

Kabinet výuky obecné fyziky, UK MFF

Fyzikální praktikum I



Úloha č. 3

Název úlohy: Studium proudění viskózní kapaliny trubicemi kruhového průřezu

Jméno: Vojtěch Votruba

Datum měření: 30. 3. 2023

Připomínky opravujícího:

	Možný počet bodů	Udělený počet bodů
Teoretická část	0–2	
Výsledky a zpracování měření	0–9	
Diskuse výsledků	0–4	
Závěr	0–1	
Použitá literatura	0–1	
Celkem	max. 17	

Posuzoval:

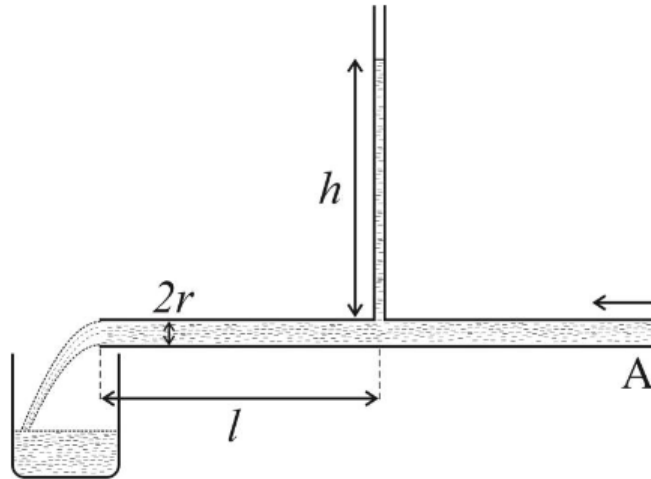
dne:

Pracovní úkoly

1. Pro tři vodorovné trubice s různými poloměry kruhového průřezu, které jsou opatřeny manometry, změřte závislost objemového průtoku Q_V na úbytku statického tlaku Δp na vyšetřované délce trubice l ve směru proudění.
2. Sestrojte graf závislosti $Q_V = Q_V(p)$
3. Ze směrnice závislosti $Q_V = Q_V(p)$ v oblasti laminárního proudění určete poloměr trubice.
4. Upravený poloměr dosadte do vztahů pro výpočet Re a k .
5. Sestrojte graf závislosti $k = k(Re)$, kde k je součinitel odporu trubice a Re je Reynoldsovo číslo. Do grafu vynesete teoretickou závislost pro laminární i turbulentní proudění.

1 Teoretická část

V tomto měření se pokusíme studovat proudění vody v malých laboratorních trubicích. Schéma použité aparatury je přiloženo jako obrázek 1.



Obrázek 1: Zařízení použité k měření. [1]

V bodě A je připojen proud vody, u kterého je možné regulovat jeho rychlost. Svisle je na trubici, do které proudí voda, připojen mikromanometr s hladinou o výšce h , z této hladiny můžeme vypočítat úbytek statického tlaku Δp na délce l podle vztahu [1]

$$\Delta p = \rho h g, \quad (1)$$

kde ρ je hustota vody a g tíhové zrychlení. Pro klasifikaci proudění při daných podmínkách využijeme tzv. Reynoldsovo číslo, jehož hodnota je vypočtena jako

$$Re := \frac{r \rho v_s}{\eta}, \quad (2)$$

kde r je poloměr trubice podle 1, v_s střední rychlost proudění v trubici a η dynamická viskozita vody. Podle Reynoldsova čísla klasifikujeme proudění na tzv. *laminární*, *přechodové* a *turbulentní*, přičemž přibližné hraniční hodnoty jsou v tomto případě 0, 1000, 2000.[1]

První ze závislostí, které budeme podle pracovních úkolů vynášet, je $Q_V = Q_V(\Delta p)$, kde $Q_V := \frac{\Delta V}{\Delta t}$ je tzv. objemový průtok. Tato závislost je teoreticky vyjádřena Poiseuillovým zákonem [1]

$$Q_V = \frac{\pi r^4}{8 \eta l} \Delta p \quad (3)$$

a zároveň z rozměrové definice patrně platí

$$Q_V = \pi r^2 v_s, \quad (4)$$

kde všechny veličiny mají stejný význam jako výše.

