Zápočtový problém 2

Vojtěch Votruba

1. listopadu 2024

(i)

Rozepišme si zadanou akci do plného tvaru

$$\mathcal{S}_{\mathrm{NP}}[\psi, \overline{\psi}, A_\mu] = -\int_\Omega \mathrm{d}^4\Omega \left[\eta^{\mu\nu}(\nabla_\mu\psi - ieA_\mu\psi)(\nabla_\nu\overline{\psi} + ieA_\nu\overline{\psi}) + m^2\psi\overline{\psi}\right] \tag{1}$$

a pokračujeme napočítáním malé změny $\delta\mathcal{S}_{\mathrm{NP}} = -\mathcal{S}_{\mathrm{NP}}[\psi, \overline{\psi}, A_\mu] + \mathcal{S}_{\mathrm{NP}}[\psi + \delta\psi, \overline{\psi} + \delta\overline{\psi}, A_\mu]$,

$$\begin{aligned}\delta\mathcal{S}_{\mathrm{NP}} = \int_\Omega \mathrm{d}^4\Omega \Big[&\eta^{\mu\nu}(\nabla_\mu\psi - ieA_\mu\psi)(\nabla_\nu\overline{\psi} + ieA_\nu\overline{\psi}) + m^2\psi\overline{\psi} - \eta^{\mu\nu}(\nabla_\mu(\psi + \delta\psi) \\ &- ieA_\mu(\psi + \delta\psi))(\nabla_\nu(\overline{\psi} + \delta\overline{\psi}) + ieA_\nu(\overline{\psi} + \delta\overline{\psi})) - m^2(\psi + \delta\psi)(\overline{\psi} + \delta\overline{\psi})\Big],\end{aligned} \tag{2}$$

členy obsahující násobení dvou malých změn okamžitě vypouštíme, dále dostáváme

$$\begin{aligned}\delta\mathcal{S}_{\mathrm{NP}} = -\int_\Omega \mathrm{d}^4\Omega \Big[&\eta^{\mu\nu}(\nabla_\mu[\psi]\nabla_\nu[\delta\overline{\psi}] + \nabla_\mu[\psi]ieA_\nu\delta\overline{\psi} + \nabla_\mu[\delta\psi]\nabla_\nu[\overline{\psi}] + \nabla_\mu[\delta\psi]\nabla_\nu[\delta\overline{\psi}] \\ &+ \nabla_\mu[\delta\psi]ieA_\nu\overline{\psi} + \nabla_\mu[\delta\psi]ieA_\nu\delta\overline{\psi} - ieA_\mu\psi\nabla_\nu[\delta\overline{\psi}] + e^2A_\mu\psi A_\nu\delta\overline{\psi} \\ &- ieA_\mu\delta\psi\nabla_\nu[\overline{\psi}] - ieA_\mu\delta\psi\nabla_\nu[\delta\overline{\psi}] + e^2A_\mu\delta\psi A_\nu\overline{\psi}) + m^2(\psi\delta\overline{\psi} + \overline{\psi}\delta\psi)\Big].\end{aligned} \tag{3}$$

Pro výrazy obsahující derivaci malé změny poté uplatníme per partes $\int_\Omega \nabla f g = [fg]_{\partial\Omega} - \int_\Omega f\nabla g$ a operátor ∇ tak přesuneme na druhý součinitel. Výraz $[fg]_{\partial\Omega}$ nám na prostoročasové hranici vymizí v důsledku pevných konců. Vyřazujeme také členy obsahující dvě malé změny, byť obsažené v derivacích. Získáváme

$$\begin{aligned}\delta\mathcal{S}_{\mathrm{NP}} = -\int_\Omega \mathrm{d}^4\Omega \Big[&((\nabla_\mu\nabla_\nu\overline{\psi} + ie\nabla_\mu[A_\nu\overline{\psi}] - ieA_\mu\nabla_\nu\overline{\psi} + e^2A_\mu A_\nu\overline{\psi})\eta^{\mu\nu} + m^2\overline{\psi})\delta\psi \\ &+ ((\nabla_\nu\nabla_\mu\psi + ieA_\nu\nabla_\mu\psi - ie\nabla_\nu[A_\mu\psi] + e^2A_\mu A_\nu\psi)\eta^{\mu\nu} + m^2\psi)\delta\overline{\psi}\Big]\end{aligned} \tag{4}$$

pro splnění principu $\delta\mathcal{S}_{\mathrm{NP}} = 0$ finálně pokládáme obě variace $\frac{\delta\mathcal{S}_{\mathrm{NP}}}{\delta\psi}$ i $\frac{\delta\mathcal{S}_{\mathrm{NP}}}{\delta\overline{\psi}}$ rovny nule, čímž získáváme pohybové rovnice

$$\eta^{\mu\nu}(\nabla_\mu\nabla_\nu\overline{\psi} + ie\nabla_\mu[A_\nu\overline{\psi}] - ieA_\mu\nabla_\nu\overline{\psi} + e^2A_\mu A_\nu\overline{\psi}) + m^2\overline{\psi} = 0, \tag{5}$$

$$\eta^{\mu\nu}(\nabla_\nu\nabla_\mu\psi - ie\nabla_\nu[A_\mu\psi] + ieA_\nu\nabla_\mu\psi + e^2A_\mu A_\nu\psi) + m^2\psi = 0. \tag{6}$$

