Úloha 3: 2D harmonický oscilátor - řešení

Vojtěch Votruba

5. prosince 2024

Zavedení operátorů

Jelikož se zabýváme 2D problémem v x, y, můžeme si Hilbertův prostor rozseparovat jako $\mathscr{H} = \mathscr{H}_x \otimes \mathscr{H}_y$. Všemi operátory typu A_x pak formálně myslíme $A_x \otimes I$ a všemi operátory typu A_y myslíme $I \otimes A_y$. Užitečným důsledkem je, že operátory A_x a A_y spolu komutují, neboť identita komutuje se všemi operátory.

Kromě toho si zredukujme veličiny zavedením bezrozměrné polohy a hybnosti jako $\mathfrak{q}_i = x_i\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}$ a $\mathfrak{p}_i = p_i\sqrt{\frac{1}{\hbar\omega m}}$. Také zadefinujme kreační a anihilační operátory pro obě souřadnice analogicky k tomu, jak to děláme při řešení harmon. oscilátoru v 1D.

$$
\begin{aligned}
a_x^+ &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathfrak{q}_x - i\mathfrak{p}_x), \qquad & a_x &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathfrak{q}_x + i\mathfrak{p}_x), \\
a_y^+ &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathfrak{q}_y - i\mathfrak{p}_y), \qquad & a_y &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathfrak{q}_y + i\mathfrak{p}_y).
\end{aligned}
$$

1. podúloha

Nejprve si všimněme, že si můžeme hamiltonián ze zadání snadno zapsat v jednodušším tvaru jako $H = \hbar\omega(a_x^+ a_x + a_y^+ a_y + 1) = \hbar\omega(N_x + N_y + 1)$. Dále si s výhodou pomocí kreačních a anihilačních operátorů zapíšeme i operátor momentu hybnosti L.

$$
\begin{aligned}
L = xp_y - yp_x &= \mathfrak{q}_x\sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}\mathfrak{p}_y\sqrt{\hbar\omega m} - \mathfrak{q}_y\sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}\mathfrak{p}_x\sqrt{\hbar\omega m} = \hbar(\mathfrak{q}_x\mathfrak{p}_y - \mathfrak{q}_y\mathfrak{p}_x) \\
&= \hbar\left[\frac{(a_x^+ + a_x)}{\sqrt{2}}\frac{(a_y - a_y^+)}{i\sqrt{2}} - \frac{(a_y^+ + a_y)}{\sqrt{2}}\frac{(a_x - a_x^+)}{i\sqrt{2}}\right] = \frac{\hbar}{2i}(a_x^+ a_y - a_x^+ a_y^+ + a_x a_y - a_x a_y^+ \\
&\qquad - a_y^+ a_x + a_y^+ a_x^+ - a_y a_x + a_y a_x^+) = i\hbar(a_y^+ a_x - a_x^+ a_y).
\end{aligned}
$$

Dvě fyzikální veličiny jsou kompatibilní pozorovatelné právě tehdy, když je jejich komutátor roven 0. To znamená, že v této podúloze nás v podstatě zajímá hodnota $[H, L]$

$$
\begin{aligned}
[H, L] &= \hbar^2 i\omega[a_x^+ a_x + a_y^+ a_y + 1, a_y^+ a_x - a_x^+ a_y] \\
&= \hbar^2 i\omega([a_x^+ a_x, a_y^+ a_x] - [a_x^+ a_x, a_x^+ a_y] + [a_y^+ a_y, a_y^+ a_x] - [a_y^+ a_y, a_x^+ a_y]) \\
&= \hbar^2 i\omega(a_y^+[a_x^+, a_x]a_x - a_x^+[a_x, a_x^+]a_y + a_y^+[a_y, a_y^+]a_x - a_x^+[a_y^+, a_y]a_y) \\
&= \hbar^2 i\omega(-a_y^+ a_x - a_x^+ a_y + a_y^+ a_x + a_x^+ a_y) = 0.
\end{aligned}
$$

kde jsme zatím využili linearity komutátoru, pravidel pro rozdělování součinu v komutátoru a v posledním kroku také známé komutační relace z 1D $[a_i, a_i^+] = 1$. Celkově tedy vidíme, že energie a moment hybnosti jsou kompatibilní pozorovatelné.

