

Kabinet výuky obecné fyziky, UK MFF

Fyzikální praktikum II



Úloha č. 4

Název úlohy: Měření malých odporů

Jméno: Vojtěch Votruba

Datum měření: 2023-10-16

Připomínky opravujícího:

	Možný počet bodů	Udělený počet bodů
Teoretická část	0–2	
Výsledky a zpracování měření	0–9	
Diskuse výsledků	0–4	
Závěr	0–1	
Použitá literatura	0–1	
Celkem	max. 17	

Posuzoval:

dne:

Pracovní úkoly

1. Změřte průměry a délky drátů na pracovní desce.
2. Změřte odpory ve čtyřbodovém zapojení pomocí multimetru KEITHLEY 2010.
3. Změřte odpor drátů Wheatstoneovým a Thomsonovým můstkem Metra - MTW. Vysvětlete rozdíly ve výsledcích měření. Současně určete odpor přívodních vodičů a odpor na svorkách v případě měření Wheatstoneovým můstkem.
4. Určete měrný odpor jednotlivých vzorků i s příslušnou chybou výsledku. Stanovené hodnoty porovnejte s hodnotami uváděnými v tabulkách.

1 Teoretická část

K proměření odporů drátů v této úloze bylo použito několik metod, jejich principy rozebereme v následujících podsekcích.

1.1 Rozměry a měrný odpor

Díky této části měření můžeme provést porovnání s referenčními hodnotami. Známe-li totiž materiál, odpor R a rozměry vodiče, který máme proměřit, můžeme použít definici měrného elektrického odporu ϱ (ten je pro konkrétní materiály známý)

$$\varrho = R \frac{S}{l}, \quad (1)$$

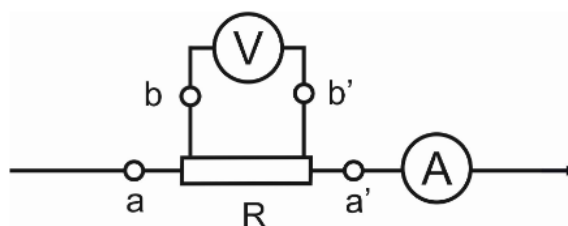
kde l je délka vodiče a S obsah jeho průřezu. Ten můžeme spočítat standardním geometrickým vztahem z průměru d , jako

$$S = \frac{1}{4} \pi d^2. \quad (2)$$

1.2 Čtyřbodové zapojení

Tato metoda měření odporu používá ampérmetr a voltmetr, které se připojí na daný drát sériově, resp. paralelně vůči zdroji napětí [1]. Z voltmetru pak můžeme odečíst napětí U a z ampérmetru proud I , to nám dává podle Ohmova zákona možnost odpor R vypočítat¹.

Abychom odpor drátu změřili co nejpřesněji, je potřeba, aby byl opatřen tzv. napěťovými (na obr. 1 b, b') a proudovými (na obr. 1 a, a') kontakty [1]. Díky připojení voltmetru na napěťové kontakty nedochází k započítávání parazitních odporů, jak by k tomu docházelo, kdybychom voltmetr připojili např. na proudové kontakty. Toto zapojení je k vidění na obr. 1.



Obrázek 1: Schéma čtyřbodového zapojení pro měření odporu [1].

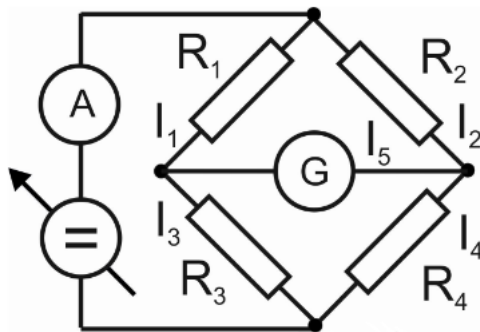
¹Při použití laboratorního multimetru KEITHLEY 2010 nemusíme provádět výpočet. Multimetr sám funguje jako ampérmetr, voltmetr i zdroj napětí naráz. Sám nám také ukáže kýžený odpor R [1]

1.3 Měření Wheatstonovým můstkem

Za Wheatstonův můstek označujeme zapojení podle schématu na obr. 2. Necht jeden z odporů R_1, R_2, R_3 nebo R_4 je neznámý. Platí-li zároveň, že ostatní známé odpory jsou takové, že na galvanometru je nulová hodnota, říkáme, že můstek je tzv. vyvážený. Podmínku vyváženosti můžeme vyjádřit tak, že úbytek napětí na rezistorech R_1 a R_2 je stejný, tudíž proud I_5 je nulový [1]. Po několika jednoduchých úpravách dostáváme, že při rovnováze platí vztah [1]

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{R_3}{R_4}. \quad (3)$$

Nevýhodou Wheatstonova můstku je, že při měření malých odporů, mají na měření významný vliv tzv. parazitní odpory vodičů.

