

Kabinet výuky obecné fyziky, UK MFF

Fyzikální praktikum II



Úloha č. 8

Název úlohy: Měření impedancí rezonanční metodou

Jméno: Vojtěch Votruba

Datum měření: 2023-11-06

Připomínky opravujícího:

	Možný počet bodů	Udělený počet bodů
Teoretická část	0–2	
Výsledky a zpracování měření	0–9	
Diskuse výsledků	0–4	
Závěr	0–1	
Použitá literatura	0–1	
Celkem	max. 17	

Posuzoval:

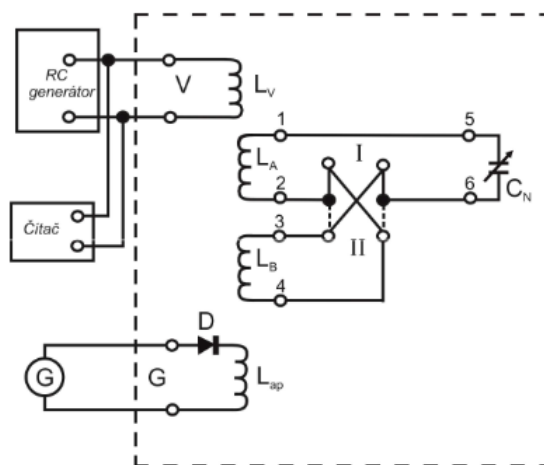
dne:

Pracovní úkoly

1. Změřte závislost rezonanční frekvence cívek A a B na připojené kapacitě. Určete indukčnosti L_A , L_B a vlastní kapacity C_A , C_B cívek A a B.
2. Z měření celkové indukčnosti $L_{1,2}$ cívek A a B určete jejich vzájemnou indukčnost M . Diskutujte platnost vztahu mezi vzájemnou indukčností M , indukčnostmi cívek L_A , L_B a celkovou indukčností $L_{1,2}$.
3. Grafy závislostí převrácené hodnoty kvadrátu rezonanční frekvence na kapacitě vynesete přímo v praxi.
4. Pro jedno zapojení proměřte rezonanční křivku. Rezonanční křivku vynesete do grafu přímo v praxi.
5. Naměřený průběh porovnejte graficky s teoretickým a vyhodnoťte míru útlumu, činitel jakosti a náhradní sériový odpor obvodu.

1 Teoretická část

V této úloze budeme podle pracovních úkolů pro sériový RLC obvod proměřovat zadané parametry cívek. Schéma měřicího obvodu tzv. *Q-metru* je na obr. 1.



Obrázek 1: Schéma zapojení Q-metru. Převzato z [1].

1.1 Indukčnost a vlastní kapacita cívek

Pro efektivní napětí U_{eff} na sériově zapojených cívkách v závislosti na efektivním proudu I_{eff} v RLC obvodu platí

$$U_{eff} = I_{eff} \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2}, \quad (1)$$

kde R , L a C jsou v obvodu zařazený odpor, indukčnost a kapacita, ω je zde úhlová frekvence [1]. Hledáme-li při konstantním napětí U hodnotu proudu I_{max} , která bude nejvyšší, dostáváme prostou minimalizací vztahu (1)

$$\omega_r = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \quad (2)$$

kde tato ω_r je tzv. *rezonanční* úhlová frekvence [1]. Rezonanční frekvenci f pak získáme jednoduchým přepočtem $f = \frac{\omega_r}{2\pi}$.

