DÚ 2b: Accretion energetics near Schwarzschild black holes

Vojtěch Votruba

2. ledna 2026

(a)

Ve Schwarzschildově prostoročase máme dva známé integrály pohybu

$$E := -g_{tt}p^t = m\left(1 - \frac{2M}{r}\right)\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau},$$
$$L := g_{\varphi\varphi}p^\varphi = mr^2 \sin\theta \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\tau}.$$

Předpokládáme pohyb BÚNO pouze v ekvatoriální rovině ($\theta = \pi/2$, $u^\theta = 0$). Z normalizace 4-rychlosti máme pak pro u^r:

$$(u^r)^2 = \left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\tau}\right)^2 = E^2/m^2 - \frac{1}{m^2}\left(1 - \frac{2M}{r}\right)\left(m^2 + \frac{L^2}{r^2}\right) = \tilde{E}^2 - V_{\text{ef.}}^2. \tag{1}$$

Moment hybnosti na kruhové orbitě najdeme minimalizací efektivního potenciálu

$$\frac{\mathrm{d}V_{\text{ef.}}}{\mathrm{d}r} = \frac{2M}{r^2}\left(m^2 + \frac{L^2}{r^2}\right) - 2\left(1 - \frac{2M}{r}\right)\frac{L^2}{r^3} = \frac{2m^2M}{r^2} - \frac{2L^2}{r^3} + \frac{6ML^2}{r^4} = 0$$
$$\implies L_c(r) = \pm mr\sqrt{\frac{M}{(r-3M)}}.$$

A energii (uvažujeme-li pouze kladnou) získáme z (1) dosazením za $\dot{r} = 0$ a za L z rovnice výše.

$$E_c(r) = m\sqrt{\left(1 - \frac{2M}{r}\right)\left(1 + \frac{M}{r-3M}\right)}.$$

(b)

Pro nalezení minima a maximálního sklonu musíme spočítat první a druhou derivaci

$$E_c'(r) = m\frac{\frac{2M}{r^2}\left(1 + \frac{M}{r-3M}\right) - \left(1 - \frac{2M}{r}\right)\frac{M}{(r-3M)^2}}{2\sqrt{\left(1 - \frac{2M}{r}\right)\left(1 + \frac{M}{(r-3M)}\right)}} = m\frac{2M(r-3M)^2 + 2M^2(r-3M) - Mr^2 + 2M^2r}{2r^2(r-3M)^2\sqrt{\left(1 - \frac{2M}{r}\right)\left(1 + \frac{M}{(r-3M)}\right)}}$$
$$= mM\frac{2r^2 - 12Mr + 18M^2 + 2Mr - 6M^2 - r^2 + 2Mr}{2r^2(r-3M)^2\sqrt{\left(1 - \frac{2M}{r}\right)\left(1 + \frac{M}{(r-3M)}\right)}} = \frac{mM(r^2 - 8Mr + 12M^2)}{2r^2(r-3M)^2\sqrt{\left(1 - \frac{2M}{r}\right)\left(1 + \frac{M}{(r-3M)}\right)}}$$
$$= \frac{mM(r-6M)(r-2M)}{2\sqrt{r^3(r-3M)^3(r-2M)((r-3M)+M)}} = \frac{mM}{2}\frac{(r-6M)}{(r(r-3M))^{3/2}}.$$

Z tohoto výpočtu jasně vidíme, že minimum E_c leží v $r = 6M$. Dál pro druhou derivaci

$$E_c''(r) = \frac{mM}{2}\frac{(r(r-3M))^{3/2} - 1.5(r-6M)(r(r-3M))^{1/2}(2r-3M)}{(r(r-3M))^3}$$
$$= \frac{mM}{2}\frac{r(r-3M) - 1.5(r-6M)(2r-3M)}{(r(r-3M))^{3/2}} = \frac{mM}{2}\frac{r^2 - 3Mr - 3r^2 + \frac{45}{2}Mr - 27M^2}{(r(r-3M))^{3/2}}$$
$$= \frac{mM}{2}\frac{-2r^2 + \frac{39}{2}Mr - 27M^2}{(r(r-3M))^{3/2}} = 0 \implies r = \frac{3}{8}(13 + \sqrt{73})M.$$

Kde jsme zahodili druhé řešení pro r ležící pod horizontem.

(c)

Největší luminozitu zářivého procesu bych očekával pro hodnotu $r = \frac{3}{8}(13+\sqrt{73})M$ odpovídající $E_c''(r) = 0$ (viz výše). Tento poloměr odpovídá nejvyššímu sklonu na křivce a tak při malé změně poloměru dojde k vyzáření největšího množství energie.

Jakmile hmota dosáhne minima v bodě $r = 6M$, nebude se už moci udržet na kruhové orbitě. To znamená, že získá netriviální radiální rychlost $\dot{r} < 0$ a gravitačním působením bude stažena do černé díry.

(d)

Vzhledem k tomu, že hmota v akrečním disku obíhá *pomalu*, budeme předpokládat, že drtivou většinu energie vyzáří během cesty z $r = +\infty$ do $r = 6M$. Po překročení této hranice, bude pád rychlejší a hmota nestihne příliš energie ztratit.

Rozdíl energií od příchodu hmoty z nekonečna po vpád do díry tedy bude

$$\Delta E = m - E_c(6M) = m\left(1 - \sqrt{\frac{8}{9}}\right) = m\frac{3-\sqrt{8}}{3}.$$

Z toho, že je proces stacionární, pak víme, že „$\dot{m} = \dot{M}$“, a tak celkové

$$L := \frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}\tau} = \dot{M}\frac{3-\sqrt{8}}{3}.$$

(e)

Jak nám zadání napovídá, „odpudivé zrychlení“ bude úměrné

$$a_{\mathrm{out}} = C\frac{L}{4\pi r^2} = \frac{C\dot{M}}{4\pi r^2}\frac{3-\sqrt{8}}{3},$$

kde C je nějaká konstanta. Oproti tomu „přitažlivé zrychlení“ můžeme pro slabé pole aproximovat jako

$$a_{\mathrm{in}} = -\Phi_{,r} \approx \frac{M}{r^2}.$$

Pro akreční rychlost $\dot{M}$, při které začne být hmota odtlačovaná, potom platí

$$\frac{C\dot{M}}{4\pi r^2}\frac{3-\sqrt{8}}{3} = \frac{M}{r^2} \implies \dot{M} = \frac{12\pi M}{C(3-\sqrt{8})}. \tag{2}$$