

Kabinet výuky obecné fyziky, UK MFF

Fyzikální praktikum I



Úloha č. 10

Název úlohy: Rychlost šíření zvuku

Jméno: Vojtěch Votruba

Datum měření: 23. 3. 2023

Připomínky opravujícího:

	Možný počet bodů	Udělený počet bodů
Teoretická část	0–2	
Výsledky a zpracování měření	0–9	
Diskuse výsledků	0–4	
Závěr	0–1	
Použitá literatura	0–1	
Celkem	max. 17	

Posuzoval:

dne:

Pracovní úkoly

1. Určete rychlost šíření podélných zvukových vln v mosazné tyči metodou Kundtovy trubice. Z naměřené rychlosti zvuku stanovte modul pružnosti v tahu E materiálu tyče.
2. Změřte rychlost zvuku ve vzduchu a v oxidu uhličitém pomocí uzavřeného rezonátoru. Výsledky měření zpracujte metodou lineární regrese a graficky znázorněte.
3. Vypočítejte Poissonovu konstantu κ oxidu uhličitého z naměřené rychlosti zvuku.

1 Teoretická část

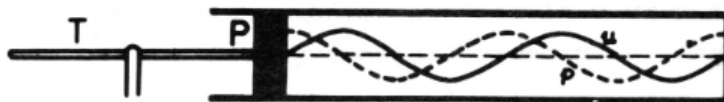
Pro charakteristické veličiny vlnění: vlnovou délku λ , frekvenci ν a rychlost šíření vlny c , obecně platí [1]

$$\nu = \frac{c}{\lambda}. \quad (1)$$

Ke splnění pracovních úkolů pak vyjdeme z následujících principů s použitím příslušný aparatur.

1.1 Kundtova trubice

Frekvence ν zvukové vlny zůstává nezávisle na prostředí, ve kterém se šíří, konstantní [1]. To znamená, že můžeme rozkmitat mosaznou tyč a vytvořit tak zvukovou vlnu s jistou frekvencí $\nu = \frac{c_1}{\lambda_1}$ a následně tuto zvukovou vlnu se stále stejnou frekvencí přenést přes Kundtovu trubici (podle obrázku 1) do vzduchu.



Obr. 2

Obrázek 1: Schéma Kundtovy trubice a tyče k měření modulu pružnosti v tahu a rychlosti zvuku [1]

Ve vzduchu pak bude platit $\nu = \frac{c_2}{\lambda_2}$. Složením získáváme rovnost [1]

$$\frac{c_1}{\lambda_1} = \frac{c_2}{\lambda_2}. \quad (2)$$

Známe-li tedy c_2 , λ_1 a λ_2 , jsme schopni zjistit rychlost zvuku v tyči c_1 , což je jeden z našich pracovních úkolů. Zároveň k určení modulu pružnosti v tahu E této mosazné tyče můžeme vyjít z dalšího vztahu [1] pro rychlost šíření vln v pevné látce, do kterého pouze dosadíme za získané c_1 .

$$E = c_1^2 \rho_m, \quad (3)$$

kde ρ_m je hustota mosazi, za kterou dosadíme tabelovanou hodnotu. Velikost vlnové délky ve vzduchu λ_2 změříme podle profilu, který vytvoří korek nasypný do Kundtovy trubice. Díky tomu, že mosazná tyč je zafixovaná v polovině své délky, bude dál jistě platit

$$\lambda_1 = 2d, \quad (4)$$

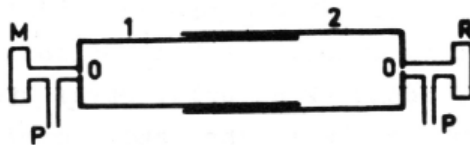
kde d je délka tyče. Posledním co tak musíme určit, je rychlost zvuku ve vzduchu c_2 . Tu určíme z tohoto experimentálního vztahu [1] jako

$$c_2 = [344,36 + 0,63(t - 20^\circ\text{C})]\text{m} \cdot \text{s}^{-1}, \quad (5)$$

kde t je teplota vzduchu. Tento vztah platí pro vzduch s vlhkostí okolo 50 % a teplotou okolo 20°C .

