# Úloha 4: Interference momentu hybnosti - řešení

Vojtěch Votruba

6. ledna 2025

## 1. podúloha

Z přednášky víme, že sférické harmoniky jsou komplexní funkce $Y_{\ell m}(\boldsymbol{n})$ tvořící úplný ortogonální systém. Relace ortogonality pak můžeme zapsat integrálem jako

$$\oint_{S^2} Y_{\ell m}(\theta,\varphi) Y^*_{\ell' m'}(\theta,\varphi)\,\mathrm{d}\Omega = \delta_{\ell'\ell}\delta_{m'm}, \quad \mathrm{d}\Omega = \sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi.$$

Chceme-li tedy funkci $\Phi(\boldsymbol{n})$ zapsat pomocí sférických harmonik, bude to formálně vypadat takto

$$\Phi(\boldsymbol{n}) = \sum_{\ell,m} c_{\ell m} Y_{\ell m}(\boldsymbol{n}), \quad \ell \in \mathbb{N}_0, m \in \mathbb{Z} \ \& \ |m| \le \ell,$$

jak ale najít koeficienty? Obecně bychom spočetli projekci přes skalární součin na sféře zapsaný výše, tato realizace v naší situaci však není příliš praktická, neboť předpis harmonik je složitý. Navíc nám hraje do karet to, že všechny kulové funkce můžeme zapsat jako $Y_{\ell m}(\boldsymbol{n}) = \frac{p_\ell(\boldsymbol{x})}{r^\ell}$, kde $p_\ell$ je (homogenní) polynom $\ell$-tého stupně.

Je tedy jisté, že je-li funkce $\Phi(\boldsymbol{n})$ sama polynomem stupně $k$, budou všechny její koeficienty v rozkladu s $\ell > k$ nulové. Funkce ze zadání $\psi_1$, $\psi_2$ jsou obě polynomy stupně 2, což nás omezuje na hledání rozkladu pouze do harmonik s $\ell \le 2$. K těmto harmonikám máme také k dispozici tabulku.

### $\psi_1$

Začněme s funkcí $\psi_1$, normalizaci přes konstantu $A$ přidáme na závěr.

Pro začátek okamžitě vidíme, s jakým koeficientem se v rozkladu bude objevovat harmonika $Y_{1,0}$, to proto, že z ní musíme získat do našeho polynomu člen obsahující $z$, máme tak

$$c^{(1)}_{1,0}\sqrt{\frac{3}{4\pi}} = -\sqrt{8} \implies c^{(1)}_{1,0} = -4\sqrt{\frac{2\pi}{3}},$$

Co vidíme dál? V rozkladu se nám nebudou vůbec vyskytovat funkce $Y_{2,\pm1}$, protože ty obsahují smíšené členy se součinem $zx$ nebo $zy$, dále z podobných důvodů vidíme, že v rozkladu nechceme funkce $Y_{1,\pm1}$ ani $Y_{2,\pm2}$.

Člen obsahující $z^2$ dále dostaneme do rozkladu pomocí harmoniky $Y_{2,0}$. Na první pohled může být matoucí, že obsahuje kromě $z^2$ i $x^2$ a $y^2$, ale dosazením za $-x^2-y^2 = 1-x^2-y^2-1 = z^2-1$ se můžeme rychle přesvědčit o opaku. Dostáváme

$$c^{(1)}_{2,0} 3\sqrt{\frac{5}{16\pi}} = \sqrt{5} \implies c^{(1)}_{2,0} = \frac{4\sqrt{\pi}}{3}$$

a nakonec musíme ještě pro opravu přidat konstantní člen, pro který máme rovnici.

$$-\frac{\sqrt{16\pi}}{3}\sqrt{\frac{5}{16\pi}} + c^{(1)}_{0,0}\sqrt{\frac{1}{4\pi}} = -\sqrt{5} \implies c^{(1)}_{0,0} = -\frac{4\sqrt{5\pi}}{3}.$$

