Příklad z teoretické mechaniky č. 2 (2023) - řešení

Vojtěch Votruba

24. listopadu 2023

Podúloha 1

Lagrangeova funkce obecně má tvar

$$\mathcal{L} = T - V \tag{1}$$

neboli v kartézských souřadnicích pro rovinný problém

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - V(x, y). \tag{2}$$

Leč v této úloze je použití kartézských souřadnic nevhodné, budeme chtít používat souřadnice ξ a φ, proto v nich musíme $\dot{x}^2$ a $\dot{y}^2$ vyjádřit.

$$x = r\cos\varphi, \qquad y = r\sin\varphi, \tag{3}$$

$$x = (\xi + R)\cos\varphi, \qquad y = (\xi + R)\sin\varphi. \tag{4}$$

Zderivováním pak získáváme

$$\dot{x} = -R\sin\varphi\dot{\varphi} + \dot{\xi}\cos\varphi - \xi\sin\varphi\dot{\varphi}, \tag{5}$$

$$\dot{y} = R\cos\varphi\dot{\varphi} + \dot{\xi}\sin\varphi + \xi\cos\varphi\dot{\varphi}, \tag{6}$$

tyto dva výrazy nyní umocníme na druhou a sečteme, využíváme zde identitu $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$, čímž se nám sčítance výrazně zjednoduší, máme tedy celkem

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = R^2\dot{\varphi}^2 + \dot{\xi}^2 + \dot{\varphi}^2\xi^2 + 2R\xi\dot{\varphi}^2, \tag{7}$$

což už můžeme zpětně dosadit do Lagrangeovy funkce v rovnici (2). Za V můžeme dále dosadit potenciální energii podle zadání: $V = C\ln r = C\ln(R + \xi)$. Získáváme

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m(R^2\dot{\varphi}^2 + \dot{\xi}^2 + \dot{\varphi}^2\xi^2 + 2R\xi\dot{\varphi}^2) - C\ln(R + \xi), \tag{8}$$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m\dot{\xi}^2 + \frac{1}{2}m\dot{\varphi}^2(R^2 + \dot{\xi}^2 + 2R\xi) - C\ln(R + \xi), \tag{9}$$

$$\boxed{\mathcal{L} = \frac{1}{2}m\dot{\xi}^2 + \frac{1}{2}m\dot{\varphi}^2(R + \xi)^2 - C\ln(R + \xi).} \tag{10}$$

Podúloha 2

Nyní hledáme integrály pohybu. Z rovnice (10) vidíme, že Lagrangeova funkce nezávisí na souřadnici φ, jde tedy o cyklickou souřadnici. To nám dává okamžitě první integrál pohybu[1]

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} = m\dot{\varphi}(R + \xi)^2 = \text{konst.} \tag{11}$$

[1] Jde samozřejmě o zákon zachování momentu hybnosti, jak můžeme vidět už z rozměrů.

Druhý integrál pohybu získáme, všimneme-li si, že Lagrangeova funkce explicitně nezávisí na čase. Zachovává se tedy zobecněná energie a dostáváme, že integrálem pohybu je funkce

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}}\dot{\varphi} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\xi}}\dot{\xi} - \mathcal{L} = \tag{12}$$

$$m\dot{\varphi}^2(R+\xi)^2 + m\dot{\xi}^2 - \mathcal{L} = \tag{13}$$

$$\frac{1}{2}m\dot{\xi}^2 + \frac{1}{2}m\dot{\varphi}^2(R+\xi)^2 + C\ln(R+\xi) = T + V. \tag{14}$$

Podúloha 3

V této sekci máme sestavit pohybové rovnice. Ty obecně budou mít tvar Lagrangeových rovnic 2. druhu neboli

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi}, \tag{15}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\xi}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \xi}. \tag{16}$$

V konkrétní podobě první z nich získáme okamžitě z integrálu pohybu (11). Stačí ho zderivovat podle času a položit roven nule

$$m\ddot{\varphi}(R+\xi)^2 + m\dot{\varphi}(2R\dot{\xi} + 2\xi\dot{\xi}) = 0 \tag{17}$$

$$\boxed{\ddot{\varphi}(R+\xi)^2 + 2\dot{\varphi}\dot{\xi}(R+\xi) = 0.} \tag{18}$$