V reálném RLC obvodu se kapacita C nebude skládat pouze z kapacity zapojeného kondenzátoru C_N . Zapojené cívky totiž mají tzv. *vlastní* parazitní kapacity C_0 a celkově tak platí $C = C_0 + C_N$ [1]. Dostáváme tedy ve skutečnosti

$$\boxed{\frac{1}{\omega_r^2} = L(C_0 + C_N)}. \quad (3)$$

1.2 Vzájemná indukčnost

Zapojujeme-li dvě cívky s indukčností L_1 a L_2 do série, můžeme jejich vliv na celý obvod nahradit jednou cívkou s celkovou indukčností

$$L_{1,2} = L_A + L_B \pm 2M, \quad (4)$$

kde M je tzv. *vzájemná* indukčnost. $L_1 = L_A + L_B + 2M$ platí při souhlasném zapojení cívek vzhledem k proudu a $L_2 = L_A + L_B - 2M$ při nesouhlasném zapojení [1]. Proměříme-li obě zapojení (čímž získáme L_1 a L_2), můžeme vzájemnou indukčnost určit vztahem

$$M = \frac{L_1 - L_2}{4}. \quad (5)$$

1.3 Redukovaná rezonanční křivka

Pro RLC obvod definujeme [1] veličinu útlum d jako

$$d = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}. \quad (6)$$

Zavedeme-li si dále v souvislosti se vztahem (1) proměnnou $y = I/I_r$ a $x = \omega/\omega_r = \omega\sqrt{LC}$, můžeme ho s pomocí těchto proměnných a útlumu zapsat ve formě

$$y^2 = \frac{d^2}{d^2 + \left(x - \frac{1}{x}\right)^2}. \quad (7)$$

Graf závislosti $y^2(x)$ podle této rovnice nazýváme tzv. *redukovanou rezonanční křivkou* [1]. Podaří-li se nám tuto křivku změřit experimentálně, můžeme míru útlumu d vyhodnotit dosazením za $y^2 = 0,5$. Pro tuto hodnotu y^2 totiž platí

$$d = |x_1 - x_2|, \quad (8)$$

kde $x_{1,2}$ řeší rovnici $y^2(x_{1,2}) = 0,5$. Dále si definujeme [1] tzv. *činitel jakosti* cívky Q

$$Q = \frac{1}{d} \quad (9)$$

a tzv. *sériový náhradní odpor* [1] R_S :

$$R_S = \omega_r L d. \quad (10)$$

2 Výsledky a zpracování měření

2.1 Podmínky pokusu

Měření bylo provedeno v místnosti PII v budově MFF UK na Karlově. Změřené podmínky termo-hygrobarometrem při pokusu byly následující: Teplota $t = 23,8(4)^\circ\text{C}$, relativní vlhkost $\Phi = 33(3)\%$, tlak $p = 980(2)\text{ hPa}$.

2.2 Indukčnost a vlastní kapacita cívek

Pro měření byl ke Q-metru připojen generátor funkcí Siglent SDG 2082X, laboratorní čítač frekvencí a galvanometr. Zapojená kapacita C byla nastavována na otočném kondenzátoru.

Vždy po nastavení příslušné kapacity bylo potřeba nalézt rezonanční frekvenci. To probíhalo způsobem, že byl vždy vybrán nějaký konkrétní dílek na galvanometru, který byl nižší, než byla poloha maxima. Následně byla odečtená první frekvence, při které ukazatel na galvanometru tento dílek překročil, a pak také druhá frekvence, při které se naopak ukazatel galvanometru vracel z maxima zpátky na nulu, tyto dvě frekvence byly zprůměrovány, čímž jsme díky symetrii rezonanční křivky dostali frekvenci maxima – rezonanční frekvenci.

Nejprve probíhalo měření pro cívkou A a poté pro cívkou analogicky pro cívkou B. Naměřená data byla zanesena do tabulky 1.

Nejistoty kapacity C , ale i rezonanční frekvence f zde zohledníme počtem platných cifer, samotné chyby měřících přístrojů byly zanedbaný, viz Diskuse výsledků.

