Investigação Operacional – Trabalho Prático II

Problema de Fluxo Máximo numa Rede

Ana Carolina Penha Cerqueira	A104188
Humberto Gil Azevedo Sampaio Gomes	A104348
Ivo Filipe Mendes Vieira	A103999
José António Fernandes Alves Lopes	A104541
José Rodrigo Ferreira Matos	A100612

4 de maio de 2024

Resumo

Este segundo trabalho prático de Investigação Operacional tem como objetivo a resolução de um problema de maximização de fluxo numa rede. Os conceitos necessários para a resolução deste problema são definidos e caracterizados de acordo com uma possível interpretação da rede no mundo real, uma rede hídrica entre cidades. Após uma definição matemática destes conceitos, o problema de maximização de fluxo é transformado num de minimização de custo, para a criação de um modelo aceite pelo *solver* RELAX-IV [1]. A solução dada é analisada e interpretada no contexto da rede dado. Por último, o modelo é validado através da confirmação de que a solução ótima respeita todas as restrições necessárias e faz sentido no mundo real.

1 Dados do problema

Como exigido pelo enunciado, os dados do problema a resolver são determinados em função do número de aluno mais elevado de entre os integrantes do grupo. No caso, este é A104541, que corresponde ao aluno José Lopes, e dá origem aos seguintes dados:

$$\text{Vértice de origem:} \quad O = 6$$

$$\text{Vértice de destino:} \quad D = 3$$

Vértice	Capacidade
1	60
2	90
3	$+\infty$
4	50
5	20
6	$+\infty$

Tabela 1: Capacidade de cada vértice na rede.

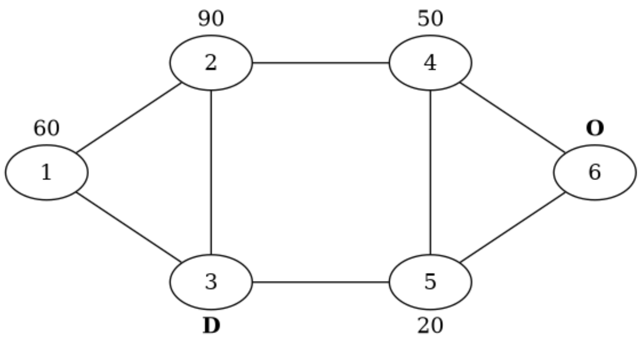

Figura 1: Rede na qual deve ser resolvido o problema de maximização de fluxo.

2 Formulação do problema

2.1 Conceitos introdutórios

O problema a resolver tem por base uma rede de fluxos, objeto constituído por um grafo e por dados adicionais para cada arco (como capacidades e custos unitários) e / ou para cada vértice (como capacidades e ofertas / consumos). Antes de se definirem estes conceitos, é necessário ter-se em mente o conceito de fluxo, algo que é transferido entre os vértices da rede através dos seus arcos. Este "algo" depende do contexto do problema e do que a rede significa. Julgamos que um exemplo seja mais ilustrativo:

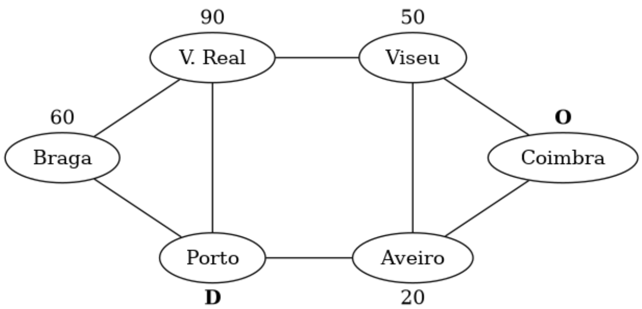

Figura 2: Interpretação da rede dada como uma rede hídrica interurbana.

A rede da figura 1 pode ser interpretada como uma rede de canalizações, onde vértices correspondem a cidades e os arcos às tubagens entre as várias cidades. Neste exemplo, o fluxo será a água transportada entre as cidades. Nos tipos de problema abordados neste documento, as decisões serão sempre a escolha da quantidade de fluxo em cada arco da rede, neste caso, a água transferida por cada tubagem existente. Como será visto posteriormente, em vez de haver preocupações com o sentido do fluxo nas tubagens com dois sentidos, cada uma destas será transformada em duas tubagens direcionadas, cada uma associada a uma variável de decisão.

