

# Глава 1

## Теорија спрегнутих модова

### 1.1 Апстракт

У овом поглављу биће изложене основе теорије спрегнутих модова, која представља веома погодан алат за анализу расејања у системима спрегнутих резонатора. Затим ће метода бити примењена на јединичне ћелије микроталасних метаматеријала. Апроксимативни аналитички облици параметара расејања. Поређење са еквивалентним шемама. Антисиметрични модели.

### 1.2 Увод

#### 1.2.1 Мотивација

У претходној глави приказано је моделовање јединичних ћелија микроталасних метаматеријала помоћу еквивалентних шема. Овакав начин анализе се преовлађујуће користи у литератури, и примењив је на широк спектар различитих структура и повезаних ефеката [1, 2, 3, 4]. Упркос томе, апроксимација помоћу еквивалентне шеме инхерентно поседује неке особине, које се могу показати као нежељене. На пример, структура по којој се простире вођени талас (вод или таласовод) моделује се као једна или више секција елемената са концентрисаним параметрима (калема и кондензатора), што у суштини представља нископропусни филтар. Ово може узроковати нефизичке резонансе. Конкретно, често је

пожељно имати (апроксимативне) изразе за параметре расејања – рефлексију и трансмисију. У овом раду то је мотивисано жељом за проучавањем ефекта класичне аналогije електромагнетно индуковане транспаренције (ЕИТ). У принципу, параметре расејања је увек могуће израчунати полазећи од еквивалентне шеме, међутим показује се да то није најпогоднији приступ. Разлог за то је што еквивалентна шема, у суштини, представља графички начин за репрезентацију система диференцијалних једначина за струје и напоне. За расејање се, насупрот томе, користе таласни параметри, који се могу интерпретирати као други базис за опис поља на воду.<sup>1</sup> Природније је проблем разматрати у овом базису, што нам управо омогућава теорија спрегнутих модова (ТСМ).

### 1.2.2 Историјат

Прва појављивања теорије спрегнутих модова у литератури потичу из 1950-их година, управо у области микроталасне технике. Била је примењена за анализу цеви са путујућим таласом [5], *backward-wave* осцилатора [6], као и параметарских појачавача, осцилатора и конвертора фреквенције [7]. Паралелно су се јавиле примене у таласоводима [8, 9], где су касније укључене и периодичне структуре [10].

Ови први радови нису били строго формално засновани, већ су модови идентификовани на основу искуства, а њихова динамика је извођена из енергетских разматрања. Ригорозно извођење ТСМ дао је Шелкунов, помоћу развоја поља преко модова неспрегнутог система [11]. Једначине ТСМ су еквивалентне Максвеловим једначинама уколико модови чине комплетан скуп. У пракси, обично се користи мањи број модова; у том случају једначине ТСМ могу се извести из варијационог принципа, при чему стационарност обезбеђује могућност добре апроксимације [12].

Током седамдесетих година, ТСМ је развијена за оптичке таласоводе [13, 14, 15]. Успешно је примењивана за анализу многих оптоелектронских и фибер оптичких уређаја, као што су различити таласоводи и оптичка влакна [16, 17],

---

<sup>1</sup>Због краткоће, у овој глави ћемо надаље говорити само о водовима, имајући у виду било коју структуру за вођење електромагнетног таласа.

спрежници [18], ласери [19], итд.

У класичној ТСМ претпоставка је да су модови међусобно ортогонални, што је испуњено уколико се разматра јединствена структура без губитака. Уколико се за експанзију користе модови различитих референтних структура, ортогоналност не мора нужно да важи. У том случају класична формулација ТСМ није коректна, због чега је у новије време развијана неортогонална ТСМ [20, 21].

Независна променљива у ТСМ може бити или просторна координата или време; у зависности од тога говоримо о спрезању модова у простору или времену [22]. Просторна варијанта ТСМ коришћена је за анализу периодичних структура, нпр. микрострип водова са периодичним пертурбацијама у проводној равни, који припадају класи тзв. структура са фотонским зонским процепом (*photonic band-gap*, *PBG*) [23]. Временска (темпорална) ТСМ није примењивана за проучавање структура на бази метаматеријала у микроталасном опсегу...

### 1.2.3 Хеуристички приступ

У овој секцији биће изложене основе теорије спрегнутих модова, следећи [22]. Овај приступ није строго формалан, и донекле се заснива на интуитивним аргументима. Међусобни утицаји различитих модова ће се узимати преко линеарних чланова; математички, ово је апроксимација која је оправдана ако је спрега слаба. Касније... Претпостављаће се да су сви системи без губитака; уколико је потребно, губици се могу узети у обзир као додатна пертурбација [22].

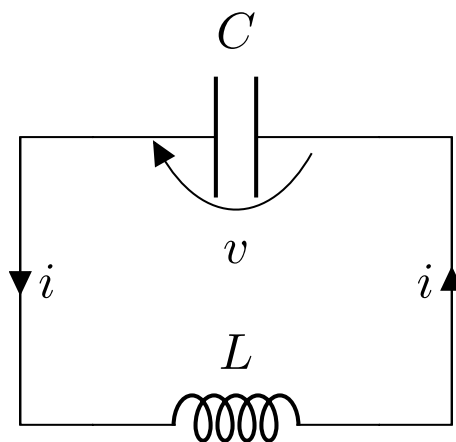


Рис. 1.1: Резонантно коло.

Прво ће бити размотрено  $LC$  коло као пример изолованог резонатора (сл. 1.1). Напон и струја задовољавају диференцијалне једначине:

$$v = L \frac{di}{dt}; \quad i = -C \frac{dv}{dt}. \quad (1.1)$$

Сменом се лако може добити једначина линеарног хармонијског осцилатора, са резонантном фреквенцијом  $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ . Амплитуда позитивне фреквенције дефинише се као:

$$\alpha = \sqrt{\frac{C}{2}} \left( v + j \sqrt{\frac{L}{C}} i \right), \quad (1.2)$$

која задовољава диференцијалну једначину првог реда

$$\frac{d\alpha}{dt} = j\omega_0 \alpha. \quad (1.3)$$

Нормализација у 1.2 је погодно одабрана тако да квадрат амплитуде  $\alpha$  одговара снази:

$$|\alpha|^2 = \frac{C}{2} |V|^2 = W, \quad (1.4)$$

док фаза одговара тренутној фази осцилација. За комплетан опис, потребно би било увести и променљиву, комплексно-конјуговану у односу на (1.2), али показује се да је њу могуће занемарити. На овај начин је опис резонатора поједностављен.

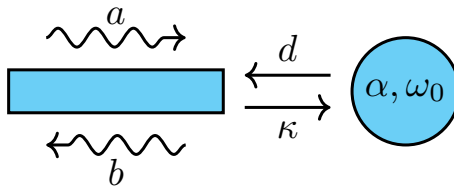


Рис. 1.2: Спрега резонантног мода и вода.

Наравно, случај усамљеног резонатора није посебно занимљив; права вредност овог приступа се показује приликом разматрања спреге са водом. На сл. приказан је најједноставнији случај. У овом случају, јављају се два ефекта:

- енергија резонатора „дури“ у таласе на воду, што резонантни мод види као ефективне губитке;

- инцидентни таласи врше побуду резонантног мода.