Druhou závislostí, kterou máme přezkoumat, je závislost tzv. *součinitele odporu trubice* $k = k(\text{Re})$. Výchozím vztahem [1] s k pro nás bude

$$\Delta p = k \frac{l}{r} \cdot \frac{1}{2} \rho v_s^2. \quad (5)$$

Z úprav rovnic výše dostáváme, že pro laminární oblast by tato závislost měla nabývat tvaru

$$k = \frac{16}{\text{Re}}. \quad (6)$$

Pro turbulentní oblast se pak závislost chová podle empirického vztahu [1] jako

$$k = \frac{0,133}{\sqrt[4]{\text{Re}}}. \quad (7)$$

2 Výsledky a zpracování měření

2.1 Podmínky pokusu

Měření bylo provedeno v místnosti PI v budově MFF UK na Karlově. Změřené podmínky termo-hygro-barometrem při pokusu byly následující: Teplota $t = 23,4(4)^\circ\text{C}$, relativní vlhkost $\Phi = 42(3)\%$, tlak $p = 982(2) \text{ hPa}$. Za hustotu a dynamickou viskozitu vody byly převzaty hodnoty mezi teplotou 20°C a 25°C : $\rho = 998(1) \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ a $\eta = 0,95(6) \times 10^{-3} \text{ Pa} \cdot \text{s}$ [2]. Za přesnou velikost tíhového zrychlení bylo považováno $g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ [2].

2.2 Rozměry trubiček

Závislosti z pracovních úkolů byly v laboratoři měřeny pro tři různé aparatury nadepsané písmeny A, B, C. Pro každou z těchto aparatur bylo vyhotoveno měření průměru $2r$ hlavní trubice posuvným měřítkem a měření vzdálenosti l pásmovým metrem. Data z těchto měření jsou zanesena do tabulky 1 níže.

Tabulka 1: Naměřený průměr $2r$ a vzdálenost l podle obrázku 1.

	A	B	C
l/cm	25,2(1)	25,0(1)	20,1(1)
$2r/\text{mm}$	2,40(5)	2,80(5)	3,30(5)
r/mm	1,20(3)	1,40(3)	1,65(3)

Nejistota byla odhadnuta jako velikost nejmenšího dílku, tj. u posuvného měřítka $0,05 \text{ mm}$ a u pásmového měřítka 1 mm .

2.3 Objemový průtok

Samotné měření objemového průtoku v závislosti na úbytku tlaku v mikromanometru probíhalo nepřímou přes jiné veličiny. V mikromanometru byla měřena výška h , ze které bylo Δp spočteno podle vztahu (1), a objemový průtok byl počítán z definice podle objemu V změřeného v odměrném válci a doby t změřené stopkami. Tato data z pokusu jsou vynesena v tabulkách 2, 3 a 4.

Nejistota měření času byla odhadnuta jako reakční doba člověka, tedy $\sigma_t \approx 0,3 \text{ s}$, nejistota určení objemu byla (i když v některých odměrných válcích mohla být menší) podle velikosti nejmenšího dílku odhadnuta na $\sigma_V = 2 \text{ ml}$. Nejtěžší bylo pak odhadnutí nejistoty změřené výšky h , neboť ta velmi kolísala podle toho, jestli šlo o laminární, přechodovou nebo turbulentní oblast, ovšem po delším pozorování hladiny byla daná výška odhadnuta jako střední hodnota, a proto nedává smysl brát jako nejistotu celý rozsah kolísání. Nakonec bylo zvoleno $\sigma_h = 2 \text{ mm}$ díky poměrně přesné stupnici mikromanometru.

Nejistota Δp byla určena podle metody přenosu chyb [3] jako

$$\left(\frac{\sigma_{\Delta p}}{\Delta p} \right)^2 = \left(\frac{\sigma_h}{h} \right)^2 + \left(\frac{\sigma_\rho}{\rho} \right)^2. \quad (8)$$

A nejistota Q_V jako

$$\left(\frac{\sigma_{Q_V}}{Q_V} \right)^2 = \left(\frac{\sigma_V}{V} \right)^2 + \left(\frac{\sigma_t}{t} \right)^2. \quad (9)$$

