Řešení testu z Klasické elektrodynamiky

Vojtěch Votruba

1. listopadu 2024

Úloha 1

Pro nalezení dané hodnoty parametru q vyjdeme z definice axiálně symetrického vektorového pole, podle té musí platit

$$R_\theta \vec{A}(\vec{r}) = \vec{A}(R_\theta \vec{r}), \tag{1}$$

kde R_θ je matice rotace o úhel θ, pro rovinný problém konkrétně $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$. Nejprve se pokusme vypočíst a srovnat složky x obou polí podle vztahu (1). Pro levou stranu máme

$$\begin{aligned} [R_\theta \vec{A}(\vec{r})]_x = & \cos\theta[3(q+1)x^3 + 3(q+1)x^2y - 2(6q+11)xy^2 - 2y^3] \qquad (2)\\ & - \sin\theta[-2(6q+11)x^2y - 3(q+1)xy^2 + 3(q+1)y^3 + 2x^3]. \qquad (3)\end{aligned}$$

A pro pravou stranu

$$\begin{aligned} [\vec{A}(R_\theta \vec{r})]_x = & 3(q+1)(x\cos\theta - y\sin\theta)^3 + 3(q+1)(x\cos\theta - y\sin\theta)^2(y\cos\theta + x\sin\theta) \qquad (4)\\ & - 2(6q+11)(x\cos\theta - y\sin\theta)(y\cos\theta + x\sin\theta)^2 - 2(y\cos\theta + x\sin\theta)^3. \qquad (5)\end{aligned}$$

Mají-li se rovnat dva polynomy, musí se rovnat jejich koeficienty pro každou mocninu proměnné. Zaměřme se na obou stranách na výrazy obsahující x^3 a položme je do rovnosti

$$\begin{aligned} x^3[3(q+1)\cos^3\theta + 3(q+1)\cos^2\theta\sin\theta - 2(6q+11)\cos\theta\sin^2\theta - 2\sin^3\theta] = & \qquad (6)\\ = x^3[3(q+1)\cos\theta - 2\sin\theta], & \qquad (7)\end{aligned}$$

převedením výrazů na jednu stranu a vydělením x^3 dále dostáváme

$$\begin{aligned} -3(q+1)\cos\theta(1-\cos^2\theta) + 3(q+1)\cos^2\theta\sin\theta - 2(6q+11)\cos\theta\sin^2\theta & \qquad (8)\\ +2\sin\theta(1-\sin^2\theta) = -3(q+1)\cos\theta\sin^2\theta + 3(q+1)\cos^2\theta\sin\theta & \qquad (9)\\ -2(6q+11)\cos\theta\sin^2\theta + 2\sin\theta\cos^2\theta = \sin\theta\cos\theta[-3(q+1)\sin\theta + 3(q+1)\cos\theta & \qquad (10)\\ -2(6q+11)\sin\theta + 2\cos\theta] = \sin\theta\cos\theta[\cos\theta(3q+5) + \sin\theta(-15q-15)] = & \qquad (11)\\ = \sin\theta\cos\theta(3q+5)(\cos\theta - 5\sin\theta) = 0. & \qquad (12)\end{aligned}$$

Neboť musí tato rovnost platit pro všechny úhly θ, dostáváme jednoznačnou hodnotu $\underline{\underline{q = -\frac{5}{3}}}$. Zbývá pro ni skutečně ověřit platnost rovnosti (1).