Konstantu $A$ nakonec určíme jako

$$\oint_{S^2} \psi_1^*\psi_1\,\mathrm{d}\Omega = |A|^2\left(\frac{80\pi}{9} + \frac{32\pi}{3} + \frac{16\pi}{9}\right) = 1 \implies A = \frac{\sqrt{3}}{8\sqrt{\pi}},$$

máme tedy konečně rozklad

$$\psi_1(\boldsymbol{n}) = \frac{\sqrt{3}}{8\sqrt{\pi}}\left(-\frac{4\sqrt{5\pi}}{3}Y_{0,0} - 4\sqrt{\frac{2\pi}{3}}Y_{1,0} + \frac{4\sqrt{\pi}}{3}Y_{2,0}\right) = -\sqrt{\frac{5}{12}}Y_{0,0} - \sqrt{\frac{1}{2}}Y_{1,0} + \sqrt{\frac{1}{12}}Y_{2,0}.$$

$\psi_2$

Pro druhou funkci bude postup koncepčně stejný jako pro funkci první, pouze tentokrát využijeme harmoniky $Y_{0,0}, Y_{2,\pm1}$ a $Y_{2,0}$. Pro $Y_{2,0}$ máme

$$c_{2,0}^{(2)} 3\sqrt{\frac{5}{16\pi}} = 1 \implies c_{2,0}^{(2)} = \frac{4}{3}\sqrt{\frac{\pi}{5}},$$

dále pro $Y_{2,\pm1}$ jistě musí platit $-c_{2,1}^{(2)} = c_{2,-1}^{(2)}$, abychom se zbavili členu s $yz$, dostáváme

$$c_{2,-1}^{(2)} 2\sqrt{\frac{15}{8\pi}} = \sqrt{8} \implies c_{2,-1}^{(2)} = -c_{2,1}^{(2)} = 4\sqrt{\frac{\pi}{15}}$$

a nakonec musíme opravit první člen pomocí konstantní harmoniky, tudíž

$$\sqrt{\frac{1}{4\pi}} c_{0,0}^{(2)} = -\frac{2}{3} \implies c_{0,0}^{(2)} = -\frac{4}{3}\sqrt{\pi}.$$

Normalizační podmínka zní

$$|B|^2 \left( \frac{16\pi}{9} + \frac{16\pi}{15} + \frac{16\pi}{15} + \frac{16\pi}{45} \right) = 1 \implies B = \sqrt{\frac{45}{192\pi}} = \frac{1}{8}\sqrt{\frac{15}{\pi}}.$$

Takže finální tvar rozkladu je

$$\psi_2(\boldsymbol{n}) = \frac{1}{8}\sqrt{\frac{15}{\pi}} \left( -\frac{4}{3}\sqrt{\pi} Y_{0,0} \mp 4\sqrt{\frac{\pi}{15}} Y_{2,\pm1} + \frac{4}{3}\sqrt{\frac{\pi}{5}} Y_{2,0} \right) = -\frac{\sqrt{15}}{6} Y_{0,0} \mp \frac{1}{2} Y_{2,\pm1} + \frac{\sqrt{3}}{6} Y_{2,0}.$$

## 2. podúloha

Při aktu měření zkolabují vlnové funkce $\psi$ do jednoho z vlastních stavů operátoru kvadrátu momentu hybnosti $L^2$. Z minulé úlohy máme zadané funkce už rozloženy do báze sférických harmonik, stačí si tedy uvědomit, že právě ony tvoří bázi vlastních stavů $L^2$. Konkrétní působení $L^2$ na kulové funkce vypadá takto:

$$L^2 Y_{\ell m} = \hbar^2 \ell(\ell+1) Y_{\ell m}.$$

Z toho dál můžeme okamžitě usoudit, že pro funkci $\psi_1$ naměříme hodnoty 0, $2\hbar^2$ a $6\hbar^2$ a pro funkci $\psi_2$ pouze 0 a $6\hbar^2$. Pravděpodobnosti naměření daných hodnot pak spočteme pomocí skalárního součinu jako

$$\begin{aligned}
p^{(1)}(L^2 = 0) &= |\langle 0,0|\psi_1\rangle|^2 = |Ac_{0,0}^{(1)}|^2,\\
p^{(1)}(L^2 = 2\hbar^2) &= |\langle 1,0|\psi_1\rangle|^2 = |Ac_{1,0}^{(1)}|^2,\\
p^{(1)}(L^2 = 6\hbar^2) &= |\langle 2,0|\psi_1\rangle|^2 = |Ac_{2,0}^{(1)}|^2,\\
p^{(2)}(L^2 = 0) &= |\langle 0,0|\psi_2\rangle|^2 = |Bc_{0,0}^{(2)}|^2,\\
p^{(2)}(L^2 = 6\hbar^2) &= 1 - |\langle 0,0|\psi_2\rangle|^2 = |Bc_{0,0}^{(2)}|^2,
\end{aligned}$$

