Řešení domácí úlohy z Klasické elektrodynamiky

Vojtěch Votruba

1. listopadu 2024

Polní rovnice

1

Laplaceova rovnice ve 2D nám říká, že

$$\nabla^2\phi_k(x,z) = \frac{\partial^2\phi_k}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi_k}{\partial z^2} = 0,$$

napočítáme-li si tedy příslušné derivace (pro $z \neq 0$ využíváme $(|z|')^2 = 1$ a $|z|'' = 0$), dostáváme

$$[-p_k k^2\cos(kx) - q_k k^2\sin(kx)]h(|z|) + [p_k\cos(kx) + q_k\sin(kx)]h''(|z|) = 0, \tag{1}$$

z čehož plyne

$$-k^2h(|z|) + h''(|z|) = 0.$$

To je homogenní lineární diferenciální rovnice s konstantními koeficienty a ty mají typicky řešení tvaru $h(|z|) = A_k\exp\mu|z|$. Z rovnice okamžitě vidíme, že dosazení za exponenciálu nám dává řešení $\mu = \pm k$, a tak víme, že funkce $h(|z|)$ bude vypadat jako

$$h(|z|) = A_k\mathrm{e}^{-k|z|} + B_k\mathrm{e}^{k|z|},$$

aby pak byla splněna podmínka $\phi_k(x,z) \to 0, z \to \infty$, musí jistě platit $B = 0$. V opačném případě by nám totiž exponenciála s kladným nekonečnem zařídila divergenci. Máme celkem

$$\underline{\underline{h(|z|) = A_k\mathrm{e}^{-k|z|}}}.$$

2

V předchozím bodě jsme zařídili, aby nábojová hustota ρ_k, která se podle Gaussova zákona spočte jako $\rho_k = -\epsilon_0\nabla^2\phi_k$, byla pro všechna $z \neq 0$ nulová. Co ale body $z = 0$? Vidíme, že nám stále platí (alespoň v limitě) $(|z|')^2 = 1$ a také $|z|'' = \delta(z)$. Do vzorce (1) tedy musíme ještě přidat faktor s $\delta(z)$, který nám tentokrát ale nevymizí.

$$\rho_k(x,0) = -2\epsilon_0[p_k\cos(kx)+q_k\sin(kx)]h'(|0|)\delta(0) = 2\epsilon_0 kA_k[p_k\cos(kx)+q_k\sin(kx)]\delta(0) = \sigma(x)\delta(0).$$

Vidíme, že z výpočtu dostáváme plošnou[1] nábojovou hustotu $\sigma(x)$, což je význam naší hustoty.

Symetrie

3

Kdybychom měli symetrie nějak klasifikovat, řekli bychom, že T je *translační* symetrií, P je *rovinnou* symetrií a C je *translační* antisymetrií. Průběh potenciálu v prostoru závisí v elektrostatice pouze na prostorovém rozložení náboje, a proto se při vyšetřování symetrií opřeme právě o něj.

[1] V našem dvourozměrném modelu vlastně lineární

Symetrie T vychází z periodického rozložení elektrod stejného tvaru a střídavé plošné nábojové hustoty na ose x. Kdybychom si do prostoru položili pozorovatele a provedli na něj posun o $n\lambda$ na ose x, tak by pozorovatel z prostorového uspořádání elektrod kolem sebe nebyl schopen rozeznat, o kolik $n\lambda$ od počátku se nachází.

Symetrie P vychází z faktu, že počátek se nachází přesně v polovině x-ového rozměru první elektrody. Náš imaginární pozorovatel byl nebyl schopen z prostorového rozložení náboje rozeznat, zda se nachází v místě x nebo $-x$, jeho relativní poloha vůči nejbližším kladně, resp. záporně nabitým elektrodám je pro oba případy stejná, a proto musí být stejný i potenciál.

Antisymetrie C vychází z periodického rozložení elektrod, ale hlavně také z jejich střídavého znaménka nábojové hustoty. Posune-li se pozorovatel o $\frac{\lambda}{2}$, vůbec se nezmění jeho relativní vzdálenost k nejbližším elektrodám, ale změní se znaménko, na které jsou ony nejbližší elektrody nabity.

4

Pro uplatnění symetrií si rozebereme body $x = 0$ a $x = \lambda/4$ zvlášť. Elektrické pole počítáme jako $\vec{E} = -\nabla\phi$ a rozložíme si ho do složek ve směru osy x a ve směru osy z.