Com o conceito de fluxo apresentado, podem definir-se propriedades de vértices e de arcos, como as capacidades. A capacidade de um vértice é o fluxo máximo que pode entrar nesse vértice. No exemplo anterior, refere-se à capacidade máxima de água que pode entrar numa rede hídrica interna de uma cidade. A rede interna de Braga, por exemplo, não suporta mais de 60 unidades de volume de água de entrada. Apesar do exemplo anterior não ter capacidades em arcos, este conceito é crucial para a expressão de qualquer problema na sua forma padrão. Simplesmente, é o limite superior de fluxo num arco, algo que no contexto da rede hídrica significaria o volume máximo de água que se poderia transferir por uma tubagem entre duas cidades.

O conceito de custo unitário é simples e será necessário para a transformação do problema apresentado num que o *solver* utilizado seja capaz de resolver: o custo unitário de um arco é o custo associado ao transporte de uma unidade de fluxo por esse arco, que no contexto da rede de tubagens se refere ao custo monetário da transferência de uma unidade de volume de água entre duas cidades por uma dada tubagem.

O último conceito a introduzir é o de oferta / consumo. Um dado vértice pode produzir fluxo que será transportado pelo resto da rede (oferta), como pode consumir fluxo que recebe do resto da rede (consumo). No exemplo dado, estes conceitos estão associados aos excesso e défice de produção em água de cada cidade, respetivamente.

Qualquer problema de fluxo em rede tem dois tipos de restrição associados. O primeiro são as restrições de capacidade: logicamente, para todo o arco, o fluxo nunca pode ser negativo ou superior à capacidade. Note-se que, numa rede na sua forma padrão, capacidades de vértices devem ser transformadas em capacidades de arcos, como se verá posteriormente. O segundo tipo de restrição são as restrições de conservação de fluxo: em cada vértice, o balanço do (diferença entre o) fluxo de saída e o fluxo de entrada num vértice deve ser igual à oferta (valor positivo) / procura (valor negativo). No exemplo dado, estas restrições traduzem-se na impossibilidade de fazer aparecer ou desaparecer água além da produzida / consumida numa cidade.

O problema que se pretende resolver é um de maximização de fluxo. Dados dois vértices numa rede, procura-se determinar o fluxo máximo entre esses dois vértices, respeitando as restrições mencionadas anteriormente. No exemplo da figura 2, o problema proposto para a resolução neste trabalho prático, pretende-se enviar o volume máximo de água possível entre Coimbra (origem) e Porto (destino), seja por que caminho for. Note-se que o custo dos arcos é irrelevante para a resolução do problema: pretende-se maximizar o fluxo independentemente do custo que isso acarrete. O conjunto dos dois tipos de restrições mencionados garante que existe um fluxo máximo na rede e que este se conserva entre a origem o destino, garantido a possibilidade de formação de um modelo coerente.

Como será visto posteriormente, o problema de fluxo máximo apresentado será resolvido após ser convertido para um problema de minimização de custo. Nestes problemas procura-se minimizar o custo de transporte de fluxo (de água) entre vértices (cidades) com balanço positivo (oferta) e os vértices com balanço negativo (consumo), respeitando as restrições de capacidade e conservação de fluxo mencionadas.

2.2 Formulação matemática

Antes de se proceder à resolução do problema apresentado, é necessária uma definição formal e rigorosa dos conceitos de redes de fluxo. A partir deste ponto neste documento, apenas será considerada a rede da figura 1, sem o contexto de rede hídrica interurbana associado, que apenas será reintroduzido para a interpretação da solução final no mundo real.

Uma rede de fluxo é formada por um grafo orientado $G = (V, A)$, onde V é o conjunto de vértices e $A \subseteq V^2$ o conjunto de arcos. Adicionalmente, a cada vértice $i \in V$ pode estar associada uma oferta / consumo b_i (ofertas apresentam valores positivos, e consumos valores negativos). A cada arco $(i, j) \in A$ pode estar associada uma capacidade u_{ij} e um custo unitário c_{ij}. Note-se que esta definição de rede de fluxos não suporta diretamente conceitos como capacidades em vértices ou arcos não orientados. Como será visto na secção seguinte, estes serão convertidos de modo a se ter uma rede na sua forma padrão.

Como já mencionado, as decisões tomadas nos problemas em redes de fluxo são as escolhas das quantidades de fluxo em cada arco. Logo, a cada arco $(i, j) \in V$ será associada uma variável de decisão $x_{ij} \in \mathbb{Z}_0^+$, que representa o número de unidades de fluxo que passam por esse arco.

