

Kabinet výuky obecné fyziky, UK MFF

Fyzikální praktikum I



Úloha č. 16

Název úlohy: Studium Brownova pohybu

Jméno: Vojtěch Votruba

Datum měření: 2. 3. 2023

Připomínky opravujícího:

	Možný počet bodů	Udělený počet bodů
Teoretická část	0–2	
Výsledky a zpracování měření	0–9	
Diskuse výsledků	0–4	
Závěr	0–1	
Použitá literatura	0–1	
Celkem	max. 17	

Posuzoval:

dne:

Pracovní úkoly

1. Experimentálně ověřte platnost vztahu pro časovou závislost středního kvadratického posunutí částice $\overline{s^2}$ při Brownově pohybu.
2. Určete aktivitu Brownova pohybu A částic latexu ve vodě za pokojové teploty.
3. Velikost částic odečtete z fotografie pomocí programu *Solaris*.
4. Vypočtete Avogadrovu konstantu N_A .

1 Teoretická část

V tomto měření budeme studovat Brownův pohyb na suspenzi latexových částic ve vodě. Proto abychom mohli správně provést všechny zadané pracovní úkoly, budeme v rámci každého z nich přímo či nepřímo využívat vztah mezi středním kvadratickým posunem částice $\overline{s^2}$ při Brownově pohybu a uplynulou dobou t

$$\overline{s^2} = 2At, \quad (1)$$

kde A označuje tzv. *aktivitu Brownova pohybu* [1]. Tato konstanta úměrnosti bude pro naše účely definována výpočtem jako

$$A = \frac{RT}{3\pi\eta r N_A}, \quad (2)$$

R zde značí molární plynovou konstantu, N_A Avogadrovu konstantu, T termodynamickou teplotu prostředí, η jeho dynamickou viskozitu a r poloměr latexové přibližně kulové částice [1].

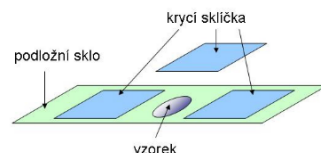
Na závěr dynamickou viskozitu suspenze pak určíme z dynamické viskozity vody η_v ,

$$\eta = \eta_v(1 + 2,5\phi), \quad (3)$$

kde ϕ je objemový podíl latexových částic ku vodě ve vzorku [1].

K měření využijeme mikroskop a k němu připojený laboratorní počítač s nainstalovanými programy *Solaris*, *Motic* a *Brown*. Vzorek do mikroskopu sestavíme pomocí jednoho podložního sklíčka a tří sklíček krycích, jak je vidět na obrázku 1. V celém měření byl použit jeden takto sestavený vzorek.

Program *Solaris* nám pomůže stanovit průměr latexových částic z připravených snímků z elektronového mikroskopu, program *Motic* nám ukáže obraz vzorku z mikroskopu na počítačovém monitoru a společně s programem *Brown* nám tedy umožní po určitých časových intervalech zaznamenávat polohu sledované částice [1]. Program *Brown* nám pak také tato data exportuje do formátu *pdf*. Na začátku i na konci měření proběhla kalibrace mikroskopu, která potvrdila, že v průběhu měření nedošlo k výrazným změnám v měřítku.



Obrázek 1: Sestavení vzorku

2 Výsledky a zpracování měření

2.1 Podmínky pokusu

Na konci měření byla v místnosti změřena teplota $23,8(4)^\circ\text{C}$ neboli termodynamická teplota $T = 297,0(4)\text{K}$, naměřená relativní vlhkost byla $\Phi = 26(3)\%$ a atmosférický tlak byl stanoven na $p = 992(2)\text{hPa}$. Nutno však podotknout, že pod mikroskopem používaným při měření mohla být vlivem silného nasvícení mnohem vyšší teplota než v samotné místnosti, proto je nutno zvýšit nejistotu měření u teploty. Odhadněme ji na 3 stupně. Kromě těchto, standardních měřicích podmínek, nesmíme opomenout dynamickou viskozitu vody $\eta_v = 0,95(6)\text{mPa}\cdot\text{s}$, která hraje v pokusu důležitou roli. Ta byla odhadnuta jako aritmetický průměr tabelovaných hodnot [2] dynamické viskozity vody pro 20°C , resp. 25°C s nejistotou odpovídající polovině rozptylu mezi těmito hodnotami. Technicky vzato by k této nejistotě měla být přičtena ještě nejistota měření u samotných tabelovaných hodnot. Ta bude ale jistě vůči tomuto velkému rozptylu zanedbatelná.

