ZUSAMMENFASSUNG

Analysis I + II

©Frédéric Vogel

ETH, Basisprüfung FS13

Inhaltsverzeichnis

1 Grundlagen

1.1 Wichtige Funktionen und ihre Definition

Funktion	Definition
$\exp x$	$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}x^k = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \cdots$
$\sin x$	$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{(2n+1)!}x^{2n+1} = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 \pm \cdots$
$\cos x$	$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{(2n)!}x^{2n} = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 \pm \cdots$
$\sinh x$	$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!}x^{2n+1} = x + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + \frac{1}{7!}x^7 + \cdots$
$\cosh x$	$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!}x^{2n} = 1 + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + \frac{1}{6!}x^6 + \cdots$

1.2 Einige Grenzwerte

1.2.1 Folgen

$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a}$	$=$	1	$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}$	$=$	1	$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!}$	$=$	∞
$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}}$	$=$	e	$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sqrt[n]{n!}$	$=$	$\frac{1}{e}$	$\lim_{n\to\infty} n \tan \frac{\alpha}{n}$	$=$	α
$\lim_{n\to\infty} (1 + \frac{x}{n})^n$	$=$	e^x	$\lim_{n\to\infty} (1 - \frac{x}{n})^n$	$=$	$\frac{1}{e^x}$	$\lim_{n\to\infty} \binom{a}{n}$	$=$	$0,\ a > -1$
$\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!}$	$=$	0	$\lim_{n\to\infty} \frac{n^n}{n!}$	$=$	∞	$\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n^k}$	$=$	$\infty,\ a > 1$
$\lim_{n\to\infty} \sqrt{x^2 - x} - x$	$=$	$\frac{1}{2}$	$\lim_{n\to\infty} n(\sqrt[n]{a} - 1)$	$=$	$\ln a$	$\lim_{n\to\infty} n^p q^n$	$=$	$0,\ \lvert q\rvert < 1$
$\lim_{n\to 0} \frac{a^n - 1}{n}$	$=$	$\ln a$	$\lim_{n\to 0} \frac{\log_a(1+n)}{n}$	$=$	$\frac{1}{lna}$	$\lim_{n\to 0} n^a \ln n$	$=$	$0,\ a > 0$
$\lim_{n\to 0} \frac{\sin n}{n}$	$=$	1	$\lim_{n\to 0} \frac{1-\cos n}{n}$	$=$	0			

1.2.2 Reihen

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$	$=$	$\zeta(\alpha),\ (\alpha > 1)$	$\zeta(x) =$ Riemann Zeta Function		$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$	$=$	$\ln \frac{1}{2}$
$\sum_{n=1}^{\infty} q^n$	$=$	$\frac{1}{1-q},\ (\lvert q\rvert < 1)$	Geometrische Reihe		$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n q^n$	$=$	$\frac{1}{1-q},\ (\lvert q\rvert < 1)$
$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$	$=$	$\frac{\pi^2}{6}$					
$\sum_{n=1}^{m} q^n$	$=$	$\frac{1-q^{m+1}}{1-q}$	$\sum_{n=1}^{m} n^2$	$= \frac{1}{6}m(m+1)(2m+1)$	$\sum_{n=1}^{m} n^3$	$=$	$\frac{1}{4}m^2(m+1)^2$

1.3 Wichtige Ableitungen und Integrale

$F(x)$	$f(x)$	$f'(x)$	$F(x)$	$f(x)$	$f'(x)$
$\exp x$	$\exp x$	$\exp x$	$x(\ln x - 1)$	$\ln x$	$\frac{1}{x}$
$-\cos x$	$\sin x$	$\cos x$	$\sqrt{1-x^2} + x\sin^{-1} x$	$\sin^{-1} x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\sin x$	$\cos x$	$-\sin x$	$-\sqrt{1-x^2} + x\cos^{-1} x$	$\cos^{-1} x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$-\ln\cos x$	$\tan x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$x\tan^{-1} x - \frac{1}{2}\ln x^2 + 1$	$\tan^{-1} x$	$\frac{1}{x^2+1}$
$\cosh x$	$\sinh x$	$\cosh x$	$-\sqrt{x^2+1} + x\sinh^{-1} x$	$\sinh^{-1} x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$
$\sinh x$	$\cosh x$	$\sinh x$	$-\sqrt{x-1}\sqrt{x+1} + x\cosh^{-1} x$	$\cosh^{-1} x$	$\frac{1}{\sqrt{x-1}\sqrt{x+1}}$
$\ln\cosh x$	$\tanh x$	$\frac{1}{\cosh^2 x}$	$x\tanh^{-1} x + \frac{1}{2}\ln 1 - x^2$	$\tanh^{-1} x$	$\frac{1}{1-x^2}$
$\frac{1}{r+1}x^{r+1}$	x^r	rx^{r-1}	$\frac{1}{n+1}nx^{\frac{1}{n}+1}$	$\sqrt[n]{x}$	$\frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}$
$\frac{a\ln(bx+c)}{b}$	$\frac{a}{bx+c}$	$-\frac{ab}{(bx+c)^2}$	$\frac{a(bx+c)^{1-d}}{b-bd}$	$\frac{a}{(bx+c)^d}$	$-\frac{abd}{(bx+c)^{d+1}}$
$\frac{1}{a}e^{ax}$	e^{ax}	ae^{ax}	$e^{ax}\left(\frac{ax-1}{a^2}\right)$	xe^{ax}	$(ax+1)e^{ax}$
$\frac{1}{b\ln a}a^{bx+c}$	a^{bx+c}	$a^{bx+c}b\ln a$	$\frac{1}{4}x^2(2\ln x - 1)$	$x\ln x$	$\ln x + 1$
$\frac{(ax+b)^{n+1}}{(n+1)a}$	$(ax+b)^n$	$an(ax+b)^{n-1}$	$\frac{1}{2}(x\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{\sin x})$	$\sqrt{1-x^2}$	$-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$
$-$	x^x	$x^x(\ln x + 1)$	$\sqrt{a\pi}$	$e^{-\frac{1}{a}x^2}\Big\rvert_{-\infty}^{\infty}$	$-$