Tabulka 2: Naměřené hodnoty výšky h , času t , objemu V a z nich vypočtené hodnoty ubytku tlaku Δp a objemového průtoku Q_V pro trubici A

h/cm	V/ml	t/s	$\Delta p/10^1 \text{ Pa}$	$Q_V/10^{-6} \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$
4,9(2)	18(2)	20,3(3)	48(2)	8,6(1)
7,8(2)	16(2)	11,2(3)	76(2)	1,4(2)
11,2(2)	20(2)	9,8(3)	110(2)	2,0(2)
14,8(2)	29(2)	10,0(3)	144(2)	2,9(2)
15,9(2)	32(2)	9,9(3)	156(2)	3,2(2)
16,8(2)	28(2)	7,9(3)	165(2)	3,5(3)
18,7(2)	37(2)	9,8(3)	183(2)	3,8(2)
19,9(2)	36(2)	9,7(3)	195(2)	3,7(2)
21,3(2)	43(2)	10,5(3)	209(2)	4,1(2)
25,0(2)	48(2)	10,1(3)	245(2)	4,8(2)

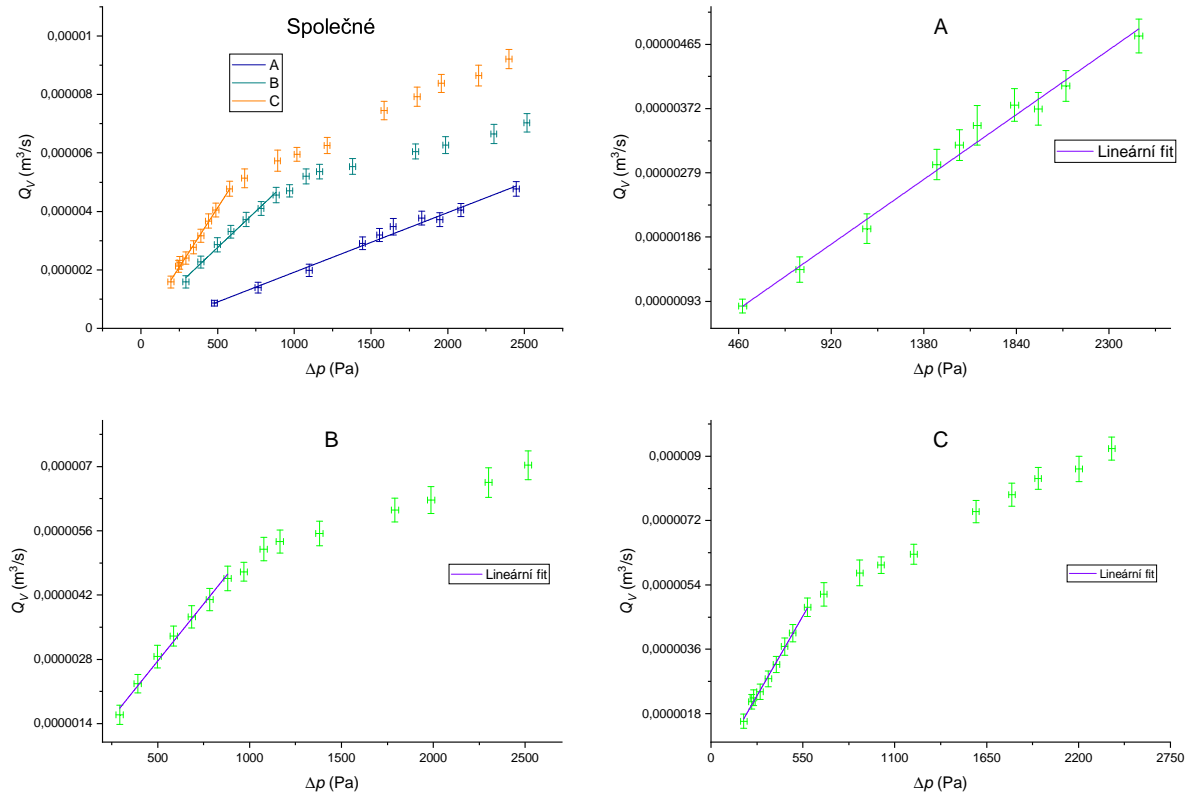
Tabulka 3: Naměřené hodnoty výšky h , času t , objemu V a z nich vypočtené hodnoty ubytku tlaku Δp a objemového průtoku Q_V pro trubici B

