Příklad z teoretické mechaniky č. 3 (2023) - řešení

Vojtěch Votruba

15. prosince 2023

Podúloha 1

Lagrangeova funkce má obecně předpis

$$L = T - V, \tag{1}$$

kde T je kinetická a V je potenciální energie systému. Kinetická energie T zároveň má pro rovinný problém s jednou částicí v kartézských souřadnicích známý tvar

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2), \tag{2}$$

což při jednoduchém převedení[1] do polárních souřadnic odpovídá výrazu

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2). \tag{3}$$

Složitější bude sestavit výraz pro potenciální energii. Elektron se pohybuje v elektromagnetickém poli, proto je síla, která na něj působí, silou Lorentzovou. Jak jsme si ukázali na cvičení, Lorentzova síla má zobecněnou potenciální energii ve tvaru

$$V = e(\phi - \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{A}), \tag{4}$$

kde ϕ je skalární elektrický skalární potenciál, $\boldsymbol{A}$ je vektorový magnetický potenciál a $\boldsymbol{v}$ je rychlost elektronu.
Pro vyjádření $\boldsymbol{A}$ použijeme znovu informaci ze cvičení. Máme-li ze zadání $\boldsymbol{B} = (0, 0, B)$, kde osa z je kolmá na podstavu válců, můžeme jednotlivé složky vektorového potenciálu vyjádřit jako

$$A_x = -\frac{1}{2}By, \quad A_y = \frac{1}{2}Bx, \quad A_z = 0, \tag{5}$$

takto vyjádřený potenciál totiž splňuje rovnici $\nabla \times \boldsymbol{A} = (0, 0, B)$. K získání skalárního potenciálu ϕ využijeme Gaussův zákon (pro vakuum) v integrálním tvaru. S využitím cylindrické symetrie tak máme

$$\oint_S \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \frac{Q_{in}}{\varepsilon_0} \implies E = \frac{Q_{in}}{2\pi r l \varepsilon_0}. \tag{6}$$

A dále integrací, položíme-li hladinu nulového potenciálu na vnitřní válec,

$$\phi(r) = \int_{r_1}^{r} \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int_{r_1}^{r} E \mathrm{d}r = \frac{Q_{in}}{2\pi l \varepsilon_0}(\ln r - \ln r_1). \tag{7}$$

[1] Tento převod jsme již vícekrát prováděli na přednášce, na cvičení nebo při řešení 2. DÚ.

Uvážíme-li, že ze zadání $U = \phi(r_2) - \phi(r_1) = \phi(r_2)$, píšeme elektrický potenciál mezi válci jako

$$\phi = U\frac{\ln r - \ln r_1}{\ln r_2 - \ln r_1}. \tag{8}$$

Nyní již zbývá vyhodnotit výraz $\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{A}$. Dosazujme

$$\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{A} = \dot{x}A_x + \dot{y}A_y = -\dot{x}\frac{1}{2}By + \dot{y}\frac{1}{2}Bx = \frac{1}{2}B(\dot{y}r\cos\varphi - \dot{x}r\sin\varphi) = \tag{9}$$

$$= \frac{1}{2}B(r\cos\varphi(\dot{r}\sin\varphi + r\cos\varphi\dot{\varphi}) - r\sin\varphi(\dot{r}\cos\varphi - r\sin\varphi\dot{\varphi})) = \tag{10}$$

$$= \frac{1}{2}Br^2\dot{\varphi}. \tag{11}$$

Nakonec spojením rovností (3), (4), (8) a (11) dostáváme Lagrangeovu funkci v kýženém tvaru

$$\boxed{L = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) - eU\frac{\ln r - \ln r_1}{\ln r_2 - \ln r_1} + \frac{1}{2}eBr^2\dot{\varphi}}. \tag{12}$$

Podúloha 2

Integrály pohybu nalezneme snadno povšimneme-li si, že: 1) φ je cyklická souřadnice, protože na ní lagrangián nezávisí, a že 2) lagrangián není časově závislý. Tato pozorování vedou k sestavení dvou integrálů pohybu, kdy první z nich bude mít tvar

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \boxed{mr^2\dot{\varphi} + \frac{1}{2}eBr^2 = \text{konst.}} \tag{13}$$

a druhý z nich, který je roven zobecněné energii h,

$$h = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}}\dot{r} + \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}\dot{\varphi} - L = \tag{14}$$

$$= m\dot{r}^2 + mr^2\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}eBr^2\dot{\varphi} - L = \tag{15}$$

$$= \boxed{\frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) + eU\frac{\ln r - \ln r_1}{\ln r_2 - \ln r_1} = \text{konst.}} \tag{16}$$