- $x = 0$. Pro tento bod bude $E_x = 0$. To proto, že elektrické pole je dáno gradientem potenciálu. Napíšeme-li z definice $\partial_x\phi$:

  $$-E_x = \frac{\partial\phi}{\partial x}(0, z) = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\phi(\varepsilon/2, z) - \phi(-\varepsilon/2, z)}{\varepsilon},$$

  tak vidíme, že ze symetrie P je jmenovatel zlomku vždy nulový. Problematické by mohlo být, kdyby derivace nebyla definovaná, což by ale vyžadovalo přítomnost plošného náboje na ose z, který není zadaný.

- $x = \lambda/4$ - pro tento bod naopak bude $E_z = 0$, to odvodíme z kombinace symetrií P a C, dosadíme-li do symetrie C za $-\lambda/4$, dostáváme $\phi(\lambda/4, z) = -\phi(-\lambda/4, z)$, ale zároveň víme z P, že $\phi(\lambda/4, z) = \phi(-\lambda/4, z)$, z toho nám plyne, že na osách $x = \pm\lambda/4$ musí všude platit $\phi = 0$ a že se potenciál v rámci osy z vůbec nemění, třetí složka jeho gradientu tak bude nulová.

5

V symetriích se nijak neprojevuje závislost pole na souřadnici z, stačí nám tedy zkoumat separovanou část ϕ_k závislou pouze na x.

- Ze symetrie P okamžitě vidíme, že funkce $\phi_k(x, z)$ musí být *sudá*, z toho důvodu musíme položit $q_k = 0$, aby nám ve výrazu zůstal pouze cosinus.
- Abychom zařídil symetrii C, musí nám platit, že $\cos(kx) = -\cos(kx + k\lambda/2)$, tato rovnost nastává v případě, že $kx + \pi(2i-1) = kx + \frac{k\lambda}{2}$ neboli $k = \frac{2\pi}{\lambda}(2i-1)$, kde $i \in \mathbb{Z}$.
- Symetrie T pak už vyplývá z požadavku na symetrii C, což můžeme ověřit výpočtem

  $$\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}(2i-1)(x+n\lambda)\right) = \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}(2i-1)x + 2\pi n(2i-1)\right) = \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}(2i-1)x\right).$$

Hledaný nejobecnější tvar $\phi_k(x, z)$ tedy je

$$\phi_k(x, z) = a_i \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}(2i-1)x\right) \exp\left(-\frac{2\pi}{\lambda}(2i-1)|z|\right), \quad i \in \mathbb{Z}.$$

6

Aby ϕ_k byly navzájem lineárně nezávislé funkce, musíme se omezit s i na množinu přirozených čísel (protože $\cos(x) = \cos(-x)$), tzn. $\mathcal{K} = \{\frac{2\pi}{\lambda}(2i-1);\ \text{kde } i \in \mathbb{N}\}$. Bázi řešení tedy napíšeme jako

$$\psi_k(x,z) = \cos(kx)\,\mathrm{e}^{-k|z|}, \quad k \in \mathcal{K} = \left\{\frac{2\pi}{\lambda}(2i-1);\ \text{kde } i \in \mathbb{N}\right\}.$$

Rozhraní prostředí

7

Jelikož elektrody jsou vodivé, musí být v místě, kde jsou, ekvipotenciální plochy. Bude nám tak pro ně platit R_1 v podobě:

$$\phi(x,z) = \pm U,$$

kde znaménko záleží, na tom, na jaké elektrodě se zrovna nacházíme.

8

V místech, kde nejsou elektrody, budeme muset uplatnit rovnice pro podmínky na rozhraní tak, jak jsou zapsány v zadání[2]. Celkový potenciál si napíšeme jako

$$\phi(x,z) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i \cos(k_i x)\mathrm{e}^{-k_i|z|} + \sum_{i=1}^{\infty} b_i \cos(k_i x)\mathrm{e}^{-k_i|z-w|}, \tag{2}$$

v podmínkách na rozhraní se nám vyskytuje normála k dané ploše $\vec{n}$, ta bude v našem případě mířit ve směru osy z a tedy $\vec{n} = (0,1)$, okamžitě pak vidíme $\vec{n} \times [\vec{E}] = -[E_x]$ a $\vec{n} \cdot [\vec{D}] = [D_z]$.