Vidíme, že rovnice jsou navzájem konzistentní. Provedením komplexního sdružení jedné z nich a cyklickou záměnou indexů μ, ν, dostáváme přesně tu druhou. Zachovala se nám tak symetrie pole ψ a antipole $\overline{\psi}$.

(ii)

Pro nalezení 4-toku pokračujeme ve variování akce, kdy znovu vypouštíme členy obsahující dvě malé změny. V tomto případě bude výpočet jednodušší, a proto rovnou píšeme

$$\delta\mathcal{S}_{\mathrm{NP}} = -\int_\Omega \mathrm{d}^4\Omega \left[ie\overline{\psi}\nabla_\mu[\psi](\delta A_\nu) + e^2\psi\overline{\psi}A_\mu(\delta A_\nu) - ie\psi\nabla_\nu\overline{\psi}(\delta A_\mu) + e^2\psi\overline{\psi}A_\nu(\delta A_\mu)\right]\eta^{\mu\nu}, \quad (7)$$

z čehož je jasně vidět, že 4-tok bude mít podobu

$$J^\mu_{\mathrm{NP}} = \frac{\delta\mathcal{S}_{\mathrm{NP}}}{\delta A_\mu} = -\eta^{\mu\nu}(e^2\psi\overline{\psi}A_\nu - ie\psi\nabla_\nu\overline{\psi}). \quad (8)$$

(iii)

Abychom ověřili invarianci, dosadíme jednoduše do akce $\mathcal{S}_{\mathrm{NP}}$ transformovaná pole a potenciál

$$\begin{aligned}\mathcal{S}_{\mathrm{NP}}[\psi', \overline{\psi}', A'_\mu] = -\int_\Omega \mathrm{d}^4\Omega \Big[&\eta^{\mu\nu}([\cancel{\exp(ie\alpha)}\nabla_\mu\psi + ie\cancel{\exp(ie\alpha)}\psi\nabla_\mu\alpha] - ie[A_\mu + \nabla_\mu\alpha]\psi\cancel{\exp(ie\alpha)})\\ &([\cancel{\exp(-ie\alpha)}\nabla_\nu\overline{\psi} - ie\cancel{\exp(-ie\alpha)}\,\overline{\psi}\nabla_\nu\alpha] + ie[A_\nu + \nabla_\nu\alpha])\overline{\psi}\cancel{\exp(-ie\alpha)}) + \cancel{\exp(ie\alpha)\exp(-ie\alpha)}m^2\psi\overline{\psi}\Big]\\ = -\int_\Omega \mathrm{d}^4\Omega \Big[&\eta^{\mu\nu}(\nabla_\mu\psi + \cancel{ie\psi\nabla_\mu\alpha} - ieA_\mu\psi - \cancel{ie\nabla_\mu\alpha\psi})(\nabla_\nu\overline{\psi} - \cancel{ie\overline{\psi}\nabla_\nu\alpha} + ieA_\nu\overline{\psi} + \cancel{ie\nabla_\nu\alpha\overline{\psi}}) + m^2\psi\overline{\psi}\Big]\\ = -\int_\Omega \mathrm{d}^4\Omega \Big[&\eta^{\mu\nu}(\nabla_\mu\psi - ieA_\mu\psi)(\nabla_\nu\overline{\psi} + ieA_\nu\overline{\psi}) + m^2\psi\overline{\psi}\Big] = \mathcal{S}_{\mathrm{NP}}[\psi, \overline{\psi}, A_\mu]. \quad (9)\end{aligned}$$

(iv)

Chceme-li rozštěpit akci na čas a prostor, musíme se primárně postarat o operátor derivace. Podle zadání volíme rozdělení $\mathcal{D} = \vec{\mathcal{D}} + \mathcal{D}_0$ a analogicky pro antipole. Minkowského metrika nám k časové derivaci přidá minus.

$$\mathcal{S}_{\mathrm{NP}} = -\int_\tau \mathrm{d}t \int_V \mathrm{d}^3x \left[-(\dot{\psi} + ie\varphi\psi)(\dot{\overline{\psi}} - ie\varphi\overline{\psi}) + (\vec{\nabla}\psi - ie\vec{A}\psi)\cdot(\vec{\nabla}\overline{\psi} + ie\vec{A}\overline{\psi}) + m^2\psi\overline{\psi}\right], \quad (10)$$

