Úloha 1: Kvantové tečky - řešení

Vojtěch Votruba

15. listopadu 2024

1. podúloha

Zde by se daly zvolit dva postupy: můžeme postupovat přes spektrální rozklad a definici $f(\hat{P}) \equiv \sum_p f(p)|p\rangle\langle p|$ anebo můžeme čistě aritmeticky napočítat mocniny a exponenciálu. Zvolíme první možnost.

Pro diagonalizaci si vypomůžeme volbou aritmetické bázi ve tvaru:

$$|A\rangle = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, |B\rangle = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, |C\rangle = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}.$$

V této bázi tedy

$$\hat{P} = i\{|A\rangle\langle C| - |C\rangle\langle A|\} = i\left[\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}(0,0,1) - \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}(1,0,0)\right] = \begin{pmatrix}0 & 0 & i\\ 0 & 0 & 0\\ -i & 0 & 0\end{pmatrix}$$

a takto získanou matici již můžeme standardně diagonalizovat

$$\begin{vmatrix}-\lambda & 0 & i\\ 0 & -\lambda & 0\\ -i & 0 & -\lambda\end{vmatrix} = -\lambda^3 + \lambda = \lambda(\lambda+1)(1-\lambda) = 0 \implies \mathrm{sp}(\hat{P}) = \{-1, 0, 1\}$$

a dopočítat vlastní stavy

$$\left(\begin{array}{ccc|c}-1 & 0 & i & 0\\ 0 & -1 & 0 & 0\\ -i & 0 & -1 & 0\end{array}\right) \to |1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\0\\i\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-|A\rangle + i|C\rangle),$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & i & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ -i & 0 & 1 & 0\end{array}\right) \to |-1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\i\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|A\rangle + i|C\rangle),$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}0 & 0 & i & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ -i & 0 & 0 & 0\end{array}\right) \to |0\rangle = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = |B\rangle.$$

Když máme vlastní stavy a vlastní čísla, můžeme zapsat spektrální rozklad $\hat{P}$,

$$\hat{P} = \frac{(-1)}{2}(|A\rangle\langle A| - i|A\rangle\langle C| + i|C\rangle\langle A| + |C\rangle\langle C|) +$$
$$+ (0)|B\rangle\langle B| + \frac{(1)}{2}(|A\rangle\langle A| + i|A\rangle\langle C| - i|C\rangle\langle A| + |C\rangle\langle C|)$$

a ze spektrálního rozkladu můžeme okamžitě počítat příslušné funkce působením pouze na vlastní čísla. Pozor si musíme dát v případě počítání $\hat{P}^0$, kde bychom narazili na výraz typu 0^0. Budeme ho chápat ve smyslu limity, tedy jako $0^0 \equiv \lim_{x\to 0} x^x = 1$. Dostáváme celkem:

$$\boxed{\begin{aligned}
\hat{P}^0 &= \frac{2}{2}|A\rangle\langle A| + \frac{2}{2}|C\rangle\langle C| + 1|B\rangle\langle B| = (\text{z úplnosti}) = \hat{I},\\
|\hat{P}| = \hat{P}^2 &= \frac{2}{2}|A\rangle\langle A| + \frac{2}{2}|C\rangle\langle C| = |A\rangle\langle A| + |C\rangle\langle C|,\\
e^{\hat{P}} &= \frac{e+e^{-1}}{2}(|A\rangle\langle A| + |C\rangle\langle C|) + i\frac{e-e^{-1}}{2}(|A\rangle\langle C| - |C\rangle\langle A|) + |B\rangle\langle B|\\
&= \frac{e+e^{-1}}{2}\hat{P}^2 + \frac{e-e^{-1}}{2}\hat{P} + |B\rangle\langle B|.
\end{aligned}}$$