Z potenciálu výše dále můžeme usoudit, že nespojitost elektrického pole ve smyslu souřadnice x bude 0 automaticky, neboť funkce cosinus je nekonečně hladká. Musíme se proto zaměřit na druhou podmínku vztahující se k elektrické indukci, což bude vyžadovat napočítat si parciální derivaci potenciálu podle osy z. Z definice můžeme psát

$$\begin{aligned}
[D_z] &= \lim_{\varepsilon \to 0}(D_z(x,\varepsilon) - D_z(x,-\varepsilon)) = \lim_{\varepsilon \to 0}(-\epsilon_0 \frac{\partial}{\partial z}\phi(x,\varepsilon) + \epsilon_0\epsilon_r \frac{\partial}{\partial z}\phi(x,-\varepsilon)) = \\
&= \epsilon_0 \lim_{\varepsilon \to 0}\Bigg(\sum k_i \cos(k_i x) \left[a_i \mathrm{e}^{-k_i|\varepsilon|} + b_i \mathrm{e}^{-k_i|\varepsilon - w|}\operatorname{sgn}(\varepsilon - w)\right] - \\
&\quad - \epsilon_r \sum k_i \cos(k_i x) \left[-a_i \mathrm{e}^{-k_i|-\varepsilon|} - b_i \mathrm{e}^{-k_i|-\varepsilon-w|}\right] \Bigg) = \\
&= \epsilon_0 \sum k_i \cos(k_i x) \lim_{\varepsilon \to 0} \left(a_i[\mathrm{e}^{-k_i|\varepsilon|} + \epsilon_r \mathrm{e}^{-k_i|-\varepsilon|}] + b_i[\mathrm{e}^{-k_i|\varepsilon-w|}\operatorname{sgn}(\varepsilon - w) + \epsilon_r \mathrm{e}^{-k_i|-\varepsilon-w|}]\right) = \\
&= \underline{\underline{\epsilon_0 \sum k_i \cos(k_i x)(a_i[1+\epsilon_r] + b_i \mathrm{e}^{-k_i w}[-1+\epsilon_r]) = 0.}}
\end{aligned}$$

[2]Pro naše účely definujeme dvourozměrný vektorový součin jako $\vec{a} \times \vec{b} = a_1 b_2 - a_2 b_1$.

9

Obdobným způsobem musíme pak sestavit rovnici R_3. Normála nám zůstává stejná, a proto platí podobné argumenty výše, znovu nás znovu zajímá $[D_z]$, které budeme počítat následovně:

$$[D_z] = \lim_{\varepsilon\to 0}(D_z(x,w+\varepsilon) - D_z(x,w-\varepsilon)) = \lim_{\varepsilon\to 0}(-\epsilon_0\epsilon_r \frac{\partial}{\partial z}\phi(x,w+\varepsilon) + \epsilon_0\frac{\partial}{\partial z}\phi(x,w-\varepsilon)) =$$

$$= \epsilon_0 \lim_{\varepsilon\to 0}\Bigg(\epsilon_r \sum k_i\cos(k_i x)\left[a_i \mathrm{e}^{-k_i|w+\varepsilon|} + b_i\mathrm{e}^{-k_i|\varepsilon|}\right] -$$

$$-\sum k_i \cos(k_i x)\left[a_i\mathrm{e}^{-k_i|w-\varepsilon|}\mathrm{sgn}(w-\varepsilon) - b_i\mathrm{e}^{-k_i|-\varepsilon|}\right]\Bigg) =$$

$$= \epsilon_0 \sum k_i\cos(k_i x)\lim_{\varepsilon\to 0}\left(a_i[\epsilon_r\mathrm{e}^{-k_i|w+\varepsilon|} - \mathrm{e}^{-k_i|w-\varepsilon|}\mathrm{sgn}(w-\varepsilon)] + b_i[\epsilon_r\mathrm{e}^{-k_i|\varepsilon|} + \mathrm{e}^{-k_i|-\varepsilon|}]\right) =$$

$$= \underline{\underline{\epsilon_0\sum k_i\cos(k_i x)(a_i\mathrm{e}^{-k_i|w|}[\epsilon_r - 1] + b_i[\epsilon_r+1]) = 0.}}$$

10

Požadujeme-li, aby rovnice R_3 platila pro všechna x přes celou sumaci, musíme požadovat rovnost 0 v každém členu nezávislou na koeficientech a funkci cosinus, konkrétně

$$a_i\mathrm{e}^{-k_i w}(1-\epsilon_r) = b_i(\epsilon_r+1).$$

Síla

11

Vyjdeme z téměř definiční rovnice pro sílu působící na nějakou dvourozměrnou množinu Σ

$$\vec{F} = \iint_\Sigma \sigma(\vec{r})\vec{E}(\vec{r})\,\mathrm{d}S,$$

pro případ v naší úloze pak

$$F_z = \iint_{z=w}\sigma(\vec{r})E_z(\vec{r})\,\mathrm{d}S \implies p(x) = \sigma(x)E_z(x).$$

