

Kabinet výuky obecné fyziky, UK MFF

Fyzikální praktikum I



Úloha č. 26

Název úlohy: Studium kmitů struny

Jméno: Vojtěch Votruba

Datum měření: 20. 4. 2023

Připomínky opravujícího:

	Možný počet bodů	Udělený počet bodů
Teoretická část	0–2	
Výsledky a zpracování měření	0–9	
Diskuse výsledků	0–4	
Závěr	0–1	
Použitá literatura	0–1	
Celkem	max. 17	

Posuzoval:

dne:

Pracovní úkoly

1. Změřte závislost frekvence struny na napětí.
2. Změřte závislost frekvence struny na její délce.
3. Studujte záznamy vzniklé při rozladění sousedních strun.
4. Studujte harmonickou analýzu zvuku vzniklého při různém způsobu rozkmitání struny (uprostřed, na kraji, flažolety).

1 Teoretická část

Pro splnění pracovních úkolů použijeme tzv. *polychord*, což je dřevěný rezonátor se třemi strunami uchycenými tak, že ho lze otáčením příslušného kolíku ladit. Ladění probíhá na principu zvyšování, resp. snižování síly, která strunu napíná. Tuto sílu změříme na přichyceném siloměru a bude pro ni obecně platit [1]

$$\sigma = \frac{F}{S}, \quad (1)$$

kde σ je napětí na struně a S plocha průřezu struny. Hodnotu napětí, kterou zjistíme přepočtem síly F , pak můžeme využít ke spočtení rychlosti šíření vln ve struně c podle vztahu [1]

$$c = \sqrt{\frac{\sigma}{\rho}}, \quad (2)$$

kde ρ je hustota materiálu struny. Vychýlením struny nebo jakýmsi „drknutím“ vytvoříme stojatou vlnu. Neboť je struna na obou koncích uchycená, budou se zde nacházet uzly a musí se tak na celé délce struny nacházet $\frac{n}{2}$ vln (kde $n \in \mathbb{N}$) [1]. Pro charakteristické veličiny vlny potom bude platit

$$f = n \frac{c}{2l}, \quad (3)$$

kde f je frekvence vlny a l délka struny. Pro $n = 1$ je frekvence vlny považována za základní a pro zbylá n je nazýváme *vyššími harmonickými frekvencemi* [1]. Vizualizujeme-li dále profil vlny, můžeme si pro různé způsoby rozkmitání všimnout různých nuancí. Vlnový profil se stejnou frekvencí se bude trochu lišit například pro rozvibrování smyčcem nebo prstem, studium těchto rozdílů je náplní pracovního úkolu 4.

V rámci pracovního úkolu 3 studujeme záznamy, což jsou jakési rázy vznikající při rozkmitání dvou mírně rozladěných strun vedle sebe [1]. Pro rozdíl základních frekvencí v důsledku záznamů pak platí [1] rovnost s frekvencí obalové křivky.

2 Výsledky a zpracování měření

2.1 Podmínky pokusu a přípravná měření

Měření bylo provedeno v místnosti PI v budově MFF UK na Karlově. Změřené podmínky termo-hygro-barometrem při pokusu byly následující: Teplota $t = 22,4(4)^\circ\text{C}$, relativní vlhkost $\Phi = 37(3)\%$, tlak $p = 989(2)$ hPa. Použitý polychord měl délku změřenou pásmovým měřítkem $l = 120,0(1)$ cm.

V rámci přípravného měření k plnění pracovního úkolu 1 byl mikrometrickým šroubem změřen průměr použité struny. Data z tohoto měření jsou zanesena do tabulky 1.

Nejistota jednotlivých měření byla odhadnuta jako polovina nejmenšího dílku mikrometru tedy na $\sigma_d = 0,005$ mm. K určení celkové nejistoty průměrné hodnoty byla k této nejistotě měřicího přístroje přidána ještě nejistota statistická – spočtena standardně jako výběrová odchylka výše uvedených hodnot. Tyto nejistoty pak byly sečteny podle vztahu [2]

$$\sigma = \sqrt{\sigma_A^2 + \sigma_B^2}, \quad (4)$$

kde σ je celková nejistota, σ_A nejistota statistická a σ_B nejistota systematická. Z průměru struny byl ještě vypočten obsah průřezu a jeho nejistota podle metody přenosu chyb [2]

$$S = \frac{\pi d^2}{4} = 1,83(6) \times 10^{-7} \text{ m}^2, \text{ kde} \quad (5)$$

$$\sigma_S = 2S \frac{\sigma_d}{d}. \quad (6)$$

Tabulka 1: Naměřené průměry struny. N zde označuje číslo měření, d změřený průměr.