$$\begin{aligned} [R_\theta \vec{A}(\vec{r})]_x = & \cos\theta[-2x^3 - 2x^2y - 2xy^2 - 2y^3] \qquad (13)\\ & - \sin\theta[-2x^2y + 2xy^2 - 2y^3 + 2x^3] = \qquad (14)\\ = & \underline{\underline{-2\cos\theta[x^3 + x^2y + xy^2 + y^3] - 2\sin\theta[-x^2y + xy^2 - y^3 + x^3].}} \qquad (15)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [\vec{A}(R_\theta \vec{r})]_x = & -2(x\cos\theta - y\sin\theta)^3 - 2(x\cos\theta - y\sin\theta)^2(y\cos\theta + x\sin\theta) \qquad (16)\\ & -2(x\cos\theta - y\sin\theta)(y\cos\theta + x\sin\theta)^2 - 2(y\cos\theta + x\sin\theta)^3 = \qquad (17)\\ & = -2(x\cos\theta - y\sin\theta)^2[x(\cos\theta + \sin\theta) + y(\cos\theta - \sin\theta)] - \qquad (18)\\ & 2(y\cos\theta + x\sin\theta)^2[x(\cos\theta + \sin\theta) + y(\cos\theta - \sin\theta)] = \qquad (19)\\ & = -2[x(\cos\theta + \sin\theta) + y(\cos\theta - \sin\theta)][x^2 + y^2] = \qquad (20)\\ = & \underline{\underline{-2[x^3(\cos\theta + \sin\theta) + x^2y(\cos\theta - \sin\theta) + xy^2(\cos\theta + \sin\theta) + y^3(\cos\theta - \sin\theta)].}} \qquad (21)\end{aligned}$$

Vidíme, že členy $[\bullet]_x$ se rovnají, co ale členy $[\bullet]_y$?

$$[R_\theta \vec{A}(\vec{r})]_y = \sin\theta[-2x^3 - 2x^2y - 2xy^2 - 2y^3] \tag{22}$$

$$+\cos\theta[-2x^2y + 2xy^2 - 2y^3 + 2x^3] = \tag{23}$$

$$= \underline{\underline{-2\sin\theta[x^3 + x^2y + xy^2 + y^3] - 2\cos\theta[x^2y - xy^2 + y^3 - x^3].}} \tag{24}$$

$$[\vec{A}(R_\theta \vec{r})]_y = 2(x\cos\theta - y\sin\theta)^3 - 2(x\cos\theta - y\sin\theta)^2(y\cos\theta + x\sin\theta) \tag{25}$$

$$+2(x\cos\theta - y\sin\theta)(y\cos\theta + x\sin\theta)^2 - 2(y\cos\theta + x\sin\theta)^3 = \tag{26}$$

$$= 2(x\cos\theta - y\sin\theta)^2[x(\cos\theta - \sin\theta) - y(\cos\theta + \sin\theta)] + \tag{27}$$

$$2(y\cos\theta + x\sin\theta)^2[x(\cos\theta - \sin\theta) - y(\cos\theta + \sin\theta)] = \tag{28}$$

$$= 2[x(\cos\theta - \sin\theta) - y(\cos\theta + \sin\theta)][x^2 + y^2] = \tag{29}$$

$$= \underline{\underline{2[x^3(\cos\theta - \sin\theta) - x^2y(\cos\theta + \sin\theta) + xy^2(\cos\theta - \sin\theta) - y^3(\cos\theta + \sin\theta)]}}, \tag{30}$$

i zde nacházíme shodu. Můžeme tedy říct, že pole $\vec{A}$ je axiálně symetrické okolo osy procházející kolmo počátkem právě pro $q = -\frac{5}{3}$.

Úloha 2

a)

V elektrostatických problémech tvoří vodiče vždy ekvipotenciální plochy. V naší konfiguraci je jediným vodičem zem, která má být nabitá na 0 V. Abychom tuto skutečnost zajistili, využijeme metodu elektrostatického zrcadlení. Hledané pole se zdroji a zemí bude podle ní ekvivalentní poli generovanému pouze našimi zdroji a zároveň zdroji s opačným nábojem, které budou přes rovinu země zobrazeny pod ni.
Tím jsme ale vystihli pouze jednu část problému. Co atmosférické elektrické pole $\vec{E}_A$? To budeme v rovnicích superponovat s poli našich náhradních zdrojů a jejich zrcadlových obrazů. Neboť je atmosférické pole konstantní, zůstane zachována podmínka země jakožto ekvipotenciální plochy a z rovnice $\vec{E}_A = -\nabla\phi_A$ můžeme snadno vyjádřit $\phi_A(z) = -E_z z + \phi_0$. Pokládáme $\phi_0 = 0$, abychom kromě podmínky konstantního potenciálu země zajistili i jeho nulovost (souřadný systém klademe přesně pod měřicí přístroj do průsečíku roviny země a jeho osy symetrie).