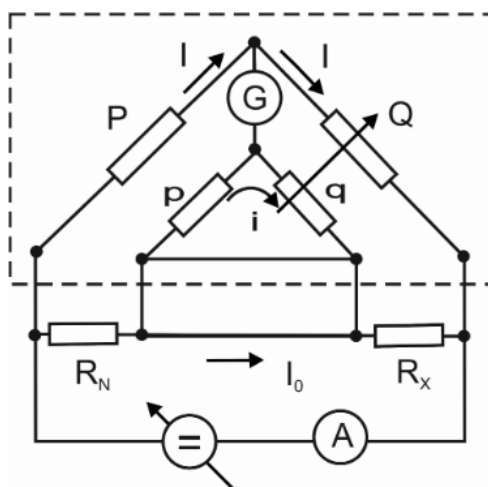


Obrázek 2: Schéma zapojení Wheatstonova můstku. [1]

1.4 Měření Thomsonovým můstkem

Thomsonův můstek je rozšíření Wheatstonova můstku, které využívá čtyřbodové zapojení. Díky tomu nám dovoluje získat správné hodnoty malých odporů bez odečítání parazitních odporů. [1] Schéma jeho zapojení je k vidění na obr. 3. Volíme-li příslušné odpory p, P a q, Q , tak aby platilo $\frac{p}{P} = \frac{q}{Q}$, dostáváme při vyvážení pro neznámý odpor R_x vztah

$$R_x = \frac{Q}{P} R_N. \quad (4)$$



Obrázek 3: Schéma zapojení Thomsonova můstku [1].

2 Výsledky a zpracování měření

2.1 Podmínky pokusu

Měření bylo provedeno v místnosti PII v budově MFF UK na Karlově. Změřené podmínky termo-hygro-barometrem při pokusu byly následující: Teplota $t = 25,5(4)^\circ\text{C}$, relativní vlhkost $\Phi = 31(3)\%$, tlak $p = 994(2)\text{ hPa}$.

2.2 Rozměry

Dva rozměry, které bylo u drátů potřeba změřit, byly průměr d a délka l .

Neboť délka l mohla být měřena pouze nepřesně pásmovým měřidlem (nejde zde pouze o chybu měřidla, ale také o jeho prohnutí při měření delší vzdálenosti), její nejistota se neprojeví ve vztahu (1) tolik jako nejistota průměru a zároveň zřejmě celá měřicí apratura byla navržena tak, aby všechny dráty měly stejnou délku, bylo provedeno pouze jedno její měření pro wolframový drát. Nejistotu tohoto měření odhadneme jako pětinasobek nejmenšího dílku měřidla tedy jako $\sigma_l = 5\text{ mm}$.

Průměr byl oproti tomu pro každý drát změřen 5x na různých místech. Za výslednou hodnotu byl pak použit aritmetický průměr všech těchto hodnot. K měření byl použit mikrometrický šroub s nejistotou odhadnutou jako polovina nejmenšího dílku na $\sigma_B = 0,005\text{ mm}$. K této nejistotě typu B musíme při průměrování ale připočíst ještě nejistotu typu A σ_A . Tu spočítáme jako výběrovou odchylku podle standardně užívaného vzorce.

Takto získané nejistoty pak podle metody přenosu chyb sčítáme v kvadrátu,

$$\sigma_d = \sqrt{\sigma_A^2 + \sigma_B^2}. \quad (5)$$

Všechna naměřená data z této podúlohy i s nejistotami byla finálně zanesena do tabulky 1 níže. Dále byly zaneseny hodnoty S určeny vztahem (2) a příslušné nejistoty stanovené metodou přenosu chybu jako

$$\sigma_S = 2S \frac{\sigma_d}{d}. \quad (6)$$

Tabulka 1: Naměřené rozměry jednotlivých drátů na pracovním stole.