h/cm	V/ml	t/s	$\Delta p/10^1 \text{ Pa}$	$Q_V/10^{-6} \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$
3,0(2)	16(2)	9,7(3)	29(2)	1,6(2)
4,0(2)	24(2)	10,4(3)	39(2)	2,3(2)
5,1(2)	26(2)	8,9(3)	50(2)	2,9(2)
6,0(2)	34(2)	10,3(3)	59(2)	3,3(2)
7,0(2)	36(2)	9,5(3)	69(2)	3,7(2)
8,0(2)	40(2)	9,8(3)	78(2)	4,1(2)
9,0(2)	42(2)	9,1(3)	88(2)	4,6(3)
9,9(2)	56(2)	11,9(3)	97(2)	4,7(2)
11,0(2)	52(2)	10,0(3)	108(2)	5,2(3)
11,9(2)	55(2)	10,3(3)	117(2)	5,4(3)
14,1(2)	54(2)	9,8(3)	138(2)	5,5(3)
18,3(2)	63(2)	10,4(3)	179(2)	6,1(3)
20,3(2)	59(2)	9,4(3)	199(2)	6,3(3)
23,5(2)	58(2)	8,7(3)	230(2)	6,7(3)
25,7(2)	65(2)	9,3(3)	252(2)	7,0(3)

Tabulka 4: Naměřené hodnoty výšky h , času t , objemu V a z nich vypočtené hodnoty ubytku tlaku Δp a objemového průtoku Q_V pro trubici C

h/cm	V/ml	t/s	$\Delta p/10^1 \text{ Pa}$	$Q_V/10^{-6} \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$
2,0(2)	16(2)	10,1(3)	20(2)	1,6(2)
2,5(2)	22(2)	10,3(3)	24(2)	2,1(2)
2,6(2)	22(2)	9,6(3)	25(2)	2,2(2)
3,0(2)	24(2)	10,0(3)	29(2)	2,4(2)
3,5(2)	27(2)	9,8(3)	34(2)	2,8(2)
4,0(2)	31(2)	9,8(3)	39(2)	3,2(2)
4,5(2)	35(2)	9,5(3)	44(2)	3,7(2)
5,0(2)	40(2)	9,9(3)	49(2)	4,0(2)
5,9(2)	46(2)	9,6(3)	58(2)	4,8(3)
6,9(2)	40(2)	7,8(3)	68(2)	5,1(3)
9,1(2)	43(2)	7,4(3)	89(2)	5,7(4)
10,4(2)	69(2)	11,6(3)	102(2)	6,0(2)
12,4(2)	62(2)	9,9(3)	121(2)	6,3(3)
16,2(2)	71(2)	9,5(3)	159(2)	7,5(3)
18,4(2)	76(2)	9,6(3)	180(2)	7,9(3)
20,0(2)	87(2)	10,4(3)	196(2)	8,4(3)
22,5(2)	80(2)	9,3(3)	220(2)	8,6(4)
24,5(2)	97(2)	10,5(3)	240(2)	9,2(3)

Na těchto datech byly dále v laminární oblasti zkonstruovány podle [1] lineární fity pomocí programu *Origin* - konkrétně funkcí *Analysis::Fitting:Linear fit with X error*. Tyto fity a naměřené hodnoty jsou zaneseny do obrázku 2.



Obrázek 2: Spojený graf závislosti $Q_V = Q_V(\Delta p)$ pro všechny trubice a zároveň samostatný graf pro každou trubici A,B,C

Z nafitovaných směrnic λ jsme dále spočetli dle vztahu (3) poloměry trubic r , které jsou uvedeny v tabulce 5. Nejistoty σ_r jsme spočetli podle metody přenosu chyb [3] jako

$$\frac{\sigma_r}{r} = \frac{1}{4} \sqrt{\left(\frac{\sigma_\eta}{\eta}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_l}{l}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_\lambda}{\lambda}\right)^2}. \quad (10)$$

Tabulka 5: Vypočtené poloměry r ze směrnic λ při fitování závislosti $Q_V = Q_V(\Delta p)$

trubice	$\lambda/10^{-9} \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{Pa}^{-1}$	r/mm
A	2,04(9)	1,06(2)
B	5,0(5)	1,32(4)
C	8,1(8)	1,41(4)