b)

Nyní budeme sestavovat rovnice. Po našem modelu budeme požadovat, aby v místech disku stál přibližně nulový potenciál. To proto, že soustava disků se má chovat jako uzemněný válec, který nulový potenciál má mít na celém svém plášti. Přesný výpočet by byl náročný a protože disky mají poměrně malý poloměr, budeme požadovat nulovost potenciálu pouze v průsečíku s osou z, tj. v místech $r_1 = (0,0,z_1)$ a $r_2 = (0,0,z_2)$. Potenciál jednoho disku ve zploštělých sferoidálních souřadnicích je podle vztahu z přednášky

$$\phi(s) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 a}\left(\frac{\pi}{2} - \arctan\frac{s}{a}\right) \tag{31}$$

a když se pohybujeme pouze na ose z, dostáváme $s = |z|$. Pro disk se středem v z_0 máme potenciál

$$\phi(z) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 a}\left(\frac{\pi}{2} - \arctan\frac{|z - z_0|}{a}\right). \tag{32}$$

Pokládáme tedy $\phi(0,0,z_1) = \phi(0,0,z_2) = 0$ a sčítáme jednotlivé příspěvky. Z první rovnosti získáváme

$$\phi(0,0,z_1) = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 a}\left(\frac{\pi}{2} - \arctan\frac{0}{a}\right) - \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 a}\left(\frac{\pi}{2} - \arctan\frac{2z_1}{a}\right) + \tag{33}$$

$$\frac{Q_2}{4\pi\varepsilon_0 a}\left(\frac{\pi}{2} - \arctan\frac{|z_1 - z_2|}{a}\right) - \frac{Q_2}{4\pi\varepsilon_0 a}\left(\frac{\pi}{2} - \arctan\frac{|z_1 + z_2|}{a}\right) - E_z z_1 = \tag{34}$$

$$= \underline{\underline{\frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 a}\arctan\frac{2z_1}{a} + \frac{Q_2}{4\pi\varepsilon_0 a}\left(\arctan\frac{|z_1 + z_2|}{a} - \arctan\frac{|z_1 - z_2|}{a}\right) - E_z z_1 = 0,}} \tag{35}$$

a ze druhé rovnosti pak

$$\phi(0,0,z_2) = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 a}\left(\frac{\pi}{2} - \arctan\frac{|z_2 - z_1|}{a}\right) - \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 a}\left(\frac{\pi}{2} - \arctan\frac{|z_2 + z_1|}{a}\right) + \tag{36}$$

$$\frac{Q_2}{4\pi\varepsilon_0 a}\left(\frac{\pi}{2} - \arctan\frac{0}{a}\right) - \frac{Q_2}{4\pi\varepsilon_0 a}\left(\frac{\pi}{2} - \arctan\frac{2z_2}{a}\right) - E_z z_2 \tag{37}$$

$$= \frac{Q_2}{4\pi\varepsilon_0 a}\arctan\frac{2z_2}{a} + \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 a}\left(\arctan\frac{|z_2 + z_1|}{a} - \arctan\frac{|z_2 - z_1|}{a}\right) - E_z z_2 = 0. \tag{38}$$

c)

Ke zjištěni číselných hodnot Q_1 a Q_2 stačí už jen vyřešit (35) a (38) soustavu dvou rovnic (viz Dodatek) a dosadit, dostáváme nakonec

$$Q_1 \approx -3{,}58 \times 10^{-9}\,\mathrm{C}, \qquad Q_2 \approx -7{,}27 \times 10^{-9}\,\mathrm{C}. \tag{39}$$

d)