Најједноставнији пример шематски је приказан на сл. 1.2, где је вод на свом крају спрегнут са резонантним модом. Поље на воду описано је таласним коефицијентима инцидентног,  $a$ , и рефлектованог таласа,  $b$ , према уобичајеној дефиницији за  $S$ -параметре. Математички, једначина (1.3) ће бити модификована на следећи начин

$$\frac{d\alpha}{dt} = j\omega_0\alpha - \gamma\alpha + \kappa a, \quad (1.5)$$

где  $\gamma$  представља коефицијент слабљења, а  $\kappa$  коефицијент спреге инцидентног таласа и резонантног мода. За побуду константне фреквенције  $\omega$ , решење (1.5) гласи:

$$\alpha = \frac{\kappa a}{j(\omega - \omega_0) + \gamma}. \quad (1.6)$$

С друге стране, рефлектовани талас на воду износиће

$$b = S_{11}^{(0)}a + d\alpha, \quad (1.7)$$

где је  $S_{11}^{(0)}$  коефицијент рефлексије у одсуству резонатора, а  $d$  коефицијент спреге са рефлектованим таласом. Полазећи од закона одржања енергије, и симетрије Максвелових једначина у односу на измену знака времена, показује се да важи

$$\kappa = d, \quad \gamma = \frac{1}{2}|d|^2. \quad (1.8)$$

Комбиновањем (1.6) и (1.7) лако се добија израз за модификовани коефицијент рефлексије услед присуства резонатора:

$$S_{11} = \frac{b}{a} = S_{11}^{(0)} + \frac{d}{j(\omega - \omega_0) + |d|^2/2}. \quad (1.9)$$

У случају два међусобно спрегнута резонатора, динамика система има следећи облик:

$$\frac{d\alpha_1}{dt} = j\omega_1\alpha_1 + \kappa_{12}\alpha_2, \quad (1.10)$$

$$\frac{d\alpha_2}{dt} = j\omega_2\alpha_2 + \kappa_{21}\alpha_1, \quad (1.11)$$

при чему због одржања енергије важи  $\kappa_{12} = \kappa_{21}$ .

Изразе (1.3)–(1.11) могуће је генералисати на случај  $n$  (потенцијално спрегнутих) резонатора и  $m$  улазно/излазних таласних портова

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} = (j\mathbf{\Omega} - \mathbf{\Gamma}) \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} + \mathbf{D}^T \begin{bmatrix} a_1 \\ \dots \\ a_m \end{bmatrix} \quad (1.12)$$

за резонаторе, и

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} = \mathbf{S}^{(0)} \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix} + \mathbf{D} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}; \quad (1.13)$$

за рефлектоване таласе, где су

$$\mathbf{\Omega} = \begin{bmatrix} \omega_1 & \cdots & \kappa_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \kappa_{1n}^* & \cdots & \omega_n \end{bmatrix}; \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} d_{11} & \cdots & d_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{n1} & \cdots & d_{nm} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{\Gamma} = \frac{1}{2} \mathbf{D}^\dagger \mathbf{D}; \quad (1.14)$$

а  $\mathbf{S}^{(0)}$  представља „директну“ матрицу расејања, која карактерише систем у одсуству резонатора. Додатно, може се показати да важи следећа релација

$$\mathbf{S}^{(0)} \mathbf{D}^* = -\mathbf{D}, \quad (1.15)$$

помоћу које је могуће одредити фазе елемената матрице  $\mathbf{D}$  [21].

## 1.3 Примена? Резултати?

### 1.3.1 Антисиметрични сплит рингови

Микрострип водови, оптерећени са СРР резонаторима са варијабилним положајем процепа, приказани су на сл. 1.3-1.4. У општем случају, постојаће спрега између два СРР-а, на основу чега се очекују две резонансе у спектру, услед цепања(?). Геометрије на сл. 1.3 поседују рефлексионую симетрију у односу на раван, нормалну на супстрат, која садржи централну осу вода. Због ове симетрије, један мод не може бити побуђен, због чега ће бити присутна само једна резонанса у трансмисији [4]. С друге стране, геометрије на сл. 1.4, које ћемо

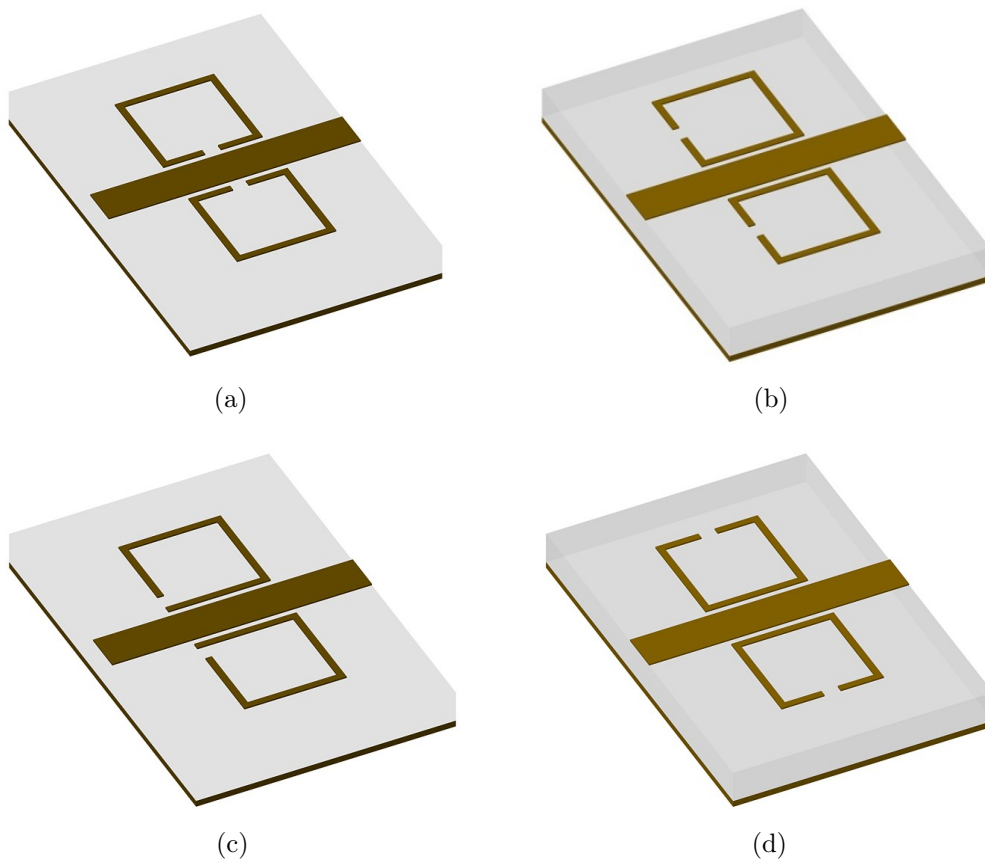


Рис. 1.3: Микрострип вод спрегнут са два СРР-а у симетричној конфигурацији.

називати *антисиметричним*, не поседују раван симетрије; уместо тога, симетричне су у односу на ротацију од  $180^\circ$  око централне тачке. У наставку ће ТСМ и анализа помоћу еквивалентне шеме бити примењена на структуре са сл. 1.4.

Оно што антисиметричне структуре чини занимљивим јесте да испољавају мешовиту (електричну и магнетну) спрегу СРР-ова са водом, као и незанемарљиву спрегу између самих прстенова, а притом су електрично симетричне, због чега је могуће поједностављено их анализирати преко парне и непарне побуде. За разлику од структура са раванском симетријом, поседују две резонансе у трансмисионом спектру, које се могу независно подешавати. Са практичне тачке гледишта, ове структуре могу послужити као основа занимљивих ефеката, као што је класична аналогија ЕИТ-а [24, 25, 26].