Em qualquer problema estão presentes restrições de capacidade: o fluxo em cada arco deve ser não-negativo e não deve ultrapassar a capacidade desse arco. Matematicamente, têm-se as seguintes restrições:

$$\forall_{(i,j) \in A},\ 0 \leq x_{ij} \leq u_{ij} \tag{1}$$

Além disso, as restrições de conservação de fluxo devem ser respeitadas. Para cada vértice, a diferença entre todo o fluxo de saída e todo o fluxo de entrada deve ser igual à oferta / consumo nesse arco. O fluxo de saída é facilmente calculável através da soma dos fluxos de todos os arcos que têm origem no vértice. O mesmo se tem para o fluxo de entrada e os arcos com destino no vértice em questão. Assim, matematicamente, têm-se as seguintes restrições:

$$\forall_{i \in V},\ \sum_{(i,j) \in A} x_{ij} - \sum_{(j,i) \in A} x_{ji} = b_i \tag{2}$$

Num problema de maximização de fluxo, considera-se uma variável f que representa o fluxo entre o vértice de origem O e o vértice de destino D. Trivialmente, o objetivo será $max : f$. Um modelo para este problema estará sujeito às restrições de capacidade (equação 1) e às restrições de conservação de fluxo (equação 2). No entanto, surge a questão de quais são os valores de oferta / procura em cada vértice. O que ocorre neste problema é que os valores em O e D deixam de ser dados do problema e passam a ser dependentes da variável f. É necessário garantir que o balanço de fluxo em O corresponde a uma oferta de f unidades ($b_O = f$), e que em D corresponde a um consumo de f unidades ($b_D = -f$). Não se deseja que os restantes vértices ofereçam ou consumam fluxo ($b_i = 0,\ i \notin \{O, D\}$). Assim, pode formular-se o seguinte modelo de programação linear:

$$
\begin{aligned}
\text{max: } & f \\
\forall_{(i,j)\in A},\ & 0 \leq x_{ij} \leq u_{ij} \\
\forall_{i\in V},\ & \sum_{(i,j)\in A} x_{ij} - \sum_{(j,i)\in A} x_{ji} = \begin{cases} f & \Leftarrow i = O \\ 0 & \Leftarrow i \in V \setminus \{O, D\} \\ -f & \Leftarrow i = D \end{cases} \\
\forall_{(i,j)\in A},\ & x_{ij} \in \mathbb{Z}_0^+
\end{aligned}
\tag{3}
$$

O modelo para a resolução de um problema de minimização de custo é mais simples. Apenas é necessário considerar que o custo total, o que se pretende minimizar, é igual à soma dos custos em todos os arcos, e o custo num arco é igual ao produto entre o fluxo nesse arco e o custo unitário desse arco (custo de transporte de uma unidade de fluxo). Assim, como não são necessárias modificações aos valores das ofertas e consumos dos vértices, resultando num modelo de programação linear trivial:

$$
\begin{aligned}
\text{min: } & \sum_{(i,j)\in V} c_{ij} x_{ij} \\
\forall_{i\in V},\ & \sum_{(i,j)\in A} x_{ij} - \sum_{(j,i)\in A} x_{ji} = b_i \\
\forall_{(i,j)\in A},\ & 0 \leq x_{ij} \leq u_{ij} \\
\forall_{(i,j)\in A},\ & x_{ij} \in \mathbb{Z}_0^+
\end{aligned}
\tag{4}
$$

Ao contrário do que foi feito no trabalho prático anterior, estes modelos não serão resolvidos com um *solver* de programação linear, mas são necessários para se apresentarem definições formais dos problemas que se têm em mão.

2.3 Construção do modelo

Para se utilizar o *solver* RELAX-IV [1] de modo a se encontrar a solução ótima do modelo, este precisa de ser adaptado para se ter um problema que possa ser dado diretamente ao *solver*, no caso, um problema de fluxo de custo mínimo numa rede com capacidades em arcos. Para esta conversão, a rede original (figura 1) terá de sofrer alterações, dando origem a uma outra rede que será providenciada ao RELAX-IV. Este apresentará uma solução que terá depois de ser interpretada na rede original.

O primeiro passo na transformação é a geração de um grafo orientado, onde cada arco $\{i, j\}$ no grafo original dá origem aos dois arcos orientados (i, j) e (j, i). O resultado desta primeira transformação pode ser visto na figura abaixo.