Druhou pohybovou rovnici pak získáme standardně dosazením za lagrangián a provedením derivací. Máme tedy

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m\dot{\xi}) = m\dot{\varphi}^2(R+\xi) - \frac{C}{R+\xi}, \tag{19}$$

$$\boxed{m\ddot{\xi} - m\dot{\varphi}^2(R+\xi) + \frac{C}{R+\xi} = 0.} \tag{20}$$

Podúloha 4

Aby se částice pohybovala po kruhové[2] orbitě, musí platit, že $\xi = \text{konst.}$, z toho také plyne, že $\dot{\xi} = 0$ a $\ddot{\xi} = 0$. Za tohoto předpokladu pro konkrétní počáteční podmínky ze zadání platí dokonce $\xi(t) = \xi(t=0) = R - R = 0$, dále platí $R\dot{\varphi}(t=0) = v_0$ neboli $\dot{\varphi}(t=0) = \frac{v_0}{R}$.
Uvážíme-li, že pohybové rovnice musí platit ve všech časech, můžeme za všechny veličiny pro čas $t = 0$ dosadit do vztahu (20)

$$m \cdot 0 - m\frac{v_0^2}{R^2}(R+0) + \frac{C}{R+0} = 0, \tag{21}$$

$$\frac{C}{R} = m\frac{v_0^2}{R}, \tag{22}$$

$$C = mv_0^2, \tag{23}$$

čímž jsme dostali podmínku pro kružnicovost orbity při daných počátečních podmínkách.

[2] Přesněji snad kružnicové.

Podúloha 5

Zde řešíme pohybové rovnice pro jiné počáteční podmínky. Z předchozí úlohy nám ale zůstává $C = mv_0^2$. Znovu také využijeme první integrál pohybu (11), z něhož budeme dosazovat do druhé pohybové rovnice (20).
Nejprve však z počátečních podmínek vyjádřeme konstantu, které je roven první integrál pohybu

$$m\dot{\varphi}(t=0)\cdot(R+\xi(t=0))^2 = m(v_0+\eta_0)(R+\xi_0), \tag{24}$$

máme tedy pro všechny časy t

$$\dot{\varphi}(R+\xi)^2 = (v_0+\eta_0)(R+\xi_0), \tag{25}$$

$$\dot{\varphi} = \frac{(v_0+\eta_0)(R+\xi_0)}{(R+\xi)^2}. \tag{26}$$

Takto jsme získali funkční závislost $\dot{\varphi}(\xi)$, to nám dovoluje jednoduše dosadit do druhé pohybové rovnice

$$m\ddot{\xi} - m\frac{(v_0+\eta_0)^2(R+\xi_0)^2}{(R+\xi)^4}(R+\xi) + \frac{mv_0^2}{R+\xi} = 0, \tag{27}$$

$$\ddot{\xi} - \frac{(v_0+\eta_0)^2(R+\xi_0)^2}{(R+\xi)^3} + \frac{v_0^2}{R+\xi} = 0 \tag{28}$$

a dále upravujeme

$$\ddot{\xi} - \frac{v_0^2}{R}\frac{(1+\frac{\eta_0}{v_0})^2(1+\frac{\xi_0}{R})^2}{(1+\frac{\xi}{R})^3} + \frac{v_0^2}{R(1+\frac{\xi}{R})} = 0, \tag{29}$$

$$\ddot{\xi} - \frac{v_0^2}{R}\left(\frac{(1+\frac{\eta_0}{v_0})^2(1+\frac{\xi_0}{R})^2}{(1+\frac{\xi}{R})^3} + \frac{1}{1+\frac{\xi}{R}}\right) = 0, \tag{30}$$

čímž jsme dostali pohybovou rovnici do příhodného tvaru. Zde je totiž potřeba udělat kruciální krok celého řešení: **aproximaci**. Podle Taylorova rozvoje pro $\varepsilon << 1$ platí

$$(1+\varepsilon)^a \approx 1 + a\varepsilon, \tag{31}$$

což aplikujeme na všechny připravené výrazy v rovnici (30)

$$\ddot{\xi} - \frac{v_0^2}{R}\left(\left[1+2\frac{\eta_0}{v_0}\right]\left[1+2\frac{\xi_0}{R}\right]\left[1-3\frac{\xi}{R}\right] - 1 + \frac{\xi}{R}\right) = 0, \tag{32}$$

$$\ddot{\xi} - \frac{v_0^2}{R}\left(-\frac{3\xi}{R}\left[1+2\frac{\eta_0}{v_0}\right]\left[1+2\frac{\xi_0}{R}\right] + \left[1+2\frac{\eta_0}{v_0}\right]\left[1+2\frac{\xi_0}{R}\right] - 1 + \frac{\xi}{R}\right) = 0. \tag{33}$$

