Seminar 5. Serii Fourier.

O funcție $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este periodică de perioadă $T > 0$ dacă $f(x+T) = f(x)$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$, iar T este cel mai mic număr real pozitiv.

Definiția 1

Fie $f : [-l, l] \to \mathbb{R}$ o funcție continuă pe porțiuni, $l > 0$. Seria de funcții

$$S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \right),$$

unde

$$a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx, \quad b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx, \quad n \geq 0,$$

se numeşte **seria Fourier** asociată funcției f.

Teorema 1 - Teorema lui Dirichlet

Dacă o funcție periodică $f : [-l, l] \to \mathbb{R}$ de perioadă $T = 2l$ este derivabilă pe porțiuni pe intervalul $[-l, l]$, atunci **seria Fourier** asociată lui f converge punctual pe $[-l, l]$ şi pentru orice **punct de continuitate** $x \in (-l, l)$ al lui $f(x)$ are loc

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \right).$$

Dacă $x \in (-l, l)$ este un **punct de discontinuitate** al lui $f(x)$, atunci

$$\frac{f(x-0) + f(x+0)}{2} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \right),$$

respectiv

$$S(-l) = S(l) = \frac{f(-l+0) + f(l-0)}{2}.$$

Definiția 2

Fie $A \subset \mathbb{R}$ o mulțime simetrică față de origine.

- Funcția $f : A \to \mathbb{R}$ se numeşte **funcție pară** dacă $f(-x) = f(x)$, oricare ar fi $x \in A$.
- Funcția $f : A \to \mathbb{R}$ se numeşte **funcție impară** dacă $f(-x) = -f(x)$, oricare ar fi $x \in A$.

© 2022/2023 Loredana F. Vesa - Universitatea Politehnica Timişoara, România

Cazuri particulare

1. Dacă $f(x)$ este **funcție pară** atunci $b_n = 0$, oricare ar fi $n \geq 0$, iar seria Fourier devine
$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{l}, \quad a_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx.$$
2. Dacă $f(x)$ este **funcție impară** atunci $a_n = 0$, oricare ar fi $n \geq 0$, iar seria Fourier devine
$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{l}, \quad b_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx.$$

Remarca 1

Dacă o funcție $f : [a, a+2l] \to \mathbb{R}$ este periodică de perioadă $T = 2l$, coeficienții seriei Fourier devin
$$a_n = \frac{1}{l} \int_a^{a+2l} f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx, \quad b_n = \frac{1}{l} \int_a^{a+2l} f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx.$$

© 2022/2023 Loredana F. Vesa - Universitatea Politehnica Timişoara, România

Exerciții propuse

1. Dezvoltați în serie Fourier următoarele funcții:

   (a) $f(x) = x^2, \quad x \in [-\pi, \pi]$;

   (b) $f(x) = x^3, \quad x \in [-1, 1]$;

   (c) $f(x) = e^{ax}, \quad x \in [-1, 1]$;

   (d) $f(x) = |x|, \quad x \in [-1, 1]$.

2. Descompuneți în serie Fourier funcția $f(x) = \frac{x^2}{2}$ pe $I = (0, 2\pi)$ și arătați că $\sum\limits_{n \geq 1} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$, respectiv $\sum\limits_{n \geq 1} (-1)^{n+1} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$.

3. Descompuneți în serie Fourier funcția $f(x) = \pi - x$ pe $I = (0, 2\pi)$ și calculați $\sum\limits_{n \geq 1} (-1)^{n-1} \frac{1}{2n-1}$.

© 2022/2023 Loredana F. Vesa - Universitatea Politehnica Timişoara, România