Materiál	l/cm	d_1/mm	d_2/mm	d_3/mm	d_4/mm	d_5/mm	d/mm	S/mm^2
Chromnikl	89,9(5)	0,980(5)	0,980(5)	0,975(5)	0,990(5)	0,970(5)	0,979(9)	0,75(1)
Mosaz	89,9(5)	0,580(5)	0,580(5)	0,575(5)	0,580(5)	0,575(5)	0,578(6)	0,262(5)
Železo	89,9(5)	0,395(5)	0,400(5)	0,395(5)	0,400(5)	0,400(5)	0,398(6)	0,124(4)
Kanthal	89,9(5)	0,490(5)	0,495(5)	0,485(5)	0,490(5)	0,485(5)	0,489(7)	0,188(5)
Měď	89,9(5)	1,325(5)	1,330(5)	1,330(5)	1,335(5)	1,320(5)	1,328(8)	1,39(2)
Wolfram	89,9(5)	0,680(5)	0,680(5)	0,675(5)	0,675(5)	0,680(5)	0,678(6)	0,361(6)

2.3 Čtyřbodové zapojení s multimetrem

Měření v této podsekti bylo provedeno pomocí laboratorního multimetru KEITHLEY 2010. Jeho rozsah byl pro měření nastaven na 10Ω a do drátů byl pouštěn proud 10 mA . Podle manuálu[1] tento rozsah odpovídá nejistotě 60 ppm z hodnoty $+9\text{ ppm}$ z měřeného rozsahu.

Takto odhadnutá nejistota by ale byla velmi nízká vzhledem k tomu, že odečítaná hodnota na multimetru neustále fluktovala. Za nejistotu raději tedy budeme $\sigma_R = 0,001\Omega$, neboť se jedná o jednotku v posledním řádu, při kterém hodnota zůstávala stálá. Naměřené hodnoty jsme z tohoto měření zanesli do tabulky 2.

Tabulka 2: Hodnoty odporu R naměřené pro různé materiály ve čtyřbodovém zapojení.

Materiál	R/Ω
Chromnikl	1,179(1)
Mosaz	0,222(1)
Železo	1,487(1)
Kanthal	6,270(1)
Měď	0,011(1)
Wolfram	0,139(1)

2.4 Měření Wheatstonovým můstkem

Pro toto měření byl využit laboratorní přístroj Metra - MTW, který v sobě obsahoval nastavení pro měření jak Wheatstonovým tak Thomsonovým můstkem. Dále jsme pomocí zdířek a a b mohli nastavit odpory R_3 a R_4 . Pro co nejpřesnější měření jsme je nastavili na hodnoty $R_3 = 1\ \Omega$ a $R_4 = 1000\ \Omega$, tyto odpory budeme považovat za přesné.

Odpor R_N byl zastoupen pětímístnou odporovou dekádou, z níž jsme mohli prostým vydělením podle vztahu (3) odečíst celkový odpor R_c . Do můstku byl vpouštěn podle instrukcí proud cca. 0,19 A. Vždycky předtím, než byl změřen odpor R_c , byly Wheatstonovým můstkem proměřeny také naprázdno spojené přívodní kabely. Jejich odpor R_p byl následně odečten od odporu R_c pro zjištění skutečného odporu drátu R .

Co se týče nejistot v tomto měření, zdaleka největším zdrojem chyby musel být galvanometr², který bylo nutné kontrolovat pro podmínku vyváženosti. Galvanometr byl během celého měření špatně vycentrován a místo na 0 ukazoval při vyváženosti na 4 dílky doprava. Tento bod „vyváženosti“ se dokonce během měření posunul na zhruba 3,75 dílků doprava, z toho můžeme stanovit odhad pro relativní chybu měření jako $\delta(R_c) = 0,25/4 = 6,25\%$. Tato chyba se úplně stejně projevila i u měření naprázdno, proto tedy $\delta(R_p) = 6,25\%$.

Všechna takto naměřená data i s nejistotami byla zanesena do tabulky 3 níže.

Tabulka 3: Hodnoty odporu R naměřené pro různé materiály Wheatstonovým můstkem.