kde platí $\langle \boldsymbol{n}|\ell m\rangle = Y_{\ell m}(\boldsymbol{n})$. Abychom našli nejpravděpodobnější hodnoty, stačí nám tedy velmi snadno porovnat velikost kvadrátů koeficientů získaných z předchozí podúlohy.

Vidíme, že pro stav $\psi_1$ bychom tedy s maximální pravděpodobností naměřili hodnotu $L^2 = 2\hbar^2$ a pro stav $\psi_2$ hodnotu $L^2 = 6\hbar^2$.

## 3. podúloha

Hustotu pravděpodobnosti $\varrho$ v souřadnicové reprezentaci pro naši konkrétní vlnovou funkci $\psi = \psi_1 + \psi_2 \mathrm{e}^{i\alpha}$ spočteme jako

$$\varrho(\boldsymbol{n}) = \psi^*(\boldsymbol{n})\psi(\boldsymbol{n}) = (\psi_1^* + \psi_2^* \mathrm{e}^{-i\alpha})(\psi_1 + \psi_2 \mathrm{e}^{i\alpha}) = \psi_1^2 + \psi_2^2 + \psi_1\psi_2(\mathrm{e}^{i\alpha} + \mathrm{e}^{-i\alpha}) = \psi_1^2 + \psi_2^2 + 2\psi_1\psi_2\cos(\alpha)$$
$$= A^2(\sqrt{5}z^2 - \sqrt{8}z - \sqrt{5})^2 + B^2(\sqrt{8}xz + z^2 - 1)^2 + 2AB(\sqrt{5}z^2 - \sqrt{8}z - \sqrt{5})(\sqrt{8}xz + z^2 - 1)\cos(\alpha)$$

Podle zadání chceme zajistit, aby byla v rovině $xy$ nulová, pokládáme $z = 0$ a dostáváme

$$\varrho(x, y, 0) = 5A^2 + B^2 + 2AB\sqrt{5}\cos(\alpha) = 0,$$
$$\implies \cos(\alpha) = -\frac{5A^2 + B^2}{2\sqrt{5}AB} = -\frac{5\frac{3}{64\pi} + \frac{1}{64}\frac{15}{\pi}}{2\sqrt{5}\frac{\sqrt{3}}{8\sqrt{\pi}}\frac{1}{8}\sqrt{\frac{15}{\pi}}} = -1 \implies \alpha = (2k+1)\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Dosazením za $\alpha$ si můžeme zapsat stav $\psi$

$$\psi(\boldsymbol{n}) = \psi_1 - \psi_2 = -\sqrt{\frac{5}{12}}Y_{0,0} - \sqrt{\frac{1}{2}}Y_{1,0} + \sqrt{\frac{1}{12}}Y_{2,0} + \frac{\sqrt{15}}{6}Y_{0,0} \pm \frac{1}{2}Y_{2,\pm1} - \frac{\sqrt{3}}{6}Y_{2,0}$$
$$= \cancel{\left(-\sqrt{\frac{15}{36}} + \frac{\sqrt{15}}{6}\right)}Y_{0,0} - \sqrt{\frac{1}{2}}Y_{1,0} + \cancel{\left(\sqrt{\frac{3}{36}} - \frac{\sqrt{3}}{6}\right)}Y_{2,0} \pm \frac{1}{2}Y_{2,\pm1} = -\sqrt{\frac{1}{2}}Y_{1,0} + \frac{1}{2}Y_{2,1} - \frac{1}{2}Y_{2,-1},$$

z čehož můžeme stejně jako u předchozí podúlohy určit nejpravděpodobnější hodnotu $L^2$. Vidíme, že součty kvadrátů rozvojových koeficientů se pro obě hodnoty rovnají, a je tak stejně pravděpodobné, že naměříme $L^2 = 2\hbar^2$ a $L^2 = 6\hbar^2$.