Tabulka 1: Měření závislosti rezonanční frekvence f na připojené kapacitě C pro cívky A a B

C/pF	f_A/kHz	$1/\omega_{rA}^2/10^{-14} \text{ s}^2$	f_B/kHz	$1/\omega_{rB}^2/10^{-14} \text{ s}^2$
200	682,6	5,436	695,7	5,234
400	513,1	9,621	506,1	9,891
600	428,7	13,78	417,6	14,52
800	375,5	17,96	363,5	19,17
1000	338,3	22,13	326,2	23,80

Z takto naměřených dat byl pak vyhotoven lineární regresí fit podle vztahu (3) – viz obr. 2. K tomu posloužil software **Origin**.

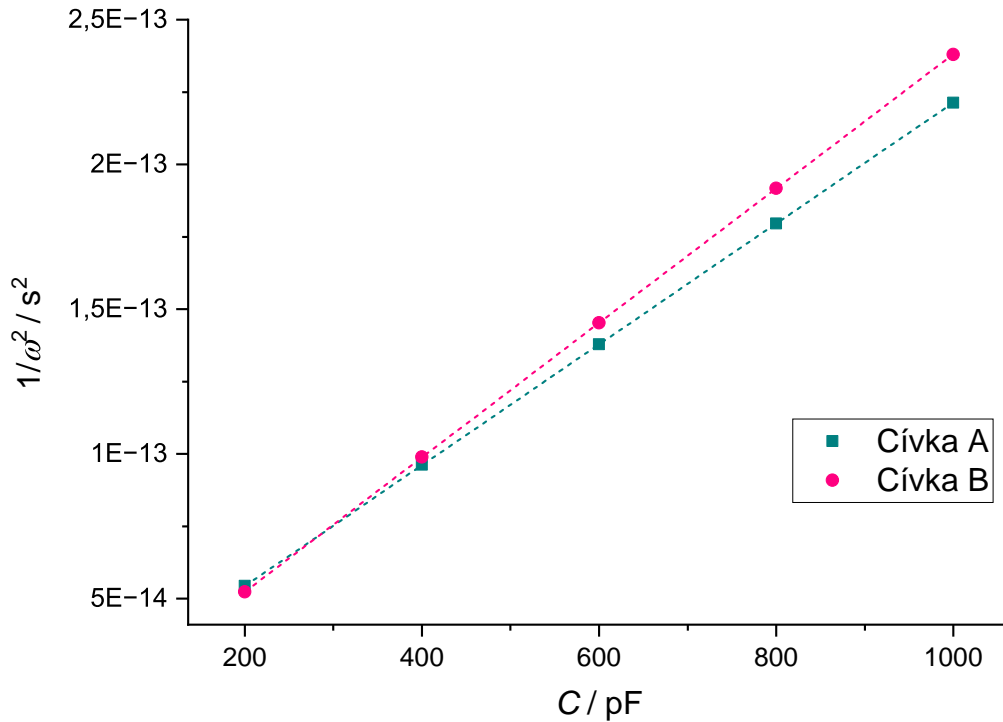
Směrnice regresní přímky nám udává indukčnost L , zatímco intercept s osou y je roven LC_0 , z čehož získáme vlastní kapacitu příslušné cívky $C_{A,B}$.

$$\begin{aligned} L_A &= 208,69(9) \mu\text{H}, & C_A &= 60,67(3) \text{ pF}, \\ L_B &= 232,1(1) \mu\text{H}, & C_B &= 25,85(4) \text{ pF}, \end{aligned}$$

kde nám nejistotu L vrátil **Origin** jakožto statistickou chybu. Nejistotu $C_{A,B}$ jsme určili podle metody přenosu chyb [2] jako

$$\sigma_{C_{A,B}} = C_{A,B} \sqrt{\left(\frac{\sigma_q}{q}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_L}{L}\right)^2}, \quad (11)$$

kde q označuje hodnotu interceptu, kterou nám **Origin** vrátil.



Obrázek 2: Závislost převráceného kvadrátu rezonanční úhlové frekvence $\frac{1}{\omega_r^2}$ na nastavené kapacitě C pro cívky A a B.

