

Kabinet výuky obecné fyziky, UK MFF

## Fyzikální praktikum I



Úloha č. 27

Název úlohy: Tepelné čerpadlo

Jméno: Vojtěch Votruba

Datum měření: 6. 4. 2023

Připomínky opravujícího:

	Možný počet bodů	Udělený počet bodů
Teoretická část	0–2	
Výsledky a zpracování měření	0–9	
Diskuse výsledků	0–4	
Závěr	0–1	
Použitá literatura	0–1	
<b>Celkem</b>	max. 17	

Posuzoval:

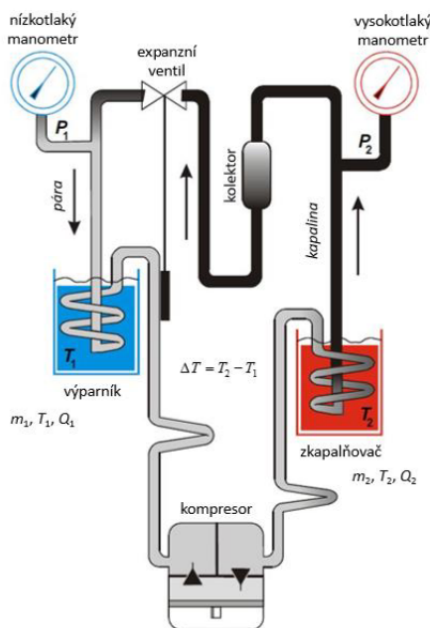
dne:

## Pracovní úkoly

1. Při zapnutém kompresoru proměřte časovou závislost teplot v obou rezervoárech. Současně zaznamenávejte elektrický příkon kompresoru a časovou závislost tlaků v aparatuře. Graficky znázorněte.
2. Vyhodnoťte chladicí a topný faktor zdroje tepla, graficky znázorněte závislosti  $\varepsilon = \varepsilon(\Delta T)$  a  $\tau = \tau(\Delta T)$
3. Při vypnutém kompresoru proměřte časovou závislost teploty vody v obou rezervoárech. Graficky znázorněte a závislost fitujte exponenciálou. Diskutujte koeficienty naměřené závislosti.
4. Ze změny teploty rezervoáru po vypnutí kompresoru určete dolní odhad tepelných ztrát.

## 1 Teoretická část

Ke splnění pracovních úkolů bylo využíváno laboratorní tepelné čerpadlo s vodou ukázané na obrázku 1.



Obrázek 1: Schéma tepelného čerpadla [1]

Základním principem je, že po zapnutí čerpadla se přenáší teplo z rezervoáru s výparníkem do rezervoáru se zkapaľňovačem a vyrovnávají se tak teploty  $T_1$  a  $T_2$ .

K vypočtení tepla  $Q$ , které jednotlivé rezervoáry přijmou, resp. ztratí můžeme využít kalorimetrickou rovnici [1]

$$Q_{1,2} = m_{1,2}c\Delta T_{1,2}, \quad (1)$$

kde  $c$  je měrná tepelná kapacita vody a  $\Delta T$  příslušný rozdíl teplot. Hmotnost vody v rezervoáru  $m$ , můžeme zjistit pronásobením hustoty vody  $\rho$  a jejího objemu  $V$ .

„Zprostředkovatelem“ přenosu tepla je zde chladivo, které je po okruhu tepelného čerpadla hnáno kompresorem. Začneme-li u výparníku: Chladivo se v jeho části okruhu přeměňuje do plynné fáze a odebírá tak příslušné skupenské teplo rezervoáru s teplotou  $T_1$ . Jakmile pak dorazí ke zkapaľňovači, je pára zchlazena a přeměňuje se na kapalinu, čímž naopak dodává skupenské teplo rezervoáru s teplotou  $T_2$ . [1]

Jako konkrétní chladivo v této aparatuře sloužil 1,1,1,2-tetrafluorethan (značka R134a). [1]

Práci  $W$  vykonanou kompresorem s průměrným příkonem  $P$  za čas  $\Delta t = t_1 - t_0$  spočteme z definice [1] průměrného příkonu jako

$$W = P \cdot \Delta t. \quad (2)$$

případně neznáme-li průměrný příkon, využijeme jako definici [1]

$$W = \int_{t_0}^{t_1} P dt. \quad (3)$$

Během celého procesu byl podle instrukcí měřen časový průběh tlaků  $p_1, p_2$  na obou manometrech, příkon  $P$  na kompresoru a teploty  $T_1, T_2, T_3, T_4$  u výparníku, zkapalňovače, kompresoru a okolí zkapalňovače (viz obrázek 1). [1]