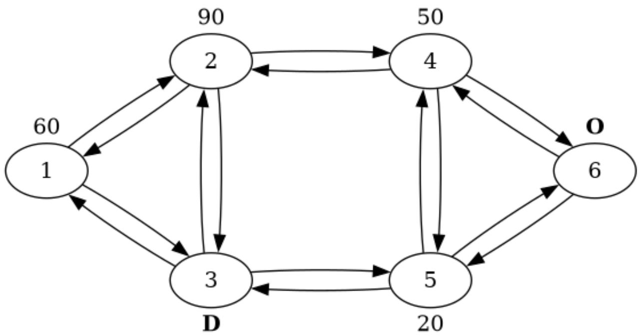

Figura 3: Rede após a aplicação do primeiro passo da transformação.

De seguida, as capacidade dos vértices no modelo original foram convertidas em capacidades de arcos. Cada vértice n com uma capacidade não infinita (todos exceto a origem e o destino) foi transformado em dois vértices, n_e e n_s, ligados pelo arco (n_e, n_s), de capacidade igual à do vértice original. Todos os arcos da rede anterior com destino em n passam a ter destino em n_e, enquanto que os arcos com origem em n passam a ter origem em n_s. Assim, todo o fluxo a passar pelo vértice original passa agora pelo arco de capacidade finita (n_e, n_s), simulando a capacidade do vértice original. Todos os arcos da rede original têm capacidade infinita, pelo que os restantes arcos da nova rede também o terão. Segue-se a rede resultante deste segundo passo da transformação.

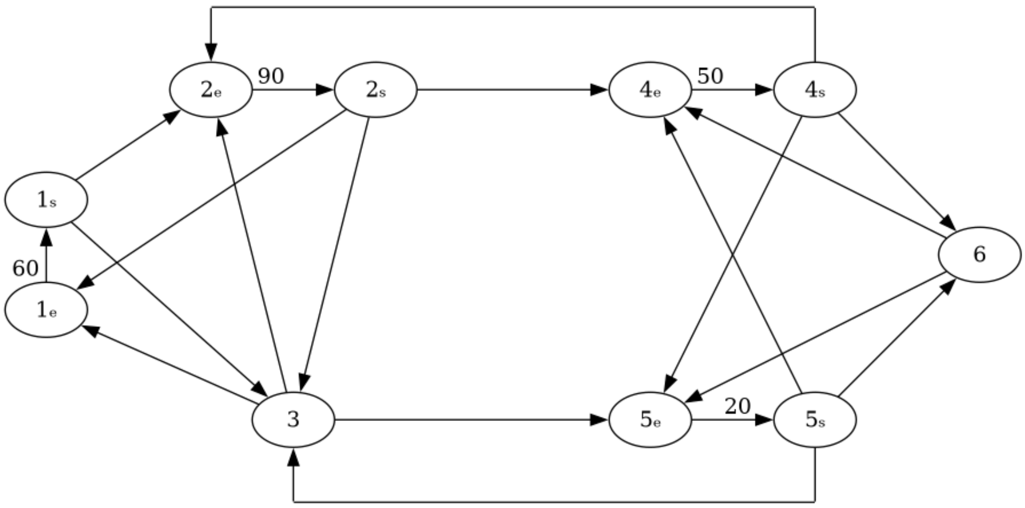

Figura 4: Rede após a aplicação do segundo passo da transformação. Arcos sem capacidade definida têm, por omissão, capacidade infinita.

O passo seguinte trata-se da transformação do problema de fluxo máximo num de minimização de custo. Para tal, considera-se que todos os arcos na rede anterior têm custo unitário 0. Como o *solver* procura minimizar o custo e o nosso objetivo é maximizar o fluxo, adiciona-se um arco entre o destino e a origem, no caso $(3, 6)$, com custo -1 [2]. Para tentar minimizar o custo, o *solver* procurará maximizar o fluxo neste arco, que pode aumentar até não ser possível aumentar o fluxo entre 6 e 3 através da restante rede, calculando-se assim o fluxo máximo. O balanço em cada vértice é 0, dado que se pretende formar um grafo cíclico onde nenhum fluxo entra ou sai da rede. Mesmo assim, é possível a existência de fluxo na rede: o fluxo gerado na origem voltará a este vértice pelo arco $(6, 3)$, pelo que o balanço na origem será nulo mesmo que haja fluxo na restante rede. Segue-se o resultado deste passo da transformação.