1.2 Uzavřený rezonátor

Druhá část měření proběhla za pomoci uzavřeného rezonátoru. Jde v podstatě o soustavu dvou do sebe zasunutých trubic (s nějakým plynem dovnitř), do nichž je pouštěn zvuk z generátoru R, viz obrázek 2 níže.



Obrázek 2: Schéma uzavřeného rezonátoru použitého k měření rychlosti zvuku v plynech a Poissonovy konstanty CO_2 [1]

Rezonátor nám s použitím snímače elektrického signálu – mikrofону M (viz obrázek 2) – umožnil stanovit frekvence, na nichž probíhá v trubicích rezonance. Díky pohyblivosti celé aparatury jsme, kromě nastavování frekvence na generátoru R, byli schopni měnit i vlnovou délku snímaných vln. Z údajů získaných z této aparatury pak můžeme podle rovnice (1) vytvořit fit a určit tak rychlost zvuku.

Pokud najdeme nějakou frekvenci ν , při které dochází k rezonanci, můžeme tuto frekvenci zafixovat a měnit délku rezonátoru, dokud nenajdeme další nejbližší rezonanci. Potom platí [1]

$$c = 2\Delta l\nu, \quad (6)$$

kde Δl je rozdíl vzdálenosti při posouvání rezonátoru.

Pokud ponecháváme délku rezonátoru l konstantní, bude platit [1], že rezonance nastává za podmínky

$$l = k \frac{\lambda_k}{2}, \quad (7)$$

kde $k \in \mathbb{N}$, můžeme pak dosadit za λ_k do (1) a získat tak

$$c = \frac{2l\nu_k}{k}. \quad (8)$$

Poissonovu konstantu vypočteme jednoduše podle tzv. Laplaceova vzorce [1], který ji dává do souvislosti právě s rychlostí šíření zvuku v plynech.

$$c = \sqrt{\kappa \frac{RT}{\mu}}, \quad (9)$$

$$\kappa = \frac{c^2 \mu}{RT}, \quad (10)$$

kde R je molární plynová konstanta, T termodynamická teplota a μ molekulová hmotnost daného plynu.

2 Výsledky a zpracování měření

2.1 Podmínky pokusu

Měření bylo provedeno v místnosti PI v budově MFF UK na Karlově. Změřené podmínky při pokusu byly následující: Teplota $t = 23,2(4)^\circ\text{C}$, relativní vlhkost $\Phi = 37(3)\%$, tlak $p = 982(2)\text{ hPa}$. Za hustotu mosazné tyče byla převzata hodnota $\rho_m = 8,6(3) \times 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ [2]. Za přesnou velikost molární plynové konstanty bylo použito $R = 8,314 \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ [1] a za přesnou molekulovou hmotnost CO_2 $\mu = 44,0 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{mol}^{-1}$. [1].

2.2 Kundtova trubice

Délka mosazné tyče byla změřena pásovým měřidlem jako $d = 150,9(3)\text{ cm}$. Nejistota tohoto měření byla odhadnuta na 3 mm, a ne jako polovina nejmenšího dílku měřidla, neboť tyč byla poměrně velká a zachytit pásové měřidlo na jednom konci do stejné výšky jako na druhém konci bylo náročné. Z tohoto měření získáváme podle (4) $\lambda_1 = 301,8(6)\text{ cm}$, kde nejistota $\sigma_{\lambda_1} = 2\sigma_d$ podle metody přenosu chyb [3].

Stejným pásovým měřidlem byla měřena vzdálenost dvou konců profilu vytvořeným korkovým práškem. Byly takto změřeny dvě vzdálenosti, jednou pro 3 vytvořené kmitny a jednou pro 4, viz tabulka 1.

Tabulka 1: Výsledky měření vlnového profilu v Kundtově trubici, kde k je počet zaznamenaných kmiten, r délka celého profilu a λ_2 vypočtená vlnová délka

k	r/mm	λ_2/mm
3	465	310
4	618	309

Jejich velikosti byly zprůměrovány a nejistota výsledku byla kvůli ještě větší nepřesnosti (Kundtova trubice má nepravidelný tvar) odhadnuta na 5 mm.