1.4 Einige Zusammenhänge zwischen Funktionen

$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$	$\tanh x + 1 = \frac{2e^{2x}}{e^{2x}+1}$	$\sin x \sin y = \frac{1}{2}\big(\cos(x-y) - \cos(x+y)\big)$
$e^{i\pi} + 1 = 0$	$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$	$\cos x \cos y = \frac{1}{2}\big(\cos(x-y) + \cos(x+y)\big)$
$e^x = \sinh x + \cosh x$	$\cosh\sinh x = \sqrt{x^2+1}$	$\sin x \cos y = \frac{1}{2}\big(\sin(x-y) + \sin(x+y)\big)$
$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$	$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$	$\sin x \pm y = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y$
$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$	$\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$	$\cos x \pm y = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$
$\sinh\cosh x = \sqrt{x^2-1}$	$\cosh^2 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cosh 2x$	$\tan x \pm y = \frac{\tan x \pm \tan y}{1 \mp \tan x \tan y}$
$\sin -x = -\sin x$	$\sin 2x = 2\sin x\cos x$	$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$
$\cos -x = \cos x$	$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$	$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$
$\tan -x = -\tan x$	$\tan 2x = \frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}$	$\tan^2 x = \frac{1-\cos 2x}{1+\cos 2x}$

1.5 Einige Funktionswerte

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{1}{2}$	0
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\tan x$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	$-$	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	$-$	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0

1.6 Rechenregeln

1.6.1 x^n

- $a^n a^m = a^{n+m}$
- $(a^n)^m = a^{nm}$
- $(ab)^n = a^n b^n$
- $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$
- $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$
- $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$
- $a^{\frac{n}{m}} = (a^{\frac{1}{m}})^n = (a^n)^{\frac{1}{m}}$

1.6.2 $\sqrt[n]{}$

- $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$
- $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\,\sqrt[n]{b}$
- $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[nm]{a}$
- $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$

1.6.3 $a + bi$

- $z \in \mathbb{C} : z = a + b \cdot i$
- $\bar{z} = a - b \cdot i$
- $|z|^2 = z \cdot \bar{z} = (a + b \cdot i) \cdot (a - b \cdot i) = a^2 + b^2$
- $i^2 = -1$
- $(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$
- $(a + bi) \cdot (c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$
- $\frac{a+bi}{c+di} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{bc-ad}{c^2+d^2} \cdot i$

1.6.4 log

- $y = \log_a x \Leftrightarrow x = a^y$
- $\log_a 1 = 0$
- $y \log x = \log x^y$
- $\log_a a^x = x$
- $a^{\log_a x} = x$
- $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$
- $\log_a \frac{1}{x} = -\log_a x$
- $\log_a x^r = r \log_a x$
- $\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$
- $\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$
- $\log_a(x + y) = \log_a x + log_a(1 + \frac{y}{x})$
- $\log_a(x - y) = \log_a x + \log_a(1 - \frac{y}{x})$

1.6.5 e^x

- $e^{-\inf} = 0$
- $e^0 = 1$
- $e^1 = e = 2.718281828\ldots$
- $e^{\inf} = \inf$
- $e^{a+bi} = e^a(\cos(b) + i\sin(b))$
- $e^{b\ln(a)} = a^b$
- $e^{-\ln(b)} = \frac{1}{b}$

1.6.6 $<, \leq, \geq, >$

- $a < b \rightarrow a + c < b + c$ und $a - c < b - c$
- $a < b$ und $c > 0 \rightarrow \frac{a}{c} < \frac{b}{c}$
- $a < b$ und $c < 0 \rightarrow \frac{a}{c} > \frac{b}{c}$
- Dreiecksungleichung für reelle Zahlen: $|a + b| \leq |a|+|b|$
- Cauchy-Schwarz Ungleichung: $|x \cdot y| \leq \|x\| \cdot \|y\|,\ x, y \in \mathbb{R}^n$

1.6.7 lim

- $\lim_{n\to\infty} a_n \pm b_n = a \pm b$
- $\lim_{n\to\infty} c \cdot a_n = c \cdot a$
- $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = ab$
- $\lim_{n\to\infty} (a_n)^c = (\lim_{n\to\infty} a_n)^c$ falls $c \neq n$
- $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$

1.6.8 $\sum$

- $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a, \sum_{n=1}^{\infty} b_n = b \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \alpha a_n + \beta b_n = \alpha a + \beta b$ bei Konvergenz
- $\sum_{k,l=1}^{\infty} a_k b_l = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cdot \sum_{l=1}^{\infty} b_l$ bei absoluter Konvergenz

2 Zahlen, Vektoren

2.1 Supremum, Infimum

Eine Menge A heisst **abgeschlossen**, wenn der "Rand" zur Menge gehört.
Abgeschlossene Menge $\iff$ Maximum und Minimum existieren.
Eine Menge A heisst nach oben [nach unten] beschränkt falls $\exists b \in \mathbb{R}\ \forall a \in A : a \leq [\geq] b$.
Die kleinste [grösste] solche Schranke heisst **Supremum [Infimum]**.
Beweis für Supremum [Infimum]:

$$\sup[\inf] A - A \geq [\leq] 0$$

Das Maximum [Minimum] einer Menge ist gleichzeitig ihr Supremum [Infimum].
Eine Menge A heisst **kompakt**, wenn sie abgeschlossen und beschränkt ist.
Archimedes Prinzip: Zu jeder Zahl $0 < b \in \mathbb{R}$ gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $b < n$.

$$\forall x < 0\ \forall y \exists n \in \mathbb{Z} : (n-1)x \leq y < nx$$

Folgerungen des Prinzips:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n \in \mathbb{N}, n \geq 1 :\ 0 < \frac{1}{n} < \varepsilon$$

$$\forall a, b \in \mathbb{R}, a < b\ \exists r \in \mathbb{Q} :\ a < r < b$$

2.2 Euklidischer Raum

n-dimensionale euklidische Raum:

$$\mathbb{R}^n = \{x = (x_1, \ldots, x_n); x_k \in \mathbb{R}, 1 \leq k \leq n\}$$

Addition:

$$x + y = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n), \forall x = (x_1, \ldots, x_n), y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$$

Skalarmultiplikation

$$\lambda x = (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n), \forall x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \lambda \in \mathbb{R}$$