N	d/mm
1	0,475(5)
2	0,485(5)
3	0,480(5)
4	0,485(5)
5	0,490(5)
6	0,490(5)
7	0,475(5)
8	0,480(5)
Průměr	0,483(8)

2.2 Závislost frekvence na napětí

Pro změření této závislosti byla využita jedna ze strun polychordu. Na ni byla vždy nastavena příslušná síla (snižovali jsme ji postupně o 5 N) a struna byla drknutím rozvibrována.

Pomocí laboratorního mikrofону a počítače s nainstalovaným programem *Sound Analyser* byl po rozvibrování struny zaznamenán průběh vlny v čase, z tohoto průběhu pak mohla být odečtena frekvence. Byla změřena základní frekvence a další dvě vyšší harmonické, takto naměřená data jsou zanesena do tabulky 2.

Tabulka 2: Naměřené frekvence f_1 , f_2 , f_3 v závislosti na napětí σ

F/N	σ/MPa	f_1/Hz	f_2/Hz	f_3/Hz
25,0(5)	137(5)	57(1)	113(1)	170(1)
30,0(5)	164(6)	61(1)	123(1)	184(1)
35,0(5)	191(7)	66(1)	131(1)	197(1)
40,0(5)	219(8)	70(1)	141(1)	211(1)
45,0(5)	246(8)	74(1)	147(1)	221(1)
50,0(5)	273(9)	78(1)	155(1)	233(1)
55,0(5)	301(10)	81(1)	161(1)	241(1)
60,0(5)	328(11)	84(1)	169(1)	253(1)
65,0(5)	355(12)	87(1)	174(1)	261(1)
70,0(5)	383(13)	92(1)	182(1)	274(1)
75,0(5)	410(14)	95(1)	189(1)	284(1)
80,0(5)	438(14)	97(1)	195(1)	292(1)

Napětí σ bylo vypočteno ze síly F pomocí vztahu (1). Nejistota naměřené síly byla dále odhadnuta podle poloviny nejmenšího dílku na $\sigma_F = 0,5 \text{ N}$. Nejistota napětí byla určena podle metody přenosu chyb jako

$$\sigma_\sigma = \sigma \sqrt{\left(\frac{\sigma_F}{F}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_S}{S}\right)^2}. \quad (7)$$

Poslední nejistotou nutnou určení byla nejistota frekvence. Měřicí přístroj byl sice velmi přesný, ale při manuálním odečtu pomocí programu musel být kurzor hrubě nastaven na polohu peaku. To způsobilo chybu přibližně $\sigma_f = 1 \text{ Hz}$.

Naměřená data byla pak nafitována mocninnou funkcí $y = ax^b$ a vynesena do grafu 1 programem *Origin* konkrétně jeho funkcí *Analysis::Fitting::Nonlinear Curve Fit*. Jako parametry fitu pak dostáváme