Celkově tedy získáváme $\lambda_2 = 310(5)$ mm.

Na závěr bylo nutné stanovit rychlost zvuku ve vzduchu c_2 . Ta byla určena podle vztahu (5), přičemž za teplotu dosadíme z podsekcce 2.1.

Mohli bychom se pokusit využít metodu přenosu chyb a stanovit nejistotu takto získané rychlost na základě nejistoty změřené teploty, to by ale nezohledňovalo chybu získanou tím, že vlhkost v místnosti nebyla blízka 50 %. Podíváme-li se do tabulek [2], zjišťujeme, že pro vlhký vzduch se rychlost zvuku nevzdaluje od toho suchého o více než 5 %. Vezmeme tedy nejistotu takto určeného c_2 jako 5 %.

Shrnuto $c_2 = 35(2) \times 10^1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$

Podle rovnice (2) nyní spočteme rychlost zvuku v mosazné tyči c_1 . Dále stanovíme pomocí rovnice (3) a údaje o hustotě z podsekcce 2.1 modul pružnosti v tahu E . Výsledné hodnoty jsou

$$c_1 = 34(2) \times 10^2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}, \quad (11)$$

$$E = 10(1) \times 10^1 \text{ GPa}, \quad (12)$$

kde jednotlivé nejistoty byly stanoveny podle metody přenosu chyb [3] jako

$$\sigma_{c_1} = c_1 \sqrt{\left(\frac{\sigma_{c_2}}{c_2}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{\lambda_1}}{\lambda_1}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{\lambda_2}}{\lambda_2}\right)^2}, \quad (13)$$

$$\sigma_E = E \sqrt{4 \left(\frac{\sigma_{c_1}}{c_1}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{\rho_1}}{\rho_1}\right)^2}. \quad (14)$$

2.3 Uzavřený rezonátor

Prvním postupem zmíněným v podsekcce 1.2, je metoda, při níž máme zafixovanou konstantní frekvenci.

Toto měření bylo provedeno se vzduchem v rezonátoru a s frekvencí o velikosti $\nu = 2353 \text{ Hz}$. Nejistota σ_ν by v ideálním případě měla vyjít z nejistoty měřícího přístroje, neboť byl ale odečet značně zkomplikovaný hledáním přesné rezonanční frekvence, uvažujme raději nejistotu 1 %.

Rozdíl délek pak byl stanoven podle škály přímo na uzavřeném rezonátoru na $\Delta l = 7,4(1) \text{ cm}$, kde nejistota byla vzata jako 1 mm kvůli velikosti nejmenšího dílku 1 mm a odečtu vzdáleností dvakrát pro výpočet rozdílů.

Dosazením do vztahu (6) získáváme

$$c = 35(3) \times 10^1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}, \quad (15)$$

kde nejistota byla stanovena podle metody přenosu chyb [3] jako

$$\sigma_c = c \sqrt{\left(\frac{\sigma_{\Delta l}}{\Delta l}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_\nu}{\nu}\right)^2}. \quad (16)$$

Druhým postupem, který využijeme nejen pro vzduch, ale i pro CO_2 je metoda s konstantní délkou. Tato délka byla pro měření rychlosti ve vzduchu zafixována na $l_{\text{vzduch}} = 800(1) \text{ mm}$ a pro měření rychlosti v CO_2 na $l_{\text{CO}_2} = 780(1) \text{ mm}$. Naměřená data touto metodou jsou vynesena do tabulek 2 a 3.

