

# Domácí úloha č. 1 - řešení

Vojtěch Votruba

15. listopadu 2024

## Výpočet produkce $O_2$

V našem modelu ze zadání máme systém tvořený ze tří jasně oddělených podsystémů: jáma; prostor, který zaujímá vzduch; nekonečně velké chladné jezero. Zapišme si tedy první termodynamický zákon pro tyto tři části a pro část nultou, kterou označíme systém jako celek

$$dU_i = \delta Q_i + \delta W_i, \quad i \in \{0, 1, 2, 3\}.$$

Vymezme si dál dva body, ve kterých budeme systém studovat. Prvním je počátek, kdy platí všechny hodnoty uvedené v zadání, speciálně teplota jámy  $T_h = 100^\circ\text{C}$ . Konečný bod pak definujeme, jako ten, kdy se vzduch přestane rozkládat na dusík a kyslík podle zadání.

Dále pozorujeme několik faktů, které nám zjednoduší naše rovnice.

1.  $\delta Q_0 = 0$ , z celého systému neuniká žádné teplo, v našem modelu systém v podstatě vyplňuje celý absolutní prostor.
2.  $\delta W_i = 0$ , ani jeden ze tří podsystémů nekoná mechanickou práci. Plyny nemají kam expandovat a kapaliny v našem přiblížení mechanickou práci konat samy o sobě nemohou. Z nulovosti práce všech podsystémů plyne nulovost práce celého systému. Jako důsledek ze ZZE také máme  $\forall i : dU_i = \delta Q_i$ .
3.  $dU_2 = 0$ , podle zadání celá extrakce vzduchu probíhá za dané teploty  $T_2 = 20^\circ\text{C}$ , to znamená, že se nemůže měnit vnitřní energie plynů.

Kombinací dvou prvních bodů a ZZE dostáváme pro celý systém  $dU_0 = 0$ . Zároveň ale platí ze třetího bodu a z extenzivity vnitřní energie, že  $dU_0 = dU_1 + dU_2 + dU_3 = dU_1 + dU_3$ . Máme tedy celkově, že  $dU_1 = -dU_3$ .

Tím jsme dostali vlastně celkovou energetickou bilanci systému. Ve hře je však ještě druhá zásadní termodynamická veličina, a tou je entropie  $S$ . Ze druhého termodynamického zákona víme, že  $\Delta S \geq 0$ . Dále víme z teorému maximální práce, že chceme-li se vyhnout v našem procesu (extrakce  $O_2$ ) ztrátám, hledáme takové podmínky, aby platilo  $\Delta S = 0$ . Rozkladem vzduchu na  $O_2$  a  $N_2$  se celková entropie sníží (viz vzorec níže), což znamená, že se musí tento pokles v systému nějak vykompenzovat. Jediný způsob, kterým tak lze provést a který máme k dispozici, je výměna tepla mezi horkou jámou a chladným jezerem. Z tohoto náhledu je již jasné, že proces rozkladu vzduchu skončí ve chvíli, kdy se vyrovnají teploty obou těchto objektů.

Představme si tedy, že máme dvě části vzduchu: jednu, která se nerozloží, a druhou, která se úplně rozloží. Pro část, jež se nerozloží, se entropie nijak nezmění, zbývá tedy spočítat pouze rozdíl entropie pro totálně rozloženou část. Podle Gibbsova teorému se při našem rozkladu vzduchu tzv. *směšovací* entropie (rozdíl entropie plynu s oddělenými složkami a entropie homogenní směsi) spočte následujícím vztahem

$$\Delta S_2 = Rn_{O_2} \ln\left(\frac{1}{5}\right) + 4Rn_{O_2} \ln\left(\frac{4}{5}\right) = Rn_{O_2} \ln\left(\frac{4^4}{5^5}\right),$$

kde  $n_{\text{O}_2}$  značí látkové množství vyextrahovaného kyslíku. Opačné znaménko oproti obecné směšovací entropii zde máme proto, že počítáme počáteční stav se směsí a koncový stav s oddělenými složkami a ne naopak. První člen zde reprezentuje vyextrahovaný kyslík a druhý dusík. Faktory  $1/5$  a  $4/5$  se objevují v důsledku poměrů, v jakých se obě složky vyskytují ve vzduchu.