$$\{a_1\} = 5,6(2), \quad (8)$$

$$b_1 = 0,47(2), \quad (9)$$

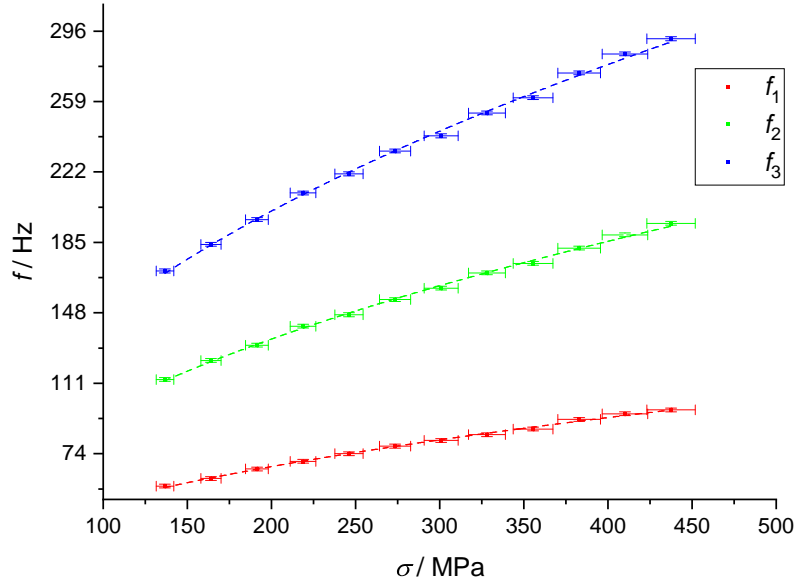
$$\{a_2\} = 11,3(5), \quad (10)$$

$$b_2 = 0,47(1), \quad (11)$$

$$\{a_3\} = 17,0(5), \quad (12)$$

$$b_3 = 0,47(1). \quad (13)$$

$$(14)$$



Obrázek 1: Závislost první, druhé a třetí harmonické frekvence f_1 , f_2 a f_3 na napětí σ .

2.3 Závislost frekvence na délce

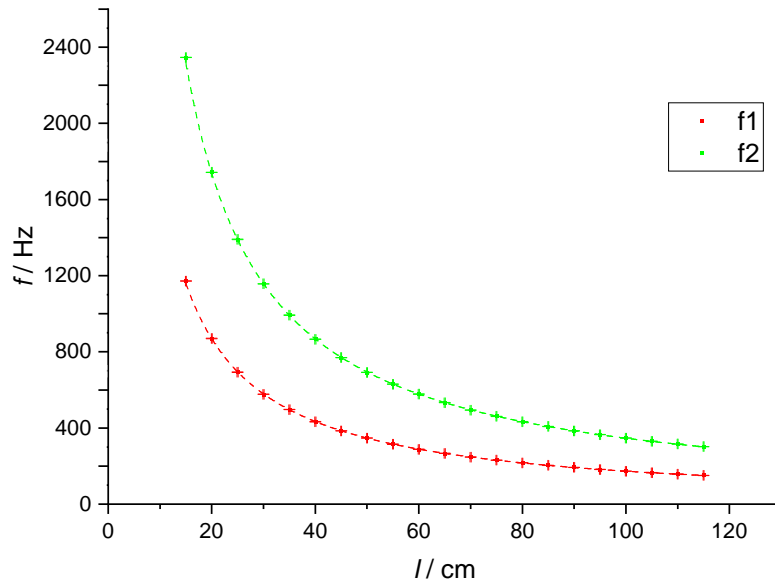
Pro změření závislosti frekvence na délce byla použita další struna polychordu. Postup zde byl v podstatě analogický k minulé podsekci, pouze jsme neměnili působící sílu, ale postupně jsme zkracovali strunu pomocí posuvného pražce.

Oddělená část struny, kterou jsme neměřili, pak byla utlumená s použitím látkové rukavice. Tentokrát jsme zároveň měřili pouze první dvě, nikoli tři frekvence a síla nastavená na siloměru během měření struny byla rovna 30,0(5) N. Délka l struny zde byla stanovena podle stupnice nalepené na pracovním stole a jako její chyba byla vzata velikost celého nejmenšího dílku $\sigma_l = 1$ mm (ne jako jeho polovina například kvůli nezanedbatelné tloušťce pražce) Naměřená data jsou zanesena do tabulky 3.