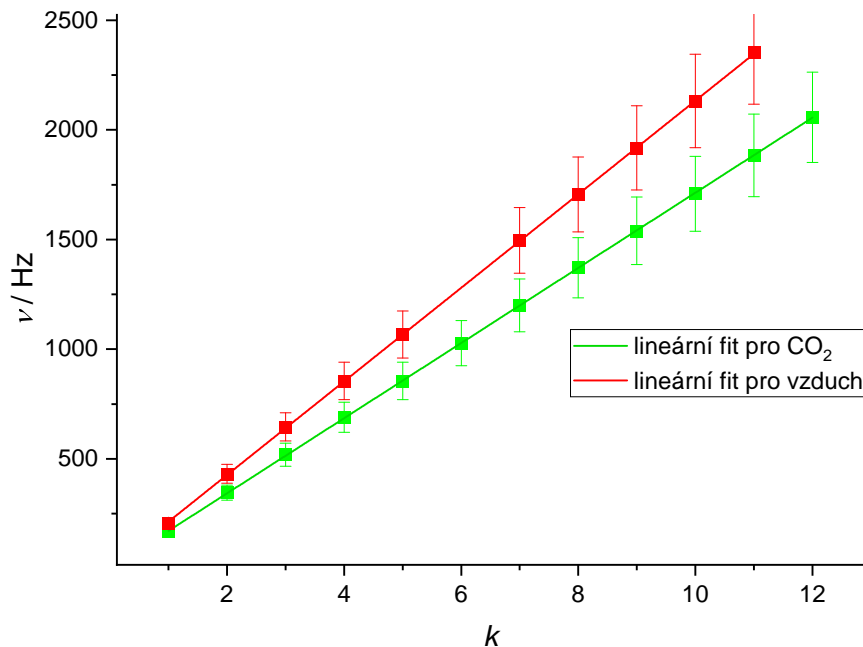
Tabulka 2: Naměřená data pro vzduch. V prvním sloupci je číslo módu k , v druhém příslušná rezonanční frekvence ν

k	$\nu_{\text{vzduch}}/\text{Hz}$
1	208
2	432
3	646
4	855
5	1067
6	? (viz diskuse)
7	1496
8	1706
9	1918
10	2132
11	2353

Tabulka 3: Naměřená data pro CO_2 . V prvním sloupci je číslo módu k , v druhém příslušná rezonanční frekvence ν

k	$\nu_{\text{CO}_2}/\text{Hz}$
1	168
2	346
3	519
4	690
5	855
6	1028
? (viz diskuse)	1121
7	1200
8	1372
9	1540
10	1709
11	1884
12	2057

Na těchto datech pak byla provedena lineární regresi, jejíž výsledek byl vynesena do grafu 3. Řádky s otazníkem byly vyřazeny, viz diskuse. Použili jsme software *Origin*, konkrétně funkci *Analysis::Fitting::Linear Fit* s zafixováním průsečíku fitu v 0 (viz diskuse).



Obrázek 3: Graf závislost frekvence ν na čísle módu k

Nafitované směrnice ξ pak vycházejí jako

$$\xi_{\text{vzduch}} = 213,3(7) \text{ Hz}, \xi_{\text{CO}_2} = 171,4(4) \text{ Hz}, \quad (17)$$

tedy po přepočtu dle vztahu (8)

$$c_{\text{vzduch}} = 341(1) \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}, c_{\text{CO}_2} = 267(1) \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}, \quad (18)$$

kde nejistota byla určena ze vztahu (8) podle metody přenosu chyb [3] jako

$$\sigma_c = c \sqrt{\left(\frac{\sigma_l}{l}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_\xi}{\xi}\right)^2}. \quad (19)$$

Posledním pracovním úkolem bylo vypočítat Poissonovu konstantu CO_2 κ podle vztahu (10). Hodnotu rychlosti šíření zvuku c_{CO_2} jsme stanovili výše, všechny ostatní konstanty byly převzaty podle sekce 2.1.

$$\kappa = 1,276(6), \quad (20)$$

kde nejistota byla stanovena podle metody přenosu chyb [3] jako

$$\sigma_\kappa = \kappa \sqrt{4 \left(\frac{\sigma_c}{c}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_T}{T}\right)^2}. \quad (21)$$

3 Diskuse výsledků

Měření obecně až na pár anomálií proběhlo dle pracovního postupu. Při vytváření vlnového profilu v Kundtově trubici musel být postup rozkmitání tyče proveden několikrát kvůli špatnému poměru kalafuny na hadru a kalafuny na tyči.