Jak jsme již zmínili, v jámě dochází pouze ke změně vnitřní energie, a tedy  $dU_1 = dQ_1$ . Předpokládáme-li konstantní měrnou tepelnou kapacitu vody  $c$ , můžeme tak psát  $dQ_1 = c\rho V dT$ , kde jako  $T$  označíme teplotu jámy v daném okamžiku. Z toho můžeme změnu entropie v jámě vyintegrovat

$$\Delta S_1 = \int_{(1)}^{(2)} \frac{dQ_1}{T} = \int_{(1)}^{(2)} \frac{dU_1}{T} = \int_{T_h}^{T_c} \frac{c\rho V}{T} dT = c\rho V \ln\left(\frac{T_c}{T_h}\right).$$

Výpočet změny entropie pro jezero bude koncepčně stejný, jen si musíme dát pozor na to, že teplota jezera  $T_c$  se během extrakce nebude měnit (jezero je nekonečně velké  $\rightarrow$  změna vnitřní energie se projeví jen zanedbatelně ve změně teploty). Změnu vnitřní energie spočteme oklikou přes změnu vnitřní energie jámy podle již výše odvozeného  $dQ_3 = -dU_1$

$$\Delta S_3 = \int_{(1)}^{(2)} \frac{dQ_3}{T_c} = - \int_{(1)}^{(2)} \frac{dU_1}{T_c} = - \int_{T_h}^{T_c} \frac{c\rho V}{T_c} dT = c\rho V \frac{T_h - T_c}{T_c}.$$

Nyní již můžeme zapsat celkovou změnu entropie a položit ji rovnu nule

$$c\rho V \ln\left(\frac{T_c}{T_h}\right) + Rn_{\text{O}_2} \ln\left(\frac{4^4}{5^5}\right) + c\rho V \frac{T_h - T_c}{T_c} = 0,$$

$$\Rightarrow \boxed{n_{\text{O}_2} = \frac{c\rho V}{R} \left(1 - \frac{T_h}{T_c} + \ln\left(\frac{T_h}{T_c}\right)\right) / \ln\left(\frac{4^4}{5^5}\right) \approx 0.959 \times 10^6 \text{ mol}},$$

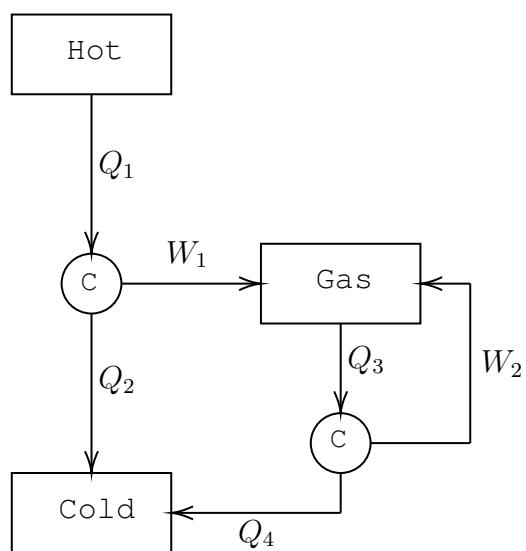
kde jsme dosadili za  $T_c = 278.15 \text{ K}$ ,  $T_h = 373.15 \text{ K}$ ,  $c = 4180 \text{ J K}^{-1} \text{ kg}^{-1}$ ,  $\rho = 1000 \text{ kg m}^{-3}$ ,  $V = 1000 \text{ m}^3$ ,  $R = 8.314 \text{ J K}^{-1} \text{ mol}^{-1}$ .

## Návrh zařízení

Při návrhu konkrétního schématu je důležité zachovat energetickou rovnováhu celého procesu. To samo o sobě implikuje, že odvádíme-li kterékoliv teplo z horké lázně, musí celé také přejít do lázně studené. Zároveň ale musíme nějakou energii ve formě práce přidat k našemu systému plynů, tak aby se mohly vyseparovat.

V celém procesu samozřejmě budeme používat jako tepelné stroje pouze Carnotovy cykly, neboť pouze ty nám se svou účinností mohou zařídit splnění podmínek teorému maximální práce. Zároveň platí, že kdykoliv chceme přímo převádět teplo z jednoho systému do druhého, vyplatí se nám postavit tomuto procesu do cesty Carnotův cyklus, který nám teplo zrecykluje a získá tak z procesu maximum práce (pokud v cestě tepla již jeden Carnotův cyklus nestojí). Z těchto předpokladů již plyne schéma 1 nakreslené níže.

Co se praktické realizace týče, že jediný rozumný způsob oddělení dusíku a kyslíku, co mě napadá, by byl přes přechod z plynného do kapalného skupenství pomocí změny teploty a tlaku, což ale příliš neodpovídá požadavku zadání na konstantní teplotu  $20^\circ\text{C}$  a tlak  $1 \text{ atm}$ .



Obrázek 1: Schéma zařízení