot \Sigma \cdot V^H$

Orthonormale Basen
→ $\mathcal{R}(A)$: $\{u_1, \dots, u_r\}$ (im(A))
→ $\mathcal{R}(A^H)$: $\{v_1, \dots, v_r\}$ (im(A^H))
→ $\mathcal{N}(A)$: $\{u_{r+1}, \dots, u_m\}$ (ker(A^H))
→ $\mathcal{N}(A^H)$: $\{v_{r+1}, \dots, v_n\}$ (ker(A))

Eigenschaften
→ $A^T = V \Sigma^T U^T$
→ $U^{-1} = U^T$, $V^{-1} = V^T$

Cholesky-Zerlegung
→ $A \in \mathbb{E}^{n\times n}$, A spd
→ $A = R^H R$
→ $r_{ij} = \begin{cases} 0 & j < i \\ \sqrt{a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} |r_{ki}|^2} & i = j \\ \frac{1}{r_{ii}} \left(a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} \overline{r_{ki}} \cdot r_{kj}\right) & j > i \end{cases}$

Konditionszahl
→ A regulär, $\|\cdot\|$ gegebene Norm
→ Konditionszahl $\kappa(A) = \|A\| \|A^{-1}\| = \left|\frac{\lambda_{max}(A)}{\lambda_{min}(A)}\right|$

Spektralzerlegung
→ immer möglich wenn Eigenbasis existiert
→ $A = V \Lambda V^{-1}$
→ V: EV die Basis bilden, als Spalten
→ $V^{-1} = \begin{pmatrix} -w_1^T- \\ -w_n^T- \end{pmatrix}$ → $A = \sum_{k=1}^{n} v_k \lambda_k w_k^T$ w = EV von A^T
→ $A v_k = v_k \lambda_k$, $w_k^T A = \lambda_k w_k^T$

Kleinste Quadrate
→ $Ax = y$ überbestimmt, keine Lösungen
→ minimieren von $r = y - Ax$
→ Spalten von A unabhängig

Lösen mit Normalengleichung
→ $A^H A x = A^H y$ nach x lösen

Lösen mit QR-Zerlegung
→ $Rx = Q^H y$ nach x lösen (Rückw.-einsetzen)

Fundamentale Unterräume
Kern/Nullraum
→ Kern(A), $\mathcal{N}(A)$, $\kappa(A)$
→ alle x für die gilt: $A \cdot x = 0$
→ $\mathcal{N}(A) \subseteq \mathbb{E}^n$ (Unterraum von $\mathbb{E}^n$)
→ dim($\mathcal{N}(A)$) = # freie Variablen in R (Gauss/LR) = n - rang(A)
→ Basis: $A \cdot x = 0$ für unbekannte x lösen. Freie Variablen abwechslungsweise = 1 setzen, restlichen = 0. All diese x sind Basisvektoren
Achtung: eine Unbekannte muss immer = 1 gesetzt werden
Achtung: dim($\mathcal{N}(A)$) = 0 => $x = 0$ ist einzige Lösung => keine Basis

Spaltenraum/Bild
→ $S(A)$, im(A), $C(A)$
→ besteht aus allen lin.-Komb. der Spalten also alle b von $Ax = b$ für beliebige x.
→ $S(A) \subseteq \mathbb{E}^m$
→ dim($S(A)$) = rang(A)
→ Basis: alle Spalten die ein Pivot enthalten (Spalten von A, Pivots aus R ablesen)

Zeilenraum
→ $S(A^T)$, im(A^T), $C(A^T)$
→ $S(A^T) \subseteq \mathbb{E}^n$
→ dim($S(A^T)$) = rang(A)
→ Basis: alle Zeilen die ein Pivot enthalten (Zeilen von A, Pivots aus R ablesen)

Linkskern/-nullraum
→ Kern(A^T), $\mathcal{N}(A^T)$, $\kappa(A^T)$
→ $\mathcal{N}(A^T) \subseteq \mathbb{E}^m$
→ dim($\mathcal{N}(A^T)$) = m - rang(A)
→ Basis: wie $\mathcal{N}(A)$, aber die y, die $A^T y = 0$ lösen. (s. Kern für Details)

Orthogonalität
→ $S(A) \perp \mathcal{N}(A^T)$, $S(A^T) \perp \mathcal{N}(A)$

Dimensionsformel
→ $\underbrace{\dim X}_{=n} - \dim(\ker(A)) = \dim(\text{im}(A))$

Rang-Eigenschaften
→ rang(A) = rang(A^T) = rang(A^H)

Frédéric Vogel
12-929-246

Lineare Abbildung

Axiome

→ $F: X \to Y$

→ $\forall x, y \in X,\ \forall \alpha \in \mathbb{E}$ hat zu gelten:

↦ $F(\alpha x + y) = \alpha F(x) + F(y)$

Abb. Eigenschaften

→ $F: X \to Y$ injektiv $\Leftrightarrow$ $\operatorname{rang}(F) = \dim(X)$

→ $F: X \to Y$ bijektiv $\Leftrightarrow$ F Isomorphismus

$\Leftrightarrow$ $\operatorname{rang}(F) = \dim(X) = \dim(Y)$

→ $F: X \to X$ bijektiv $\Leftrightarrow$ F Automorphismus

$\Leftrightarrow$ $\operatorname{rang}(F) = \dim(X)$, $\ker(F) = 0$

→ $F: X \to Y$, $G: Y \to Z$ lin. Abb.:

↦ $\operatorname{rang}(FG) \le \min\{\operatorname{rang} F, \operatorname{rang} G\}$

↦ G injektiv $\Rightarrow$ $\operatorname{rang}(GF) = \operatorname{rang}(F)$

↦ F surjektiv $\Rightarrow$ $\operatorname{rang}(GF) = \operatorname{rang}(G)$

Allgemeines

→ Eine $m \times n$ Matrix A ist die Abbildung $A: \mathbb{E}^n \to \mathbb{E}^m$

Lin. Abb → Abb. Matrix

→ $F: X \to Y$, $X = \operatorname{span}\{b_1, \dots, b_n\}$, $Y = \operatorname{span}\{c_1, \dots, c_m\}$

→ Abb.-Matrix $A = (a_{kl})$:

$F b_l = \sum_{k=1}^{m} a_{kl} c_k$, $(l = 1, \dots, n)$

↳ neue Basis

Koordinatenabbildung

→ $\kappa: X \to \mathbb{E}^n$

→ $\{b_1, \dots, b_n\}$ Basis für X

Koordinatenvektor $\xi \in \mathbb{E}^n$ für $v \in X$:

$v = \sum_{k=1}^{n} \xi_k b_k$, wobei ξ_i die i-te Komponente von ξ ist

Kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd} x \in X \arrow[r, "F"] \arrow[d, shift right, "\kappa_X"'] & y \in Y \arrow[d, shift right, "\kappa_Y"'] \\ \xi \in \mathbb{E}^n \arrow[r, "A"] \arrow[u, shift right, "\kappa_X^{-1}"'] & \eta \in \mathbb{E}^m \arrow[u, shift right, "\kappa_Y^{-1}"'] \end{tikzcd}$$

Ist $F = G \circ H$, B die Abb. Mat. für G und C die für H so ist $A = CB$

Koordinatentransformation

→ T_A^B: Matrix, wandelt Vektor bzgl. Basis A in Vektor b bzgl. Basis B um

→ Berechnung: Basisvektoren von A mittels Basisvektoren B darstellen. Koordinaten als Spaltenvektoren in T_A^B eintragen. Dann gilt:

$b = T_A^B a$. $\quad T_B^A = (T_A^B)^{-1}$

Abb. Matrix und Koor. trans.

$$\begin{tikzcd} x \in X \arrow[r, "F"above, "\text{lin. Abb.}"below] \arrow[d, shift right, "\kappa_X"'] & y \in Y \arrow[d, shift right, "\kappa_Y"'] \\ \xi \in \mathbb{E}^n \arrow[r, "A"above, "\text{Abb. Matrix alte Basis}"below] \arrow[u, shift right, "\kappa_X^{-1}"'] & \eta \in \mathbb{E}^m \arrow[u, shift right, "\kappa_Y^{-1}"'] \arrow[d, shift right, "S^{-1}"'] \\ \xi' \in \mathbb{E}^n \arrow[r, "B"above, "\text{Abb. Matrix neue Basis}"below] \arrow[u, shift right, "T"'] & \eta' \in \mathbb{E}^m \arrow[u, shift right, "S"'] \end{tikzcd}$$

T, S: Transformationsmatrizen

κ_X, κ_Y Koordinaten Abb.

→ $\eta = A\xi = S\eta'$, $\xi = T\xi'$, $\eta' = B\xi'$

→ $B\xi' = \eta' = S^{-1}\eta = S^{-1}A\xi = S^{-1}AT\xi'$

→ $B = S^{-1}AT$, $A = SBT^{-1}$

→ Weg wird "rückwärts" gegangen

→ $\operatorname{rang}(A) = \operatorname{rang}(B) = \operatorname{rang}(F)$

Orthogonalprojektion

Projektion

→ lin. Abb. P, $P^2 = P$ → Projektion

→ $\ker(P) \perp \operatorname{im}(P)$ → ortho. Projektion

→ P Projektion → $(I - P)$ Projektion:

$\operatorname{im}(I-P) = \ker(P)$, $\ker(I-P) = \operatorname{im}(P)$

Orthogonalprojektion

→ $a_1, \dots, a_n$: Basis von Unterraum

→ a_i sind Spalten von A

→ Projektion auf $R(A)$

$\Rightarrow P_A = A(A^H A)^{-1} A^H$

→ Q besteht aus orthonormalen Basisvek. und $A = Q$ → $P_Q = QQ^H$

→ Projektion von x auf $R(A)$: $P_A x$

→ Projektion von x auf $R(Q)$: $\sum_{i=1}^{n} q_i \langle q_i, x \rangle$

DGL 1. Ord.

→ Aus DGL System $y_k'(x) = a_{k1} y_1(x) + \dots$ Matrix A bilden $(a_{kl} = a_{kl})$

→ Eigenwertzerlegung von A → $V\Lambda$

$e^{x\Lambda} = \operatorname{diag}(e^{x\lambda_1} \dots)$

→ $y(x) = Ve^{x\Lambda} \cdot c$

→ Anfangswerte $y(0)$ gegeben: $Vc = y(0)$

→ c einsetzen in $y(x)$, ausrechnen

Frédéric Vogel
12-929-246