2. podúloha

Množina $\{\Phi_i\}_{i=1}^3 = \{|a\rangle, |b\rangle, |c\rangle\}$ bude tvořit v $\mathcal{H}$ také ON bázi, protože vynásobení nenulovým číslem neovlivní ortogonalitu a úplnost systému a přenásobením fází se zřejmě nezmění velikost stavu ($(e^{i\delta})^* e^{i\delta} = e^{-i\delta}e^{i\delta} = 1$). Díky tomu můžeme psát

$$\begin{aligned}
\hat{H} = |a\rangle\hat{H}_{11}\langle a| + |a\rangle\hat{H}_{12}\langle b| + |a\rangle\hat{H}_{13}\langle c|\\
+|b\rangle\hat{H}_{21}\langle a| + |b\rangle\hat{H}_{22}\langle b| + |b\rangle\hat{H}_{23}\langle c|\\
+|c\rangle\hat{H}_{31}\langle a| + |c\rangle\hat{H}_{32}\langle b| + |c\rangle\hat{H}_{33}\langle c|,
\end{aligned}$$

kde $\hat{H}_{ij} = \langle\Phi_i|\hat{H}|\Phi_j\rangle$ reprezentuje (i,j)-tý prvek matice $\hat{H}$ vůči oné bázi. Hned si můžeme všimnout zaprvé, že všechny členy obsahující $|a\rangle$ a $|c\rangle$ nám vymizí díky faktu ze zadání: $\langle A|\hat{H}|C\rangle = \langle C|\hat{H}|A\rangle = 0 = \hat{H}_{13} = \hat{H}_{31}$, a zadruhé, že $\hat{H}_{11} = \langle a|\hat{H}|a\rangle = e^{-i\delta}\langle A|\hat{H}|A\rangle e^{i\delta} = \epsilon_0$ a analogicky i pro $|b\rangle$ a $|c\rangle$.

Je tedy jasné, že v diagonálních členech bude Hamiltonova funkce reálná, a musíme tak zajistit pouze reálnost smíšených nenulových členů. Ty popořadě jsou

$$\begin{aligned}
\hat{H}_{12} &= \langle a|\hat{H}|b\rangle = te^{i\alpha}e^{i(\delta_b-\delta_a)},\\
\hat{H}_{21} &= \langle b|\hat{H}|a\rangle = te^{-i\alpha}e^{i(\delta_a-\delta_b)},\\
\hat{H}_{23} &= \langle b|\hat{H}|c\rangle = te^{i\gamma}e^{i(\delta_c-\delta_b)},\\
\hat{H}_{32} &= \langle c|\hat{H}|b\rangle = te^{-i\gamma}e^{i(\delta_c-\delta_b)},
\end{aligned}$$

abychom všechny tyto prvky získali reálné, musí platit podmínky, že $\alpha = \pi n_1 + \delta_a - \delta_b$ a $\gamma = \pi n_2 + \delta_b - \delta_c$, $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$ neboli že $\boxed{\alpha + \gamma = \pi n + \delta_a - \delta_c, n \in \mathbb{Z}}$, kromě této podmínky můžeme fázové posuny $\delta \in \mathbb{R}$ zvolit jakkoliv.

3. podúloha

S výhodou si zde vypomůžeme volbou stavové báze ze druhé podúlohy. Konkrétně si zvolíme posuny δ, tak aby platilo $\alpha + \gamma = \delta_a - \delta_c$, což nám zjednoduší práci. V ní pak můžeme hamiltonián psát jako

$$\hat{H} = \epsilon_0(|a\rangle\langle a| + |b\rangle\langle b| + |c\rangle\langle c|) + t(|a\rangle\langle b| + |b\rangle\langle a| + |b\rangle\langle c| + |c\rangle\langle b|)$$

a v aritmetické bázi $|a\rangle = \left(\begin{smallmatrix}1\\0\\0\end{smallmatrix}\right), |b\rangle = \left(\begin{smallmatrix}0\\1\\0\end{smallmatrix}\right), |c\rangle = \left(\begin{smallmatrix}0\\0\\1\end{smallmatrix}\right)$ také maticově:

$$\hat{H} = \begin{pmatrix} \epsilon_0 & t & 0\\ t & \epsilon_0 & t\\ 0 & t & \epsilon_0 \end{pmatrix}.$$

