DÚ 1b: Radial infall into a charged black hole

Vojtěch Votruba

8. prosince 2025

(a)

Metrika Reissnerova–Nordströmova řešení má ve sférických souřadnicích (t, r, θ, φ) diagonální tvar

$$\mathrm{d}s^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right)\mathrm{d}t^2 + \frac{\mathrm{d}r^2}{1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}} + r^2\mathrm{d}\Omega^2.$$

Podobně jako v případě Schwarzschildova prostoročasu nezávisí tato metrika na t a φ, což nám okamžitě dává dvě Killingova pole

$$t^\mu = (1, 0, 0, 0),$$
$$\varphi^\mu = (0, 0, 0, 1)$$

a také dva související integrály pohybu

$$E := -p_t = -g_{tt}p^t = \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right)p^t,$$
$$L := p_\varphi = g_{\varphi\varphi}p^\varphi = r^2 \sin\theta p^\varphi.$$

Při radiálním pádu dle zadání předpokládáme na začátku $p^\varphi = p^\theta = 0$. Tyto složky hybnosti zřejmě zůstanou nulové během celého pohybu, kdyby tomu tak nebylo, byla by narušena sférická symetrie problému, k čemuž by bylo potřeba nějaké asymetrické fyzikální působení. Z normalizace 4-hybnosti dále získáváme

$$p_tp^t + p_rp^r = -\frac{E^2}{1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}} + \frac{(p^r)^2}{1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}} = -m^2 \implies (p^r)^2 = E^2 - m^2\left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right).$$

Neboť $p^r = mu^r = m\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\tau}$, máme konečně

$$\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\tau}\right)^2 = \tilde{E}^2 - \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right), \tag{1}$$

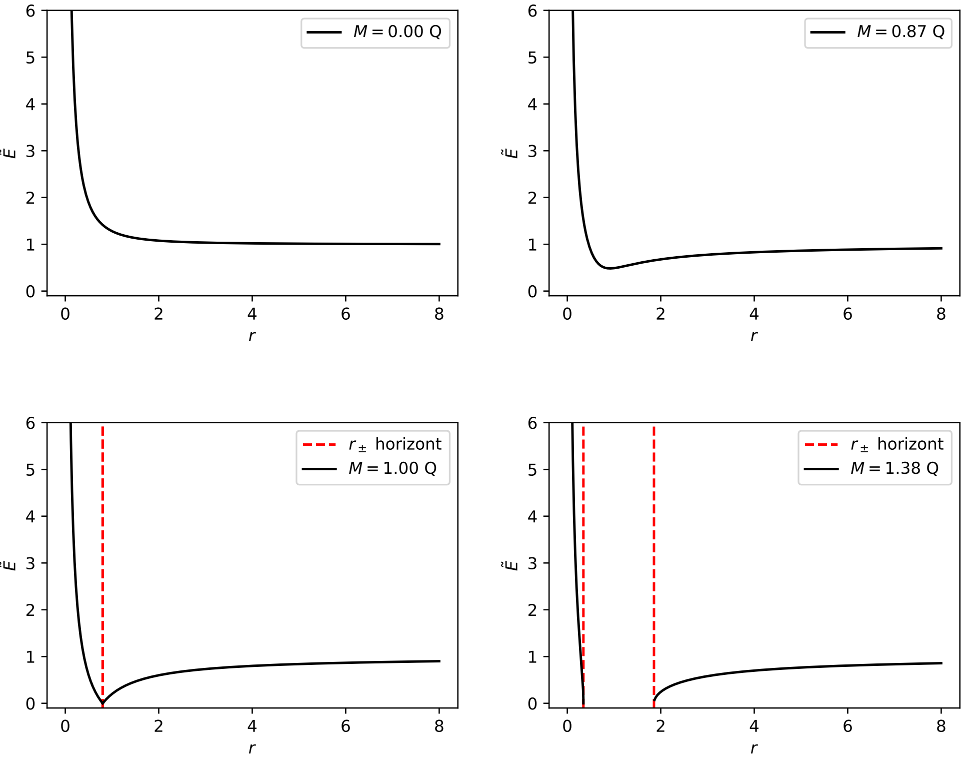
kde $\tilde{E} = E/m$.

(b)

Aby pohyb dle rovnice (1) byl fyzikálně možný, musí být pravá strana nezáporná. To je zřejmě splněno v oblasti mezi oběma horizonty. Mimo tuto oblast v analogii ke Keplerově problému definujeme efektivní potenciál $V_{\mathrm{ef.}} = \sqrt{1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}}$ a povolujeme pohyby takové, že $\tilde{E} \geq V_{\mathrm{ef.}}$.

Zde bychom měli správně dodat, že vlastně zahazujeme druhou větev řešení pro záporné energie, pro kterou by mělo naopak platit, že $\tilde{E} \leq -V_{\mathrm{ef.}}$. Tato větev je ale symetrická s první větví okolo osy x a tak se jí nemusíme podrobněji zabývat.