Pro spočtení chladicího, resp. topného faktoru popisujícího efektivitu chladnutí, resp. ohřevu jednotlivých rezervoárů, využijeme jejich definici [1], tedy

$$\varepsilon = \frac{\Delta Q_1}{P \Delta t} = \frac{cm_1 \Delta T_1}{P \Delta t}, \quad (4)$$

$$\tau = \frac{\Delta Q_2}{P \Delta t} = \frac{cm_2 \Delta T_2}{P \Delta t}, \quad (5)$$

kde  $\varepsilon$ , resp.  $\tau$  jsou právě chladicí a topný faktor. Ostatní veličiny mají význam, který jim byl připsán výše.  $\Delta t$  zde značí rozdíl v časových intervalech jednotlivých záznamů příkonu a  $\Delta T$  příslušný rozdíl teploty.

Podle prvního termodynamického zákona pak dále platí [1]

$$\Delta Q_1 + W = \Delta Q_2 + \Delta Q, \quad (6)$$

kde  $\Delta Q$  jsou tepelné ztráty způsobeny nedokonalostí čerpadla. Tento vztah tedy můžeme využít k dolnímu odhadu tepelných ztrát podle prac. úkolu 4.

## 2 Výsledky a zpracování měření

### 2.1 Podmínky pokusu

Měření bylo provedeno v místnosti PI v budově MFF UK na Karlově. Změřené podmínky termo-hygro-barometrem při pokusu byly následující: Teplota  $t = 23,2(4)^\circ\text{C}$ , relativní vlhkost  $\Phi = 25(3)\%$ , tlak  $p = 981(2)\text{ hPa}$ . Za přesnou hodnotu hustoty vody při naměřené teplotě bylo převzato  $\rho = 998\text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$  [2] a za přesnou měrnou tepelnou kapacitu hodnota  $c = 4180\frac{\text{J}}{\text{kg}\cdot\text{K}}$ . [2]

### 2.2 Přenos tepla

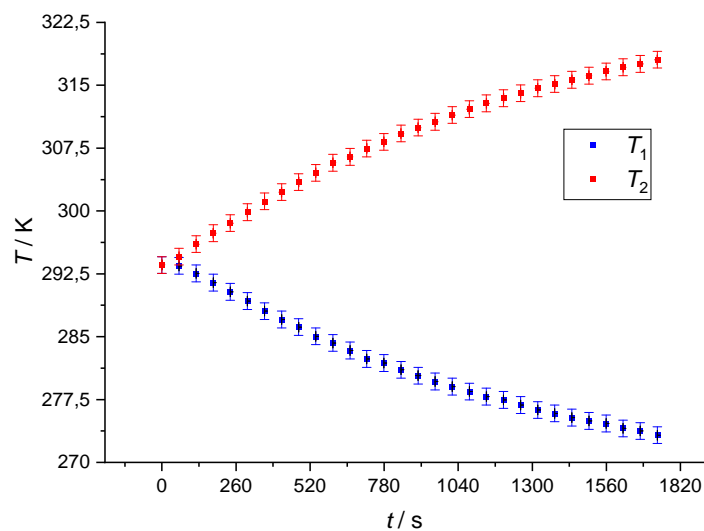
Časové závislosti teplot zaznamenával pomocí 4-kanálového teplotního dataloggeru Voltcraft s termočlánky typu K204 program na laboratorním počítači. Tlaky  $p_1, p_2$  a příkon  $P$  byly manuálně zapisovány experimentátorem po odečtení z manometrů a zásuvkového měřiče spotřeby Solight DT26. Pro tuto část úlohy byla vybrána data odpovídající zapnutému kompresoru, tedy zhruba do  $t = 30\text{ min}$ , kdy se rozdíl teplot  $\Delta T$  blížil  $45\text{ K}$ .

Naměřené hodnoty tlaků a příkonu byly pak zaneseny do tabulek 1 a 2, které jsou přiloženy na konci referátu. S ohledem na velké množství dat při měření teploty tato data zanesena nebyla, jsou ale přiložena k referátu v datovém souboru.

