Excitace provázaných oscilátorů - řešení

Vojtěch Votruba

3. července 2025

Úkol 1

Je zadán stav ψ_N, jež máme normalizovat. Připíšeme-li si k němu normalizační konstantu C, tak

$$|\psi_N\rangle = C\sum_{k=0}^{N} a^k b^{N-k} |k\rangle |N-k\rangle,$$

k nalezení C pak musíme spočítat skalární součin

$$\langle \psi_N|\psi_N\rangle = |C|^2 \sum_{k,k'=0}^{N} a^{k+k'} b^{2-k-k'} \langle k'|k\rangle\langle N-k'|N-k\rangle = \Big/ \langle k'|k\rangle = \langle N-k'|N-k\rangle = \delta_{kk'} \Big/ =$$

$$= |C|^2 \sum_{k=0}^{N} |a^k|^2 |b^{N-k}|^2 \implies C = \frac{1}{\sqrt{\sum_{k=0}^{N} |a^k|^2 |b^{N-k}|^2}}$$

až na libovolnou komplexní fázi $e^{i\delta}$. Využili jsme pouze ortogonalitu vlastních stavů harmonického oscilátoru.

Úkol 2

Definice operátoru hustoty pro nějaký statistický soubor $\{\phi_i\}_{i=1}^n$ je

$$\rho = \sum_{i=1}^{n} p_i |\phi_i\rangle\langle\phi_i|,$$

kde p_i je pravděpodobnost naměření stavu ϕ_i v tomto souboru. Máme-li pouze normalizovaný stav ψ_N, pak operátor hustoty bude

$$\rho = |\psi_N\rangle\langle\psi_N| = |C|^2 \sum_{k,k'=0}^{N} a^k b^{N-k} a^{*k'} b^{*N-k'} |k\rangle\langle k'| \otimes |N-k\rangle\langle N-k'|.$$

Neboť statistický soubor obsahuje pouze jeden konkrétní stav ψ_N s pravděpodobností 100 %, jedná se definitoricky o čistý stav.

Úkol 3

Redukovanou matici hustoty pro první oscilátor získáme „vysčítáním“ přes ortonormální bázi oscilátoru druhého, tj.

$$\rho_r = \sum_{i=0}^{\infty} \langle i|_2 \rho |i\rangle_2 = |C|^2 \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{k,k'=0}^{N} a^k b^{N-k} a^{*k'} b^{*N-k'} |k\rangle\langle k'| \langle i|N-k\rangle\langle N-k'|i\rangle =$$

$$= |C|^2 \sum_{k,k'=0}^{N} a^k b^{N-k} a^{*k'} b^{*N-k'} |k\rangle\langle k'| \langle N-k'| \sum_{i=0}^{\infty} |i\rangle\langle i| |N-k\rangle =$$

$$= |C|^2 \sum_{k,k'=0}^{N} a^k b^{N-k} a^{*k'} b^{*N-k'} |k\rangle\langle k'| \delta_{N-k,N-k'} = |C|^2 \sum_{k=0}^{N} |a^k|^2 |b^{N-k}|^2 |k\rangle\langle k|.$$

Úkol 4

Podle zadání máme spočítat čistotu ρ_r, provedeme-li tak, dostáváme

$$\gamma_r = \mathrm{Tr}(\rho_r^2) = \mathrm{Tr}\left(|C|^4\left[\sum_{k=0}^{N}|a^k|^2|b^{N-k}|^2|k\rangle\langle k|\right]^2\right) =$$

$$= |C|^4\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{N}|a^k|^4|b^{N-k}|^4\langle i|k\rangle\langle k|i\rangle = |C|^4\sum_{k=0}^{N}|a^k|^4|b^{N-k}|^4.$$

Poslední výraz výše bude však vždy menší než 1, a to díky trojúhelníkové nerovnosti ve tvaru

$$\left[\sum_{k=0}^{N}|a^k|^2|b^{N-k}|^2\right]^2 \geq \sum_{k=0}^{N}|a^k|^4|b^{N-k}|^4,$$

kde na levé straně poznáváme $1/|C|^4$ a na pravé sumu výše. Zároveň víme, že přebývající členy na LS budou vždy kladné, neboť jsou sestaveny z absolutních hodnot a a b, které jsou větší než 1. Z toho můžeme usoudit, že stav odpovídající redukované matici není čistý.

Úkol 5

Máme-li připravený smíšený stav s maticí ρ a pozorovatelnou A, spočítáme obecně střední hodnotu této pozorovatelné jako

$$\langle A\rangle = \mathrm{Tr}(\rho A).$$

Tedy pro náš případ s H_1 platí

$$\langle H_1\rangle = \mathrm{Tr}(\rho_r H_1) = \mathrm{Tr}\left(|C|^2\sum_{k=0}^{N}|a^k|^2|b^{N-k}|^2|k\rangle\langle k|\sum_{i=0}^{\infty}\hbar\omega(i+1/2)|i\rangle\langle i|\right) =$$

$$= \hbar\omega|C|^2\sum_{n=0}^{\infty}\langle n|\left(\sum_{k=0}^{N}|a^k|^2|b^{N-k}|^2(k+1/2)|k\rangle\langle k|\right)|n\rangle = \hbar\omega|C|^2\sum_{k=0}^{N}|a^k|^2|b^{N-k}|^2(k+1/2)$$

a dosazením za $N=1$ okamžitě získáváme

$$\langle H_1\rangle = \hbar\omega\frac{1.5|a|^2+0.5|b|^2}{|a|^2+|b|^2}.$$

Úkol 6

Rozepíšeme-li sumu získanou v úkolu 3, dostaneme

$$\rho_r = \frac{1}{|a|^2+|b|^2}(|a|^2|1\rangle\langle 1| + |b|^2|0\rangle\langle 0|),$$

což v konkrétní reprezentaci $|0\rangle = (1,0)^T$, $|1\rangle = (0,1)^T$ odpovídá diagonální matici

$$\rho_r = \frac{1}{|a|^2+|b|^2}\begin{pmatrix}|b|^2 & 0\\ 0 & |a|^2\end{pmatrix} = \frac{1}{2}(I + \boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{\sigma}).$$

Pro nalezení $\boldsymbol{p}$ si uvědomme, že Pauliho matice σ_x, σ_y mají obě pouze mimo diagonální prvky, tzn. nemůžeme z nich lineární kombinací složit diagonální matici. Z toho potom $\boldsymbol{p} = (0,0,p_z)$ a platí například

$$\frac{|b|^2}{|a|^2+|b|^2} = \frac{1}{2}(1+p_z),$$

což je jednoduchá lineární rovnice, jejím vyřešením získáme $p_z = \frac{|b|^2-|a|^2}{|a|^2+|b|^2}$.