Zde ze získaných výsledků dopočteme poměr toků podstavami. Jelikož nám bude stačit i přibližný výsledek, můžeme v souladu s cílem (tj. aby na podstavách byl konstantní potenciál), předpokládat přibližně kolmé elektrické pole k oběma diskům. Představme si imaginární válec okolo disku, jehož výšku pošleme limitně k nule, a na tuto představu aplikujme Gaussovu větu elektrostatiky

$$\oint \vec{E} \cdot \mathrm{d}S = \frac{Q}{\varepsilon_0}, \tag{40}$$

na levé straně rovnice vidíme přímo definici toku elektrického pole diskem. Ukazuje se tedy, že v této aproximaci bude tok danou náhradní podstavou úměrný náboji této podstavy.
Abychom pak našli poměr obou toků Ψ, stačí nám spočítat poměr nábojů.

$$\frac{\Psi_2}{\Psi_1} = \frac{Q_2}{Q_1} \approx 2,03. \tag{41}$$

Úloha 3

a)

Pro nalezení konstant A, B, C, D, E využijeme pěti fyzikálních skutečnosti a předpokladů, které nám dají pět rovnic, se kterými budeme dál pracovat.

1. Celkový náboj v zadané kouli je Q.
2. Potenciál je vždy spojitý.
3. V kouli nejsou plošné náboje.
4. V kouli nejsou bodové náboje
5. $\phi(\infty) = 0$ a náboj je v kouli rozmístěn ve sférické symetrii.

Začněme prvním tvrzením. To můžeme matematicky vyjádřit integrálem jako

$$\int_{\mathbb{B}(0,a)} \rho \mathrm{d}^3x = Q, \tag{42}$$

kde $\mathbb{B}(0,a)$ je koule se středem v počátku a poloměrem a. Ke zjištění nábojové hustoty ρ v elektrostatice používáme běžně Laplaceovu rovnici, tedy

$$\Delta\phi(r) = -\frac{\rho(r)}{\varepsilon_0} \tag{43}$$

a ze zadaného průběhu potenciálu tak dostáváme

$$\rho(r) = \begin{cases} -\varepsilon_0\Delta(Ar^6 + B + \frac{C}{r}); & 0 < r < \frac{a}{2}, \\ -\varepsilon_0\Delta(\frac{D}{r^3} + E); & \frac{a}{2} < r < a. \end{cases} \tag{44}$$

Laplaceův operátor je lineární a k jeho vypočtení můžeme použít například z přednášky odvozenou identitu $\Delta f(r) = f''(r) + \frac{2}{r}f'(r)$. Zároveň také víme, že $\Delta(\frac{1}{r}) = 4\pi\delta^{(3)}(r)$. Po rozdělení laplaciánu do jednotlivých členů a zderivování tak můžeme psát

$$\rho(r) = \begin{cases} -\varepsilon_0 42Ar^4 - \varepsilon_0 C4\pi\delta^{(3)}(r); & 0 < r < \frac{a}{2}, \\ -\varepsilon_0\frac{6D}{r^5}; & \frac{a}{2} < r < a. \end{cases} \tag{45}$$

Zde se ale pozastavme. Můžeme si všimnout, že řešení Laplaceovy rovnice pro předepsaný potenciál nám vytváří v kouli bodový náboj. To jde ale proti bodu 4 ze zadání, a proto okamžitě vidíme, že jednou z rovnic, která musí platit, je $\underline{\underline{C = 0}}$.

Nyní, když jsme spočetli nábojovou hustotu, můžeme přistoupit k integraci podle rovnice (42). Integrál si přepíšeme pomocí věty o substituci do polárních souřadnic a použijeme Fubiniovu větu. Integrál si pak ještě rozdělíme na dva podle domény integrace a do hustoty podle odvozené rovnice rovnou už dosazujeme $C = 0$.