Pro stanovení měřitelných energií (spektrum hamiltonánu) dále provedeme diagonalizaci

$$\begin{vmatrix} \epsilon_0-\lambda & t & 0 \\ t & \epsilon_0-\lambda & t \\ 0 & t & \epsilon_0-\lambda \end{vmatrix} = (\epsilon_0-\lambda)^3 - 2t^2(\epsilon_0-\lambda) = 0 \implies \boxed{\mathrm{sp}(\hat{H}) = \{\epsilon_0, \epsilon_0 \pm \sqrt{2}t\},}$$

k určení pravděpodobností ale dále potřebujeme i vlastní stavy

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & t & 0 & 0 \\ t & 0 & t & 0 \\ 0 & t & 0 & 0 \end{array}\right) \to |\epsilon_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|a\rangle - |c\rangle),$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \mp\sqrt{2}t & t & 0 & 0 \\ t & \mp\sqrt{2}t & t & 0 \\ 0 & t & \mp\sqrt{2}t & 0 \end{array}\right) \to |\epsilon_0 \pm \sqrt{2}t\rangle = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ \pm\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}(|a\rangle \pm \sqrt{2}|b\rangle + |c\rangle).$$

Když máme i ty, můžeme finálně spočítat skalární součiny těchto stavů se stavem $|1\rangle$ z první podúlohy, čímž získáme (po aplikaci absolutní hodnoty a umocnění) kýžené pravděpodobnosti. Pro stav $|1\rangle$ nám platí

$$|1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(-|A\rangle + i|C\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}(-e^{-i\delta_a}|a\rangle + ie^{-i\delta_c}|c\rangle)$$

a tak pro pravděpodobnost naměření energie ϵ_0 dostáváme

$$\begin{aligned} p(\epsilon_0, 1) = |\langle\epsilon_0|1\rangle|^2 &= \frac{1}{4}|-e^{-i\delta_a} - ie^{-i\delta_c}|^2 = \frac{1}{4}|-\cos(\delta_a) + i\sin(\delta_a) - i\cos(\delta_c) - \sin(\delta_c)|^2 \\ &= \frac{1}{4}(\cos^2(\delta_a) + \sin^2(\delta_c) + 2\cos(\delta_a)\sin(\delta_c) + \sin^2(\delta_a) + \cos^2(\delta_c) - 2\sin(\delta_a)\cos(\delta_c)) \\ &= \frac{1}{4}(2 - 2\sin(\delta_a - \delta_c)) = \boxed{\frac{1}{2}(1 - \sin(\alpha+\gamma)),} \end{aligned}$$

a stejným způsobem nakonec také pro energie $\epsilon_0 \pm \sqrt{2}t$:

$$\begin{aligned} p(\epsilon_0 \pm \sqrt{2}t, 1) &= |\langle\epsilon_0 \pm \sqrt{2}t|1\rangle|^2 = \frac{1}{8}|-e^{-i\delta_a} + ie^{-i\delta_c}|^2 = \frac{1}{8}|-\cos(\delta_a) + i\sin(\delta_a) \\ &+ i\cos(\delta_c) + \sin(\delta_c)|^2 = \frac{1}{8}(\cos^2(\delta_a) + \sin^2(\delta_c) - 2\cos(\delta_a)\sin(\delta_c) \\ &+ \sin^2(\delta_a) + \cos^2(\delta_c) + 2\sin(\delta_a)\cos(\delta_c)) = \frac{1}{8}(2 + 2\sin(\delta_a - \delta_c)) = \boxed{\frac{1}{4}(1 + \sin(\alpha+\gamma)).} \end{aligned}$$