Podúloha 3

K využití získaných integrálu pohybu srovnáme dva body trajektorie elektronu. Prvním bude počátek pohybu, kdy je elektron kolmo vystřelen z katody s rychlostí v_0, druhým pak bude okamžik, kdy se elektron přiblíží nekonečně blízko k anodě, ale zároveň na ni nezůstane. Aby druhá situace mohla nastat, nastavujeme magnetické pole na jeho kritickou hodnotu B_c.

V počátku trajektorie okamžitě nahlédneme, že bude platit $r = r_1$, $\dot{r} = v_0$, ale zároveň také $\dot{\varphi} = 0$, neboť počáteční rychlost má pouze kolmou radiální složku. Ve bodě „dotyku" pak bude samozřejmě platit $r = r_2$ a také $\dot{r} = 0$. To proto, že rychlost se mění spojitě a má-li změnit svoje znaménko, musí v mezičase existovat bod, kdy bude rovna 0. Nejprve srovnejme obě situace dosazením do prvního integrálu pohybu.

$$\frac{1}{2}eB_cr_1^2 = mr_2^2\dot{\varphi} + \frac{1}{2}eB_cr_2^2, \tag{17}$$

Vystupuje nám zde neznámá úhlová rychlost, tu si vyjádříme

$$\dot{\varphi} = \frac{1}{2} B_c \frac{r_1^2 - r_2^2}{r_1^2} \left(\frac{e}{m}\right). \tag{18}$$

Srovnáme-li nyní obě situace ve druhém integrálu pohybu, uvidíme, že se nám objeví právě ono stejné $\dot{\varphi}$ v kvadrátu

$$\frac{1}{2} m v_0^2 = eU + \frac{1}{2} m r_2^2 \dot{\varphi}^2, \tag{19}$$

pak po dosazení vychází

$$\frac{1}{2} v_0^2 = U \left(\frac{e}{m}\right) + \frac{1}{2} r_2^2 \left[\frac{1}{2} B_c \frac{r_1^2 - r_2^2}{r_2^2} \left(\frac{e}{m}\right)\right]^2, \tag{20}$$

$$\frac{1}{8} B_c^2 \frac{(r_1^2 - r_2^2)^2}{r_2^2} \left(\frac{e}{m}\right)^2 + U \left(\frac{e}{m}\right) - \frac{1}{2} v_0^2 = 0, \tag{21}$$

což je kvadratická rovnice pro $\frac{e}{m}$. Tu jednoduše vyřešíme známým vzorcem. V této úloze fyzikální smysl má řešení s -, protože náboj elektronu musí vyjít záporný.

$$\frac{e}{m} = \frac{-U - \sqrt{U^2 + \frac{1}{4} v_0^2 B_c^2 \frac{(r_1^2 - r_2^2)^2}{r_2^2}}}{\frac{1}{4} B_c^2 \frac{(r_1^2 - r_2^2)^2}{r_2^2}} = \tag{22}$$

$$= -\frac{4Ur_2^2 + \sqrt{16U^2 r_2^4 + 4v_0^2 B_c^2 (r_1^2 - r_2^2)^2 r_2^2}}{B_c^2 (r_1^2 - r_2^2)^2} = \tag{23}$$

$$= \boxed{-\frac{4Ur_2^2 + 2\sqrt{4U^2 r_2^4 + v_0^2 B_c^2 (r_2^2 - r_1^2)^2 r_2^2}}{B_c^2 (r_2^2 - r_1^2)^2}}. \tag{24}$$

Podúloha 4

Pro spočtení Hamiltonovy funkce H je potřeba vyjádřit zobecněnou energii h za pomocí kanonických hybností p_j definovaných na fázovém prostoru. Pro tyto hybnosti platí

$$p_r = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}}, \qquad p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}, \tag{25}$$

abychom však mohli dosadit do výrazu pro zobecněnou energii, bude nás zajímat spíše inverze těchto vztahů neboli závislost $q^j = q^j(p_j)$. Vypočtením parciálních derivací získáváme

$$p_r = m\dot{r}, \qquad p_\varphi = mr^2 \dot{\varphi} + \frac{1}{2} eBr^2 \tag{26}$$

a jednoduchou inverzí těchto vztahů pak

$$\dot{r} = \frac{p_r}{m}, \qquad \dot{\varphi} = \frac{p_\varphi - \frac{1}{2} eBr^2}{mr^2}. \tag{27}$$