Skalarprodukt ($x = (x_i)_{1 \leq i \leq n}, y = (y_i)_{1 \leq i \leq n} \in \mathbb{R}^n$):

$$x \cdot y = x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \in \mathbb{R} \quad (\text{Skalarprodukt} = 0 \to x \perp y)$$

Euklidische Norm

$$||x|| := \sqrt{x \cdot x} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \quad (\text{positive Wurzel})$$

Cauchy-Schwarz

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n : |x \cdot y| \leq ||x|| \cdot ||y||$$

2.3 Komplexe Zahlen

Komplexe Mulitplikation

$$\cdot : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \ni (a, b), (c, d) \to (ac - bd, ad + bd) \in \mathbb{R}^2$$

Multiplikatives Inverses (zu (a, b)):

$$\left(\frac{a}{a^2 + b^2}, \frac{-b}{a^2 + b^2} \right)$$

Imaginäre Einheit i

$$i = (0, 1), i^2 = (-1, 0) = -1$$

Darstellung

$$z = (x, y) \in \mathbb{C} = x + iy, \quad x = \Re z, y = \Im z$$

Konjugation (zu $z = x + iy$)

$$\overline{z} = x - iy \in \mathbb{C}$$

Eigenschaften

$$z \cdot \overline{z} = ||z||^2$$

$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}, \quad \overline{z_1 z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$$

$$||zw|| = ||z||||w||$$

Polarform (für $z = x + iy \in \mathbb{C}$)

$$r = |z|, x = rcos\phi, y = rsin\phi$$

$$z = r(\cos\phi \sin\phi) = re^{i\phi}$$

q-te Wurzel ($z = \sqrt[q]{w}$)

$$z = e^{i\frac{2\pi k}{q}}, k = 0, \ldots, q-1$$

3 Funktionen

$f : X \to Y$	Definitionsbereich: X, Wertebereich: Y, Abbildung: $x \to f(x)$
Identität	$id_X : X \to X, x \to x = id_X(x)$
Injektivität	$\forall x_1, x_2 \in X : f(x_1) = f(x_2) \to x_1 = x_2$
Surjektivität	$\forall y \in Y \exists x \in X : f(x) = y$
Bijektivität	Gleichzeitig injektiv und surjektiv

3.1 Konvergenz

3.1.1 Punktweise Konvergenz

Eine Funktionenfolge f_n ist punktweise konvergent, falls für jedes Element x des Definitionsbereich D_f $f_n(x)$ gegen den Funktionswert einer Grenzfunktion $f(x)$ konvergiert.

$$\forall x \in D_f \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$$

Beispiel: Die Folge f_n mit $f_n(x) : x \to x^n$ im Intervall $[0, 1]$ konvergiert punktweise gegen die Funktion f mit $f(x) = \begin{cases} 0, & x < 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases}$, denn es gilt $\lim_{n\to\infty} x^n = 0$ für alle $x \in [0, 1)$ und $\lim_{n\to\infty} 1^n = 1$.

3.1.2 Gleichmässige Konvergenz

Eine Funktionenfolge f_n ist gleichmässig konvergent, falls für alle $\varepsilon > 0$ ein N existiert sodass gilt:

$$\forall n > N \ \forall x \in D_f : |f(x) - f_n(x)| < \varepsilon$$

Vorgehen: Falls D_f beschränkt, grössten Wert einsetzen, versuchen nach oben abzuschätzen und Abschätzung zu z.B. Nullfolge führen. Falls D_f unbeschränkt, versuchen zu zeigen, dass $f_n(x)$ nicht beschränkt ist (z.B. $x = n$ setzen).

3.2 Stetigkeit

3.2.1 Lipschitz stetig

Eine Funktion $f : \Omega \subset \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^n$ heisst Lipschitz stetig mit Lipschitzkonstante L, falls gilt:

$$||f(x) - f(y)|| \leq L||x - y||, \ \forall x, y \in \Omega$$

Sei f Lipschitz stetig mit $L \geq 0 \Longrightarrow f$ ist stetig (ergänzbar) an jeder Stelle x_0.

3.2.2 Stetige Funktionen

f heisst stetig an der Stelle x_0, falls $a := \lim_{x\to x_0} f(x)$ existiert mit $a = f(x_0)$.
f heisst stetig, falls f in jedem Punkt x_0 stetig ist.

3.2.3 Zwischenwertsatz

Seien $-\infty < a < b < \infty$, sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und $f(a) \leq f(b)$. Dann gibt es zu jedem $y \in [f(a), f(b)]$ ein $x \in [a, b]$ mit $f(x) = y$.
Sei $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ stetig und streng monoton wachsend mit monotonen Limes $-\infty \leq c := lim_{x\downarrow a} f(x) < \lim_{x\uparrow b} f(x) =: d \leq \infty$. Dann ist $f :]a, b[\to]c, d[$ bijektiv und f^{-1} stetig.

4 Folgen und Reihen

4.1 Folgen

4.1.1 Grenzwert einer Folge

Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen ihren Grenzwert a für $n \to \infty$, falls gilt

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} \; \forall n \geq n_0 : |a_n - a| < \varepsilon$$

Eine Folge ist **konvergent**, falls sie einen Grenzwert hat, ansonsten **divergent**.
Einige Grenzwerte:

$$q \in \mathbb{R} \text{ mit } 0 < q < 1 : \lim_{n\to\infty} q^n = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$$

Monotone Konvergenz ($(a_n) \subset \mathbb{R}$ nach oben beschränkt durch $b \in \mathbb{R}$und monoton wachsend):

$$a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n \leq a_{n+1} \leq \cdots \leq b, \; \forall n \in \mathbb{N} \Longrightarrow (a_n) \text{ ist konvergent und } \lim_{n\to\infty} a_n = \sup_{n\in\mathbb{N}} a_n$$

4.1.2 Teilfolgen, Häufungspunkte

Sei $\Lambda \subset \mathbb{N}$ eine unendliche Teilmenge, $\mathbb{N} \ni n \to l(n) \in \Lambda$ eine monoton Abzählung von Λ. Dann ist die Folge $(a_l)_{l\in\Lambda} = (a_{l(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ eine **Teilfolge** von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
$a \in \mathbb{R}$ heisst **Häufungspunkt** von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, falls $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine gegen a konvergente Teilfolge bezitzt: $a = \lim_{l\to\infty, l\in\Lambda} a_l$.
Limes superior [inferior]: Grösster [kleinster] Grenzwert einer konvergenten Teilfolge.
Bolzano Weierstrass: Jede beschränkte Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ besitzt eine konvergente Teilfolge, also auch einen Häufungspunkt.