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{a}\rho(r)r^2\sin(\theta)\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi = \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\pi}\sin(\theta)\mathrm{d}\theta\int_0^{a}\rho(r)r^2\mathrm{d}r = \tag{46}$$

$$= 4\pi\left(\int_0^{\frac{a}{2}}\rho(r)r^2\mathrm{d}r + \int_{\frac{a}{2}}^{a}\rho(r)r^2\mathrm{d}r\right) = -4\pi\varepsilon_0\left(42A\int_0^{\frac{a}{2}}r^6\mathrm{d}r + 6D\int_{\frac{a}{2}}^{a}\frac{\mathrm{d}r}{r^3}\right) = \tag{47}$$

$$= -4\pi\varepsilon_0(\frac{42a^7}{7\cdot 128}A + \frac{9}{a^2}D) = Q, \tag{48}$$

což v elegantnějším zápisu dává

$$\underline{\underline{\frac{9}{a^2}D - \frac{3a^7}{64}A = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}}}. \tag{49}$$

Tím jsme získali dvě rovnice, které potřebujeme k určení hledaných konstant. Dále se zaměřme na spojitost potenciálu. Z matematické formulace spojitosti nám vyplývá, že musí platit rovnost limit z obou směrů například v $r = \frac{a}{2}$, píšeme tedy

$$\lim_{r\to a/2^-}\phi(r) = \lim_{r\to a/2^+}\phi(r), \tag{50}$$

$$\underline{\underline{A\frac{a^6}{64} + B = \frac{8D}{a^3} + E}}, \tag{51}$$

což je třetí z našich rovnic. Co ale podmínka nepřítomnosti plošných nábojů? Tu vyhodnotíme velmi podobně, zajišťuje nám totiž podle Gaussovy věty, že první derivace potenciálu také bude spojitá, máme tak

$$\lim_{r\to a/2^-}\phi'(r) = \lim_{r\to a/2^+}\phi'(r), \tag{52}$$

$$\underline{\underline{A\frac{3a^5}{16} = -\frac{48D}{a^4}}}. \tag{53}$$

Zbývá nakonec využít podmínku z bodu 5. Jelikož je náboj Q rozložen podle sférické symetrie, bude pole vně koule radiálně symetrické: $\vec{E} = E_r\vec{e_r}$. Můžeme pak jednoduše použít Gaussovu větu a vypočítat průběh elektrického pole pro $r > a$

$$\oint_{\partial\mathbb{B}}\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{S} = \frac{Q}{\varepsilon_0} = \tag{54}$$

$$= \oint_{\partial\mathbb{B}}E_r\mathrm{d}S = 4\pi r^2E_r. \tag{55}$$

Z toho dostáváme coulombické pole $\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}\vec{e_r}$, k němuž snadno vypočteme standardní coulombický potenciál s předpokladem $\phi(\infty) = 0$.

$$\phi(a) = -\int_\infty^a \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{a}, \tag{56}$$

takto spočtený potenciál ale musí být kvůli spojitosti ve vzdálenosti a také roven limitě zadaného potenciálu pro $\frac{a}{2} < r < a$, z toho dostáváme

$$\underline{\underline{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{a} = \frac{D}{a^3} + E}}, \tag{57}$$

což je naše poslední rovnice. Všechny čtyři rovnice s konstantami A, B, D, E nyní spojíme dohromady a vyřešíme jako soustavu

$$\begin{pmatrix} -\frac{3a^7}{64} & 0 & \frac{9}{a^2} & 0 \\ \frac{a^6}{64} & 1 & -\frac{8}{a^3} & -1 \\ \frac{3a^5}{16} & 0 & \frac{48}{a^4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{a^3} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \\ D \\ E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 a} \end{pmatrix}, \tag{58}$$

což nám dává (viz Dodatek) hodnoty

$$A = -\frac{64Q}{21\pi\varepsilon_0 a^7}, \qquad B = \frac{8Q}{21\pi\varepsilon_0 a}, \tag{59}$$

$$C = 0, \quad D = \frac{Qa^2}{84\pi\varepsilon_0}, \quad E = \frac{5Q}{21\pi\varepsilon_0 a}. \tag{60}$$

b)