čímž získáváme lagrangián ve tvaru

$$L_{\mathrm{NP}}(\psi, \dot{\psi}, \overline{\psi}, \dot{\overline{\psi}}, \varphi, \vec{A}) = \int_V \mathrm{d}^3x \left[(\dot{\psi} + ie\varphi\psi)(\dot{\overline{\psi}} - ie\varphi\overline{\psi}) - (\vec{\nabla}\psi - ie\vec{A}\psi)\cdot(\vec{\nabla}\overline{\psi} + ie\vec{A}\overline{\psi}) - m^2\psi\overline{\psi}\right]. \quad (11)$$

(v)

Lagrangián, který jsme získali v předchozí sekci, budeme k získání nábojové hustoty a toku náboje dále variovat podle φ a podle $\vec{A}$, můžeme provést obě variace zároveň, protože φ a $\vec{A}$ se ve výrazu vyskytují nezávisle.

$$\delta L_{\mathrm{NP}} = \int_V \mathrm{d}^3x \left[(-ie\dot{\psi}\overline{\psi} + ie\dot{\overline{\psi}}\psi + 2e^2\psi\overline{\psi}\varphi)\delta\varphi - (ie\overline{\psi}\vec{\nabla}\psi - ie\psi\vec{\nabla}\overline{\psi} + 2e^2\psi\overline{\psi}\vec{A})\cdot\delta\vec{A}\right], \quad (12)$$

z čehož dostáváme

$$\rho_{\mathrm{NP}} = -\frac{\delta L_{\mathrm{NP}}}{\delta\varphi} = ie\dot{\psi}\overline{\psi} - ie\dot{\overline{\psi}}\psi - 2e^2\psi\overline{\psi}\varphi, \quad (13)$$

$$\vec{j}_{\mathrm{NP}} = \frac{\delta L_{\mathrm{NP}}}{\delta\vec{A}} = -ie\overline{\psi}\vec{\nabla}\psi + ie\psi\vec{\nabla}\overline{\psi} - 2e^2\psi\overline{\psi}\vec{A}. \quad (14)$$

(vi)

Dále pokračujeme ve variování lagrangiánu, tentokrát však podle „rychlostí“ pole a antipole. Variace se projeví pouze v prvním členu integrandu a lagrangián rozšířený o malou změnu v „rychlostech“ tak píšeme jako

$$L_{\mathrm{NP}}(\dot{\psi} + \delta\dot{\psi}, \dot{\overline{\psi}} + \delta\dot{\overline{\psi}}) = \int_V \mathrm{d}^3x \left[(\dot{\overline{\psi}} - ie\varphi\overline{\psi})\delta\dot{\psi} + (\dot{\psi} + ie\varphi\psi)\delta\dot{\overline{\psi}} \right] + L_{\mathrm{NP}}(\dot{\psi}, \dot{\overline{\psi}}),$$

z čehož vyplývá

$$\pi = \frac{\delta L_{\mathrm{NP}}}{\delta\dot{\psi}} = \dot{\overline{\psi}} - ie\varphi\overline{\psi}, \tag{15}$$

$$\overline{\pi} = \frac{\delta L_{\mathrm{NP}}}{\delta\dot{\overline{\psi}}} = \dot{\psi} + ie\varphi\psi. \tag{16}$$

(vii)

Finálně můžeme napsat hamiltonián podle obecného předpisu.

$$\begin{aligned} H_{\mathrm{NP}} &= \int_\Omega \mathrm{d}^4\Omega \left[\dot{\psi}\pi + \dot{\overline{\psi}}\overline{\pi} \right] - L_{\mathrm{NP}} = \int_\Omega \mathrm{d}^4\Omega \left[(\overline{\pi} - ie\varphi\psi)\pi + (\pi + ie\varphi\overline{\psi})\overline{\pi} \right] - L_{\mathrm{NP}} \\ &= \int_\Omega \mathrm{d}^4\Omega \left[2\overline{\pi}\pi + ie\varphi(\overline{\pi}\overline{\psi} - \pi\psi) \right] - \int_V \mathrm{d}^3x \left[(\dot{\psi} + ie\varphi\psi)(\dot{\overline{\psi}} - ie\varphi\overline{\psi}) - (\vec{\nabla}\psi - ie\vec{A}\psi) \cdot (\vec{\nabla}\overline{\psi} + ie\vec{A}\overline{\psi}) - m^2\psi\overline{\psi} \right] \\ &= \int_\Omega \mathrm{d}^4\Omega \left[2\overline{\pi}\pi + ie\varphi(\overline{\pi}\overline{\psi} - \pi\psi) \right] - \int_V \mathrm{d}^3x \left[\overline{\pi}\pi - (\vec{\nabla}\psi - ie\vec{A}\psi) \cdot (\vec{\nabla}\overline{\psi} + ie\vec{A}\overline{\psi}) - m^2\psi\overline{\psi} \right]. \end{aligned} \tag{17}$$