Průběh efektivního potenciálu je pro různé hodnoty M vykreslen na Obr. 1. Vidíme, že pro všechny povolené hodnoty $\tilde{E}$ určitě existuje alespoň jeden bod obratu, což je zřejmé i z toho, že $\lim_{r\to 0} V_{\mathrm{ef.}} = +\infty$. Poté nás může zajímat, při jakých energiích se objevují ne 1, ale se 2 body obratu. Derivací jednoduše zjistíme, že lokální minimum efektivního potenciálu leží v bodě $r_{\min} = \frac{Q^2}{M}$.



Obrázek 1: Graf efektivního potenciálu. $Q = 0.8$ bylo zafixováno.

Pokud lokální minimum existuje, znamená to, že určitě existuje nějaké energie, na níž jsou dva body obratu. Jediný případ, kdy takové lokální minimum není, je pro $M = 0$, kdy dostáváme polohu minima jako $r_{\min} = +\infty$.

Kromě toho je z tvaru křivky (konkrétně z její asymptoty $r \to +\infty$) jasné, že energie testovací částice $\tilde{E}$, pod kterou se vždy budou nalézat dva body obratu bude $\tilde{E} = 1$, resp. klidová energie $E = m$.

(c)

Zavedením $r(\eta(\tau))$ můžeme přepsat (1) jako

$$\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\eta}\right)^2 \left(\frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}\tau}\right)^2 = \tilde{E}^2 - \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right),$$

odkud vidíme, že rovnice se zjednoduší, položíme-li $\frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}\tau} = \frac{1}{r}$. Dostáváme

$$\int \frac{\mathrm{d}r}{\sqrt{r^2(\tilde{E}^2 - 1) + 2Mr - Q^2}} = \int \mathrm{d}\eta.$$

Na LS máme známý integrál (List of integrals of irrational algebraic functions), který řešíme podle hodnoty diskriminantu výrazu pod odmocninou. $\Delta = 4M^2 + 4(\tilde{E}^2 - 1)Q^2$.

- Pro $\tilde{E} < 1$ a $\Delta > 0$, což odpovídá oblasti se dvěma body obratu,

$$\int \frac{\mathrm{d}r}{\sqrt{r^2(\tilde{E}^2 - 1) + 2Mr - Q^2}} = -\frac{1}{\sqrt{1 - \tilde{E}^2}} \arcsin\left(\frac{r(\tilde{E}^2 - 1) + M}{\sqrt{M^2 + (\tilde{E}^2 - 1)Q^2}}\right) + \eta_0.$$

- Pro $\tilde{E} = 1$

$$\int \frac{\mathrm{d}r}{\sqrt{r^2(\tilde{E}^2 - 1) + 2Mr - Q^2}} = \frac{1}{M}\sqrt{2Mr - Q^2} + \eta_0.$$

- Pro $\tilde{E} > 1 \implies \Delta > 0$, což odpovídá oblasti s jedním bodem obratu,

$$\int \frac{\mathrm{d}r}{\sqrt{r^2(\tilde{E}^2-1)+2Mr-Q^2}} = \frac{1}{\sqrt{\tilde{E}^2-1}}\operatorname{arcosh}\left(\frac{r(\tilde{E}^2-1)+M}{\sqrt{M^2+(\tilde{E}^2-1)Q^2}}\right)+\eta_0.$$

Invertováním daných výrazů tedy dostáváme pro jednotlivé oblasti

$$\begin{aligned}
r(\eta) &= \frac{\sqrt{M^2+(\tilde{E}^2-1)Q^2}}{\tilde{E}^2-1}\sin\Big(-(\eta-\eta_0)\sqrt{1-\tilde{E}^2}\Big)-\frac{M}{\tilde{E}^2-1},\\
r(\eta) &= \frac{M}{2}(\eta-\eta_0)^2+\frac{Q^2}{2M},\\
r(\eta) &= \frac{\sqrt{M^2+(\tilde{E}^2-1)Q^2}}{\tilde{E}^2-1}\cosh\Big((\eta-\eta_0)\sqrt{\tilde{E}^2-1}\Big)-\frac{M}{\tilde{E}^2-1}.
\end{aligned}$$

Pro každé z těchto řešení máme jasně dané $r_{\min}$ a $r_{\max}$ pomocí efektivního potenciálu. To nám pomůže určit krajní hodnoty pro η

- Pro $\tilde{E} < 1$ řešeními $\tilde{E} = V_{\text{ef.}}$ jsou body obratu $r_{\min,\max} = \frac{-M\mp\sqrt{M^2+Q^2(\tilde{E}^2-1)}}{\tilde{E}^2-1}$, což z rovnice výše odpovídá $\eta \in (\eta_0 - \frac{\pi}{2\sqrt{1-\tilde{E}^2}}, \eta_0 + \frac{\pi}{2\sqrt{1-\tilde{E}^2}})$
- Pro $\tilde{E} = 1$ platí $r_{\max} = \infty$, potom $r_{\min} = Q^2/2M$. To jasně odpovídá intervalu $\eta \in (\eta_0, +\infty)$ nebo $\eta \in (-\infty, \eta_0)$.
- Pro $\tilde{E} > 1$ platí $r_{\max} = \infty$, potom $r_{\min} = \frac{-M+\sqrt{M^2+Q^2(\tilde{E}^2-1)}}{\tilde{E}^2-1}$. To znovu odpovídá $\eta \in (\eta_0, +\infty)$ nebo $\eta \in (-\infty, \eta_0)$.