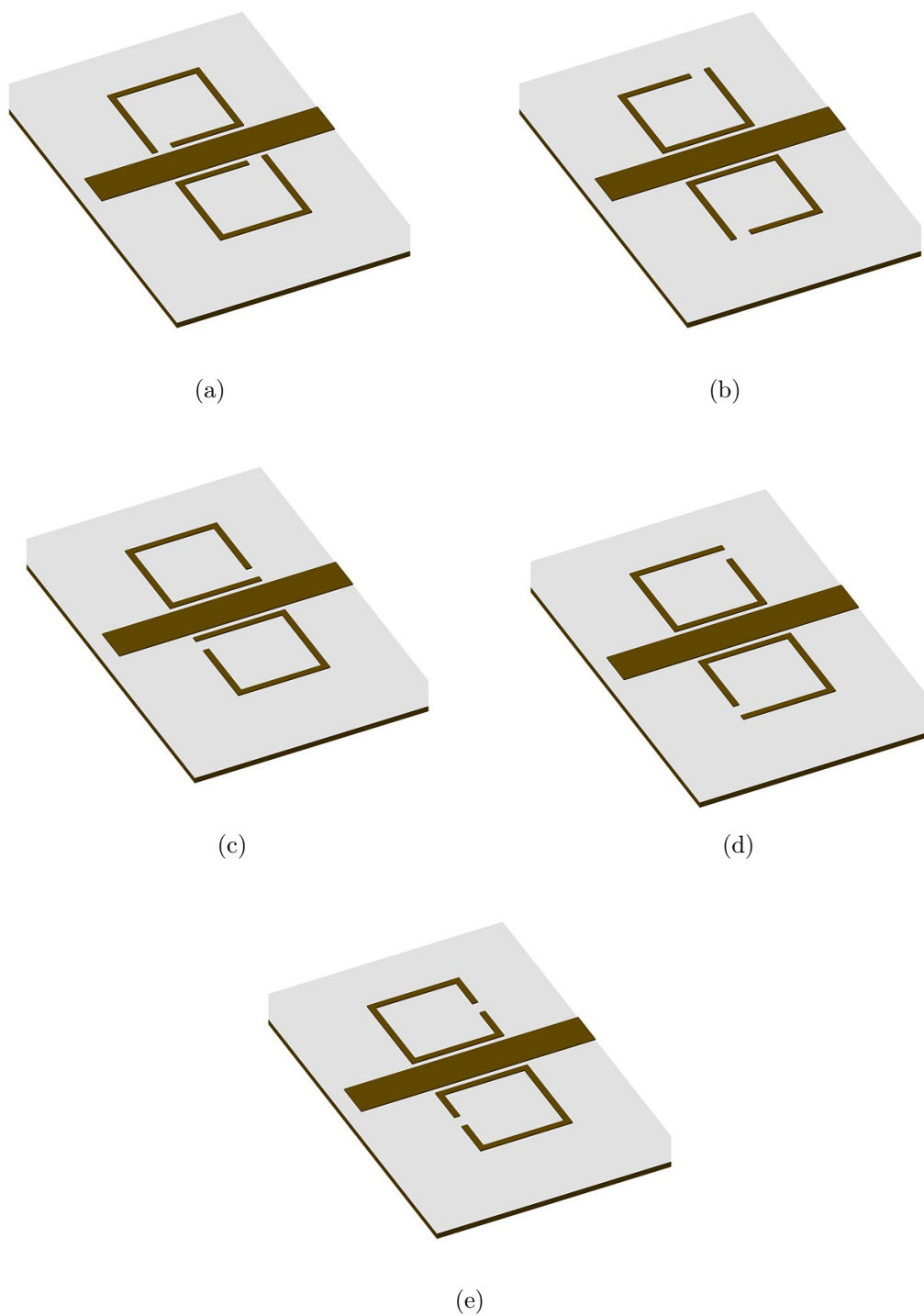


Рис. 1.4: Микрострип вод спрегнут са два СРР-а у антисиметричној конфигурацији.

### 1.3.2 Анализа помоћу TCM

Шематски приказ геометрија са сл. 1.3–1.4, у контексту TCM, дат је на сл. 1.5. Систем се састоји од два резонатора и поседује два улазно/излазна порта, због



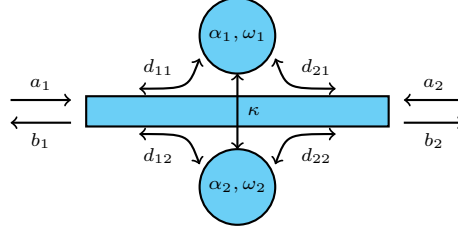


Рис. 1.5: Вод бочно спрегнут са два резонатора.

чега димензије матрица  $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{S}$  и  $\mathbf{\Omega}$ , дефинисаних у (1.14), износе  $2 \times 2$ . Узимајући у обзир ротациону симетрију система, може се закључити да ове матрице имају следећи облик:

$$\mathbf{S}^{(0)} = \begin{bmatrix} S_{11}^{(0)} & S_{21}^{(0)} \\ S_{21}^{(0)} & S_{11}^{(0)} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} d_1 & d_2 \\ d_2 & d_1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{\Omega} = \begin{bmatrix} \omega_0 & -\kappa \\ -\kappa & \omega_0 \end{bmatrix}, \quad (1.16)$$

при чему  $\kappa \in \mathbb{R}$  у овом случају. У устаљеном режиму побуде, после замене (1.12) и (1.16) у (1.13), лако се добија решење за укупну трансмисију кроз систем:

$$S_{21} = S_{21}^{(0)} + \frac{(d_1 + d_2)^2}{2j(\omega - \omega_0 - \kappa) + |d_1 + d_2|^2} - \frac{(d_1 - d_2)^2}{2j(\omega - \omega_0 + \kappa) + |d_1 - d_2|^2}, \quad (1.17)$$

и за рефлексију:

$$S_{11} = S_{11}^{(0)} + \frac{(d_1 + d_2)^2}{2j(\omega - \omega_0 - \kappa) + |d_1 + d_2|^2} + \frac{(d_1 - d_2)^2}{2j(\omega - \omega_0 + \kappa) + |d_1 - d_2|^2}. \quad (1.18)$$

У изразима (1.17)-(1.18), први разломак одговара парном (симетричном) а други немарном (антисиметричном) моду спрегнутих резонатора. Резонантне учестаности ових модова су  $\omega_{\pm} = \omega_0 \pm \kappa$  и  $Q$ -фактори:

$$Q_{\pm} = \omega_{\pm} / \gamma_{\pm}, \quad \gamma_{\pm} = |d_1 \pm d_2|^2 \quad (1.19)$$

где знак (+) одговара парном, а (-) непарном моду.

### 1.3.3 Анализа помоћу еквивалентне шеме

Еквивалентна шема за антисиметричну геометрију (сл. 1.4) приказана је на сл. 1.6. Укључује електричну и магнетну спрегу СРР-ова са водом, као и међу-

Таблица 1.1: Одзиви у еквивалентном колу за парну и непарну побуду.

парна	непарна
$V_1 = V_2$	$V_1 = -V_2$
$I_{S1} = I_{S2}$	$I_{S1} = -I_{S2}$
$V_{S1} = V_{S2}$	$V_{S1} = -V_{S2}$
$I_L = 0$	$I_L$ произвољно

собну спрегу СРР-ова. Због једноставности, за анализу у овој секцији биће коришћена шема са једном П-ћелијом; приликом поређења резултата биће укључена и шема са две ћелије.

Шема са сл. 1.6 је електрично симетрична, због чега је погодно анализирати је преко парне/непарне побуде [27]. Међутим, она не поседује рефлексиону симетрију, због чега није могуће одредити парне и непарне адмитансе на стандардни начин, постављањем електричног и магнетног зида у равни симетрије. Уместо тога, биће показано како се ротациона симетрија кола може искористити да се добију тражене адмитансе.