Materiál	R_c/Ω	R_p/Ω	R/Ω
Chromnikl	1,21(8)	0,024(2)	1,18(8)
Mosaz	0,25(2)	0,0242(2)	0,22(2)
Železo	1,52(9)	0,0245(2)	1,49(9)
Kanthal	6,3(4)	0,0249(2)	6,3(4)
Měď	0,037(2)	0,0251(2)	0,012(3)
Wolfram	0,17(1)	0,0247(2)	0,14(1)

Nejistotu σ_R výše v tabulce 3 získáváme podle metody přenosu chyb jako

$$\sigma_R = \sqrt{\sigma_{R_c}^2 + \sigma_{R_p}^2}. \quad (7)$$

2.5 Měření Thomsonovým můstkem

V této podsekci již nebylo nutné měřit parazitní odpory. Aparatura Metra - MTW byla tentokrát nastavena kolíkem na měření Thomsonovým můstkem a byl do ní vpouštěn proud cca. 0,2 A. Normálový odpor byl v zařízení napevno nastaven na $R_N = 0,1\ \Omega$. Roli Q ve vztahu (4) hrála již zmíněná pětímístná odporová dekáda a P bylo nastavováno na hodnoty $P = 1000\ \Omega$ pro mosaz, měď a wolfram a $P = 100\ \Omega$ pro chromnikl, železo a kanthal.

Kromě toho, že nemusíme započítávat chybu měření parazitních odporů vztahem (7), je zapracování nejistot do měření analogické k předchozí podsekci, obrovskou roli zde bude hrát nejistota vyvážení galvanometru a kvůli tomu nemá smysl započítávat chybu dekády, P nebo normálového odporu. Všechny odpory naměřené Thomsonovým můstkem byly zaneseny do tabulky 4.

Tabulka 4: Hodnoty odporu R naměřené pro různé materiály Thomsonovým můstkem.

Materiál	R/Ω
Chromnikl	1,18(7)
Mosaz	0,22(1)
Železo	1,53(9)
Kanthal	6,3(4)
Měď	0,0101(6)
Wolfram	0,138(9)

2.6 Měrný elektrický odpor

Zde shrneme výsledky všech předchozích podsekci. Pro každou metodu měření odporu pro každý materiál užijeme vztah (1) a vypočteme měrný elektrický odpor. Tyto výsledky zaneseme do tabulky 5. Dále všechny

²Ve světle dalších zjištění během měření se ukazuje, že mohla vzniknout i daleko větší chyba. Ta ale není lehce kvantifikovatelná, a proto bude rozebrána v diskusi.

tyto odpory pro každý materiál shrneme do průměrů a ty též je zaneseme do tabulky 5.

Tabulka 5: Hodnoty měrného elektrického odporu pro každý materiál a pro každou metodu měření.

Materiál	$\varrho_m/\mu\Omega \cdot \text{cm}$	$\varrho_W/\mu\Omega \cdot \text{cm}$	$\varrho_T/\mu\Omega \cdot \text{cm}$	$\varrho/\mu\Omega \cdot \text{cm}$
Chromnikl	99(2)	99(6)	99(6)	99(3)
Mosaz	6,5(1)	6,5(5)	6,5(4)	6,5(2)
Železo	20,6(6)	21(1)	21(1)	20,8(6)
Kanthal	131(4)	131(8)	131(8)	131(4)
Měď	1,7(2)	1,8(4)	1,6(2)	1,7(2)
Wolfram	5,6(1)	5,8(4)	5,5(4)	5,6(2)

Nejistotu pro každý jeden měrný odpor jsme určili podle metody přenosu chyb jako

$$\sigma_\varrho = \varrho \sqrt{\left(\frac{\sigma_R}{R}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_S}{S}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_l}{l}\right)^2} \quad (8)$$

a nejistotu průměru jsme stanovili standardně jako nejistotu aritmetického průměru.

3 Diskuse výsledků

Zdroje [2] a [3] uvádí bez nejistot následující hodnoty pro měrné elektrické odpory (tab. 6 níže):

Tabulka 6: Měrné elektrické odpory pro dané materiály dle [2] a [3]

Materiál	$\varrho_{ref}/\mu\Omega \cdot \text{cm}$
Chromnikl	108
Mosaz	7,5
Železo	9,8
Kanthal	145
Měď	1,75
Wolfram	5,0

Na první pohled si při porovnání tabulek 5 a 6 můžeme povšimnout, že hodnoty se (až na měď) v rámci nejistoty neshodují. Musíme se tedy pokusit nalézt další nezapočítané zdroje chyby, které by k těmto rozdílům mohly vést.

3.1 Nejistota referenčních hodnot

Vzhledem k tomu, že neznáme nejistotu referenčních hodnot, můžeme je napadnout. Byla-li by jejich nejistota srovnatelná s nejistotou námi naměřených dat (přibližně v rozmezí 1-10 %), mohla by u některých materiálů nastat shoda, která nyní neplatí.