4.1.3 Cauchy-Kriterium

Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heisst Cauchy-Folge, falls:

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} \; \forall n, l \geq n_0 : |a_n - a_l| < \varepsilon$$

Chauchy-Folge $\Longleftrightarrow$ konvergente Folge

4.2 Reihen

4.2.1 Definition

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge, dann kann man die Partialsumme $s_n := a_0 + a_1 + \ldots + a_n = \sum_{k=0}^{n} a_k, n \in \mathbb{N}$ definieren. Die Folge (s_n) dieser Partialsummen heisst **Reihe**.

4.2.2 Konvergenzverhalten

Cauchy-Kriterium: Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ ist konvergent genau dann, wenn

$$\left| \sum_{k=l}^{\infty} a_k \right| \to 0, (n \geq l, l \to \infty)$$

Nullfolgekriterium: $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$ notwendig für Konvergenz (nicht hinreichend).
Quotientenkriterium: Sei $a_k \neq 0, k \in \mathbb{N}$
$\limsup_{k\to\infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| < 1 \Longrightarrow$ Konvergenz
$\liminf_{k\to\infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| > 1 \Longrightarrow$ Divergenz
Wurzelkriterium: Sei $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$
$\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} < [>] \; 1 \Longrightarrow$ Konvergenz [Divergenz]
Majorantenkriterium: Gibt es eine konvergente Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ und gilt für fast alle n, dass $|a_n| \leq b_n$, dann konvergiert die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ absolut.

4.2.3 Potenzreihe

Sei $(c_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ Folge in $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$. Die **Potenzreihe** in $z \in \mathbb{C}$

$$p(z) := c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$$

Setze $a_k = c_k z^k, k \in \mathbb{N}$, mit $\sqrt[k]{|a_k|} = |z| \cdot \sqrt[k]{|c_k|}, k \in \mathbb{N}$
Konvergenzbereich: Die Potenzreihe $p(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ ist konvergent $\forall z \in \mathbb{C}$ mit

$$|z| < \rho := \frac{1}{\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|c_k|}} \in [0, \infty]$$

Absolute Konvergenz: Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergiert absolut, falls $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ konvergiert.
Konvergenzradius: Quotientenkriterium "umdrehen", berechnen (i.e. $\rho = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}}$).

4.2.4 Geometrische Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_0 q^k = \frac{a_0}{1-q}, \; \forall |q| < 1$$

5 Differentialrechnung auf $\mathbb{R}$

5.1 Differential und Differentiationsregeln

f differenzierbar in $x_0 \to f'(x_0) := \lim\limits_{x \to x_0, x \neq x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ existiert, f stetig in x_0. ($\not\Leftarrow$)
t_0 ist ein **kritischer Punkt** von f, wenn$f'(t_0) = 0$.

5.1.1 Ableitungsregeln

Additionsregel	$(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$
Multiplikationsregel	$(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0)$
Quotientenregel	$(f/g)'(x_0) = \frac{f'(x_0) \cdot g(x_0) - f(x_0) \cdot g'(x_0)}{g^2(x_0)}$
Kettenregel	$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$

5.1.2 Bernoulli-de l'Hospital

Falls $\lim\limits_{x \downarrow a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} =: A$ existiert, dann ist ebenfalls $\lim\limits_{x \downarrow a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = A$.

5.2 Mittelwertsatz

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und im Inneren von $[a, b]$ differenzierbar. Dann gibt es einen Punkt $\varrho \in]a, b[$ mit $f'(\varrho) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$.
Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und im Inneren von $[a, b]$ differenzierbar. Besitzt die Ableitung $f'(x)$ der Funktion $f(x)$ innerhalb des Intervalls $[a, b]$ n Nullstellen, so hat die Funktion $f(x)$ im Intervall höchstens derer $n + 1$.
Satz von Rolle: $f(a) = f(b) \to \exists \varrho : f'(\varrho) = 0$.

5.3 Konkav, konvex

Eine Funktion f heisst konkav [konvex] auf einem Intervall I, falls $\forall x \in I : f''(x) < [>] 0$. $\frown$ [$\smile$]

5.4 Funktionen der Klasse C^1

f heisst von der Klasse C^1, falls $x \to f'(x)$ stetig ist.

5.5 Taylor-Polynom

Das Taylor-Polynom n-ter Ordnung für $f(t)$ an der Stelle a mit Restterm $R_n(t)$:
$T_n f(t; a) = \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{f^{(k)}(a)}{k!}(t-a)^k$ und $R_n(t) = \dfrac{f^{(n+1)}(\tau)}{(n+1)!}(t-a)^{n+1}$ mit $\tau \in (a, t)$.

6 Integralrechnung auf $\mathbb{R}$

6.1 Integrationsregeln

Partielle Integration: $\int uv' \, \mathrm{d}x = uv - \int u'v \, \mathrm{d}x$

Substitution:

– Substituieren	$\int_0^\pi \sin(2x) \, \mathrm{d}x, \; z = 2x$
– Substitution ableiten, nach $\mathrm{d}x$ auflösen	$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = 2, \; \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}z}{2}$
– Einsetzen in unbestimmtes Integral, lösen	$\int \frac{1}{2} \sin z \, \mathrm{d}z = -\frac{1}{2} \cos z + C$
– Rücksubstituieren	$-\frac{1}{2} \cos 2x + C$
(– Hauptsatz anwenden)	$-\frac{1}{2} \cos 2x \Big\vert_0^\pi = \cos 2\pi - \cos 0 = 0$

Weitere Regeln:

- $\int f(a+x) \, \mathrm{d}x = F(a+x)$
- $\int f(a-x) \, \mathrm{d}x = -F(a-x)$
- $\int f(\alpha x) \, \mathrm{d}x = \frac{1}{\alpha} F(\alpha x)$
- $\int \frac{g'(x)}{g(x)} \, \mathrm{d}x = \ln |g(x)|$
- $\int g(x) g'(x) \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2} g^2(x)$

6.2 Rotationsvolumen

6.2.1 Rotation um x-Achse

Rotation der Funktion f im Intervall $[a, b]$ um die x-Achse: $V_x = \pi \int_a^b f^2(x) \, \mathrm{d}x$