На почетку приметимо да сви одзиви у колу представљају билинеарне функције улазних параметара, нпр.

$$I_{S1} = \mathcal{L}_{I_{S1}}(V_1, V_2) = -\mathcal{L}_{I_{S1}}(-V_1, -V_2). \quad (1.20)$$

Услед антисиметрије, следећа релација мора важити (за референтне смерове са сл. 1.6):

$$I_{S2} = \mathcal{L}_{I_{S2}}(V_1, V_2) = \mathcal{L}_{I_{S1}}(V_2, V_1). \quad (1.21)$$

Коришћењем (1.20) и (1.21), могуће је одредити релације за одзиве у колу, при парној и непарној побуди, и оне су сумиране у табели 1.1. На основу тога, могуће је одредити поједностављена кола за парну и непарну екситацију, која су приказана на сл. 1.7. На основу њих можемо израчунати парну и непарну

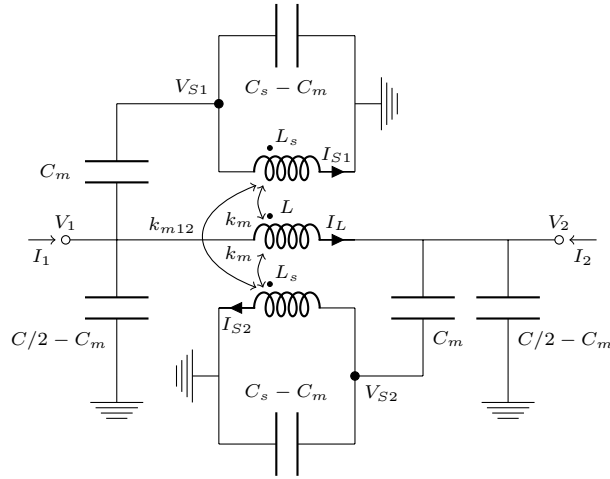
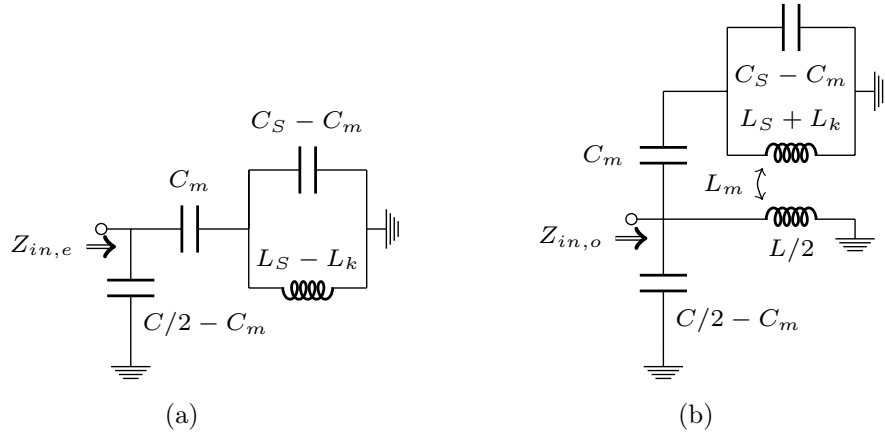


Рис. 1.6: Еквивалентна шема за структуре са сл. 1.4.


 Рис. 1.7: Еквивалентна шема за (а) парну и (б) непарну побуду ( $L_k = k_{m12}L_S$ ).

адмитансу,  $y_{e,o}$ , нормализовану на  $Y_0 = \sqrt{C/L}$

$$\begin{aligned}
 y_e &= y_e^\Pi + \frac{j}{2} \frac{\omega}{\omega_{LC}} \frac{2\gamma_e^2}{1 - \omega^2/\omega_e^2}, \\
 y_e^\Pi &= \frac{j}{2} \frac{\omega}{\omega_{LC}} (1 - 2k_e^2), \\
 y_o &= y_o^\Pi + \frac{j}{2} \frac{\omega}{\omega_{LC}} \frac{2\gamma_o^2}{1 - \omega^2/\omega_o^2}, \\
 y_o^\Pi &= \frac{j}{2} \frac{\omega}{\omega_{LC}} (1 - 2k_e^2) - 2j \frac{\omega_{LC}}{\omega};
 \end{aligned} \tag{1.22}$$

где је

$$\begin{aligned}
\gamma_e &= k_e, \\
\gamma_o &= 2\omega_{LC}\sqrt{L_S C_S k_m} - k_e, \\
\omega_e &= 1/\sqrt{L_S C_S(1 - k_{m12})}, \\
\omega_o &= 1/\sqrt{L_S C_S(1 + k_{m12} - 2k_m^2)}, \\
\omega_{LC} &= 1/\sqrt{LC}.
\end{aligned} \tag{1.23}$$

У (1.22) раздвојени су нерезонантни делови адмитанси преко чланова  $y_{e,o}^\Pi$ . Они представљају парну и непарну адмитансу само  $\Pi$ -ћелије на. 1.6, односно потичу само од вода.<sup>2</sup> Ова нотација ће олакшати поређење са резултатима ТСМ, као што ће се видети касније. Према [27], коефицијент трансмисије,  $S_{21}$ , износи:

$$\begin{aligned}
S_{21} &= \frac{1}{2}(S_{11,e} - S_{11,o}) \\
&= \frac{1}{2} \left( \frac{1 - y_e}{1 + y_e} - \frac{1 - y_o}{1 + y_o} \right).
\end{aligned} \tag{1.24}$$

Нерезонантни део трансмисије може се изразити преко чланова  $y_{e,o}^\Pi$  (1.22):

$$S_{21}^\Pi = \frac{1}{2} (S_{11e}^\Pi - S_{11o}^\Pi), \quad S_{11e,o}^\Pi = \frac{1 - y_{e,o}^\Pi}{1 + y_{e,o}^\Pi}, \tag{1.25}$$

Што је еквивалентно матрици „директног“ расејања  $\mathbf{S}^{(0)}$  из секције 1.3.2. Замењом (1.22), (1.23) и (1.25), после сређивања, добија се коначни израз за трансмисију:

$$S_{21} = S_{21}^\Pi - \frac{S_{11,e}^\Pi \gamma'_e}{j(\omega^2 - \varpi_e^2) + \gamma'_e} + \frac{S_{11,o}^\Pi \gamma'_o}{j(\omega^2 - \varpi_o^2) + \gamma'_o}, \tag{1.26}$$

где је

$$\gamma'_{e,o} = \text{Re} \left\{ \frac{1}{1 + y_{e,o}^\Pi} \right\} \frac{\omega}{\omega_{LC}} \omega_{e,o}^2 \gamma_{e,o}^2, \tag{1.27}$$

$$\varpi_{e,o} = \omega_{e,o} - \text{Im} \left\{ \frac{1}{1 + y_{e,o}^\Pi} \right\} \frac{\omega}{\omega_{LC}} \omega_{e,o}^2 \gamma_{e,o}^2. \tag{1.28}$$

Облик (1.26) је намерно изабран како би се нагласила аналогија са резултатом ТСМ (1.17). Важна разлика је да, уместо константних вредности за ТСМ, у (1.26) имамо функције учестаности, дефинисане са (1.27)-(1.28). Ипак, ове функције споро варирају у поређењу са резонантним члановима, због чега су

---

<sup>2</sup>Треба приметити да су  $y_{e,o}^\Pi$  пертурбовани у односу на изоловани вод, услед присуства СРР-ова, али овај ефекат је врло мали.

Таблица 1.2: Релације између константи за ТСМ и параметара кола.

ТСМ	Еквивалентна шема
$\omega_+$	$\omega_e - \text{Im} \left\{ \frac{1}{1+y_e^\Pi} \right\} \frac{\omega \omega_e^2}{\omega_{LC}(\omega+\omega_e)} \gamma_e^2$
$\omega_-$	$\omega_o - \text{Im} \left\{ \frac{1}{1+y_o^\Pi} \right\} \frac{\omega \omega_o^2}{\omega_{LC}(\omega+\omega_o)} \gamma_o^2$
$\gamma_+$	$\text{Re} \left\{ \frac{1}{1+y_e^\Pi} \right\} \frac{2\omega \omega_e^2}{\omega_{LC}(\omega+\omega_e)} \gamma_e^2$
$\gamma_-$	$\text{Re} \left\{ \frac{1}{1+y_o^\Pi} \right\} \frac{2\omega \omega_o^2}{\omega_{LC}(\omega+\omega_o)} \gamma_o^2$

оба израза приближно еквивалентна у околини резонанси. У табели 1.2 приказано су релације које повезују параметре кола са константама за ТСМ, које се могу одредити на овај начин фиксирањем  $\omega$  на жељеној фреквенцији.

