# 1

Nechť $\mathbf{A}$ je objektivní tenzor neboli $\mathbf{A}^* = \mathbf{O}\cdot\mathbf{A}\cdot\mathbf{O}^T$. Je-li $\vec{y} = \nabla\cdot\mathbf{A}$, chceme ukázat, že $\vec{y}^* = \mathbf{O}\cdot\vec{y}$.

$$[\vec{y}^*]_i = [\nabla^*\cdot\mathbf{A}^*]_i = [\nabla^*\cdot(\mathbf{O}\cdot\mathbf{A}\cdot\mathbf{O}^T)]_i = \frac{\partial}{\partial x_k^*}(\mathbf{O}\cdot\mathbf{A}\cdot\mathbf{O}^T)]_{ki} = \frac{\partial}{\partial x_k^*}(\mathbf{O}_{kl}\mathbf{A}_{lm}\mathbf{O}^T_{mi}) =$$
$$= \cancel{\frac{\partial}{\partial x_k^*}(\mathbf{O}_{kl})\mathbf{A}_{lm}\mathbf{O}^T_{mi}} + \mathbf{O}_{kl}\frac{\partial}{\partial x_k^*}(\mathbf{A}_{lm})\mathbf{O}^T_{mi} + \cancel{\mathbf{O}_{kl}\mathbf{A}_{lm}\frac{\partial}{\partial x_k^*}(\mathbf{O}^T_{mi})} = \mathbf{O}_{kl}\mathbf{O}_{im}\frac{\partial\mathbf{A}_{lm}}{\partial x_k^*} =$$
$$= \mathbf{O}_{kl}\mathbf{O}_{im}\frac{\partial\mathbf{A}_{lm}}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial x_k^*} = \mathbf{O}_{kl}\mathbf{O}_{im}\frac{\partial\mathbf{A}_{lm}}{\partial x_n}\mathbf{O}^T_{nk} = \mathbf{O}^T_{nk}\mathbf{O}_{kl}\mathbf{O}_{im}\frac{\partial\mathbf{A}_{lm}}{\partial x_n} =$$
$$= \delta_{nl}\mathbf{O}_{im}\frac{\partial\mathbf{A}_{lm}}{\partial x_n} = \mathbf{O}_{im}\frac{\partial\mathbf{A}_{lm}}{\partial x_l} = \mathbf{O}_{im}[\nabla\cdot\mathbf{A}]_m = [\mathbf{O}\cdot(\nabla\cdot\mathbf{A})]_i = \underline{\underline{[\mathbf{O}\cdot\vec{y}]_i}}.$$

# 2

K tomuto krátkému důkazu využijeme odvozený vztah ze přednášky $\mathbf{F}^* = \mathbf{O}\cdot\mathbf{F}$.

$$J^* = \det(\mathbf{F}^*) = \det(\mathbf{O}\cdot\mathbf{F}) = \det(\mathbf{O})\det(\mathbf{F}) = J,$$

kde jsme využili toho, že determinant rotační[1] matice $\mathbf{O}$ vždy je roven 1.

# 3

S předpokladem, že teplota $T$ je objektivní skalár, si k tomuto důkazu stačí uvědomit, že diferenciální operátory vzhledem k referenční konfiguraci (Grad, Div) jsou také objektivními skaláry, referenční konfigurace totiž není nijak ovlivněna pohybem pozorovatele.

$$\vec{G}^* = \mathrm{Grad}^* T^* = \mathrm{Grad}\, T = \vec{G}.$$

# 4

Cíl je dokázat implikaci $\mathbf{t} = \eta_1(\nabla\cdot\vec{v})\mathbf{I} + \eta_2(\nabla\vec{v} + \nabla\vec{v}^T) \implies \mathbf{t}^* = \eta_1^*(\nabla^*\cdot\vec{v}^*)\mathbf{I} + \eta_2^*(\nabla^*\vec{v}^* + \nabla^*\vec{v}^{*T})$. Budeme přitom předpokládat, že $\eta_1$ a $\eta_2$ jsou objektivní skaláry (jednotková matice je zjevně objektivní skalár $\mathbf{I}^* = \mathbf{O}\cdot\mathbf{I}\cdot\mathbf{O}^T = \mathbf{I}$), stačí si tedy napočítat divergenci $\nabla^*\cdot\vec{v}^*$

$$\frac{\partial v_i^*}{\partial x_i^*} = \frac{\partial}{\partial x_i^*}(\mathbf{O}_{ij}v_j + \Omega_{ij}(x_j^* - b_j^*) + \dot{b}_i^*) = \mathbf{O}_{ij}\frac{\partial v_j}{\partial x_i^*} + \cancel{\Omega_{ij}\delta_{ji}} = \mathbf{O}_{ij}\frac{\partial v_j}{\partial x_l}\frac{\partial x_l}{\partial x_i^*} = \mathbf{O}_{ij}\mathbf{O}^T_{li}\frac{\partial v_j}{\partial x_l} = \frac{\partial v_j}{\partial x_j} = \underline{\underline{\nabla\cdot\vec{v}}}$$