2.3 Vzájemná indukčnost

Měření v této podsekcí je víceméně analogické k měření v předchozí podsekcí s několika rozdíly. Měříme zde pouze indukčnosti a to indukčnosti L_1 a L_2 odpovídají souhlasnému zapojení A+B, resp. nesouhlasnému zapojení A-B

cívek z předchozí podsekcce. Po vyhodnocení těchto indukčností použijeme vztah (5), pomocí kterého vypočítáme vzájemnou indukčnost M .

Naměřená data byla zanesena do tabulky 2.

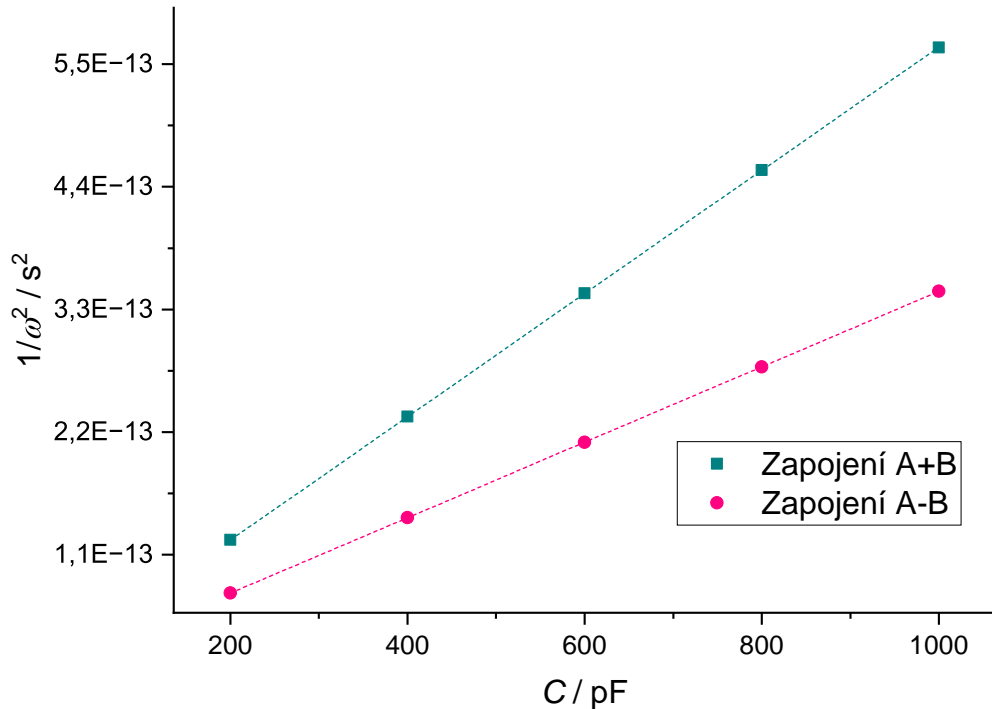
Tabulka 2: Měření závislosti rezonanční frekvence f na připojené kapacitě C pro sériová zapojení cívek 1 a 2

C/pF	f_1/kHz	$1/\omega_{r1}^2/10^{-14} \text{ s}^2$	f_2/kHz	$1/\omega_{r2}^2/10^{-14} \text{ s}^2$
200	453,4	12,32	578,4	7,571
400	329,2	23,38	420,5	14,33
600	271,2	34,44	346,6	21,08
800	236,0	45,50	301,7	27,83
1000	211,7	56,50	270,4	34,64

A z těchto dat byl obdobným způsobem pomocí **Originu** vytvořen lineární fit – viz obr.3. Jeho výsledky jsou

$$L_1 = 552,4(3) \mu\text{H},$$

$$L_2 = 338,2(3) \mu\text{H}$$



Obrázek 3: Závislost převráceného kvadrátu rezonanční úhlové frekvence $\frac{1}{\omega_r^2}$ na nastavené kapacitě C pro zapojení A+B a A-B

Což nám podle vztahu (5) dává vzájemnou indukčnost

$$M = 53,5(1) \mu\text{H}, \quad (12)$$

kde nejistota byla stanovena metodou přenosu chyb [2] vzorcem

$$\sigma_M = \frac{1}{4} \sqrt{\sigma_{L_1}^2 + \sigma_{L_2}^2}. \quad (13)$$

2.4 Rezonanční křivka

Pro naměření redukované rezonanční křivky v této podsekcce bylo použito zapojení L_1 neboli A+B. Dále jsme nastavili kapacitu na $C = 600 \text{ pF}$.