V rámci řešení se nejprve zamysleme nad tím, jaké bude po přesunu nábojů na povrch uvnitř koule elektrické pole. Úloha je stále stále sféricky symetrická a můžeme tak podobně jako v předchozí podúloze užít Gaussovy věty. Ze sférické symetrie bude totiž platit $\vec{E} = E_r\vec{e_r}$ a máme tedy pro $r < a$ levou stranu Gaussovy věty

$$\oint_{\mathbb{B}} \vec{E}(r<a)\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \oint_{\mathbb{B}} E_r(r<a)\mathrm{d}S = E_r(r<a)4\pi r^2, \tag{61}$$

zároveň ale na pravé straně budeme mít 0, neboť uvnitř koule není žádný přebytkový náboj. Z toho dostáváme $E_r(r < a) = 0$ neboli $\vec{E}(r < a) = \vec{0}$. V elektrostatice dále platí $-\nabla\phi = \vec{E}$, takže dostáváme okamžitě $\phi(r < a) =$ konst. Když nyní víme, že uvnitř koule je konstantní potenciál, stačí nám ze spojitosti spočítat jeho hodnotu povrchu.
Znovu budeme postupovat jako v předchozí podúloze, totiž užijeme Gaussovu větu a přeintegrujeme pole od nekonečna na povrch $r = a$. Pole tedy nyní počítáme pro $r > a$.

$$\oint_{\mathbb{B}} \vec{E}(r>a)\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \oint_{\mathbb{B}} E_r(r>a)\mathrm{d}S = E_r(r>a)4\pi r^2 = \frac{Q}{\varepsilon_0}, \tag{62}$$

$$\implies \vec{E}(r>a) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}\vec{e_r}, \quad \phi(r\le a) = -\int_\infty^a \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{r} = -\int_\infty^a E_r\mathrm{d}r = \tag{63}$$

$$= \int_\infty^a \frac{-1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}\mathrm{d}r = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{r}\right]_\infty^a = \underline{\underline{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{a}}}, \tag{64}$$

což po vyjádření náboje jako $Q = 4\pi a^2\sigma$ dává

$$\phi(r\le a) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}a. \tag{65}$$

c)

Nakonec máme za úkol porovnat energii obou konfigurací nábojů. K tomu použijeme vztah z přednášky, který vyjadřuje celkovou energii V pouze za pomocí elektrostatického potenciálu.

$$V = \frac{\varepsilon_0}{2} \int_{\mathbb{R}^3} (\nabla\phi)^2 \mathrm{d}^3 x. \tag{66}$$

Indexy b a a budou odpovídat konfiguracím z příslušných podúloh. V předchozích podúlohách se ukázalo, že potenciál vně nabité koule je v obou konfiguracích nábojů identický, protože je vně identické elektrické pole. K tomu, abychom spočítali rozdíl potenciálních energií $V_a - V_b$, bude tedy stačit uvažovat místo množiny $\mathbb{R}$ množinu $\mathbb{B}(r < a)$, neboť integrály na množině $\mathbb{R} \setminus \mathbb{B}(r < a)$ se odečtou. Zároveň je z předchozí podúlohy jasné, že v dané kouli $\nabla\phi_b = \vec{0}$, a tak $(\nabla\phi_b)^2 = 0$, což odpovídá experimentální zkušenosti, že se náboje samovolně přesunují na povrch vodičů.

$$V_a - V_b = \frac{\varepsilon_0}{2} \int_{\mathbb{B}(r<a)} (\nabla\phi_a)^2 \mathrm{d}^3 x - \frac{\varepsilon_0}{2} \int_{\mathbb{B}(r<a)} (\nabla\phi_b)^2 \mathrm{d}^3 x = \frac{\varepsilon_0}{2} \int_{\mathbb{B}(r<a)} (\nabla\phi_a)^2 \mathrm{d}^3 x - 0 = \tag{67}$$

$$= \frac{\varepsilon_0}{2} \int_{\mathbb{B}(r<a/2)} (\nabla\phi_a)^2 \mathrm{d}^3 x + \frac{\varepsilon_0}{2} \int_{\mathbb{B}(a/2<r<a)} (\nabla\phi_a)^2 \mathrm{d}^3 x. \tag{68}$$