3.2 Teplota

Musíme uvážit také fakt, že rezistivita vodičů je teplotně závislá. Při vpouštění proudu do jednotlivých drátů mohlo dojít v důsledku Jouleova tepla k jejich zahřívání, čímž by se změnil měrný odpor. Teplotní součinitel elektrického odporu je pak nejvyšší právě u železa [4], u kterého pozorujeme nevyšší rozdíl mezi referenční a naměřenou hodnotou.

Na druhou stranu je také nutno poznamenat, že leč při měření multimetrem byl do obvodu vpouštěn přibližně o jeden řád nižší proud než při měření oběma můstky, výsledky z těchto metod se navzájem v rámci nejistoty shodují. Toto i přesto, že zahřívací výkon je úměrný druhé mocnině proudu podle vzorce $P = RI^2$. Proto nemůžeme s jistotou říci, že by teplota měla velký vliv na naměřené hodnoty.

3.3 Kontakty

Na začátku měření Wheatstonovým můstkem nastala tato situace: Poté, co experimentátor zapojil obvod, přišel mu přítomný doc. Petr Praus spustit zdroj. Pan docent se po zapnutí proudu chtěl rychle přesvědčit,

zda můstek ukazuje rozumné hodnoty, zjistil ale, že nikoliv. Můstek při měření odporu chromnikového drátu ukazoval hodnotu přibližně dvakrát vyšší. Pan docent pak dlouho zkoumal, čím by tato diskrepance mohla být způsobena, až si povšimnul, že jeden z vodičů propojující můstek a drát byl na konci velmi zkorodován. Po odstranění zkorodované černé vrstvy pak můstek začal ukazovat „rozumné“ hodnoty.

Tato zkušenost vede experimentátora k tomu, aby případnou nezapočítanou chybu dal za vinu z velké části měřicímu zařízení, které v praxi funguje již velmi dlouho a může mít kterékoliv kontakty zkorodované nebo hůře funkční. Ukázalo se totiž, že stačí pouze jeden zkorodovaný kontakt k tomu, aby se naměřená hodnota výrazně změnila.

4 Závěr

Podařilo se naměřit odpor šesti zadaných drátů Wheatstonovým a Thomsonovým můstkem a také pomocí multimetru v čtyřbodovém zapojení. Předtím jsme také pro porovnání s referenčními hodnotami změřili rozměry všech drátů. Naměřená data jsme zpracovali a zprůměrovali, čímž jsme získali měrný elektrický odpor pro každý vzorek

$$\varrho_{\text{chromnikl}} = 99(3) \mu\Omega \cdot \text{cm}, \quad (9)$$

$$\varrho_{\text{mosaz}} = 6,5(2) \mu\Omega \cdot \text{cm}, \quad (10)$$

$$\varrho_{\text{železo}} = 20,8(6) \mu\Omega \cdot \text{cm}, \quad (11)$$

$$\varrho_{\text{kanthal}} = 131(4) \mu\Omega \cdot \text{cm}, \quad (12)$$

$$\varrho_{\text{měď}} = 1,7(2) \mu\Omega \cdot \text{cm}, \quad (13)$$

$$\varrho_{\text{wolfram}} = 5,6(2) \mu\Omega \cdot \text{cm}. \quad (14)$$

$$(15)$$

Některé z těchto hodnot se shodují s referenčními v rámci 3σ testu odlehlosti. Kromě železa se všechny hodnoty shodují alespoň řádově.

Reference

- [1] *Měření malých odporů* [online]. [cit. 2023-10-29]. Dostupné z: <https://physics.mff.cuni.cz/vyuka/zfp/zadani/204>
- [2] *Měrný odpor* [online]. [cit. 2023-10-29]. Dostupné z: <http://www.converter.cz/tabulky/merny-odpor.htm>
- [3] *Měrný odpor a teplotní součinitel elektrického odporu* [online]. [cit. 2023-10-29]. Dostupné z: <http://kabinet.fyzika.net/studium/tabulky/merny-odpor.php>
- [4] *Teplotní součinitel elektrického odporu* [online]. [cit. 2023-10-29]. Dostupné z: https://cs.wikipedia.org/wiki/Teplotn%C3%AD_sou%C4%8Dinitel_elektrick%C3%A9ho_odporu