2. podúloha

Evoluci obecného stavu $|\phi\rangle$ nám udává časová Schrödingerova rovnice

$$H|\phi\rangle = i\hbar\frac{\partial|\phi\rangle}{\partial t},$$

jedná-li se speciálně o vlastní stav hamiltoniánu $|E\rangle$, dostáváme

$$|E\rangle(\boldsymbol{x},t) = |E\rangle(\boldsymbol{x},0)\exp\left[-\frac{i}{\hbar}Et\right].$$

Jak je napsáno v nápovědě k zadání, konkrétní zadaný stav $|\psi\rangle$ se dá až na normalizaci vyjádřit jako dvojté působení operátoru polohy na základní stav harmon. oscilátoru (to si můžeme ověřit jednoduše působením na hamiltonián přepsaný do x reprezentace), máme tak $|\psi\rangle = x^2\sqrt{\pi x_0^2}|00\rangle = \sqrt{\pi}x_0^3 q_x^2|00\rangle$.

Abychom dál získali časový vývoj, budeme chtít rozložit tento zadaný stav do vlastních stavů hamiltoniánu, což provedeme tak, že si přepíšeme operátor polohy pomocí kreačních a anihilačních operátorů a necháme ho působit na stav

$$\begin{aligned}\sqrt{\pi}x_0^3 q_x^2|00\rangle = \frac{\sqrt{\pi}x_0^3}{2}(a_x^+ + a_x)^2|00\rangle &= \frac{\sqrt{\pi}x_0^3}{2}[(a_x^+)^2 + a_x^+a_x + a_xa_x^+ + a_x^2]|00\rangle \\ &= \frac{\sqrt{\pi}x_0^3}{2}[a_x^+\sqrt{1}|10\rangle + 0 + a_x\sqrt{1}|10\rangle + 0] = \frac{\sqrt{\pi}x_0^3}{2}(\sqrt{2}|20\rangle + |00\rangle),\end{aligned}$$

dál si napočítáme příslušné vlastní energie obou stavů

$$\begin{aligned}\langle 20|H|20\rangle = \langle 20|(H_x + H_y)|20\rangle = \langle 2|H_x|2\rangle + \langle 0|H_y|0\rangle = \frac{5}{2}\hbar\omega + \frac{1}{2}\hbar\omega = 3\hbar\omega, \\ \langle 00|H|00\rangle = \langle 00|(H_x + H_y)|00\rangle = \langle 0|H_x|0\rangle + \langle 0|H_y|0\rangle = \frac{1}{2}\hbar\omega + \frac{1}{2}\hbar\omega = \hbar\omega\end{aligned}$$

a z toho pak jasně dostáváme

$$|\psi(t)\rangle = \frac{\sqrt{\pi}x_0^3}{2}(\sqrt{2}|20\rangle \mathrm{e}^{-3i\omega t} + |00\rangle \mathrm{e}^{-i\omega t}),$$

případně chceme-li stav normalizovat

$$|\psi'(t)\rangle = \frac{\sqrt{3}}{3}(\sqrt{2}|20\rangle \mathrm{e}^{-3i\omega t} + |00\rangle \mathrm{e}^{-i\omega t}).$$

3. podúloha

Při měření momentu hybnosti nám zadaná vlnová funkce zkolabuje do jednoho z vlastních stavů operátoru L. Jak jsme ukázali v první podúloze, veličiny L a H jsou kompatibilní pozorovatelné a mají tak společnou bázi vlastních vektorů.

Problém nastává v tom, že báze $|n_x n_y\rangle$, co jsme doposud používali, není onou společnou. Zaveďme si ji jako stavy $|n,m\rangle$ podle vzorců níže

$$\begin{aligned}H|n,m\rangle &= \hbar\omega(n+1)|n,m\rangle, \\ L|n,m\rangle &= \hbar m|n,m\rangle.\end{aligned}$$

V této bázi je již jasné, jakým hodnotám momentu hybnosti odpovídají konkrétní vlastní vektory, úkolem zůstává převést zadaný stav $|\psi'\rangle$ z báze stavů $|n_x n_y\rangle$ do báze stavů $|n,m\rangle$.