2.4 Součinitel odporu trubice

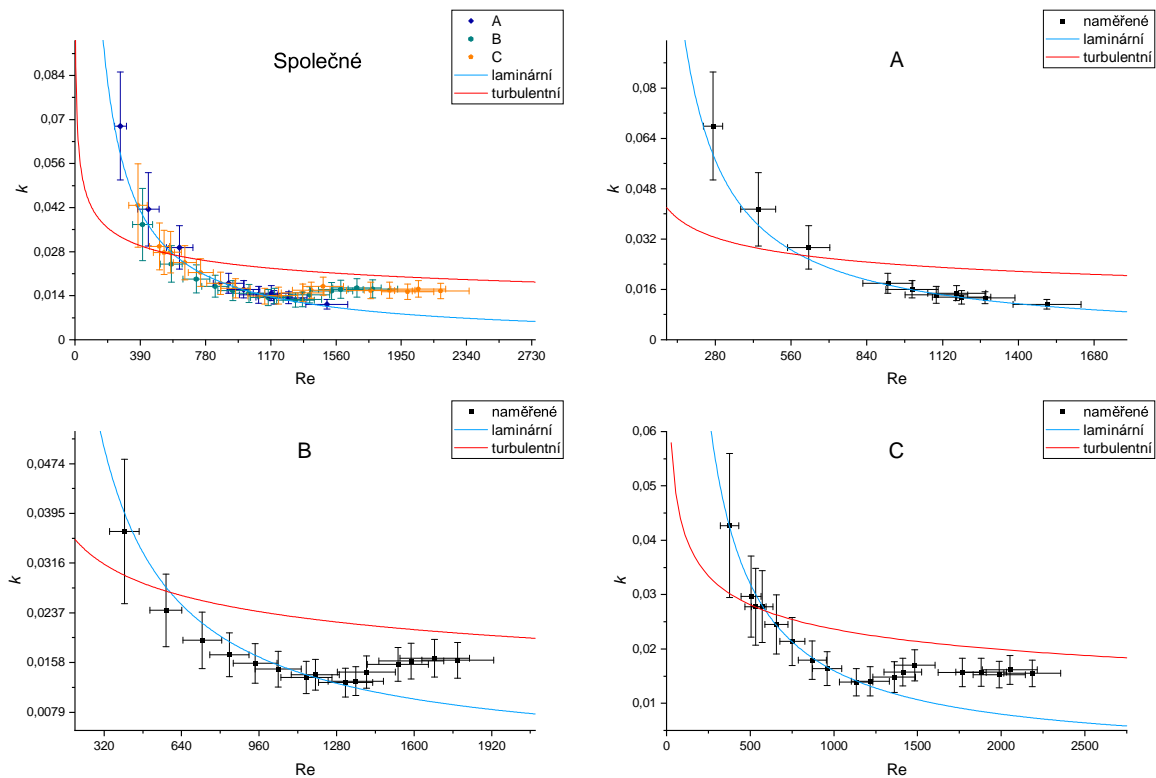
V posledních dvou pracovních úkolech studujeme závislost $k = k(\text{Re})$. Součinitel odporu trubice k zde vypočteme podle vztahu (5) a Reynoldsovo číslo Re podle vztahu (2), za v_s dosazujeme z rovnice (4). Poloměry r dosazujeme z tabulky 5.

Nejistoty k a Re byly určeny pomocí metody přenosu chyb [1] následujícími vzorci

$$\sigma_k = \frac{2gh\pi^2 r^5 t^2}{lV^2} \sqrt{\left(\frac{\sigma_h}{h}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_l}{l}\right)^2 + 4\left(\frac{\sigma_V}{V}\right)^2 + 4\left(\frac{\sigma_t}{t}\right)^2 + 25\left(\frac{\sigma_r}{r}\right)^2}, \quad (11)$$

$$\sigma_{\text{Re}} = \frac{\rho V}{\pi \eta r t} \sqrt{\left(\frac{\sigma_\rho}{\rho}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_V}{V}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_t}{t}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_\eta}{\eta}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_r}{r}\right)^2}. \quad (12)$$

Závislosti byly finálně vyneseny do obrázku 3 podobně jako v předchozí podsekcí. Zároveň jsme vynesli i teoretické závislosti podle rovnic (6) a (7).