Za tyto veličiny už zbývá jen dosadit do výrazu pro zobecněnou energii (16).

$$\boxed{H = h(r, p_r, p_\varphi) = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{(p_\varphi - \frac{1}{2} eBr^2)^2}{2mr^2} + eU \frac{\ln r - \ln r_1}{\ln r_2 - \ln r_1}}. \tag{28}$$

Podúloha 5

Ke splnění posledního úkolu nejprve vyjádříme Hamiltonovy kanonické rovnice. Ty mají pro naše souřadnice obecně tvar

$$\frac{\partial H}{\partial p_r} = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}, \qquad -\frac{\partial H}{\partial r} = \frac{\mathrm{d}p_r}{\mathrm{d}t}, \tag{29}$$

$$\frac{\partial H}{\partial p_\varphi} = \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}, \qquad -\frac{\partial H}{\partial \varphi} = \frac{\mathrm{d}p_\varphi}{\mathrm{d}t}, \tag{30}$$

což po dosazení za hamiltonián z předchozí podúlohy vede na sadu rovnic pro r

$$\frac{p_r}{m} = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}, \qquad \frac{p_\varphi^2}{mr^3} - \frac{1}{4m}e^2B^2r - \frac{eU}{r(\ln r_2 - \ln r_1)} = \frac{\mathrm{d}p_r}{\mathrm{d}t} \tag{31}$$

a na sadu rovnic pro úhel φ

$$\frac{p_\varphi - \frac{1}{2}eBr^2}{mr^2} = \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}, \qquad 0 = \frac{\mathrm{d}p_\varphi}{\mathrm{d}t}. \tag{32}$$

Abychom ověřili platnost výsledku pro měrný elektrický náboj pomocí Hamiltonova formalismu, vyjdeme nejprve ze samotného hamiltoniánu. Ten je časově nezávislý a jde tedy podle věty z přednášky o integrál pohybu.

$$\frac{p_r^2}{2m} + \frac{(p_\varphi - \frac{1}{2}eBr^2)^2}{2mr^2} + eU\frac{\ln r - \ln r_1}{\ln r_2 - \ln r_1} = \text{konst.} \tag{33}$$

Nyní podobně, jako jsme to již dělali v předchozí podúloze, budeme srovnávat situaci při vypuštění elektronu z katody se situací při jeho „dotyku" anody. Nemáme zde k dispozici integrál pohybu, který vyvstal z cykličnosti φ, a proto vyjdeme z kanonických rovnic.

Nejprve studujme hamiltonián při výstřelu elektronu. Z první[2] kanonické rovnice vidíme, že na začátku jistě platí $\frac{p_r}{m} = v_0$ a samozřejmě také $r = r_1$. Z poslední, čtvrté, Hamiltonovy rovnice můžeme vypozorovat, že kanonická hybnost p_φ je v čase konstantní, zároveň ale musí platit vždy platit i třetí rovnice, kdy při vypuštění elektronu je $\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}$ jistě 0. Můžeme tedy psát

$$\frac{p_\varphi - \frac{1}{2}eBr_1^2}{mr_1^2} = 0 \implies p_\varphi = \frac{1}{2}eBr_1^2, \tag{34}$$

Za výše zmíněné veličiny již můžeme dosadit do Hamiltonovy funkce

$$H = \frac{1}{2}mv_0^2. \tag{35}$$

Dále dosazujme v bodě „dotyku". Při něm jistě bude platit $r = r_2$ a také $\frac{p_r}{m} = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = 0$. Stejně tak bude znovu platit rovnice (34), protože p_φ je konstantní. Dosazením do Hamiltonovy funkce zde získáváme

$$H = \frac{1}{8}e^2B^2\frac{(r_1^2 - r_2^2)^2}{mr^2} + eU, \tag{36}$$

položíme-li oba získané hamiltoniány do rovnosti, máme celkem

$$\boxed{\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{8}e^2B^2\frac{(r_1^2 - r_2^2)^2}{mr^2} + eU}, \tag{37}$$

což je stejná rovnice jako rovnice (21), z níž jsme získali měrný elektrický náboj.

[2]Rovnice čísluji zleva doprava, zeshora dolů, tak jak jsem je zapsal na řádcích (29) až (31).