Nejistoty měření byly ve většině případech odhadnuty známým postupem jako velikost nejmenšího dílku. Speciálním případem byla pouze nejistota měření frekvence ν při měření v uzavřeném rezonátoru. Tato nejistota byla stanovena na 1 % kvůli škále přístroje, na kterém se daly nastavit frekvence. Škála přístroje byla logaritmická a po přechodu do kHz její první úsek neodpovídal 100 Hz, ale 1000 Hz, proto bylo použití relativní nejistoty opodstatněné.

Některé rezonanční frekvence pak byly z měření vyřazeny, protože neodpovídají zkoumanému fyzikálnímu jevu. Frekvence 1121 Hz se neshoduje s žádným celočíselným módem a lze ji tak označit za anomálii. Rezananční frekvence 6. módu při měření rychlosti zvuku ve vzduchu naopak nešla najít, proto byl tento mód z měření vyřazen. Použitý uzavřený rezonátor působil staře a nebyl jednoduchý způsob, jak otestovat jeho přesnost, je tedy možné, že jeho kvalita tvořila nezapočtený zdroj systematické chyby.

V rámci zpracování dat lineární regresí byl konstantní člen zafixován na 0, resp. přímka byla zafixována do počátku, neboť z matematické podstaty vztahu víme, že má jít o jednoduchou přímou úměrnost a že při frekvenci 0 Hz bude rychlost zvuku v rezonátoru nulová (Chaotický pohyb molekul vzduchu v rezonátoru bude jistě zanedbatelný vůči relativně velké rychlosti zvuku).

Při porovnání s tabelovanými hodnotami [4] zjišťujeme, že modul pružnosti mosazi byl v rámci své nejistoty změřen správně. Budeme-li předpokládat, že vztah (3) platí přesně (což není kvůli roztažnosti v jiných směrech apod. pravda), implikuje nám tato shoda i správné změření rychlosti c_1 , neboť při výpočtu E byla použita pouze druhá tabelovaná hodnota.

Co se týče měření v uzavřeném rezonátoru. Podle [4] pro teplotu 20 °C: $c_{\text{vzduch}} = 343 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, $c_{\text{CO}_2} = 260 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, což jsou vzhledem k předpokladu teploty 20 °C rozumné shody s naměřenými hodnotami. Dále vidíme, že se nám v rámci nejistoty shoduje naměřená rychlost při obou metodách měření v uzavřeném rezonátoru (fixovaná délka, fixovaná frekvence).

Jediná Poissonova konstanta κ se tak ani v rámci své nejistoty s tabelovanou hodnotou [2] neshoduje. To může být způsobeno například jinou teplotou v rezonátoru nebo tím, že vztah (9) využívá aproximaci ideálního plynu.

4 Závěr

V rámci 1. pracovního úkolu jsme stanovili rychlost šíření podélných zvukových vln v mosazné tyči a modul pružnosti v tahu mosazi E na hodnoty

$$c_1 = 34(2) \times 10^2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}, \quad (22)$$

$$E = 10(1) \times 10^1 \text{ GPa}. \quad (23)$$

V rámci 2. pracovního úkolu jsme změřili rychlost zvuku ve vzduchu a v CO_2 s výsledky

$$c_{\text{vzduch}} = 341(1) \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}, \quad (24)$$

$$c_{\text{CO}_2} = 267(1) \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}. \quad (25)$$

V rámci 3. pracovního úkolu jsme zjistili Poissonovu konstantu CO_2 jako

$$\kappa = 1,276(6). \quad (26)$$

Reference

- [1] *Rychlost šíření zvuku* [online]. [cit. 2023-03-07]. Dostupné z: <https://physics.mff.cuni.cz/vyuka/zfp/zadani/110>
- [2] VALOUCH, Miloslav. *Pětimístné logaritmické tabulky*. 19. vyd. Praha: Nakladatelství Československé akademie věd, 1962.
- [3] ENGLICH, Jiří. *Úvod do praktické fyziky*. Praha: Matfyzpress, 2006. ISBN 80-86732-93-2.
- [4] MIKULČÁK, J., F. ZEMÁNEK, B. KLIMEŠ, J. ŠIROKÝ a V. ŠŮLA. *Matematické, fyzikální, chemické tabulky a vzorce pro střední školy*. Praha: Státní pedagogické nakladatelství, n.p., 1988.