Měření probíhalo tak, že byl vždy nastaven nějaký určitý počet dílků na galvanometru (výchylka) a byla zapsána příslušná frekvence. Tyto hodnoty byly dále normovány svými maximy, čímž jsme získali hodnotu y^2 a x . Naměřená data z této podsekcce jsou zanesena do tabulky 3.

Tabulka 3: Naměřené hodnoty frekvencí f , výchylek a jejich přepočet na x a y^2

Výchylka	y^2	f/kHz	x
5	0,116	257,5	0,949
10	0,231	262,4	0,968
15	0,347	264,7	0,976
20	0,462	266,2	0,982
25	0,578	267,3	0,986
30	0,694	268,2	0,989
35	0,809	269,1	0,992
40	0,925	270	0,996
43,25	1,000	271,2	1,000
40	0,925	272,5	1,005
35	0,809	273,4	1,008
30	0,694	274,2	1,011
25	0,578	275	1,014
20	0,462	276,1	1,018
15	0,347	277,6	1,024
10	0,231	279,9	1,032
5	0,116	284,9	1,051

Finálně jsme pak tato data zpracovali graficky a nafitovali je závislostí podle rovnice (7), výsledky fitu jsou k vidění graficky na obr. 4. **Origin** nám jako parametr fitu vrátil velikost útlumu d

$$d = 0.034(2),$$

z čehož můžeme jednoduše vypočíst koeficient jakosti Q a náhradní odpor R_S

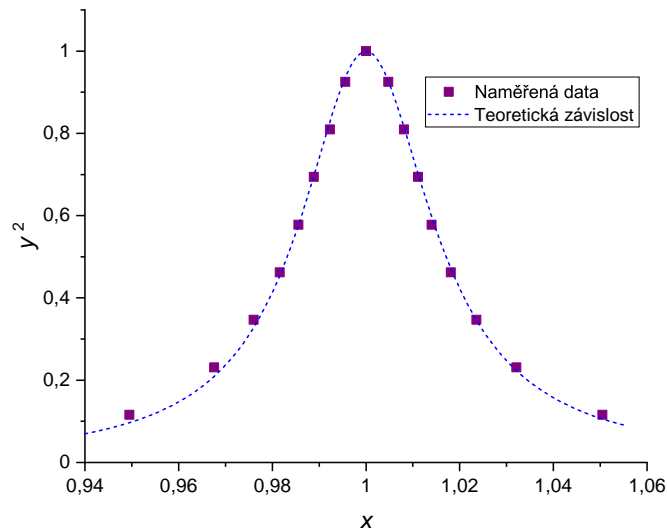
$$Q = 29(2),$$

$$R_S = 32(2) \Omega,$$

kde jsme nejistotu stanovili pomocí metody přenosu chyb [2]

$$\sigma_Q = Q \frac{\sigma_d}{d}, \quad (14)$$

$$\sigma_{R_S} = R_S \sqrt{\left(\frac{\sigma_d}{d}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{L_1}}{L_1}\right)^2}. \quad (15)$$



Obrázek 4: Redukovaná rezonanční křivka pro $C = 600 \text{ pF}$ a zapojení A+B.

3 Diskuse výsledků

3.1 Nezapočtená nejistota

Nejistotu kapacity odhadneme jako nejmenší dílek otočného kondenzátoru o velikosti $\sigma_C = 0,5 \text{ pF}$. Vzhledem k tomu, že tato chyba je velmi malá (maximálně 2,5 ‰), můžeme ji zanedbat.