6.2.2 Rotation um y-Achse

Rotation der Fläche zwischen G_f und x-Achse um y-Achse: $V_y = 2\pi \int_a^b x f(x) \, \mathrm{d}x$

Rotation der Fläche zwischen G_f und y-Achse um y-Achse: $V_y = \pi \int_a^b x^2 f'(x) \, \mathrm{d}x$

6.3 Bogenlänge

Länge L der Funktion f auf dem Intervall $[a, b]$: $L = \int_a^b \sqrt{1 + \left[f'(x)\right]^2} \, \mathrm{d}x$

7 Differentialgleichung

7.1 DGL 1. Ordnung

7.1.1 Homogener Teil (Separation der Variablen)

- y' konsequent als $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ schreiben
- Alle Terme mit x (inkl. $\mathrm{d}x$) auf die eine, alle Terme mit y (inkl. $\mathrm{d}y$) auf die andere Seite
- Rechts und links integrieren, auflösen nach y
- Konstante C mittels AW bestimmen (AW einsetzen, ausrechnen).

7.1.2 Inhomogener Teil (Variation der Konstanten)

- Homogener Teil mittels Separation der Variablen lösen (Konstante stehen lassen!)
- Konstante C als Funktion $C(t)$ betrachten
- Ableiten und in ursprüngliche DGL einsetzen
- Nach $C'(t)$ auflösen, integrieren, Lösung in homogenen Teil einsetzen für $C(t)$

7.2 DGL 2. Ordnung

7.2.1 Homogener Teil (Charakteristische Gleichung)

DGL: $ay'' + by' + cy = 0$

Einsetzen in charakteristischer Gleichung $ak^2 + bk + c = 0$, auflösen mittels $k_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.

$\mathbf{k_1, k_2} \in \mathbb{R}, \mathbf{k_1} \neq \mathbf{k_2}$	$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}$
$\mathbf{k_1, k_2} \in \mathbb{R}, \mathbf{k_1} = \mathbf{k_2}$	$y = C_1 e^{kx} + C_2 x e^{kx}$
$\mathbf{k_1, k_2} \in \mathbb{C}, \mathbf{k} = \alpha \pm \mathbf{i}\beta$	$y = e^{\alpha x} \left(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x\right)$

7.2.2 Inhomogener Teil (Variation der Konstanten)

Siehe Kapitel 7.1.2 für Verfahren.

7.3 DGL 3. Ordnung

- Eine Lösung k_1 erraten
- Polynomdivision: $\frac{ak^3 + bk^2 + ck + d}{k - k_1} = a'k^2 + b'k + c'$
- Mit $a'k^2 + b'k + c'$ fortfahren wie DGL 2. Ordnung
- Alles addieren $(C_1 e^{k_1 t} + \mathit{Lösung}_{a'k^2 + b'k + c'})$

8 Kurvenintegral

8.1 1. Art

Das Wegintegral einer stetigen Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ entlang eines stetig differenzierbaren Weges $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ ist definiert durch:

$$\int_\gamma f \, \mathrm{d}s := \int_a^b f(\gamma(t)) \|\gamma(t)'\|_2 \, \mathrm{d}t$$

Euklidische Norm: $\|\vec{a}\|_2 = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + \ldots}$.
Beim Integral muss man zuerst $\gamma(t)$ nach t ableiten und erst dann die Norm davon berechnen.

Beispiel Es sei die Schraubenlinie $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3, \gamma : t \to (\cos(t), \sin(t), t)$ und $f(x,y,z) := x^2 + y^2 + z^2$ gegeben. Wir berechnen $\int_\gamma f \, \mathrm{d}s$. Zunächst bestimmen wir

$$\begin{aligned} \|\gamma(t)'\|_2 &= \sqrt{[\cos'(t)]^2 + [\sin'(t)]^2 + [t']^2} \\ &= \sqrt{\sin^2(t) + \cos^2(t) + 1} = \sqrt{2} \end{aligned}$$

Dann substituieren wir x,y und z und erhalten

$$f(x,y,z) = f(\gamma(t)) = \sin^2(t) + \cos^2(t) + t^2 = 1 + t^2$$

auf γ. Das führt zu

$$\begin{aligned} \int_\gamma f(x,y,z) ds &= \int_0^{2\pi} (1+t^2)\sqrt{2} dt = \sqrt{2}(t + \frac{t^3}{3})\Big|_0^{2\pi} \\ &= \frac{2\sqrt{2}\pi}{3}(3 + 4\pi^2) \end{aligned}$$

8.2 2. Art

Das Wegintegral über ein stetiges Vektorfeld $\vec{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ entlang eines stetig differenzierbaren Weges $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ ist definiert durch:

$$\int_\gamma \vec{f}(\vec{x}) d\vec{x} := \int_a^b \left\langle \vec{f}(\gamma(t)), \gamma(t)' \right\rangle \mathrm{d}t$$

Skalarprodukt: $\left\langle \vec{a}, \vec{b} \right\rangle = a_x b_x + a_y b_y + \ldots$

Beispiel Berechne des Linienintegral $\int_\gamma \vec{K} d\vec{x}$ für $\vec{K}(x,y) = (x^2 + y, 2xy)$ und γ als Einheitskreis mit positivem Umlaufsinn. Gegeben:

$$\begin{aligned} \vec{K}(x,y) &= (x^2 + y, 2xy) \\ \gamma &: [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2 \\ \gamma &: t \to (\cos(t), \sin(t)) \end{aligned}$$

Zu berechnen:

$$\begin{aligned} \gamma(t)' &= (-\sin(t), \cos(t)) \\ \vec{K}(\gamma(t)) &= (\cos^2(t) + \sin(t), 2\cos(t)\sin(t)) \\ \left\langle \vec{K}(\gamma(t)), \gamma(t)' \right\rangle &= -\cos^2(t)\sin(t) - \sin^2(t) + 2\cos^2(t)\sin(t) \\ &= \cos^2(t)\sin(t) - \sin^2(t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_\gamma \vec{K} d\vec{x} &= \int_0^{2\pi} \left\langle \vec{K}(\gamma(t)), \gamma(t)' \right\rangle \mathrm{d}t \\ &= \int_0^{2\pi} \cos^2(t)\sin(t) - \sin^2(t) \, \mathrm{d}t \\ &= -\frac{1}{3}\cos^3(t) - \frac{1}{2}t + \sin(t)\cos(t)\Big|_0^{2\pi} = \underline{\underline{-\pi}} \end{aligned}$$

8.3 Parametrisierung von Kurven

Skizze machen, um Grenzen und Kurve besser zu verstehen und schneller auf die Parametrisierung zu kommen.