V tomto výrazu pak pro členy s ξ zanedbáme již první řád aproximace, zatímco pro pro členy bez ξ až druhý řád aproximace, tím získáváme hledaný tvar rovnice

$$\boxed{\ddot{\xi} + 2\frac{v_0^2}{R^2}\xi = 2\frac{v_0^2}{R}\left(\frac{\xi_0}{R} + \frac{\eta_0}{v_0}\right),} \tag{34}$$

kde role konstant ω a k hrajou výrazy

$$\omega = \frac{\sqrt{2}v_0}{R}, \tag{35}$$

$$k = 2\frac{v_0^2}{R}\left(\frac{\xi_0}{R} + \frac{\eta_0}{v_0}\right). \tag{36}$$

Podúloha 6

Podle zadaní má obecné řešení rovnice (34) tvar

$$\xi(t) = A\sin\omega t + B\cos\omega t + \frac{k}{\omega^2}. \tag{37}$$

Pro zjištění konstanty B nejprve dosaďme do rovnice za $t = 0$. Za k a ω dosazujeme výrazy z předchozí podúlohy

$$\xi_0 = A\cdot 0 + B\cdot 1 + \frac{k}{\omega^2}, \tag{38}$$

$$B = \xi_0 - R\left(\frac{\xi_0}{R} + \frac{\eta_0}{v_0}\right), \tag{39}$$

$$B = -R\frac{\eta_0}{v_0}. \tag{40}$$

Na konstantu A musíme jít o trochu mazaněji. Nejprve rovnici (37) zderivujme

$$\dot{\xi} = \omega(A\cos\omega t - B\sin\omega t) \tag{41}$$

a nyní teprve dosaďme $t = 0$ a ω, triviální úpravou dostáváme

$$A = \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\dot{\xi}_0}{v_0}R. \tag{42}$$

Podúloha 7

K nalezení roviny vstupní štěrbiny stačí jednoduše dosadit za získané hodnoty a využít základního kinematického vztahu pro rovnoměrný pohyb po kružnici

$$\phi = \dot{\varphi}T = \frac{v_0}{R}\cdot\frac{\pi}{\omega}, \tag{43}$$

což po dosazení vychází jako

$$\boxed{\phi = \frac{\pi}{\sqrt{2}} \approx 127,3^\circ.} \tag{44}$$

Podúloha 8

Finálně máme vyšetřit polohu ξ částice v čase t_f. Neboť platí, že

$$t_f = \tau + T, \tag{45}$$

$$\omega(\tau + T) = \omega T(1 + \frac{\tau}{T}) = \pi(1 + \frac{\tau}{T}), \tag{46}$$

můžeme po pár úpravách pro $\tau << T$ použít aproximaci $\sin x \approx x$ a $\cos x \approx 1$

$$\xi(t_f) = A\sin(\pi + \pi\frac{\tau}{T}) + B\cos(\pi + \pi\frac{\tau}{T}) + \frac{k}{\omega^2} = -A\sin(\pi\frac{\tau}{T}) - B\cos(\pi\frac{\tau}{T}) + \frac{k}{\omega^2}, \tag{47}$$

$$\xi(t_f) \approx -A\pi\frac{\tau}{T} - B + R\left(\frac{\xi_0}{R} + \frac{\eta_0}{v_0}\right), \tag{48}$$

$$\xi(t_f) \approx -\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\dot{\xi}_0}{v_0}R\frac{\sqrt{2}v_0}{R}\tau + R\frac{\eta_0}{v_0} + R\left(\frac{\xi_0}{R} + \frac{\eta_0}{v_0}\right), \tag{49}$$

$$\boxed{\xi(t_f) \approx \dot{\xi}_0\left(t_f - \frac{\sqrt{2}\pi R}{2v_0}\right) + 2R\frac{\eta_0}{v_0} + \xi_0.} \tag{50}$$