Tabulka 3: Naměřené frekvence f_1 , f_2 v závislosti na délce l

l/cm	f_1/Hz	f_2/Hz
115,0(1)	151(1)	302(1)
110,0(1)	158(1)	316(1)
105,0(1)	165(1)	330(1)
100,0(1)	173(1)	347(1)
95,0(1)	182(1)	365(1)
90,0(1)	193(1)	385(1)
85,0(1)	204(1)	408(1)
80,0(1)	217(1)	433(1)
75,0(1)	231(1)	461(1)
70,0(1)	247(1)	494(1)
65,0(1)	267(1)	533(1)
60,0(1)	288(1)	578(1)
55,0(1)	315(1)	630(1)
50,0(1)	347(1)	692(1)
45,0(1)	385(1)	770(1)
40,0(1)	433(1)	866(1)
35,0(1)	497(1)	993(1)
30,0(1)	577(1)	1157(1)
25,0(1)	693(1)	1391(1)
20,0(1)	870(1)	1743(1)
15,0(1)	1172(1)	2346(1)

Z dat v tabulce 3 pak byl vyhotoven graf 2. Naměřené hodnoty byly znovu proloženy mocninnou funkcí pomocí programu *Origin* podobně jako v předchozí podsecei.



Obrázek 2: Graf závislosti prvních dvou frekvencí f_1 a f_2 na délce struny l .

Výsledné parametry nafitovaných funkcí zde vyšly jako

$$\{a_1\} = 175(2) \times 10^2, \quad (15)$$

$$b_1 = -1,00(1), \quad (16)$$

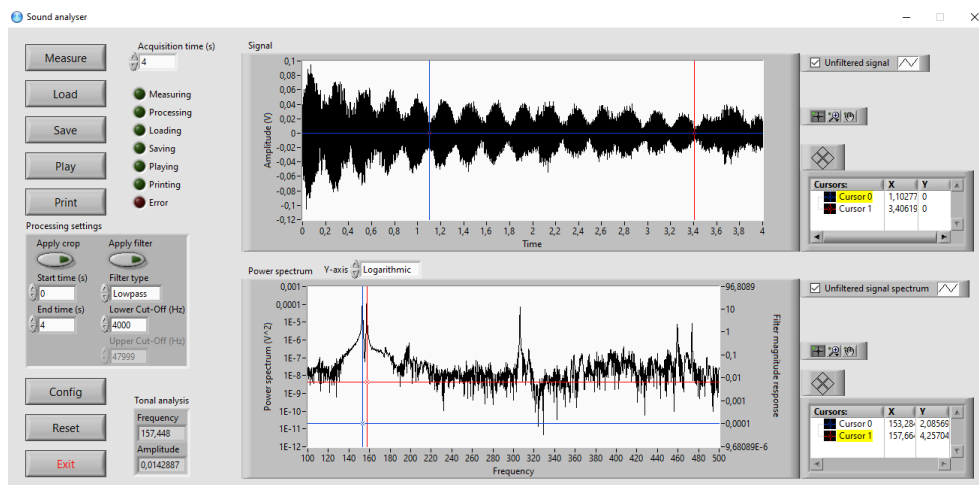
$$\{a_2\} = 349(2) \times 10^2, \quad (17)$$