- Wenn die Kurve in der Form $C = \{\vec{r} \in \mathbb{R}^n | \vec{r} = \gamma(t), a \leq t \leq b\}$ bereits gegeben, so ist klar, dass $\gamma(t)$ der Weg ist und das Integral von a nach b verläuft.
- Die Parametrisierung einer Strecke von $\vec{a}$ nach $\vec{b}$: $\gamma(t) = \vec{a} + t(\vec{b} - \vec{a}), \quad 0 \leq t \leq 1$
- Die Parametrisierung eines Kreises mit Mittelpunkt (x_0, y_0) und Radius r ist $\gamma(t) = \begin{pmatrix} x_0 + r\cos(t) \\ y_0 + r\sin(t) \end{pmatrix}$. Für einen vollen Kreis gilt $0 \leq t \leq 2\pi$, für Kreisteil schränkt man diesen Intervall entsprechend ein.
- Parametrisierung eines Graphen der Funktion $f(x)$ für $x \in [a,b]$: $\gamma(t) = \begin{pmatrix} t \\ f(t) \end{pmatrix}, \quad a \leq t \leq b$

  Hat man zwei Graphen, die als Grenzen für das Kurvenintegral fungieren, so schliessen diese gemeinsam eine Fläche ein. Die Umlaufrichtung ist so zu wählen, dass diese Fläche jeweils links liegt.

Beispiel Kurvenintegral mit zwei Grenzgraphen
Es soll das Kurvenintegral $\int_\gamma K(x,y) \; dt = \int_\gamma \begin{pmatrix} x^2 - y^2 \\ 2y - x \end{pmatrix} \; dt$ berechnet werden. γ ist der Rand des beschränkten Gebietes im ersten Quadranten, welches durch die Graphen $y = x^2$ und $y = x^3$ begrenzt wird.

Lösung: Man macht eine Skizze der Grenzen ($y = x^2$ und $y = x^3$) und sieht, dass diese eine Fläche einschliessen. Die Schnittpunkte sind $x = 0$ und $x = 1$. Der Rand dieses Gebiets besteht also aus den beiden parametrisierten Kurven (Parametrisierung für Graphen verwenden)

$$\gamma_1(t) = \begin{pmatrix} t \\ t^3 \end{pmatrix} \qquad t \in [0, 1]$$

$$\gamma_2(t) = \begin{pmatrix} t \\ t^2 \end{pmatrix} \qquad t \in [0, 1]$$

Wir sehen, dass die eingeschlossene Fläche in Durchlaufrichtung von γ_1 links liegt, was soweit gut ist. Bei γ_2 liegt die Fläche aber auf der rechten Seite, weshalb wir die Durchlaufrichtung drehen müssen, was zu $\gamma = \gamma_1 - \gamma_2$ führt (man beachte das Minus statt einem Plus). Jetzt muss nur noch ganz normal das Wegintegral berechnet werden: $\int_\gamma K \ \mathrm{d}x = \int_{\gamma_1} K \ \mathrm{d}x + \int_{-\gamma_2} K \ \mathrm{d}x = \int_{\gamma_1} K \ \mathrm{d}x - \int_{\gamma_2} K \ \mathrm{d}x = \ldots$

8.4 Berechnung

Die Berechnung findet in drei Schritten statt:

1. Parametrisierung der Kurve C als $C = \{\vec{r} \in \mathbb{R}^n | \vec{r} = \gamma(t), a \leq t \leq b\}$
2. Einsetzen ins Integral: $\int_C f(\vec{r}) \ \mathrm{d}s = \int_a^b f(\gamma(t)) \|\gamma(t)'\| \ \mathrm{d}t$. Man setzt also für die Variabeln von f die Komponenten von γ ein und multipliziert dies dann mit dem Betrag der Ableitung nach t von γ.
3. Integral ausrechnen.

8.5 Bogenlänge

Für die Bogenlänge L, auf dem Weg beschrieben durch $x(t)$ und $y(t)$, ergibt sich:

$$L = \int ds = \int_a^b \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt$$

Spezialfall Funktionsgraph:

$$L(a, b) = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

Strecke

Arbeit durch das Vektorfeld entlang der Strecke von P_1 nach P_2 ist auch $f(P_2) - f(P_1)$, wenn $\vec{v}$ ein Potentialfeld ist und f das Potential davon.

9 Differentialrechnung in $\mathbb{R}^n$

Hier geht es um Funktionen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, wobei $m = 1$ gelten kann ($f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$). Solche Funktionen haben die allgemeine Form: $f(x) = f(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) = \begin{pmatrix} f_1(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) \\ f_2(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) \\ \ldots \\ f_m(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) \end{pmatrix}$

Für nahezu alle Eigenschaften gilt: Die Vektorfunktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ hat eine bestimmte Eigenschaft, wenn jede einzelne ihrer Komponenten $(f_1, f_2, \ldots, f_m)$ die besagte Eigenschaft besitzen. Das Problem liegt neu also nicht im Wertebereich, sondern vor allem in Definitionsbereich.

9.1 Norm

Eine Norm auf $\mathbb{R}^n$ ist die Funktion $\| \cdot \| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit den folgenden Eigenschaften:

- $\forall x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \geq 0$
- $\forall x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \vec{0}$
- $\forall x \in \mathbb{R}^n, \alpha \in \mathbb{R} : \|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$
- $\forall x, y \in \mathbb{R}^n : \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

9.2 Partielle Differenzierbarkeit

$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ ist in $a = (a_1, \ldots, a_n)$ partiell differenzierbar nach der i-ten Variable x_i, wenn die Funktion $f : x_i \to f(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n)$ differenzierbar ist. Man berechnet die partielle Ableitung also folgendermassen: Eine Funktion f wird nach einer Variable partiell differenziert, indem man alle anderen Variablen als Konstanten behandelt und die Rechenregeln für Funktionen mit einer Variable anwendet.