Фреквенцијска зависност ефективних резонантних фреквенција модова  $\varpi_{e,o}$  и јачина спреге  $\gamma'_{e,o}$  у (1.26)–(1.28) може бити образложена на следећи начин. П-ћелија која у колу представља вод се такође понаша као резонатор, додуше са знатно вишом резонантном фреквенцијом од СРР-ова. Ипак, спрега са водом узрокује фреквенцијски зависну пертурбацију, евидентну у (1.27)–(1.28). Како би се добили аналитички изрази за параметре расејања, који су довољно једноставни да би били практично употребљиви, обично је неопходно занемарити овакве пертурбације. Међутим, ово није лак задатак полазећи од Кирхофових закона за еквивалентно коло, пошто је тешко унапред знати шта се може занемарити, а шта не. Насупрот томе, ТСМ даје изразе као што су (1.17) директно, зато што инхерентно раздваја трансмисиони медијум и резонаторе, осим спреге првог реда. Због тога, она представља природни алат за анализу расејања у

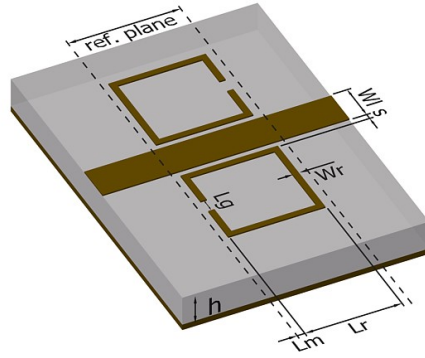


Рис. 1.8: Релевантне димензије:  $h = 1,27 \text{ mm}$ ,  $L_r = 3 \text{ mm}$ ,  $L_m = 0,25 \text{ mm}$ ,  $L_g = 0,5 \text{ mm}$ ,  $W_r = 0,2 \text{ mm}$ ,  $W_l = 1,2 \text{ mm}$  и  $s = 0,1 \text{ mm}$ .

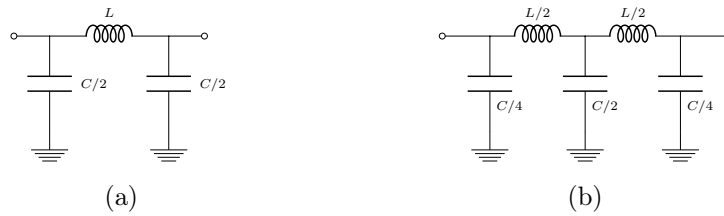


Рис. 1.9: Еквивалентна шема вода са: (а) једном, и (б) две П-ћелије.

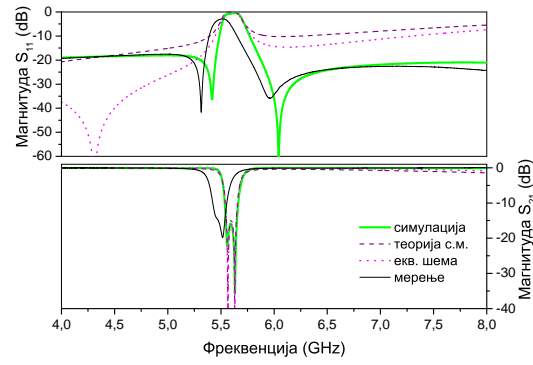
системима спрегнутих резонатора.

## 1.4 Резултати и поређење

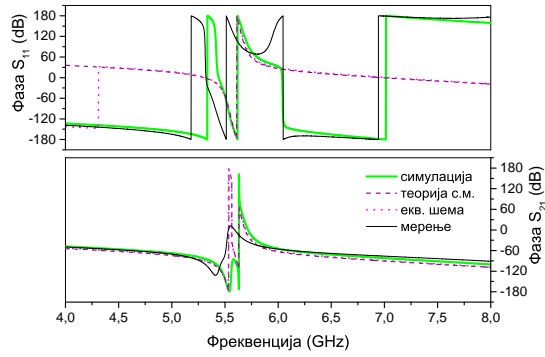
### 1.4.1 Валидација аналогије између два модела

Како би се тестирали предложени модели и упоредили њихови резултати, извршена је 3Д електромагнетна симулација структура са сл. 1.4, док су (а), (б), (с) и (е) такође фабриковани и измерени. Релевантне димензије дате су на сл. 1.8, а коришћени диелектрични супстрат је Rogers RO3010 са  $\epsilon_r = 10,2$ .

Најпре су одређени параметри еквивалентног кола. Како би се добили  $L$ ,  $C$  и  $L_S$ , микрострип вод и две најближе гране СРР-а су моделовани као секција вишепроводничког вода. Програм LINPAR [28] је коришћен за нумерички прорачун квази-статичких параметара. На овај начин се добијају подужне капацитивности и индуктивности, из којих се тражене вредности  $L$ ,  $C$  и  $L_S$  добијају



(a)



(b)

Рис. 1.10: Магнитуда и фаза  $S$ -параметара за модел са сл. 1.4а

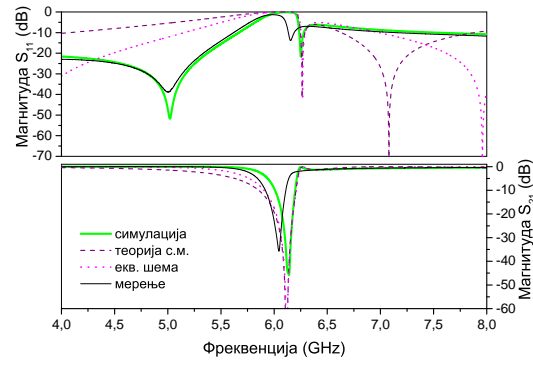
множењем са одговарајућим дужинама [4]. Преостали параметри се добијају фитовањем кривих на резултате симулација.

Нелдер–Мидова симплекс метода [29] је коришћена за фитовање, са функцијом грешке која интегрално апсолутну разлику ( $L^1$  норму) између симулираних података и параметризованог модела, у спектру од 4 GHz до 8 GHz:

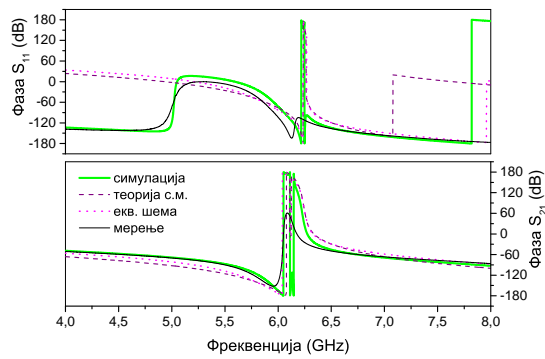
$$Err = \int_{f_{min}}^{f_{max}} \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 |S_{ij}^{model} - S_{ij}^{sim}| df. \quad (1.29)$$

У неким случајевима, тежинска функција је ручно повећавана у околини резонанси, како би више одговарала ускопојасној природи апроксимације. Иста процедура је коришћена у свим осталим случајевима фитовања у овој глави.

Константе за ТСМ добијене су коришћењем израза на десној страни табеле 1.2, који су израчунати на фреквенцији између резонанси. Преостаје да се одреди матрица директног расејања  $\mathbf{S}^{(0)}$ , што се може извести на више начина.



(a)



(b)

Рис. 1.11: Магнитуда и фаза  $S$ -параметара за модел са сл. 1.4b

На пример, могле би се користити константе које би се фитовале, или би се ова матрица могла добити на основу симулације секције изолованог вода. У овом случају,  $\mathbf{S}^{(0)}$  је прорачуната на основу електричне шеме кола које се састоји само од једне П-ћелије (сл. 1.9a), са истим вредностима  $L$  и  $C$  као у еквивалентном колу. Ово омогућава најприближније поређење два модела.

Резултати за две структуре са. 1.4 су приказани на сл. 1.10-1.11. Може се видети да се еквивалентна шема и ТСМ скоро у потпуности поклапају око резонанси, док постоје одступања у ширем опсегу, у складу са закључцима из секције 1.3.3. Надаље, оба метода показују добро поклапање са симулацијама у магнитуди и фази трансмисије ( $S_{21}$  параметар) у целом опсегу; с друге стране, у случају рефлексије ( $S_{11}$  параметар), добро поклапање постоји само у околини резонанси.