Obrázek 3: Spojený graf závislosti $k = k(\text{Re})$ pro všechny trubice a zároveň samostatný graf pro každou trubici A,B,C

3 Diskuse výsledků

3.1 Měření poloměru

Při měření poloměru r jednotlivých trubic nebyla nalezena dobrá shoda mezi hodnotami naměřenými posuvným měřítkem a hodnotami vypočtenými. Naštěstí se ale shoduje aspoň relace mezi jednotlivými trubicemi ($r_A < r_B < r_C$) a lze pozorovat systematické posunutí přibližně o 0,1 mm. Těžko říci, kde nastala chyba, ale jedním vysvětlením by například mohlo být, že měření posuvným měřítkem bylo vyhotoveno pouze na konci trubice (v ostatních částech bychom nemohli čelistmi posuvného měřítka zajet dovnitř), kde trubice mohla být ulomená, zdeformovaná nebo jednoduše od výroby širší než v ostatních částech.

3.2 Závislost Q_V

Při zkoumání závislosti $Q_V = Q_V(\Delta p)$ bylo za laminární oblast použito prvních 10, resp. 7, resp. 9 hodnot v tabulce 2, resp. 3, resp. 4. Vynesené závislosti odpovídají zkušenosti experimentátora, kdy při měření trubic B a C pozoroval kolísání hladiny v mikromanometru, zatímco v trubici A nikoliv. Z toho můžeme (a data rozebrána v další podsekcí to jen potvrzují), usoudit, že v trubici A probíhalo pouze laminární proudění, zatímco v trubicích B a C i k přechodovému a turbulentnímu.

Celková nejistota mohla v tomto měření být nižší, neboť při měření času experimentátor plánovaně zastavil stopky a přerušil přidávání vody do odměrného válce, tudíž nešlo o jev tolik založený na reakcích. I tak ale muselo v dojít k nějakému zpoždění, proto jsme se pro jistotu rozhodli zvolit jako nejistotu reakční dobu.

3.3 Závislost $k(\text{Re})$

Zde při diskusi vyjdeme primárně z obrázku 3. Jak vidíme, tak pro trubici A závislost vyšla v dobré shodě s laminárním modelem, což bychom očekávali. Pro trubice B a C pak vidíme postupné odchýlení od laminární oblasti téměř až k oblasti turbulentní. U trubice B bychom toto chování očekávali, protože pro ni nemáme žádné hodnoty s $\text{Re} > 2000$, proto můžeme proudění v této oblasti klasifikovat jako přechodové. Na druhou stranu trubice C měla vyšší průměr než trubice B a i přesto, že se více přiblížila turbulentní závislosti, tak ani po překročení hranice $\text{Re} > 2000$ se s ní neshoduje. Buď jsou tedy data naměřena nedobře nebo byl použit příliš zjednodušený model. V každém případě dobrým výsledkem je, že data nejsou zanesena žádnou výraznou systematickou chybou, která by celou křivku posunula. Vzhledem k tomu, že jsme se v měření chybu snažili odhadnout spíše jako vyšší než nižší, můžeme zkusit „napadnout“ model.

Ne nutně, že by empirická rovnice (7) byla nepřesná, ale je možné, že například výpočet Reynoldsova čísla nebyl úplně korektní, neboť tlaky v trubici se chovají mnohem komplexněji než podle jednoduchého hydrostatického modelu (1).

4 Závěr

V rámci pracovních úkolů jsme s pomocí lineární regrese a využitím Poiseuillova zákona stanovili poloměry r všech laboratorních trubic na hodnoty

$$\begin{aligned}r_A &= 1,06(2) \text{ mm}, \\r_B &= 1,32(4) \text{ mm}, \\r_C &= 1,41(4) \text{ mm}.\end{aligned}$$

Zároveň se nám podařilo vynést kýžené grafy a prozkoumat pomocí nich závislosti $Q_V = Q_V(\Delta p)$ a $k = k(\text{Re})$. Závislost $k = k(\text{Re})$ byla porovnána se svým teoretickým, resp. experimentálně zjištěným předpisem. V trubici A se naměřená data shodovala s laminárním modelem, zatímco v trubicích B a C zjevně docházelo i k přechodovému a turbulentnímu proudění.

Reference

- [1] *Studium proudění viskózní kapaliny trubicemi kruhového průřezu* [online]. [cit. 2023-03-07]. Dostupné z: <https://physics.mff.cuni.cz/vyuka/zfp/zadani/103>
- [2] BROŽ, J., V. ROSKOVEC a M. VALOUCH. *Fyzikální a matematické tabulky*. 1. vyd. Praha: SNTL, 1980, 305 s.
- [3] ENGLISH, Jiří. *Úvod do praktické fyziky*. Praha: Matfyzpress, 2006. ISBN 80-86732-93-2.