Vzhledem k tomu, že potenciály jsou závislé pouze na r, bude platit $(\nabla\phi)^2 = (\phi'(r))^2$. K výpočtu objemových integrálů znovu použijeme větu o substituci do sférických souřadnic a Fubiniovu větu, díky kterým se nám před integrály objeví faktor 4π.

$$\frac{\varepsilon_0}{2} \int_{\mathbb{B}(r<a/2)} (\nabla\phi_a)^2 \mathrm{d}^3 x + \frac{\varepsilon_0}{2} \int_{\mathbb{B}(a/2<r<a)} (\nabla\phi_a)^2 \mathrm{d}^3 x = \tag{69}$$

$$= \frac{\varepsilon_0}{2} \int_{\mathbb{B}(r<a/2)} 36 \frac{64^2 Q^2}{21^2 \pi^2 \varepsilon_0^2 a^{14}} r^{10} \mathrm{d}^3 x + \frac{\varepsilon_0}{2} \int_{\mathbb{B}(a/2<r<a)} 9 \frac{Q^2 a^4}{84^2 \pi^2 \varepsilon_0^2} \frac{1}{r^8} \mathrm{d}^3 x = \tag{70}$$

$$= \frac{Q^2}{2\pi^2\varepsilon_0} \left(\int_{\mathbb{B}(r<a/2)} 36 \frac{64^2}{21^2 a^{14}} r^{10} \mathrm{d}^3 x + \int_{\mathbb{B}(a/2<r<a)} 9 \frac{a^4}{84^2} \frac{1}{r^8} \mathrm{d}^3 x \right) = \tag{71}$$

$$= \frac{2Q^2}{\pi\varepsilon_0} \left(\frac{16384}{49a^{14}} \int_0^{\frac{a}{2}} r^{12} \mathrm{d}r + \frac{a^4}{784} \int_{\frac{a}{2}}^{a} \frac{1}{r^6} \mathrm{d}r \right) = \tag{72}$$

$$= \frac{2Q^2}{\pi\varepsilon_0} \left(\frac{16384}{49a^{14}} \frac{a^{13}}{13 \cdot 8192} + \frac{a^4}{784} \frac{31}{5a^5} \right) = \underline{\underline{\frac{Q^2}{\pi\varepsilon_0 a} \frac{563}{25480}}}. \tag{73}$$

Dodatek

K vyřešení soustavy na řádcích (35) a (38) jsme použili knihovnu `NumPy` jazyka `Python`, konkrétně skript:

```
import numpy as np

a, z1, z2, Ez, eps = (0.2,0.65,0.93,-600,8.85e-12)

A = np.array([[1/(4*np.pi*eps*a)*np.arctan(2*z1/a),
               1/(4*np.pi*eps*a)*(np.arctan((z1+z2)/a) -
               np.arctan(np.abs(z1-z2)/a))],
              [1/(4*np.pi*eps*a)*(np.arctan((z2+z1)/a) -
              np.arctan(np.abs(z2-z1)/a)),
              1/(4*np.pi*eps*a)*np.arctan(2*z2/a)]])

b = np.array([Ez*z1,Ez*z2])

print(f"Q={np.linalg.solve(A,b)}")
```

A k vyřešení maticové soustavy na řádku (58) zase pomocí knihovny `SymPy`:

```
from sympy import symbols, Rational
from sympy.matrices import Matrix

Q, a = symbols("Q,a")
eps, pi = symbols("eps,pi")

M = Matrix([[Rational(-3/64)*(a**7), 0, 9/(a**2), 0],
            [(a**6)/64, 1, -8/(a**3), -1],
            [Rational(3/16)*(a**5), 0, 48/(a**4), 0],
            [0, 0, 1/(a**3), 1]])

b = Matrix([Q/(4*pi*eps),0,0,Q/(4*pi*eps*a)])

print(M.solve(b))
```