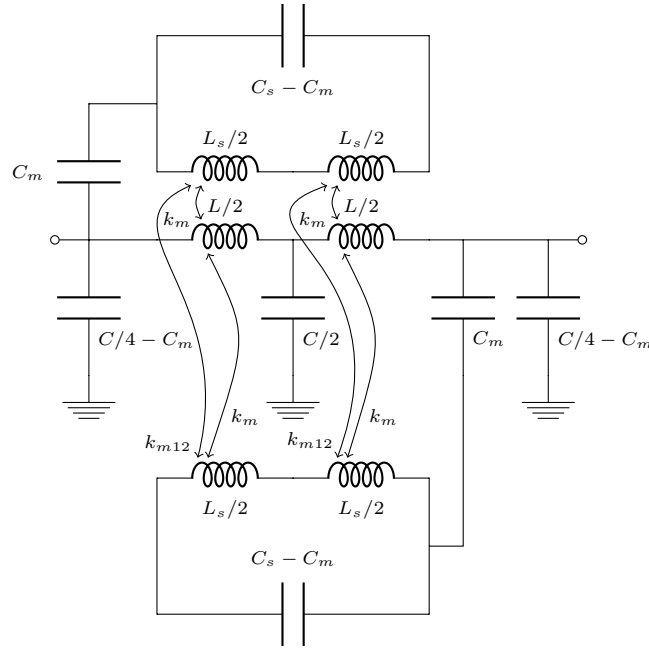
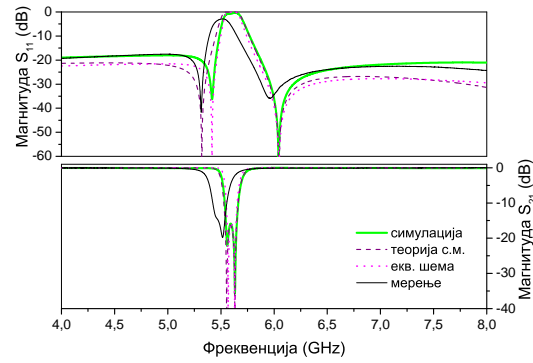


Рис. 1.12: Еквивалентна шема за антисиметричне структуре са две П-ћелије.

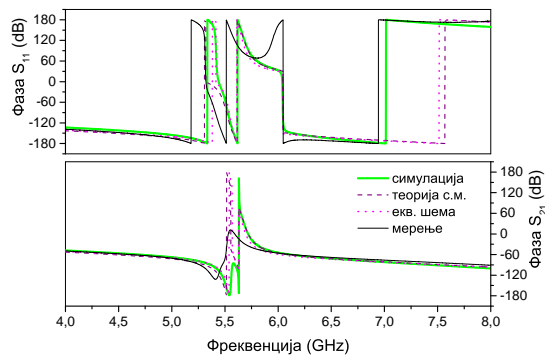
#### 1.4.2 Побољшани резултати

Како резултати из претходне секције нису били у потпуности задовољавајући, у наставку ће бити приказано како се може извршити њихово побољшање. Са тим циљем, користиће се еквивалентно коло са две П-ћелије (сл. 1.12), пошто је очекивано да оно даје добру апроксимацију у ширем опсегу у односу на сл. 1.6 [4]. Треба истаћи да оба кола имају подједнак број параметара, али топологија на сл. 1.12 боље одражава дистрибуирану природу вода. Параметри се одређују на исти начин као и раније ( $L$ ,  $C$  и  $L_s$  на основу секције вишепроводничког вода, а оснали фитовањем кривих).

У случају ТСМ, за оређивање нерезонантних параметара  $\mathbf{S}^{(0)}$  користиће се модел вода са две П-ћелије (сл. 1.9b), како би више одговарао побољшаном колу. Затим, како би се добило најбоље слагање, процедура фитовања кривих биће примењена на све параметре у ТСМ моделу ( $L$ ,  $C$  са сл. 1.9, и  $\omega_{\pm}$ ,  $\gamma_{\pm}$ ). Ово ће генерално резултовати различитим вредностима  $L$  и  $C$  за ТСМ и еквивалентну шему, што може изгледати чудно на први поглед; међутим, треба приметити да је нерезонантни део еквивалентног кола уствари пертурбован услед присуства



(a)

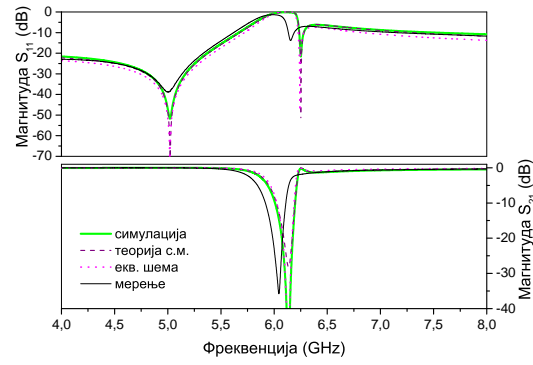


(b)

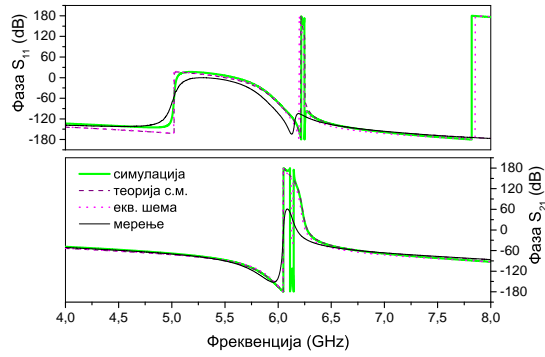
Рис. 1.13: Магнитуда и фаза  $S$ -параметара за модел са сл. 1.4а

резонатора, као што је констатовано у секцији 1.3.3. Очекивано је да ће овај ефекат бити израженији код побољшане шеме са две ћелије, пошто је спрега СРР-ова и вода више дистрибуирана. Због тога, независно подешавање  $L$  и  $C$  је неопходно како би се узео у обзир ефекат ове пертурбације у ТСМ моделу.

Нови резултати за све моделе са сл. 1.4 приказани су на сл. 1.13-1.17, а параметри, добијени описаном процедуром, сумирани су у табели 1.3. Овај пут, веома добро поклапање је добијено, не само за  $S_{21}$  већ такође и за  $S_{11}$ , у целом разматраном фреквенцијском опсегу. Свеукупно, ТСМ и еквивалентна шема дају подједнако добре резултате, једини изузетак је неслагање у првом минимуму  $S_{11}$  на сл. 1.13. Узимајући о обзир мерења на сл. 1.13, 1.14, 1.15 и 1.17, може се видети да су резонансе шире и померене ка нижим учестаностима. Ово се приписује губицима, који нису присутни у симулацијама и аналитичким моделима. Такође се може приметити да је у неким случајевима, као на



(a)

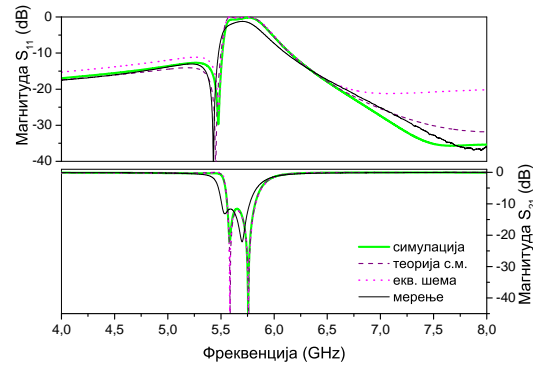


(b)

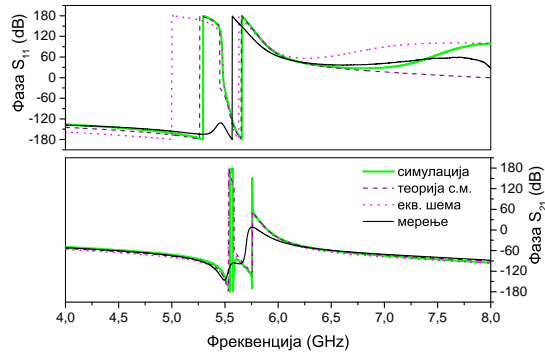
Рис. 1.14: Магнитуда и фаза  $S$ -параметара за модел са сл. 1.4b

сл. 1.14, 1.16, само једна резонанса видљива у трансмисији, зато што је разлика у фреквенцијама мала у поређењу са резонантним ширинама.