Nejistota frekvence f pak nebude souviset pouze s nejistotou měřicího přístroje (která bude velmi nízká), ale také s nejistotou určení maxima. Odhadneme-li nejistotu frekvence f například na $\sigma_f = 1 \text{ kHz}$, dostáváme se na maximální relativní chybu zhruba okolo 3 ‰, tato chyba je dost malá na to, abychom ji zanedbali, proto by musela být vyšší, aby mělo smysl ji nějak započítávat. Na druhou stranu jsme při měření byli schopni maximum kalibrovat s přesností okolo 0,1 kHz. Z toho vypývá, že jakoukoliv chybu přístrojů nebo odečtu na galvanometru, můžeme zanedbat. Jediné chyby, které tedy budeme zpracovávat budou chyby statistické.

3.2 Vzájemná indukčnost

Ze studia elektřiny a magnetismu [3] víme, že vzájemná indukčnost dvou cívek se dá vypočítat vztahem

$$M = k\sqrt{L_A L_B}, \quad (16)$$

kde číslo $k \in [0, 1]$ je koeficient vazby. Zkusme tedy orientačně dosadit za indukčnosti L_A a L_B .

$$M = k\sqrt{208,69 \cdot 232,1 \mu\text{H}} = k220,1 \mu\text{H}.$$

Aby se tato hodnota mohla shodovat s naměřenou hodnotou, muselo by tedy platit cca. $k = \frac{1}{4}$. Zároveň si můžeme povšimnout, že (4) jistě musíme použít. Pokud bychom se snažili cívky skládat pouhým součtem

$$L_{1,2} = L_A + L_B,$$

nedošli bychom ke správnému výsledku. Jevy, kterými na sebe navzájem působí cívky, tedy nejsou zanedbatelné. Nyní již stačí ověřit celkovou platnost vztahu (4) zpětným dosazením za M a orientačním spočtením rozdílu s naměřenými hodnotami:

$$\Delta L_1 = 7,6 \mu\text{F},$$

$$\Delta L_2 = 1,41 \mu\text{F}.$$

Vztah tedy v rámci nejistoty neplatí přesně. To ale může být způsobeno nějakými nezapočtenými zdroji chyb. Například kapacita C_N může mít určité jistou parazitní indukčnost, která by ovlivnila celý RLC obvod a jeho rezonanci.

3.3 Redukovaná rezonanční křivka

Teoretická redukovaná rezonanční křivka se velmi dobře shoduje s naměřenou závislostí, proto u ní není nutné hledat další zdroje nejistot.

4 Závěr

Podařilo se nám pro laboratorní cívky A a B proměřit rezonanční metodou jejich vlastní indukčnosti a kapacity

$$\begin{aligned} L_A &= 208,69(9) \mu\text{H}, & C_A &= 60,67(3) \text{ pF}, \\ L_B &= 232,1(1) \mu\text{H}, & C_B &= 25,85(4) \text{ pF} \end{aligned}$$

a rovněž také jejich vzájemnou indukčnost

$$M = 53,5(1) \mu\text{H}. \quad (17)$$

Dále jsme také proměřili rezonanční křivku a stanovili pro souhlasné zapojení obou cívek s přidanou kapacitou 600 pF: útlum d , činitel jakosti Q a sériový náhradní odpor R_S

$$\begin{aligned} d &= 0.034(2), \\ Q &= 29(2), \\ R_S &= 32(2) \Omega. \end{aligned}$$

Reference

- [1] *Měření impedancí rezonanční metodou* [online]. [cit. 2023-11-12]. Dostupné z: <https://physics.mff.cuni.cz/vyuka/zfp/zadani/208>
- [2] ENGLICH, Jiří. *Úvod do praktické fyziky*. Praha: Matfyzpress, 2006. ISBN 80-86732-93-2.
- [3] Sedlák B., Štoll I.: *Elektřina a magnetismus*, Academia, Praha 2002