Ke stanovení dynamické viskozity suspenze η byla v laboratorních instrukcích na místě měření uvedena hodnota $\phi = 3,3 \cdot 10^{-4}$. Rozdíl mezi dynamickou viskozitou suspenze a dynamickou viskozitou vody při dané teplotě,

nicméně zanedbáme, neboť by se v již použité nejistotě ztratil.

Za přesnou hodnotu molární plynové konstanty bylo uvažováno $R = 8,314 \text{ J mol}^{-1} \text{ K}^{-1}$, Avogadrova konstanta N_A byla ve výpočtech, kde nefiguruje jako změřená veličina, zastoupena hodnotou $N_A = 6,022 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$

2.2 Určení velikosti částic

Ze tří snímků *ps-18*, *ps-19*, *ps-20* analyzovaných programem *Solaris* byl odečten zdánlivý průměr celkem 31 částic. Z toho bylo vybráno 30 částic ke zpracování, neboť poslední měřená částice v *ps-20* byla nedopatřením špatně zaměřená. Data byla zanesena do tabulky 1.

Tabulka 1: Změřené průměry částic d

d/nm				
457	457	453	453	429
429	441	449	429	429
469	481	461	449	441
457	433	512	500	492
461	461	473	446	461
481	485	434	461	461

Nejistota měření typu A zde byla určena standardním vzorcem pro výpočet výběrové směrodatné odchylky. Nejistota typu B způsobena nepřesným odhadem krajů částice byla podle měřítka na snímcích odhadnuta na $\sigma_B = 5 \text{ nm}$. Výsledný odhad nejistoty se podle metody přenosu chyb[3] určí jako

$$\sigma_r^2 = \sigma_A^2 + \sigma_B^2, \quad (4)$$

průměrný poloměr částic r byl spočten z aritmetického průměru hodnot v tabulce 1.

$$r = 0,23(2) \mu\text{m}. \quad (5)$$

2.3 Určení aktivity a Avogadrovy konstanty

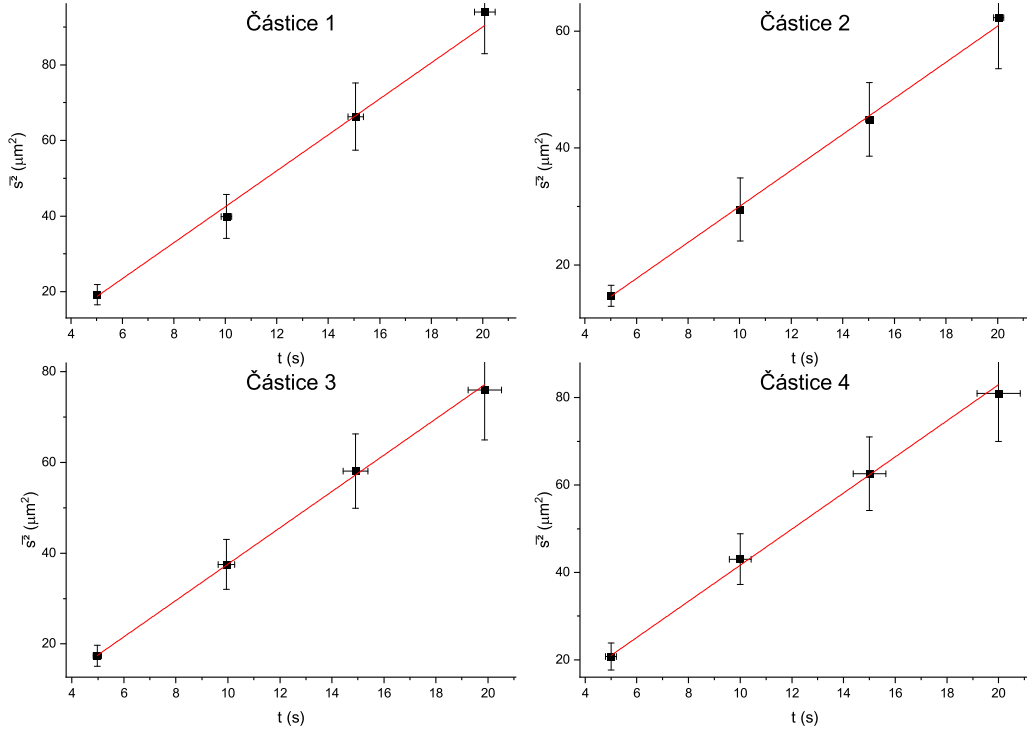
Celkově byla změřena časová závislost posunutí u 8 různých částic. Z nich byly vybrány 4 pro důkladnější zpracování (viz příložená data). Hodnotu středních kvadratických posunutí $\overline{s^2}$ vypočítal samotný program *Brown*, přičemž byla studována závislost tohoto středního kvadratického posunu částice za dobu $t, 2t, 3t, 4t$, kde $t \approx 5 \text{ s}$ je specifický časový interval pro danou částici.