Satz von Schwarz: Ist f nach x und y zweimal partiell differenzierbar und sind die gemischten partiellen Ableitungen f_{xy} und f_{yx} stetig, so gilt: $f_{xy} = f_{yx}$.

9.3 Jacobi-Matrix

Auch Funktionalmatrix, Ableitungsmatrix einer differenzierbaren Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ ist die $m \times n$ Matrix sämtlicher erster partieller Ableitungen.

$$J_f(a) := \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(a) & \ldots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(a) & \ldots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix}$$

Transformationssatz: Es sei $\Omega \in \mathbb{R}^d$ eine offene Menge und $\Phi : \Omega \to \Phi(\Omega) \subset \mathbb{R}^d$ ein Diffeomorphismus. Dann ist die Funktion f auf $\Phi(\Omega)$ genau dann integrierbar, wenn die Funktion $x \to$

$f(\Phi(x))|det(D\Phi(x))|$ auf Ω integrierbar ist. Dann gilt $\int_{\Phi(\Omega)} f(y)dy = \int_\Omega f(\Phi(x))|det(D\Phi(x))|dx$. Dabei ist $D\Phi(x)$ die Jacobi-Matrix und $det(D\Phi(x))$ die Funktionaldeterminante von Φ.

9.4 Hesse-Matrix

Die Hesse-Matrix ist eine Matrix, die in der mehrdimensionalen reellen Analysis ein Analogon zur zweiten Ableitung einer Funktion ist. Ist die Funktion zweimal stetig differenzierbar kann die Hesse-Matrix gebildet werden. Eine Hesse-Matrix ist symetrisch.

Für eine Funktion $f(x,y)$ sieht die Hesse Matrix wie folgt aus:

$$\mathrm{H}_f = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial^2 x} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial^2 y} \end{pmatrix}.$$

Verallgemeinert für die Funktion $f\colon D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ (die ebenfalls zweimal stetig differenzierbar sein muss), sieht die Matrix wie folgt aus:

$$\mathrm{H}(f) = \mathrm{H}_f = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right)_{i,j=1,\ldots,n} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_n} \end{pmatrix}. \tag{1}$$

9.5 Kritische Punkte

Berechnen von lokalen Minima und Maxima. Rand separat betrachten.

1. $grad(f) = 0$ ergibt kritische Punkte ($\nabla f = \vec{0}$)
2. Hesse-Matrix H_f berechnen
3. Determinante berechnen
4. $det < 0$: Sattelpunkt
5. $det > 0$ und Hesse-Matrix $a_{11} > 0$: Minimum
   $det > 0$ und Hesse-Matrix $a_{11} < 0$: Maximum
6. $det = 0$: Unbestimmt, weitere Ableitungen notwendig.

Vektorfeld: Die Abbildung $\vec{v}(\vec{r}) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ist ein Vektorfeld. Es weist jedem Vektor $\vec{r}$ einen Vektor $\vec{v}(\vec{r})$ zu.

Skalarfeld: Ist eine Abbildung der Form $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Es existiert wenn das Vektorfeld wirbelfrei/konservativ ist. Ergibt ein geschlossener Weg im Vektorfeld nicht null so existiert kein skalares Feld (jedoch nicht unbedingt umgekehrt).

Gradient: Vektor zu einer Funktion, welcher in Richtung der grössten Steigung in einem Punkt zeigt und normal zur Höhenlinie liegt. Die länge des Vektors ist die Steigung des Anstiegs.
Der Gradient einer Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ im Punkt $a \in \mathbb{R}^n$ ist mit dem Standardskalarprodukt

$$\nabla f = \begin{pmatrix} \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x_1} \\ \vdots \\ \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x_n} \end{pmatrix}$$

Potential Ist $\vec{v} = \nabla f$ der Gradient von f, so ist f das Potential oder Stammfunktion zu $\vec{v}$.

Gradientenfeld / Potentialfeld Ist $\vec{v} = \nabla f$ der Gradient von f, so ist das Vektorfeld $\vec{v}$ ein Gradientenfeld / Potentialfeld. Es besitzt dabei die folgenden Eigenschaften:

- Der Wert des Kurvenintegrals entlang eines beliebigen Weges innerhalb des Feldes ist unabhängig vom Weg selbst, sondern nur vom Anfangs- und Endpunkt
- Ein Kurvenintegral mit einem Weg bei dem Anfangs- und Endpunkt der gleiche Punkt sind, hat den Wert 0.
- Ist immer wirbelfrei: $\mathrm{rot}\vec{v} = \mathrm{rot}(\nabla f) = \vec{0}$

Rotor / Rotation Ist $\vec{v}$ ein Vektorfeld im $\mathbb{R}^3$, so ist die Rotation von $\vec{v} = (P,Q,R)^T$ das Vektorfeld $\vec{w} = \mathrm{rot}\vec{v} = \begin{pmatrix} R_y - Q_z \\ P_z - R_x \\ Q_x - P_y \end{pmatrix}$

9.6 Bestimmung eines Potentials im $\mathbb{R}^2$

Sei $\vec{v} = \begin{pmatrix} P(x,y) \\ Q(x,y) \end{pmatrix}$.

(In gewissen Fällen kann das Potential f erraten werden in dem wir das Vektorfeld $\vec{v}$) partiell integrieren und dann eine Funktion f erraten, so dass ∇f wieder $\vec{v} ergibt$.)

Um schnell zu prüfen, ob man überhaupt den folgenden Algorithmus anwenden muss, kann man prüfen ob gilt: $P_y = Q_x$, wenn nicht, so hat $\vec{v}$ kein Potential f.

1. $f(x,y) = \int P(x,y)\ dx + C(y)$ berechnen (Integral)
2. Die berechnete Gleichung $f(x,y)$ nun nach y ableiten: $\frac{\partial}{\partial y} f(x,y) = \frac{\partial}{\partial y} \int P(x,y)\ dx + C'(y)$ (berechnetes Integral nach y ableiten)
3. $\frac{\partial}{\partial y} f(x,y) = Q(x,y)$ setzen und $C'(y)$ berechnen durch umformen und integrieren
4. Berechnetes $C(y)$ in die Gleichung im 1. Punkt einsetzen. Fertig. Achtung: Im Grunde hat $C(y)$ durch integrieren noch einen konstanten Wert, der beliebigen Wert haben kann. Dieser taucht im Grunde auch in der fertigen $f(x,y)$ Funktion auf.

