Energie a rozpad baryonů Δ - řešení

Vojtěch Votruba

3. července 2025

Úkol 1

Operátor izospinu $\boldsymbol{I}$ „můžeme“ v této úloze chápat jako generátor rotace, neboť splňuje stejnou komutační relaci jako standardní moment hybnosti $\boldsymbol{J}$. Je-li pak hamiltonián H skalární operátor, znamená to, že pro libovolnou rotaci generovanou izospinem se jeho střední hodnota v nějakém stavu nezmění, tj., že

$$\langle\psi|H|\psi\rangle = \langle\psi|R^{+}HR|\psi\rangle, \quad \forall\psi,$$

kde $R = \exp(-\frac{i}{\hbar}I_z\alpha)\exp(-\frac{i}{\hbar}I_y\beta)\exp(-\frac{i}{\hbar}I_z\gamma)$ je operátor rotace. Nakonec si stačí už jen uvědomit, že jednotlivé baryony Δ^α jsou navzájem pouze orotované stavy. To plyne jednoduše z toho, že jde právě o vlastní stavy operátoru izospinu se stejným kvantovým číslem j a pouze odlišným kvantovým číslem m. Ty se mohou navzájem na sebe převádět pomocí rotací Wignerovými D maticemi.

Úkol 2

Při přidání poruchového členu se nám celkový hamiltonián změní do tvaru

$$H = H_0 + W = H_0 + T^{(3)}_{-3} + T^{(3)}_{3},$$

kde budeme přepokládat, že baryony Δ^α jsou vlastní stavy původního hamiltoniánu H_0. Z předchozí Úlohy 1 potom vidíme, že původní hamiltonián má degenerované spektrum, což budeme muset zohlednit.

Abychom tedy našli korekce, musíme diagonalizovat matici W v degenerované bázi Δ^α. K tomu si můžeme pomoci Wignerovou–Eckartovou věty, ze které dostáváme, že

$$\begin{aligned}
\langle\Delta^\alpha|W|\Delta^{\alpha'}\rangle &= \langle 3/2;a|T^{(3)}_{-3}|3/2;a'\rangle + \langle 3/2;a|T^{(3)}_{3}|3/2;a'\rangle \\
&= \langle 3,-3;3/2,a'|(3,3/2),3/2;a\rangle\frac{\langle 3/2||T^{(3)}||3/2\rangle}{\sqrt{4}} + \langle 3,3;3/2,a'|(3,3/2),3/2;a\rangle C\frac{\langle 3/2||T^{(3)}||3/2\rangle}{\sqrt{4}} \\
&= \frac{\mathrm{i}\gamma}{2}(\langle 3,-3;3/2,a'|(3,3/2),3/2;a\rangle + \langle 3,3;3/2,a'|(3,3/2),3/2;a\rangle).
\end{aligned}$$

Vzniknuvší Clebschovy–Gordanovy koeficienty jsou pak nenulové pouze tehdy, pokud $a = a' - 3$ nebo $a = a' + 3$, zároveň však a i a' mohou nabývat hodnot pouze $-3/2, -1/2, 1/2, 3/2$. Z toho je jasné, že jediné možnosti jsou buď $a' = -3/2$, $a = 3/2$ (což odpovídá $\alpha' = -$, $\alpha' = ++$) anebo $'a = 3/2$, $a = -3/2$ (což odpovídá $\alpha = ++$, $\alpha' = -$). Najdeme-li si příslušnou hodnotu C.-G. koeficientu $\pm\frac{2}{\sqrt{7}}$, zjistíme, že v bázi Δ^α bude matice W vypadat jako

$$W = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \mathrm{i}\gamma/\sqrt{7} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\mathrm{i}\gamma/\sqrt{7} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

K nalezení vlastních čísel, jež odpovídají korekcím v energiích, můžeme pak použít s výhodou například Laplaceův rozvoj ve sloupci, což nás vede na charakteristický polynom

$$\lambda^4 - \gamma^2/7\lambda^2 = 0 \implies \lambda \in \{0, \frac{\gamma}{\sqrt{7}}, -\frac{\gamma}{\sqrt{7}}\}.$$

A po mechanickém nalezení příslušných vlastních stavů finálně dostáváme vlastní páry korekce

$$(E, \quad \Delta^0), \tag{1}$$
$$(E, \quad \Delta^+), \tag{2}$$
$$(E + \gamma/\sqrt{7}, \quad \frac{(|\Delta^{++}\rangle + i|\Delta^-\rangle}{\sqrt{2}})), \tag{3}$$
$$(E - \gamma/\sqrt{7}, \quad \frac{(|\Delta^{++}\rangle - i|\Delta^-\rangle)}{\sqrt{2}}). \tag{4}$$

Úkol 3

Dle zadání stačí pro určení relativních pravděpodobností rozpadů vyčíslit výrazy

$$P_a = \frac{|\langle\Delta^+|V|\pi^+ + n^0\rangle|^2}{|\langle\Delta^+|V|\pi^0 + p^+\rangle|^2}, \quad P_B = \frac{|\langle\Delta^0|V|\pi^0 + n^0\rangle|^2}{|\langle\Delta^0|V|\pi^- + p^+\rangle|^2},$$

kde jednotlivé částice odpovídají různým kombinacím vlastních stavů izospinu. Vyskytnou-li se na pravé straně rozpadu dvě částice, propojíme je pomocí direktního součinu.

Tyto stavy se pak vyplatí přepsat pomocí Clebschových–Gordanových koeficientů ze separované do kaplované báze. V ní totiž můžeme uplatnit Wignerovu–Eckartovu větu pro skalární operátor V ve tvaru

$$\langle j; m|V|j'; m'\rangle = \delta_{j,j'}\delta_{m,m'}\frac{\langle j||V||j'\rangle}{\sqrt{2j+1}}.$$

Vidíme z ní, že jediné nenulové maticové elementy $\langle j; m|V|j'; m'\rangle$ budou ty, pro které $j = j'$ a $m = m'$, což nám výrazně zjednoduší výpočet. Nejprve tedy pro dvě verze rozpadu a)

$$|\langle\Delta^+|V|\pi^+ + n^0\rangle|^2 = |\langle 3/2; 1/2|V|1, 1\rangle|1/2, -1/2\rangle|^2 = |\sqrt{\frac{1}{3}}\langle 3/2; 1/2|V|3/2, 1/2\rangle|^2,$$
$$|\langle\Delta^+|V|\pi^0 + p^+\rangle|^2 = |\langle 3/2; 1/2|V|1, 0\rangle|1/2, 1/2\rangle|^2 = |\sqrt{\frac{2}{3}}\langle 3/2; 1/2|V|3/2, 1/2\rangle|^2.$$

A analogicky pro dvě verze rozpadu b)

$$|\langle\Delta^0|V|\pi^0 + n^0\rangle|^2 = |\langle 3/2; -1/2|V|1, 0\rangle|1/2, -1/2\rangle|^2 = |\sqrt{\frac{2}{3}}\langle 3/2; 1/2|V|3/2, 1/2\rangle|^2,$$
$$|\langle\Delta^0|V|\pi^- + p^+\rangle|^2 = |\langle 3/2; -1/2|V|1, -1\rangle|1/2, 1/2\rangle|^2 = |\sqrt{\frac{1}{3}}\langle 3/2; 1/2|V|3/2, 1/2\rangle|^2,$$

což nám jednoduchým vydělením konečně dává

$$P_a = 1/2, \qquad P_b = 2.$$