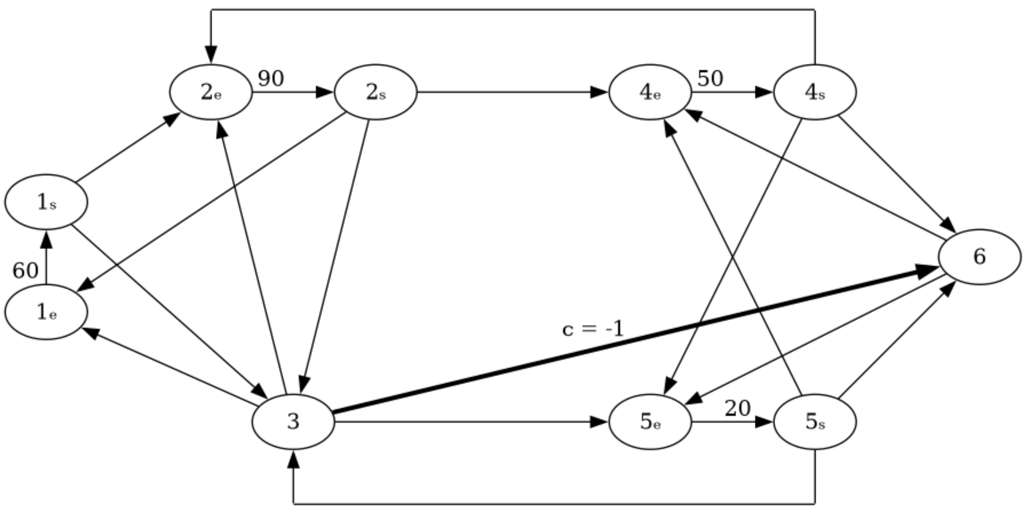

Figura 5: Rede após a aplicação do terceiro passo da transformação. Arcos sem custo definido (todos exceto o destacado) têm, por omissão, custo nulo.

Uma forma alternativa de transformar o problema seria utilizar um vértice com uma oferta muito elevada, com um arco para o vértice de entrada da rede, 6. Outro arco teria origem no vértice de saída 3 para outro nó adicionado, com consumo igual à procura do vértice previamente adicionado. Por último, outro arco seria adicionado entre o primeiro e o segundo dos dois novos vértices. Todos os arcos adicionados têm capacidade infinita, e com exceção do arco entre os dois vértices adicionados, de custo 1, os arcos têm custo nulo. Deste modo, o *solver* tentará enviar o máximo de fluxo pela rede entre os vértices desejados utilizando apenas o arco de custo superior após o fluxo máximo na rede original ser atingido.

O último passo da transformação é uma simples adaptação dos nomes dos vértices e das capacidades dos arcos para que estes sejam suportados pelo *solver* RELAX-IV. Em primeiro lugar, todos os nomes de vértices devem ser convertidos para números naturais, dado que o RELAX-IV não suporta vértices com nomes textuais. De seguida, as capacidades infinitas devem ser convertidas para um valor inteiro muito grande, consideravelmente superior às restantes capacidades. No caso, utilizámos o valor 1000 para a representação de capacidades infinitas. Segue-se a rede que foi depois convertida para um ficheiro de entrada do RELAX-IV, onde cada arco é caracterizado pelo par $(c_{ij}, u_{i,j})$, ou seja, (custo, capacidade).

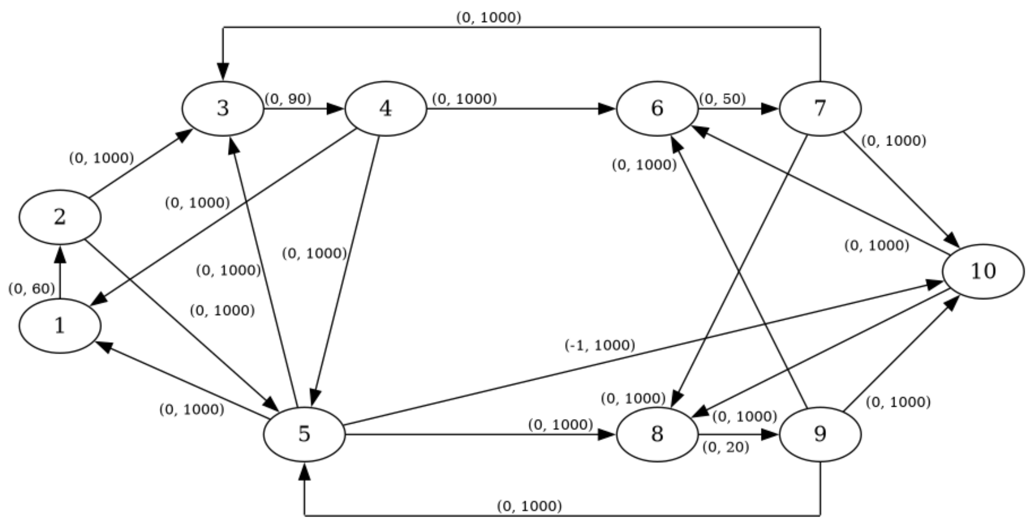

Figura 6: Rede após a transformação do problema.