U každé částice byla pak provedena lineární regrese s rovnicí $y = ax + b$ pomocí programu *Origin* – konkrétně funkcí *Analysis::Fitting::Linear Fit with X Error*, která zohledňuje chybu měření na obou osách. Jako výsledná hodnota A a její nejistota byly vzaty poloviny fitačního koeficientu, resp. chyby tohoto koeficientu[3], které nám *Origin* vrátil – to odpovídá matematicky vztahu (1). Všechna data pak byla shrnuta v následující tabulce 2.

Tabulka 2: Data z výstupu programu *Brown*. $\overline{s_1^2}, \overline{s_2^2}, \overline{s_3^2}, \overline{s_4^2}$ označují postupně hodnoty naměřené pro čas $t, 2t, 3t, 4t$. Program data vrátil s chybami na dvě platné cifry, proto zde byly takto uvedeny. V posledním sloupci je aktivita A určena fitem v *Originu*

Částice	t/s	$\overline{s_1^2} : \overline{s_2^2} : \overline{s_3^2} : \overline{s_4^2}/\mu\text{m}^2$	$\overline{s_1^2} : \overline{s_2^2} : \overline{s_3^2} : \overline{s_4^2}/\text{bez rozměru}$	$A/\mu\text{m}^2 \text{ s}^{-1}$
1	5,02(10)	19,2(27):39,9(58):66,3(89):94(11)	1:2,07(42):3,45(67):4:86(88)	2,4(3)
2	5,01(5)	14,7(18):29,5(54):44,9(63):62,3(87)	1:2,00(38):3,04(57):4:22(79)	1,5(2)
3	4,97(16)	17,4(23):37,5(55):58,1(82):76(11)	1:2,16(43):3,35(65):4:36(86)	2,0(3)
4	5,00(21)	20,7(31):43,0(58):62,6(84):81(11)	1:2,08(42):3,03(61):3,90(80)	2,1(3)

Pro každou sérii měření byl v rámci fitace programem *Origin* vytvořen graf závislosti s vyneseními chybovými úsečkami. Tyto grafy 2 jsou přiloženy níže. Čtvrtý sloupec tabulky 2 obsahující normované informace ze třetího sloupce je takto v podstatě nadbytečný, byl uveden kvůli názornosti poměrů. Ty by totiž podle vztahu (1) měly vyjít jako 1:2:3:4, což je v rámci nejistoty splněno. Splnění této podmínky je nutným, avšak ne postačujícím předpokladem platnosti vztahu (1). Byla proto porovnána hodnota \overline{A} získaná zprůměrováním hodnot z tabulky 2 s teoreticky vyvozenou hodnotou A_t .



Obrázek 2: Závislost středního kvadratického posunutí $\overline{s^2}$ na čase t . Grafy vyneseny pro jednotlivé částice

Teoretickou hodnotu A_t můžeme získat z podmínek pokusu (viz 2.1) a průměrného poloměru částice (viz 2.2) pomocí vztahu (2). Podle metody přenosu chyb bude platit [3]

$$\frac{\sigma_{A_t}}{A_t} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_T}{T}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_r}{r}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_\eta}{\eta}\right)^2}. \quad (6)$$

Nejistotu aritmetického průměru \overline{A} získaného z tabulky 2 dostaneme podle metody přenosu chyb [3] jako

$$\sigma_{\overline{A}} = \frac{1}{4} \sqrt{(\sigma_{A_1}^2 + \sigma_{A_2}^2 + \sigma_{A_3}^2 + \sigma_{A_4}^2)}, \quad (7)$$

celkově získáváme

$$\overline{A} = 2,0(1) \mu\text{m}^2 \text{s}^{-1}, \quad (8)$$

$$A_t = 2,0(2) \mu\text{m}^2 \text{s}^{-1}. \quad (9)$$

Obě hodnoty jsou tedy ve shodě. V rámci pracovního úkolu 4 byly získané hodnoty A pro každou částici přepočítány vztahem (2) na hodnotu Avogadrovy konstanty N_A . Ve výpočtu byly použity hodnoty ze sekce 2.1 a poloměr získaný v sekci 2.2. Podle metody přenosu chyb [3], platí pro nejistotu určení N_A každé částice

$$\frac{\sigma_{N_A}}{N_A} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_T}{T}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_r}{r}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_\eta}{\eta}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_A}{A}\right)^2}. \quad (10)$$

Získané Avogadrovy konstanty pro každou částici byly zapsány do tabulky 3.