9.7 Bestimmung eines Potentials im $\mathbb{R}^3$

Sei $\vec{v} = \begin{pmatrix} P(x,y,z) \\ Q(x,y,z) \\ R(x,y,z) \end{pmatrix}$.

Um zu prüfen, ob man überhaupt ein Potential finden kann für $\vec{v}$ hat rot$\vec{v} = 0$ zu sein, also wirbelfrei zu sein. Dazu muss gelten (zu zeigen mit rot$\vec{v} = 0$): $P_y = Q_x, P_z = R_x, Q_z = R_y$.

1. $f(x,y,z) = \int P(x,y,z)\,dx + C(y,z)$ lösen (Integral berechnen)
2. Nun die berechnete Gleichung $f(x,y,z)$ nach y ableiten $\Rightarrow f_y(x,y,z)$.
3. Die abgeleitete Gleichung f_y mit $Q(x,y,z)$ gleichsetzen: $f_y(x,y,z) = Q(x,y,z)$ und damit $C_y(y,z)$ bestimmen.
4. Durch Integration von $C_y(y,z)$ nach y ($\int C_y(y,z)\,\mathrm{d}y$) wird $C(y,z)$ bestimmt bis auf eine Konstante $D(z)$, die von z abhängt. $C(y,z)$ hat also die Form: $C(y,z) = \int C_y(y,z)\,\mathrm{d}y + D(z)$.
5. Dieses $C(y,z)$ setzt man nun in die Gleichung $f(x,y,z)$ ein, die im 1. Punkt steht.
6. Nun wird die daraus erzeugte$f(x,y,z) = \int P(x,y,z)\,\mathrm{d}x + C(y,z) = \int P(x,y,z)\,\mathrm{d}x + \int C_y(y,z)\,\mathrm{d}y + D(z)$ Gleichung nach z abgeleitet.
7. Durch Gleichsetzen von $f_z(x,y,z) = R(x,y,z)$ lässt sich $D_z(z)$ bestimmen.
8. $D_z(z)$ wird wiederrum durch Integration zu $D(z) = \int D_z(z)\,\mathrm{d}z + c, \quad c \in \mathbb{R}$
9. Das berechnete $D(z)$ in die $f(x,y,z)$ Gleichung aus Punkt 6 einsetzen, fertig.

9.8 Geometrisches Verständnis

Sei B ein drei dimensionaler Körper (beschrieben durch Punkte in $\mathbb{R}^3$ mit der Funktion f) so sei ∇f senkrecht dazu.

Beispiel

Gib einen Vektoren der ein nach aussen gerichteter Normalenvektor (nicht notwendigerweise normiert) auf dem Rand des Ellipsoids ist

$$B := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \middle| f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1 \right\}$$

Der Vektor $\begin{pmatrix} 2x/a^2 \\ 2y/b^2 \\ 2z/c^2 \end{pmatrix}$ ist gleich ∇f und steht somit senkrecht auf der Niveaufläche $f = 1$. Da er vom Ursprung weg orientiert ist, liefert er die richtige Antwort.
Der Vektor $\begin{pmatrix} yz(1/b^2 - 1/c^2) \\ xz(1/c^2 - 1/a^2) \\ xy(1/a^2 - 1/b^2) \end{pmatrix}$ ist tangential zum Rand ∂B

9.9 Fläche unter Kurve

Sei eine Kurve in der Parameterdarstellung (z.B. $x(t) = \sin(2t)$ und $y(t) = \cos(3t)$ über $0 \leq t \leq \pi$) gegeben. So ist die Fläche $A = \int_0^\pi y\dot{x}\,\mathrm{d}t$ (da $\dot{x} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \Rightarrow dx = \dot{x}\,\mathrm{d}t$).

9.10 Lagrange-Multiplikator

Nützlich für Extremalstellen auf dem Rand (mit Rand als Nebenbedingung).
λ heisst Lagrange-Multiplikator. Sei $p_0 \in S$ lokales Maximum oder Minimum von f unter der Nebenbedingung $g(p_0) = 0$. Dann existiert $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_l) \in \mathbb{R}^l$, so dass für $L = f + \lambda g$ gilt:

$$dL(p_0) = df(p_0) + \lambda dg(p_0) = 0$$

Der Gradient von f steht also senkrecht auf dem Tangentialvektor der Niveaulinie. An der Berührstelle (x_0, y_0) muss daher der Gradient von f kollinear zum Normalenvektor der Nebenbedingung sein: $\begin{pmatrix} f_x \\ f_y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} g_x \\ g_y \end{pmatrix}$
Um Extrema aufzuspüren, ist daher das Gleichungssystem zu lösen:

$$f_x - \lambda g_x = 0 \tag{2}$$
$$f_y - \lambda g_y = 0 \tag{3}$$
$$g(x,y) = 0 \tag{4}$$

Dieses Gleichungssystem erhält man auch, indem man die Lagrange-Funktion $L(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda g(x,y)$ aufstellt und die partiellen Ableitungen L_x, L_y, L_λ null setzt.

9.11 Massenmittelpunkt

Der Massenmittelpunkt $\vec{r_s}$ ist das mit der Masse gewichtete Mittel der Ortsvektoren $\vec{r}$ aller Massepunkte dm eines Körpers:

$$\vec{r_s} = \frac{1}{M}\int_K \vec{r}\,\mathrm{d}m = \frac{1}{M}\int_K \vec{r}\rho(\vec{r})\,\mathrm{d}V$$

Dabei gilt für die Masse:

$$M = \int_K \rho(\vec{r})\,\mathrm{d}V$$

und für die Vektorkomponenten:

$$\mu_x = \int_K x \cdot \rho(\vec{r})\,\mathrm{d}V$$

$$\mu_y = \int_K y \cdot \rho(\vec{r})\,\mathrm{d}V$$

$$\mu_z = \int_K z \cdot \rho(\vec{r})\,\mathrm{d}V$$

schlussendlich erhält man den Mittelpunkt $P(x,y,z) = (\frac{\mu_x}{M}, \frac{\mu_y}{M}, \frac{\mu_z}{M})$.