3 Ficheiro de entrada do RELAX-IV

O ficheiro de entrada do RELAX-IV foi gerado a partir da rede transformada. A primeira linha contém o número de vértices, a segunda o número de arcos, segue-se uma linha para cada arco (com o vértice de origem, o destino, o custo unitário e a capacidade) e uma linha para cada vértice com a sua oferta / consumo.

```
10
21
 1   2   0    60
 2   3   0  1000
 2   5   0  1000
 3   4   0    90
 4   1   0  1000
 4   5   0  1000
 4   6   0  1000
 5   1   0  1000
 5   3   0  1000
 5   8   0  1000
 5  10  -1  1000
 6   7   0    50
 7   3   0  1000
 7   8   0  1000
 7  10   0  1000
 8   9   0    20
 9   5   0  1000
 9   6   0  1000
 9  10   0  1000
10   6   0  1000
10   8   0  1000
0
0
0
0
0
0
0
0
0
0
```

4 Ficheiro de saída do RELAX-IV

Foram removidos os comentários do ficheiro de saída que segue.

```
s -70.
f 1 2 0
f 2 3 0
f 2 5 0
f 3 4 50
f 4 1 0
f 4 5 50
```

```
f 4 6 0
f 5 1 0
f 5 3 0
f 5 8 0
f 5 10 70
f 6 7 50
f 7 3 50
f 7 8 0
f 7 10 0
f 8 9 20
f 9 5 20
f 9 6 0
f 9 10 0
f 10 6 50
f 10 8 20
```

5 Interpretação da solução

A solução dada pelo RELAX-IV na secção anterior contem informação sobre o fluxo máximo e sobre o fluxo em cada arco. Da primeira linha do *output*, `s -70`, pode concluir-se que o fluxo máximo entre os vértices 6 e 3 é de 70 unidades. O valor -70 corresponde ao custo do transporte do fluxo por todos os arcos. No entanto, como todos os arcos têm custo nulo com exceção do arco $(3, 6)$, de custo -1, este é o único que contribui para o valor da função objetivo. Como explicado anteriormente, todo o fluxo que passa pelo resto da rede passa também por este arco, pelo que o fluxo máximo entre 6 e 3 é 70, o quociente entre -70 e o custo do arco $(3, 6)$, -1.

De seguida, apesar da solução do RELAX-IV conter o valor do fluxo em cada arco, estes arcos são os da rede transformada e não os da rede original. Para se obterem valores relativos à rede original, será necessário desfazer, passo a passo, a transformação feita anteriormente, tendo em conta o fluxo em cada arco. Em primeiro lugar, apresenta-se a rede descrita pela solução do RELAX-IV, onde a cada arco está associado o seu fluxo. Por exemplo, a linha `f 3 4 50` indica um fluxo de 50 unidades no arco orientado $(3, 4)$. Note-se que arcos sem fluxo (fluxo nulo) não são apresentados na figura abaixo, e que alguns vértices foram reposicionados para evitar que os arcos representados se cruzassem.

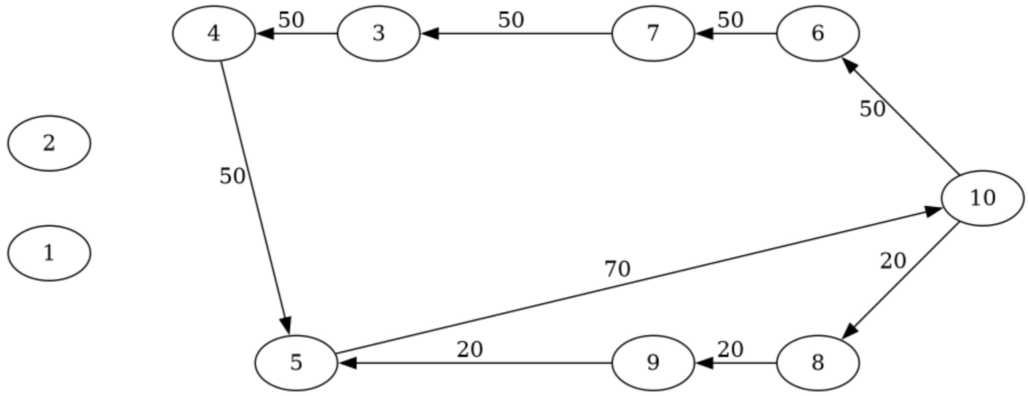

Figura 7: Rede descrita pelo *output* do RELAX-IV.