Разматрањем вредности у табели 1.3, може се закључити да се укупна јачина спреге (која се може проценити као  $\gamma_+ + \gamma_-$ ) повећава како се процеп SPR-а удаљава од вода. Ово се може објаснити помоћу расподеле струја на прстену, која има максимум у тачки која је дијаметрално супротна процепу. Такође се може видети да фитоване вредности карактеристичне импедансе вода у TSM моделу (сл. 1.9b), дефинисане као  $Z_C = \sqrt{L/C}$ , такође варирају (последње две врсте у табели 1.3). Овај ефекат може се објаснити као пертурбација услед спреге, што такође објашњава неслагања у претходној секцији, где она није узета у обзир. Последишно, варијација  $Z_C$  је највећа у случају са најјачом спрегом (сл. 1.4b). На крају, може се видети како спрега узрокује померање резонанси ка вишим учестаностима.



(a)



(b)

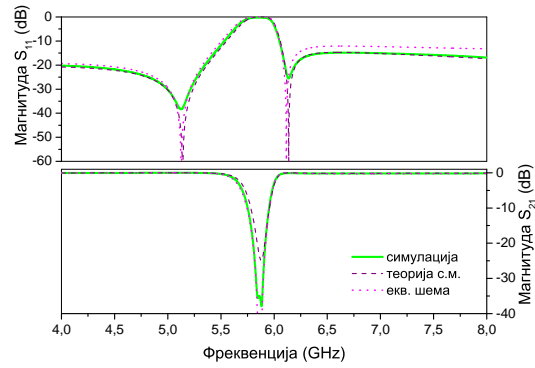
Рис. 1.15: Магнитуда и фаза  $S$ -параметара за модел са сл. 1.4с

Како би се тестирала њена универзалност, ТСМ је такође примењена на симетричну структуру (сл. 3с из [4]). У овом случају, изрази (1.17)–(1.18) су поједностављени, пошто је присутан само симетрични мод. Резултати су приказани на сл. 1.18, где се види одлично слагање и у рефлексији и у трансмисији.

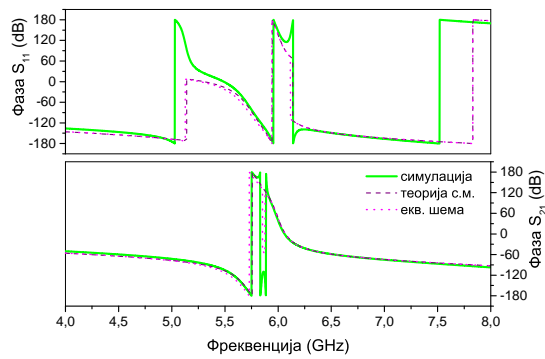
## 1.5 Закључак

У овој глави изложене су основе теорије спрегнутих модова, и демонстрирано је како се она може применити на структуре на бази метаматеријала у микроталасном опсегу. Такође је приказано како се ТСМ може применити за добијање апроксимативних аналитичких облика параметара расејања.

Структуре које су одабране за анализу састоје се од микрострип вода спре-



(а)



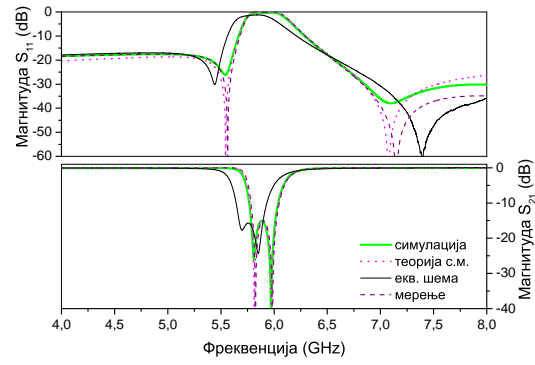
(b)

Рис. 1.16: Магнитуда и фаза  $S$ -параметара за модел са сл. 1.4d

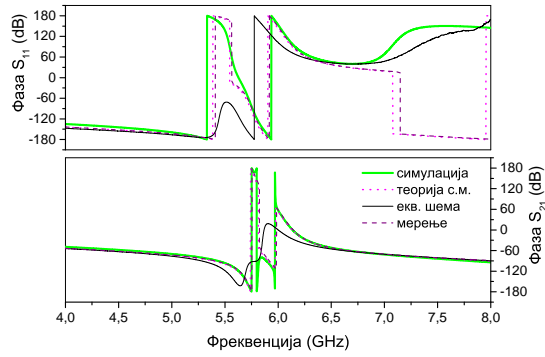
гнутог са антисиметричним сплит ринговима, и поседују симетрију у односу на ротацију од  $180^\circ$  око централне тачке. За разлику од структура са раванском симетријом, генерално поседују две резонансе у трансмисионом спектру, што их чини занимљивим за практичне примене.

Паралелно са ТСМ, предложена је еквивалентна шема за ове структуре, која укључује и електричну и магнетну спрегу, као и међусобну спрегу самих прстенова. Показано је како се може искористити ротациона симетрија кола за поједностављено израчунавање параметара.

Оба приступа дају аналогне резултате у близини резонанси, док се у ширем опсегу разликују. Изведене су релације које повезују параметре оба модела. Извршена су поређења са резултатима мерења и 3Д ЕМ симулација, која су потврдила теоријске закључке. Такође је приказано како се оба модела могу побољшати тако да се добије веома добро слагање, и у трансмисији и у рефлек-



(a)

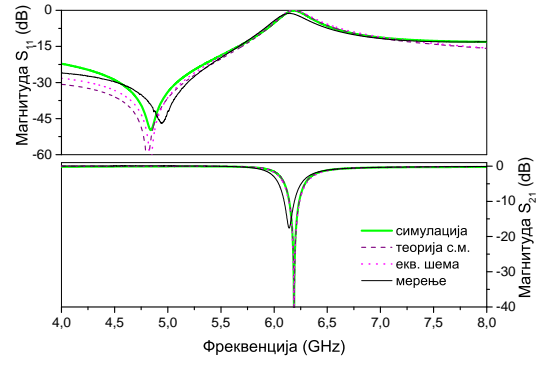


(b)

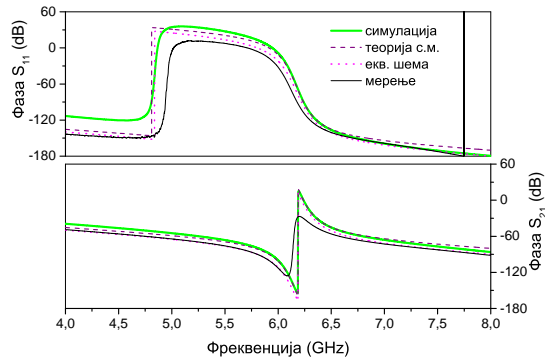
Рис. 1.17: Магнитуда и фаза  $S$ -параметара за модел са сл. 1.4е

сији, у опсегу од две октаве.

Поређење два приступа показује да је израчунавање аналитичких облика параметара једноставније помоћу ТСМ, зато што инхерентно занемарује ефекте вишег реда, који нису од примарног интереса. Због тога она представља веома погодан алат за анализу расејања у системима спрегнутих резонатора.



(a)



(b)

Рис. 1.18: Магнитуда и фаза  $S$ -параметара за симетрични модел. Измерени, симулирани и резултати еквивалентне шеме су преузети са сл. 12 из [4], а константе за ТСМ износе  $L = 1,23 \text{ nH}$ ,  $C = 0,671 \text{ pF}$ ,  $\omega_+ = 6,17 \text{ GHz}$  и  $\gamma_+ = 8.71 \times 10^8$ .