Z Gaussovy věty pro plošný náboj nám bude platit rovnost $\epsilon_0 \mathrm{Div}\vec{E} = \epsilon_0\vec{n}\cdot[\vec{E}] = \epsilon_0[E_z] = \sigma(x)$, kde σ je plošná nábojová hustota pouze vázaných nábojů, protože na rozhraní nejsou žádné volné náboje. Píšeme z (2)

$$\sigma(x) = \epsilon_0[E_z] = \epsilon_0\lim_{\varepsilon\to 0}\Bigg(\sum k_i\cos(k_i x)\left[\cancel{a_i\mathrm{e}^{-k_i|w+\varepsilon|}} + b_i\mathrm{e}^{-k_i|\varepsilon|}\right] +$$

$$+\sum k_i\cos(k_i x)\left[\cancel{-a_i\mathrm{e}^{-k_i|w-\varepsilon|}\mathrm{sgn}(w-\varepsilon)} + b_i\mathrm{e}^{-k_i|-\varepsilon|}\right]\Bigg) = \epsilon_0\sum 2k_i b_i\cos(k_i x).$$

Dále je potřeba nějak napočítat působící elektrické pole E_z. Vzhledem k tomu, že vázané náboje v rovině $z=w$ na sebe mohou působit pouze ve směru této roviny budou příspěvky k poli E_z rovny pouze příspěvkům od nábojů umístěných na dolní rovině $z=0$, dostáváme

$$E_z(x) = -\frac{\partial\phi}{\partial z} = \sum a_i k_i\cos(k_i x)\mathrm{e}^{-k_i w} \implies \underline{\underline{p(x) = 2\epsilon_0\left(\sum b_i k_i\cos(k_i x)\right)\left(\sum a_i k_i\cos(k_i x)\mathrm{e}^{-k_i w}\right)}}.$$

Když máme spočítané p, můžeme dál provést jednoduché průměrování pro spojitou veličinu přes x ve tvaru

$$\overline{p} = \frac{1}{\lambda}\int_{-\lambda/2}^{\lambda/2} 2\epsilon_0\left(\sum b_i k_i\cos(k_i x)\right)\left(\sum a_i k_i\cos(k_i x)\mathrm{e}^{-k_i w}\right)\,\mathrm{d}x,$$

díky tomu, že systém cosinů je ortogonální, musí se nám vždy potkat stejná k_i, aby integrál byl nenulový. V případě, že se nám dva cosiny v argumentu potkají, dostáváme jejich integrací:

$$\frac{2\epsilon_0}{\lambda}\sum a_i b_i k_i^2 \mathrm{e}^{-k_i w}\int_{-\lambda/2}^{\lambda/2}\cos^2(k_i x)\ \mathrm{d}x = \frac{\epsilon_0}{\lambda}\sum a_i b_i k_i^2 \mathrm{e}^{-k_i w}\int_{-\lambda/2}^{\lambda/2} 1+\cancel{\cos(2k_i x)}\ \mathrm{d}x = \underline{\underline{\epsilon_0 \sum a_i b_i k_i^2 \mathrm{e}^{-k_i w}}}.$$

Přibližné řešení

12

Při zanedbaní jiných členů než je a_1 a b_1 dostáváme popořadě z rovnic R_1, R_3 a z výpočtu tlaku

$$a_1 + b_1 \mathrm{e}^{-\frac{2\pi}{\lambda}w} = U, \tag{3}$$

$$a_1 \mathrm{e}^{-\frac{2\pi}{\lambda}w}[\epsilon_r - 1] + b_1[1+\epsilon_r] = 0, \tag{4}$$

$$\overline{p} = \epsilon_0 a_1 b_1 \frac{4\pi^2}{\lambda^2}\mathrm{e}^{-\frac{2\pi}{\lambda}w}. \tag{5}$$

Dosazením z rovnice (3) do (4) a vyřešením získáváme

$$a_1 = \frac{U(1+\epsilon_r)}{1+\epsilon_r+(1-\epsilon_r)\mathrm{e}^{-4\pi w/\lambda}}, \qquad b_1 = \frac{Ue^{-2\pi/\lambda w}(1-\epsilon_r)}{1+\epsilon_r+(1-\epsilon_r)\mathrm{e}^{-4\pi w/\lambda}}$$

a tlak pak můžeme vypočíst na hodnotu

$$\overline{p} = \epsilon_0 U^2 \frac{4\pi^2}{\lambda^2}\frac{1-\epsilon_r^2}{(1+\epsilon_r+[1-\epsilon_r]\mathrm{e}^{-4\pi w/\lambda})^2}\mathrm{e}^{-4\pi w/\lambda}.$$