$$b_2 = -1,00(1). \quad (18)$$

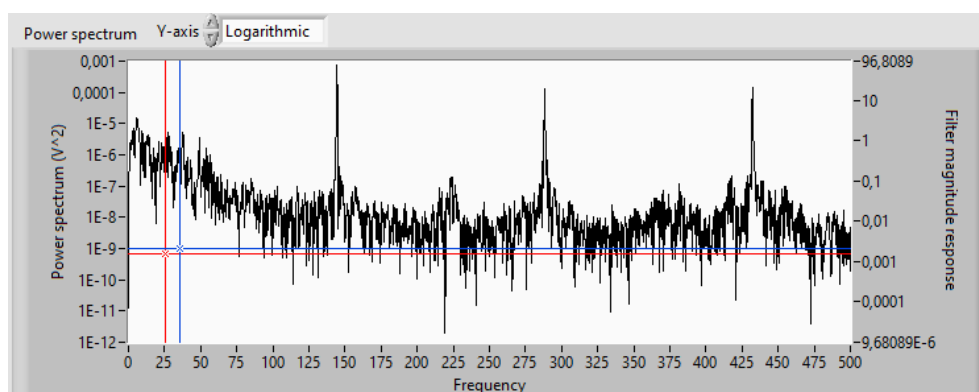
$$(19)$$

2.4 Zázněje a harmonická analýza

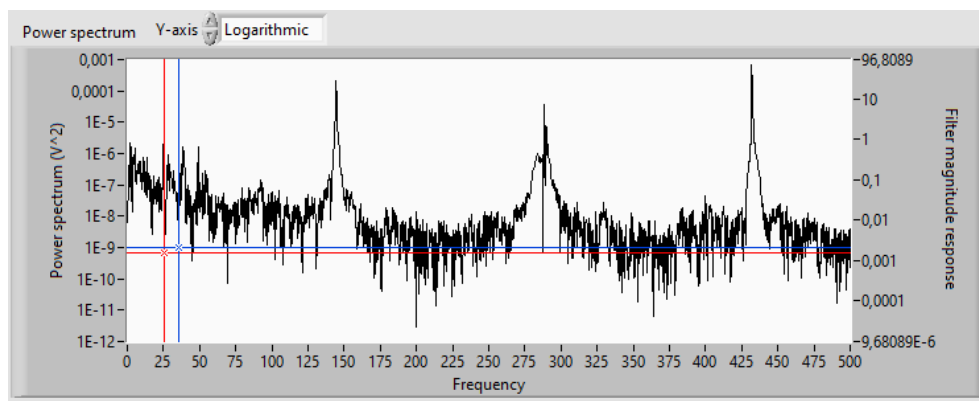
Všechny snímky harmonických analýz rozebíraných v této podsecei byly pro přehlednost přiloženy k referátu separátně, několik snímků ale bylo pro ilustraci vybráno a jsou přiloženy níže.



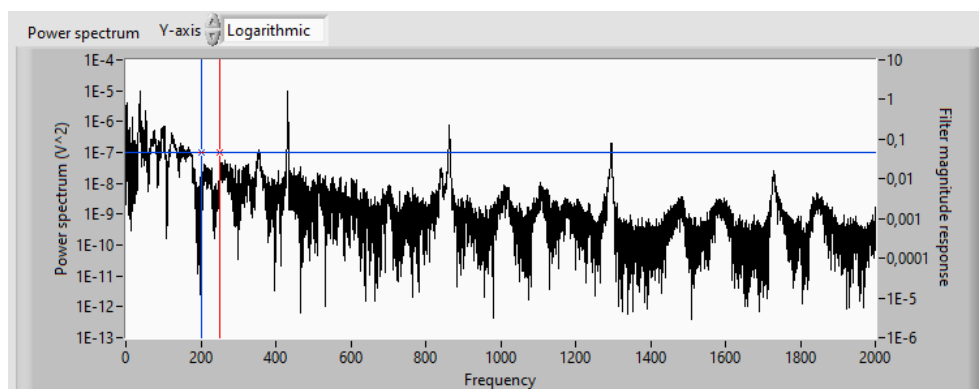
Obrázek 3: Snímek z programu *Sound Analyser* při studiu rázů.



Obrázek 4: Snímek z programu *Sound Analyser* při studiu tónů zahraničích pražcem.



Obrázek 5: Snímek z programu *Sound Analyser* při studiu tónů zahraničích smyčcem.



Obrázek 6: Snímek z programu *Sound Analyser* při studiu flažoletových tónů.

Měření zde probíhalo prostým rozvibrováním jedné, resp. dvou strun polychordu příslušným způsobem a následným snímáním jejich harmonické analýzy mikrofonom podobně jako v minulých podsekcích.

Pro studium rázů jsme s pomocí programu zhotovili tři různé harmonické analýzy odpovídající třem různým vzájemným polohám dvou pražců na dvou rozvibrovaných strunách – to nám právě zajistilo kýžené rozladění. Pro každou z těchto poloh charakterizovanou rozdílem délek Δl jsme určili (např. podle obrázku 3) rozdíl dvou základních frekvencí a porovnali ho s frekvencí obalové křivky vypočtené (též podle 3) jako $f = \frac{1}{T}$, kde T byla její perioda. Výsledky tohoto měření jsou uvedeny v tabulce 4 a je z nich patrné, že se výše zmíněné frekvence orientačně shodují.