O primeiro passo da transformação inversa é a substituição dos números atribuídos aos vértices pelos seus nomes anteriores, cujo resultado pode ser visto na figura abaixo.

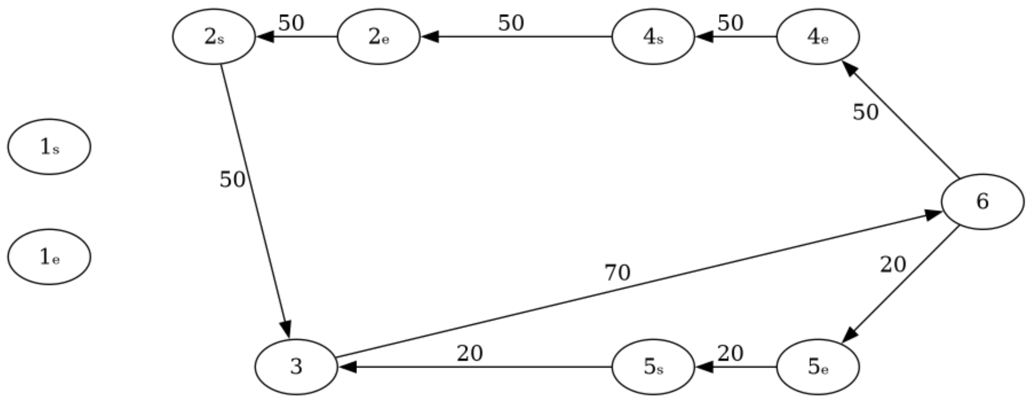

Figura 8: Rede após o primeiro passo da transformação inversa.

De seguida, remove-se o arco $(3, 6)$, inserido entre os vértices de destino e origem para auxiliar a resolução do problema. Fazendo isto, o balanço dos vértices 3 e 6 logicamente muda, dando origem à seguinte rede:

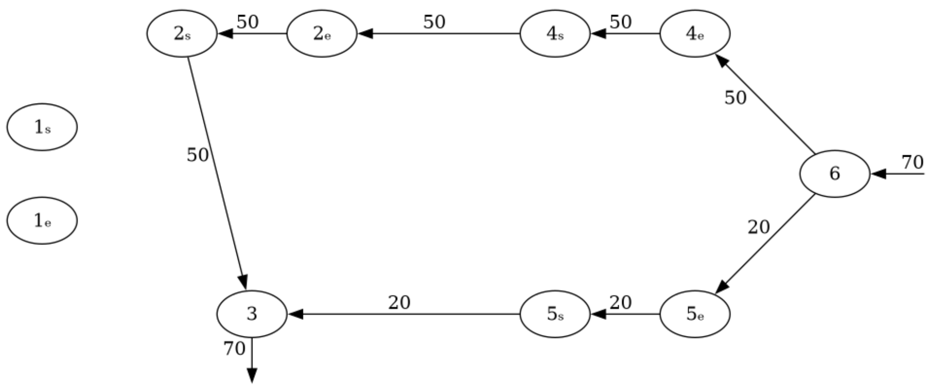

Figura 9: Rede após o segundo passo da transformação inversa.

O passo seguinte consiste em reverter a transformação da emulação da capacidade de vértices utilizando arcos: cada par de vértices n_e e n_s é transformado no vértice único n. Na imagem abaixo, o resultado deste passo da transformação inversa, incluiu-se já o fluxo em cada vértice (o fluxo no arco entre n_e e n_s) comparado com a capacidade de n, algo que será útil para a validação do modelo.

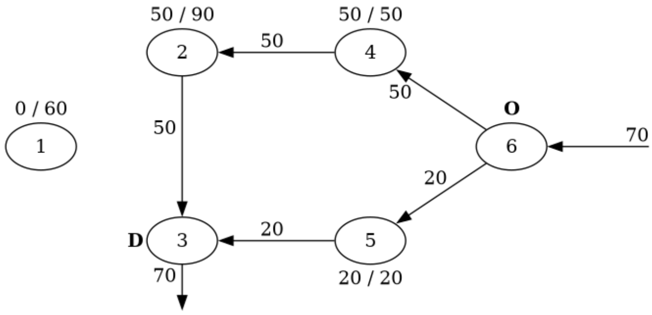

Figura 10: Rede após o terceiro passo da transformação inversa.