Vzhledem k tomu, jak jsme si vektor $|\psi'\rangle$ zapsali, obnáší podúloha zapsat ve společné bázi stavy $|00\rangle$ a $|20\rangle$. Zamyslíme-li se nad tím, jak hamiltonián působí na vlastní stavy, dojde nám, že jediné stavy, do kterých můžeme rozvést například stav $|20\rangle$ budou stavy ve tvaru $|2, m\rangle$ - to proto, že chceme, aby se celková energie (součet x-ové a y-ové složky) při působení hamiltoniánem na obě strany rovnosti stále rovnala $3\hbar\omega$. Analogicky k tomu můžeme rozvést stav $|00\rangle$ pouze do stavů $|0, m\rangle$. Toto zafixování energií nám vytvořilo vlastní podprostory, ve nichž budeme hledat vlastní vektory L.

Pro vlastní podprostor odpovídající $n = 0$, resp. $E = \hbar\omega$, máme pouze jeden stav ve bázi $|00\rangle_{n_x n_y}$ a dimenzi 1. Matice L zde vypadá jako $L_{11} = \langle 00|L|00\rangle = 0$ a nemáme tak žádný nenulový vlastní vektor.

Pro vlastní podprostor odpovídající $n = 2$, resp. $E = 3\hbar\omega$, máme bázi v $|n_x n_y\rangle$ ve tvaru $\{|02\rangle, |11\rangle, |20\rangle\}$, v této bázi si můžeme zkonstruovat matici L, kterou následně diagonalizujeme

$$\det(L-\mu I) = \begin{vmatrix} \langle 02|L|02\rangle - \mu & \langle 02|L|11\rangle & \langle 02|L|20\rangle \\ \langle 11|L|02\rangle & \langle 11|L|11\rangle - \mu & \langle 11|L|20\rangle \\ \langle 20|L|02\rangle & \langle 20|L|11\rangle & \langle 20|L|20\rangle - \mu \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\mu & i\hbar\sqrt{2} & 0 \\ -i\hbar\sqrt{2} & -\mu & i\hbar\sqrt{2} \\ 0 & -i\hbar\sqrt{2} & -\mu \end{vmatrix} = 0,$$

$$\implies -\mu^3 - 4i^2\hbar^2\mu = 0 \implies \mu \in \{-2\hbar, 0, 2\hbar\}.$$

A pro tato vlastní čísla dostáváme i tři vlastní vektory

$$|2, \pm 2\rangle = \frac{1}{2}(\pm i, \sqrt{2}, \mp i)^T = \frac{1}{2}(\pm i|02\rangle + \sqrt{2}|11\rangle \mp i|20\rangle), \quad |2, 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 1)^T = \frac{1}{\sqrt{2}}(|02\rangle + |20\rangle).$$

Náš stav $|\psi'\rangle$ tak může spadnout do jednoho z těchto tří vlastních stavů. Jednotlivé pravděpodobnosti toho, že se tak stane, napočítáme jednoduše pomocí skalárního součinu

$$p(L = \pm 2\hbar) = |\langle 2, \pm 2|\psi\rangle|^2 = |\frac{\sqrt{3}}{3}\frac{\mp i\sqrt{2}}{2}\langle 20|20\rangle|^2 = \frac{1}{6},$$
$$p(L = 0) = |\langle 2, 0|\psi\rangle|^2 = |\frac{\sqrt{3}}{3}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\langle 20|20\rangle|^2 = \frac{1}{3}.$$

4. podúloha

Jak jsme spočítali výše, stav $|\psi'\rangle$ se nám po měření zhroutí do jednoho ze stavů $|2, \pm 2\rangle$, $|2, 0\rangle$, případně také $|0, 0\rangle$. Stačí nám tedy spočítat příslušné normalizace a vývoj těchto stavů v čase, to je ovšem triviální uvědomíme-li si, že námi vyjádřené naměřené stavy jsou zároveň vlastními stavy hamiltoniánu, takže jejich časový vývoj, podobně jako v podúloze 2, odpovídá jednoduchému vynásobení faktorem $\exp[-\frac{i}{\hbar}Et]$. Máme tedy okamžitě

$$E = 3\hbar\omega, L = \pm 2\hbar : |2, \pm 2(t)\rangle = \frac{1}{2}(\pm i|02\rangle + \sqrt{2}|11\rangle \mp i|20\rangle)\mathrm{e}^{-3i\omega t},$$
$$E = 3\hbar\omega, L = 0 : |2, 0(t)\rangle = \frac{1}{2}(|02\rangle + |20\rangle)\mathrm{e}^{-3i\omega t} + \frac{1}{\sqrt{2}}|00\rangle\mathrm{e}^{-i\omega t}.$$