a gradient rychlosti $\nabla^*\vec{v}^*$

$$\frac{\partial v_j^*}{\partial x_i^*} = \frac{\partial}{\partial x_i^*}(\mathbf{O}_{jk}v_k + \Omega_{jk}(x_k^* - b_k^*) + \dot{b}_j^*) = \mathbf{O}_{jk}\frac{\partial v_k}{\partial x_l}\frac{\partial x_l}{\partial x_i^*} + \Omega_{jk}\delta_{ki} = \mathbf{O}_{jk}\mathbf{O}^T_{li}\frac{\partial v_k}{\partial x_l} + \Omega_{ji} = \underline{\underline{[\mathbf{O}\cdot\nabla\vec{v}\cdot\mathbf{O}^T + \Omega^T]_{ij}}}.$$

Víme, že Cauchyho tensor $\mathbf{t}$ je objektivní, a proto platí $\mathbf{t}^* = \mathbf{O}\cdot\mathbf{t}\cdot\mathbf{O}^T$, pro levou stranu naopak můžeme psát

$$\eta_1(\nabla\cdot\vec{v})\mathbf{O}\cdot\mathbf{I}\cdot\mathbf{O}^T + \eta_2(\mathbf{O}\cdot\nabla\vec{v}\cdot\mathbf{O}^T + \mathbf{O}\cdot\nabla\vec{v}^T\cdot\mathbf{O}^T + \cancel{\Omega + \Omega^T}) = \underline{\underline{\mathbf{O}\cdot[\eta_1(\nabla\cdot\vec{v})\mathbf{I} + \eta_2(\nabla\vec{v} + \nabla\vec{v}^T)]\cdot\mathbf{O}^T}},$$

z čehož je vidět, že námi dokazována implikace platí.

[1] Pouze ortogonální matice by nestačila, ta má determinant ±1, ne 1.

# 5

Přepíšeme si všechny tři zadané body do rovnic

$$\dot{\mathbf{e}}_A = \dot{\mathbf{e}}_B, \tag{1}$$

$$\mathbf{t}^D = \mathbf{t}_A^D + \mathbf{t}_B^D, \tag{2}$$

$$\mathbf{e}_B = \mathbf{e}_{visc,B} + \mathbf{e}_{el,B}. \tag{3}$$

Když rovnici (3) zderivujeme a srovnáme s rovnicí (1), dostaneme

$$\dot{\mathbf{e}}_A = \dot{\mathbf{e}}_{visc,B} + \dot{\mathbf{e}}_{el,B}.$$

Nyní si uvědomme, že $\dot{\mathbf{e}}_A = \mathbf{d}$, které vystupuje v zákonech zachování hybnosti a energie. S využitím konstitutivních vztahů pro elasticitu a viskozitu, můžeme rovnici výše přepsat jako

$$\mathbf{d} = \frac{\mathbf{t}_B^D}{2\eta_B} + \frac{\dot{\mathbf{t}}_B^D}{2\mu} = \frac{\mathbf{t}^D - \mathbf{t}_A^D}{2\eta_B} + \frac{\dot{\mathbf{t}}^D - \dot{\mathbf{t}}_A^D}{2\mu} = \frac{\mathbf{t}^D}{2\eta_B} + \frac{\dot{\mathbf{t}}^D}{2\mu} - \frac{\cancel{2}\eta_A\mathbf{d}}{\cancel{2}\eta_B} - \frac{\cancel{2}\eta_A\dot{\mathbf{d}}}{\cancel{2}\mu}$$

neboli v elegantnějším zápisu:

$$\dot{\mathbf{t}}^D + \frac{\mu}{\eta_B}\mathbf{t}^D = 2\eta_A\dot{\mathbf{d}} + \left(1 + \frac{\eta_A}{\eta_B}\right)2\mu\mathbf{d},$$

což je náš hledaný konstitutivní vztah vycházející z Oldroydova modelu. Na závěr máme zařídit, aby tento vztah byl objektivní. Jak tenzor $\mathbf{t}$, tak tenzor $\mathbf{d}$ sice objektivní jsou, ale materiálová derivace obecně objektivní není. Abychom objektivity dosáhli, nahradíme tedy materiálové derivace v modelu horními konvektivními derivacemi, které objektivní jsou.

$$\underline{\underline{\overset{\triangledown}{\mathbf{t}}{}^D + \frac{\mu}{\eta_B}\mathbf{t}^D = 2\eta_A \overset{\triangledown}{\mathbf{d}}{}^D + \left(1 + \frac{\eta_A}{\eta_B}\right)2\mu\mathbf{d}.}}$$