No sentido direto de transformação, os arcos não orientados dão origem a arcos orientados. No entanto, neste sentido inverso, não é necessário desfazer esse passo da transformação, dado que o fluxo entre dois vértices ocorre obrigatoriamente num dado sentido. A figura anterior refere-se então à solução do problema na rede original: o fluxo máximo entre os vértices 6 e 3 é de 70 unidades, sendo que o fluxo é de 50 unidades nos arcos $(6, 4)$, $(4, 2)$ e $(2, 3)$, e de 20 unidades em $(6, 5)$ e $(5, 3)$. Não há fluxo no vértice 1.

Pode agora interpretar-se esta solução no exemplo dado na figura 2. Entre Coimbra e Porto, podem transferir-se no máximo 70 unidades de volume de água. 20 destas unidades seguem o caminho Coimbra – Aveiro – Porto, enquanto que as 50 restantes seguem o percurso Coimbra – Viseu – Vila Real – Porto, como pode ser visto na figura 11 abaixo.

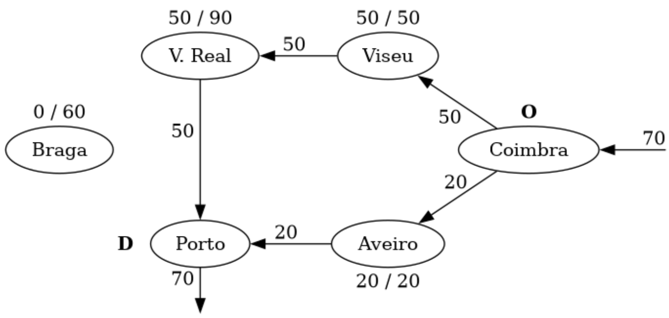

Figura 11: Solução ótima vista na rede de exemplo.

6 Validação do modelo

Após o cálculo da solução ótima, procedemos à validação do modelo. O primeiro passo consiste em verificar se a interpretação real da solução obtida faz sentido, e não viola nenhuma condição que deva ser cumprida mas que possa não ter sido bem representada na construção do ficheiro de entrada do RELAX-IV. Verifica-se que:

- O fluxo num dado vértice nunca é superior à sua capacidade, o fluxo máximo que este comporta. Os vértices 4 e 5 estão no limite da sua capacidade (50 e 20 unidades, respetivamente), enquanto que pelo vértice 2 apenas passam 50 das 90 unidades de fluxo para que tem capacidade;
- Em nenhum nodo que não a origem e o destino se verifica um balanço não nulo, i.e., nunca se "ganha" ou "perde" fluxo (ver equação 2). Por exemplo, no vértice 2 entram 50 unidades pelo arco $(4, 2)$, que saem pela aresta $(2, 3)$, conduzindo ao balanço nulo desejado;
- Todo o fluxo que entra na rede em 6 (70 unidades) sai em 3 (consequência do ponto anterior).

No exemplo dado, isto traduz-se na não ultrapassem das capacidades das redes hídricas internas das cidades e na ausência de ganhos e perdas de água quando o fluxo entre Coimbra e Porto passa por qualquer cidade, concluindo-se que a solução ótima encontrada faz sentido no contexto real proposto.

Verifica-se também, sem grande dificuldade, que o valor da função objetivo 70 é ótimo. Todo o fluxo em 6, de modo a chegar ao vértice 3, deve passar primeiro por um dos seguintes vértices: 4, de capacidade 50, ou 5, de capacidade 20. A soma das capacidades destes dois vértices é 70, pelo que é impossível que saiam mais do que 70 unidades de fluxo de 6, mostrando que a solução descoberta é ótima. Caso esta demonstração não fosse trivial, a maximização do fluxo poderia ser feita com recurso a um modelo de programação linear (equação 3), algo que não seria problemático em termos de desempenho devido às pequenas dimensões da rede. Se o valor da função objetivo na solução ótima determinada através deste método fosse diferente, algum erro tinha sido cometido na adaptação do problema para o *solver* RELAX-IV.

Valida-se, assim, a correção do modelo.

7 Bibliografia

[1] D. P. Bertsekas and P. Tseng, "RELAX-IV : a faster version of the RELAX code for solving minimum cost flow problems," Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, MA, USA, 1994. Accessed: Apr. 14, 2024. Available: `https://dspace.mit.edu/handle/1721.1/3392`

[2] R. K. Ahuja, T. L. Magnanti, J. B. Orlin, "Introduction," in *Network Flows: Theory, Algorithms, and Applications*, 1st ed. Upper Saddle River, NJ, USA: Prentice-Hall, Inc., 1993, ch. 1, sec. 2, pp. 4–9.