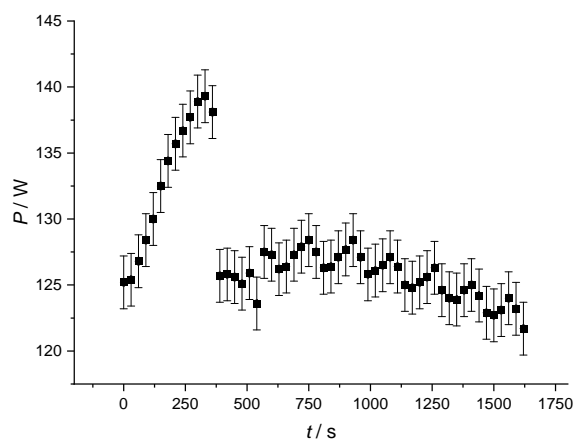
Všechny časové závislosti dále byly vyneseny do grafů 2, 3 a 4 na straně 3. K tomu byl použit software *Origin* konkrétně funkce *Plot::X Y Error*. Nejistota měření teploty byla určena součtem nejistoty teplotního dataloggeru  $0,2\%$  z MH +  $1^\circ\text{C}$  a nejistoty čidla, která činila  $0,75\%$  MH. Nejistota měření času pak byla stanovena podle odezvy čidla na  $1\text{ s}$ .

V doprovodných měřeních byla nejistota měření tlaku odhadnuta jako velikost nejmenšího dílku (resp. jeho polovina v případě vysokotlakého barometru) na  $\sigma_p = 0,1\text{ bar}$ . Relativní nejistota příkonu byla podle manuálu přístroje [3] stanovena na  $\eta_P = 2\%$ .

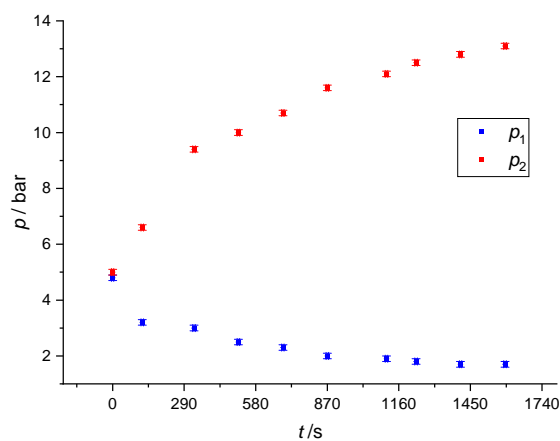
Dále bylo potřeba zjistit nejistotu měření času. Vzhledem k tomu, že bylo poměrně náročné odečíst ve stejný časový moment všechny tři hodnoty ( $p_1, p_2, P$ ), bylo odhadnuto  $\sigma_t = 5\text{ s}$ . V případě měření příkonu  $P$  se experimentátor snažil tuto hodnotu prioritizovat a odečíst ji co nejrychleji, proto její nejistota byla odhadnuta na nižších  $\sigma_t = 2\text{ s}$ .



Obrázek 2: Závislost teplot  $T_1$  a  $T_2$  v příslušných rezervoárech na čase  $t$  při zapnutém kompresoru



Obrázek 3: Závislost příkonu kompresoru  $P$  na čase  $t$



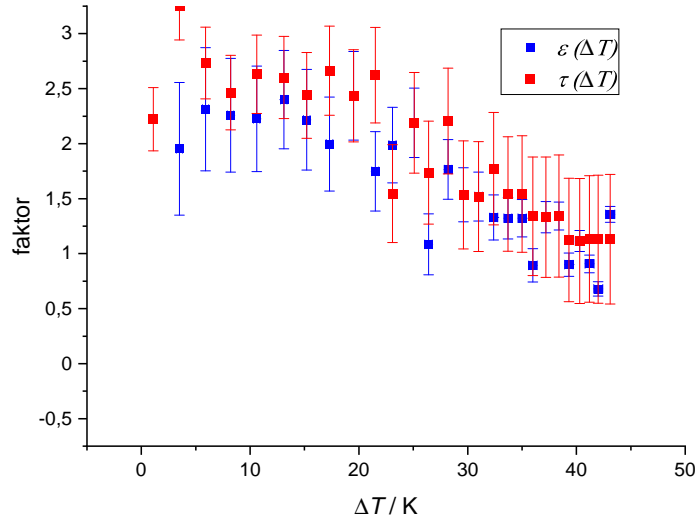
Obrázek 4: Závislost tlaků  $p_1$  a  $p_2$  v příslušných manometrech na čase  $t$  při zapnutém kompresoru