Tabulka 4: Zjištěná frekvence obalové křivky a rozdíl základních frekvencí v závislosti na rozdílu v poloze Δl

$\Delta l / \text{cm}$	rozdíl dvou základních frekvencí / Hz	frekvence obalové křivky / Hz
1,4	2,92	2,81
2,6	4,38	4,34
6,0	9,49	9,70

V rámci pracovního úkolu 4 si na obrázcích 4 a 5 můžeme všimnout, že například při rozvibrování struny smyčcem a při drknutí struny pražcem se liší tvar peaků. Na obrázku 5 je nejvýraznější druhá harmonická a na obrázku 4 jsou základní a druhá frekvence víceméně vyrovnané. Zároveň jsou peaky pro smyčec obecně širší než pro pražec.

Dále se můžeme zaměřit na obrázek 6, kde jsou vizualizované flažoletové tóny. Na vlnovém profilu vidíme, že některé harmonické frekvence, například ty okolo 120 Hz a 300 Hz ve vizualizaci úplně zanikly a jejich peaky nejsou patrné – to nejspíše odpovídá právě tlumení, které je součástí flažoletové techniky.

3 Diskuse výsledků

3.1 Závislost frekvence na napětí

Pro zhodnocení zaměřené závislosti se zaměříme na nafitovanou funkci. Z výsledků (8) až (14) vidíme, že se pro všechny harmonické exponent b blíží své teoretické hodnotě $b = 0,5$, byť se s ní v rámci nejistoty neshoduje. Z toho můžeme usoudit, že ačkoliv nevznikla výrazná systematická chyba, pravděpodobně jsme nezapočetli všechny nejistoty, které v měření nastaly.

Jedním z vysvětlení je například to, že v místnosti, kde bylo měření prováděno, probíhalo simultánně několik experimentů, při kterých byly vydávány také zvuky, které mohly kolidovat se zvukem struny. Zároveň mohly na ostatních strunách vznikat rezonance, které by závislost mohly ovlivnit.

3.2 Závislost frekvence na délce

V rámci tohoto měření vyšla závislost velmi dobře. S malou nejistotou jsme stanovili exponenty obou křivek na $b \approx -1$, což přesně odpovídá teoretické závislosti podle vztahu (3). Je možné, že nejistota frekvence byla v tomto měření podhodnocena kvůli škálování osy x v programu *Sound Analyser*, experimentátor se ovšem snažil osy příliš neškálovat a spíše celý rozsah posouvat, aby pokryl i vyšší frekvence.

Dále mohly do nejistoty přispět i nezapočítané jevy podobně jako v předchozí podsekci, ale protože závislost vyšla už v této malé toleranci správná, není nutné je příliš zohledňovat.

3.3 Zázněje a harmonická analýza

Ačkoliv jsou měření rozdílu frekvencí zatížena poměrně velkou chybou, pro zázněje nalézáme překvapivě správnou shodu mezi rozdílem dvou základních frekvencí a frekvencí obalové křivky.

V další části pokusu nemáme žádné silné ověřovací kritérium, jako nafitované parametry v předchozích podsekcích, můžeme pouze říci, že získané výsledky mají fyzikální smysl a že se shodují kvalitativně s teoretickými závěry. Křivky pro smyčec a pro pražec podle obrázků 4 a 5 odpovídají v tom, že jejich rozdíl je pouze v nuancích.

4 Závěr

Podařilo se nám téměř potvrdit teoretické vztahy popisující závislost frekvence struny na její délce a na jejím napětí (tedy odpovídající nepřímou úměru a funkci s odmocninou). Tyto závislosti jsme prozkoumali i pro vyšší harmonické frekvence.

Zároveň jsme pozorovali, jak se chová vlnový profil pro záněže, a našli rovnost mezi frekvencí obalové křivky a rozdílem základních frekvencí. Finálně jsme pozorovali, jak se harmonická analýza mění v závislosti na způsobu rozkmitání struny – prstem, pražcem, smyčcem a flažoletovými tóny.

Reference

- [1] *Studium kmitů struny* [online]. [cit. 2023-04-23]. Dostupné z: <https://physics.mff.cuni.cz/vyuka/zfp/zadani/126>
- [2] ENGLICH, Jiří. *Úvod do praktické fyziky*. Praha: Matfyzpress, 2006. ISBN 80-86732-93-2.