Таблица 1.3: Добијени резултати за моделе са сл. 1.4.

сл.	1.4a	1.4b	1.4c	1.4d	1.4e
<i>Еквивалентна шема</i>					
$L$ [nH]	1,48	1,47	1,47	1,47	1,47
$C$ [pF]	0,8	0,84	0,84	0,84	0,84
$L_S$ [nH]	7,97	7,91	7,91	7,91	7,91
$C_S$ [pF]	0,105	0,09	0,109	0,097	0,10
$k_m$	0,2	0,29	0,276	0,32	0,30
$k_e$	0,15	0,11	0,267	0,18	0,24
$k_{m12}$	0,042	0,07	0,086	0,095	0,10
<i>Теорија спрегнутих модова</i>					
$\omega_+$ [GHz]	5,67	6,23	5,81	6,00	6,06
$\omega_-$ [GHz]	5,52	6,02	5,54	5,75	5,76
$\gamma_+$ [ $10^8 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ ]	4,25	2,01	10,8	5,08	9,46
$\gamma_-$ [ $10^8 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ ]	3,44	13,8	3,21	9,57	5,18
$L$ [nH]	1,46	1,23	1,44	1,35	1,39
$C$ [pF]	0,762	0,822	0,734	0,819	0,749



# Литература

- [1] J. D. Baena, J. Bonache, F. Martín, R. M. Sillero, F. Falcone, T. Lopetegui, M. A. G. Laso, J. García-García, I. Gil, M. F. Portillo, and M. Sorolla, “Equivalent-circuit models for split-ring resonators and complementary split-ring resonators coupled to planar transmission lines,” *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, vol. 53, no. 4, pp. 1451–1461, April 2005.
- [2] F. Aznar, J. Bonache, and F. Martín, “Improved circuit model for left-handed lines loaded with split ring resonators,” *Applied Physics Letters*, vol. 92, no. 4, p. 043512, 2008.
- [3] J. Naqui, M. Duran-Sindreu, and F. Martín, “Modeling split-ring resonator (srr) and complementary split-ring resonator (csrr) loaded transmission lines exhibiting cross-polarization effects,” *IEEE Antennas and Wireless Propagation Letters*, vol. 12, pp. 178–181, 2013.
- [4] R. Bojanic, V. Milosevic, B. Jokanovic, F. Medina-Mena, and F. Mesa, “Enhanced modelling of split-ring resonators couplings in printed circuits,” *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, vol. 62, no. 8, pp. 1605–1615, Aug 2014.
- [5] J. R. Pierce, “Coupling of modes of propagation,” *Journal of Applied Physics*, vol. 25, no. 2, pp. 179–183, 1954.
- [6] R. W. Gould, “A coupled mode description of the backward-wave oscillator and the kompfner dip condition,” *IRE Transactions on Electron Devices*, vol. 2, no. 4, pp. 37–42, Oct 1955.

- [7] W. Louisell, *Coupled Mode and Parametric Electronics*. Wiley, 1960.
- [8] S. E. Miller, "Some coupled-wave theory and application to waveguides (abstract)," *Transactions of the IRE Professional Group on Microwave Theory and Techniques*, vol. 1, no. 1, pp. 14–14, March 1953.
- [9] W. Louisell, "Analysis of the single tapered mode coupler," *Bell Labs Technical Journal*, vol. 34, no. 4, pp. 853–870, 1955.
- [10] C. Tang, "Mode conversion in nonuniform multimode waveguides and transitions," in *Advances in Microwaves*. Elsevier, 1969, vol. 4, pp. 301–372.
- [11] S. A. Schelkunoff, "Conversion of maxwell's equations into generalized telegraphist's equations," *The Bell System Technical Journal*, vol. 34, no. 5, pp. 995–1043, Sept 1955.
- [12] H. A. Haus and W. Huang, "Coupled-mode theory," *Proc. IEEE*, vol. 79, no. 10, pp. 1505–1518, Oct 1991.
- [13] D. Marcuse, "The coupling of degenerate modes in two parallel dielectric waveguides," *The Bell System Technical Journal*, vol. 50, no. 6, pp. 1791–1816, July 1971.
- [14] A. W. Snyder, "Coupled-mode theory for optical fibers," *JOSA*, vol. 62, no. 11, pp. 1267–1277, 1972.
- [15] A. Yariv, "Coupled-mode theory for guided-wave optics," *IEEE Journal of Quantum Electronics*, vol. 9, no. 9, pp. 919–933, Sep 1973.
- [16] H. Taylor, "Optical switching and modulation in parallel dielectric waveguides," *Journal of Applied Physics*, vol. 44, no. 7, pp. 3257–3262, 1973.
- [17] P. D. McIntyre and A. W. Snyder, "Power transfer between optical fibers," *JOSA*, vol. 63, no. 12, pp. 1518–1527, 1973.
- [18] H. Kogelnik and R. Schmidt, "Switched directional couplers with alternating  $\delta\beta$ ," *IEEE Journal of Quantum Electronics*, vol. 12, no. 7, pp. 396–401, July 1976.

- [19] J. Butler, D. Ackley, and D. Botez, “Coupled-mode analysis of phase-locked injection laser arrays,” *Applied Physics Letters*, vol. 44, no. 3, pp. 293–295, 1984.
- [20] H. Haus, W. Huang, S. Kawakami, and N. Whitaker, “Coupled-mode theory of optical waveguides,” *Journal of Lightwave Technology*, vol. 5, no. 1, pp. 16–23, 1987.
- [21] W. Suh, Z. Wang, and S. Fan, “Temporal coupled-mode theory and the presence of non-orthogonal modes in lossless multimode cavities,” *IEEE Journal of Quantum Electronics*, vol. 40, no. 10, pp. 1511–1518, Oct 2004.
- [22] H. Haus, *Waves and fields in optoelectronics*, ser. Prentice-Hall Series in Solid State Physical Electronics. Prentice Hall, Incorporated, 1984.
- [23] T. Lopetegi, M. A. G. Laso, M. J. Erro, M. Sorolla, and M. Thumm, “Analysis and design of periodic structures for microstrip lines by using the coupled mode theory,” *IEEE Microwave and Wireless Components Letters*, vol. 12, no. 11, pp. 441–443, Nov 2002.
- [24] P. Tassin, L. Zhang, T. Koschny, E. N. Economou, and C. M. Soukoulis, “Low-loss metamaterials based on classical electromagnetically induced transparency,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 102, p. 053901, Feb 2009. [Online]. Available: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.102.053901>
- [25] V. Milosevic, B. Jokanovic, R. Bojanic, and B. Jelenkovic, “Classical electromagnetically induced transparency in metamaterials,” *Microwave Review*, vol. 19, no. 2, pp. 76–81, dec 2013.
- [26] C. Kurter, P. Tassin, L. Zhang, T. Koschny, A. P. Zhuravel, A. V. Ustinov, S. M. Anlage, and C. M. Soukoulis, “Classical analogue of electromagnetically induced transparency with a metal-superconductor hybrid metamaterial,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 107, p. 043901, Jul 2011. [Online]. Available: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.107.043901>

- [27] J. Hong and M. Lancaster, *Microstrip Filters for RF / Microwave Applications*, ser. Wiley Series in Microwave and Optical Engineering. Wiley, 2004.
- [28] A. Djordjevic, M. Bazdar, T. Sarkar, and R. Harrington, *Linpar for Windows: Matrix Parameters for Multiconductor Transmission Lines, Software and User's Manual, Version 2.0*, ser. Artech House microwave library. Artech House, 1999.
- [29] J. C. Lagarias, J. A. Reeds, M. H. Wright, and P. E. Wright, “Convergence properties of the Nelder–Mead simplex method in low dimensions,” *SIAM Journal on optimization*, vol. 9, no. 1, pp. 112–147, 1998.