(d)

$\tau(\eta)$ dál dostaneme z diferenciální rovnice, kterou jsme zavedli η, tj. $\frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}\tau} = \frac{1}{r} \implies \mathrm{d}\tau = r(\eta)\mathrm{d}\eta$. Pro jednotlivé pásma energie to znamená triviální integrací od $\eta = 0$ do "$\eta = \eta$".

- $\tilde{E} < 1$

$$\tau(\eta) = -\frac{\sqrt{M^2+(\tilde{E}^2-1)Q^2}}{(1-\tilde{E}^2)^{3/2}}\left(\cos\Big(-(\eta-\eta_0)\sqrt{1-\tilde{E}^2}\Big)-\cos\Big(\eta_0\sqrt{1-\tilde{E}^2}\Big)\right)-\frac{M}{\tilde{E}^2-1}\eta.$$

- $\tilde{E} = 1$

$$\tau(\eta) = \frac{M}{6}(\eta-\eta_0)^3+\frac{Q^2}{2M}\eta+\frac{M}{6}\eta_0^3$$

- $\tilde{E} > 1$

$$\tau(\eta) = \frac{\sqrt{M^2+(\tilde{E}^2-1)Q^2}}{(\tilde{E}^2-1)^{3/2}}\left(\sinh\Big((\eta-\eta_0)\sqrt{\tilde{E}^2-1}\Big)-\sinh\Big(-\eta_0\sqrt{\tilde{E}^2-1}\Big)\right)-\frac{M}{\tilde{E}^2-1}\eta.$$

Pro každou energii je minimální poloměr definován jinak podle mezí, co jsme zapsali v předchozím bodě, znovu tedy musíme rozepsat výsledek

- $\tilde{E} < 1$

$$\Delta\tau = \frac{M}{\tilde{E}^2-1}\left(\eta_0+\frac{\pi}{2\sqrt{1-\tilde{E}^2}}\right)+\frac{\sqrt{M^2+(\tilde{E}^2-1)Q^2}}{(1-\tilde{E}^2)^{3/2}}\cos\Big(\eta_0\sqrt{1-\tilde{E}^2}\Big).$$

- $\tilde{E} = 1$

$$\Delta\tau = \frac{Q^2}{2M}\eta_0 + \frac{M}{6}\eta_0^3$$

- $\tilde{E} > 1$

$$\Delta\tau = -\frac{M}{\tilde{E}^2 - 1}\eta_0 - \frac{\sqrt{M^2 + (\tilde{E}^2 - 1)Q^2}}{(\tilde{E}^2 - 1)^{3/2}}\sinh\Big(-\eta_0\sqrt{\tilde{E}^2 - 1}\Big).$$

Nakonec ale musíme nějak vyjádřit η_0. To můžeme udělat z podmínky, že na začátku pohybu má být r nějaké r_0. Získáváme

- $\tilde{E} < 1$

$$\Delta\tau = \frac{M}{(1 - \tilde{E}^2)^{3/2}}\arccos\left(-\frac{r_0(\tilde{E}^2 - 1) + M}{\sqrt{M^2 + (\tilde{E}^2 - 1)Q^2}}\right) + \frac{1}{1 - \tilde{E}^2}\sqrt{r_0^2(\tilde{E}^2 - 1) + 2r_0 M - Q^2}.$$

- $\tilde{E} = 1$

$$\Delta\tau = \frac{Q^2}{2M^2}\sqrt{2Mr_0 - Q^2} + \frac{1}{6M^2}(2Mr_0 - Q^2)^{3/2}.$$

- $\tilde{E} > 1$

$$\Delta\tau = \frac{M}{(\tilde{E}^2 - 1)^{3/2}}\operatorname{arcosh}\left(\frac{r_0(\tilde{E}^2 - 1) + M}{\sqrt{M^2 + (\tilde{E}^2 - 1)Q^2}}\right) - \frac{1}{\tilde{E}^2 - 1}\sqrt{r_0^2(\tilde{E}^2 - 1) + 2r_0 M - Q^2}.$$

(e)

Tuto část jsem nestihl udělat. Odhadem si ale říkám, že by to ale mělo vypadat nějak tak, že částice s $\tilde{E} \geq 1$ proletí do jiného vesmíru, kde odletí zase do nějakého nekonečna.

Jakmile totiž projde horizontem, nemůže se z kauzální struktury vrátit zpět, odraz na efektivním potenciálu v tom samém vesmíru tak nemůže jednoduše nastat.