Tabulka 3: Spočtené hodnoty N_A z aktivit A v tabulce 2

Částice	N_A/mol^{-1}
1	$5,0(8) \times 10^{23}$
2	$8(1) \times 10^{23}$
3	$6(1) \times 10^{23}$
4	$6(1) \times 10^{23}$

Jako výstupní hodnota pracovního úkolu byl spočten aritmetický průměr těchto hodnot. Nejistota určení průměru byla spočtena analogicky k rovnici (7).

$$N_A = 6,2(6) \times 10^{23} \text{mol}^{-1} \quad (11)$$

3 Diskuse výsledků

V měření se podařilo splnit zadané pracovní úkoly. Vzhledem k přímočarému postupu při používání počítačových programů, nevznikly žádné deviace od přímých instrukcí.

Měření poloměrů částic bylo založeno na předem poskytnutých snímcích, proto bylo už jen na schopnosti experimentátora správně zaměřit jednotlivé částice. Odhadnutá systematická nejistota 5 nm mohla být nejspíše zvolena nižší s vyloučením některých větších abnormálních částic, u nichž nebyly ostré okraje. Na druhou stranu při měření Brownova pohybu se v nepoužitých měřeních často vyskytovaly částice znatelně rychlejší než ty, jejichž měření bylo nakonec použito. Tuto disproporci rychlostí si podle vztahu (2) můžeme vysvětlovat právě jinou velikostí jednotlivých částic. Bylo by tedy statisticky nezodpovědné částice s vyššími rozměry na snímcích zanedbat za účelem snížení systematické chyby při měření aktivity a Avogadrovy konstanty.

U měření aktivity a Avogadrovy konstanty se naměřené hodnoty dobře shodují s teoretickými hodnotami. Při regresním určení aktivity A je primárním zdrojem nejistoty chyba naměřených hodnot, již nám poskytl program *Brown* a která je v rámci času t i středního kvadratického posunu $\overline{s^2}$ určena statisticky ze std. odchylky aritmetického průměru (viz příložené .pdf soubory). Zde je metodika nenapadnutelná, jedinou možností, jak v praxi tuto chybu snížit bez změny celého postupu, je trénink experimentátora nebo automatizace. Do přepočtu aktivity A na Avogadrovu konstantu ovšem vstupují nejistoty, které by šly snížit jednodušeji. Jde konkrétně o teplotní nejistotu a nejistotu viskozity. Tyto dvě nejistoty jsou silně propojeny, neboť viskozita vody je tepelně závislá. Ze zářivého výkonu mikroskopu by se jistě dalo nějakým přesnějším způsobem odhadnout, o kolik se ohřeje vzorek, a tím pádem i kolik se změní dynamická viskozita suspenze. Ve vztahu (10) by pak zbyla pouze nejistota určení aktivity a poloměru r . Jiné systematické chyby nebo vlivy není nutné uvažovat, neboť do takto určeného intervalu nejistoty Avogadrovy konstanty se pohodlně vejde její přesná hodnota.

4 Závěr

Potvrdili jsme lineární závislost středního kvadratického posunutí $\overline{s^2}$ na uplynulé době t při Brownově pohybu. Podařilo se nám stanovit aktivitu tohoto pohybu A na hodnotu $2,0(1)\mu\text{m}^2\text{s}^{-1}$, která se shoduje s hodnotou stanovenou teoretickým výpočtem.

V rámci měření jsme též změřili poloměr částic latexu v suspenzi, kterou jsme studovali, na $r = 0,23(2)\mu\text{m}$. Nakonec jsme určili experimentálně hodnotu Avogadrovy konstanty na $N_A = 6,2(6) \times 10^{23}\text{mol}^{-1}$, která se v rámci své nejistoty shoduje se svou definatorickou hodnotou.

Reference

- [1] *Studium Brownova pohybu* [online]. [cit. 2023-03-07]. Dostupné z: https://physics.mff.cuni.cz/vyuka/zfp/_media/zadani/texty/txt_116.pdf
- [2] BROŽ, J., V. ROSKOVEC a M. VALOUCH. *Fyzikální a matematické tabulky*. 1. vyd. Praha: SNTL, 1980, 305 s.
- [3] ENGLISH, Jiří. *Úvod do praktické fyziky*. Praha: Matfyzpress, 2006. ISBN 80-86732-93-2.