## 2.3 Chladicí a topný faktor

V rámci tohoto pracovního úkolu začneme vynesením závislostí  $\varepsilon = \varepsilon(\Delta T)$  a  $\tau = \tau(\Delta T)$ . Oba faktory vypočteme pomocí vztahů (4) a (5). Za příslušný časový interval pak vezmeme hodnotu  $\Delta t = 1$  min, což je převrácená hodnota vzorkovací frekvence, na kterou byl nastaven datalogger.

Hmotnost  $m$  v obou rezervoárech určíme jako  $m = 4 \text{ dm}^3 \cdot 998 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3} = 4,0(1) \text{ kg}$ , za nejistotu objemu zde bylo odhadnuto  $\sigma_V = 0,1 \text{ dm}^3$ .

Dále se kvůli tomu, že jsme použili vzorkovací frekvenci  $\Delta t = 1$  min a příkon  $P$  byl měřen v intervalech po půlminutě, nabízí použít vždy příkon odpovídající měření mezi dvěma minutami. Faktory vypočtené z těchto hodnot nyní vyneseme do společného grafu 5.



Obrázek 5: Závislost chladicího a topného faktoru  $\varepsilon, \tau$  na rozdílu teplot  $\Delta T$

Nejistotu určení chladicího (a analogicky i topného faktoru) jsme spočetli podle metody přenosu chyb [4] jako

$$\sigma_\varepsilon = \varepsilon \sqrt{\left(\left(\frac{\sigma_P}{P}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{\Delta t}}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_m}{m}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{\Delta T_{1,2}}}{\Delta T_{1,2}}\right)^2}, \quad (7)$$

kde zároveň  $\sigma_{\Delta T_{1,2}}^2 = \sigma_{T_{i+1}}^2 + \sigma_{T_i}^2$  a  $\sigma_{\Delta t}^2 = \sigma_{t_1}^2 + \sigma_{t_0}^2$ .

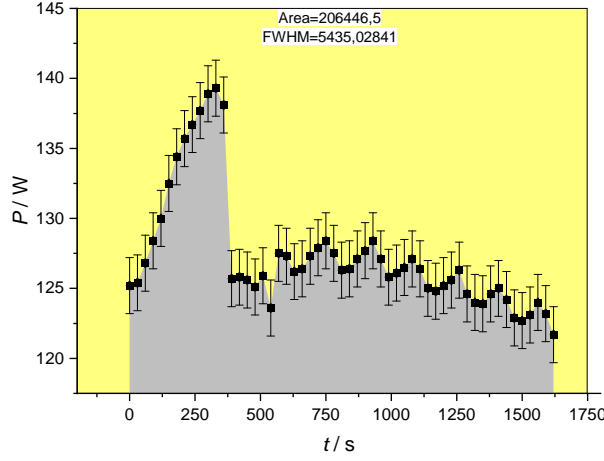
Po vynesení těchto závislostí potřebujeme numericky zintegrovat závislost  $P(t)$ , abychom mohli vyhodnotit celkový chladicí a topný faktor. K integraci využijeme znovu software *Origin* a jeho vestavěnou funkci *Gadgets:Integrate*. Ta nám vrátila hodnotu  $W_{\text{celk.}} = 206(8) \text{ kJ}$ , jak lze vidět na grafu 6. Bohužel *Origin* nám neposkytl nejistotu této integrace, byla tedy odhadnuta jako součet relativní nejistoty času a relativní nejistoty výkonu pro jednotlivá měření v grafu. Nyní použijeme vztahy (4) a (5), čímž získáváme

$$\varepsilon = 1.64(7), \quad (8)$$

$$\tau = 2,0(1), \quad (9)$$

Za rozdíl teplot  $\Delta T$  zde byly použity poslední hodnoty vyneseny do grafu 2. Nejistoty jsme určili podle metody přenosu chyb [4] jako

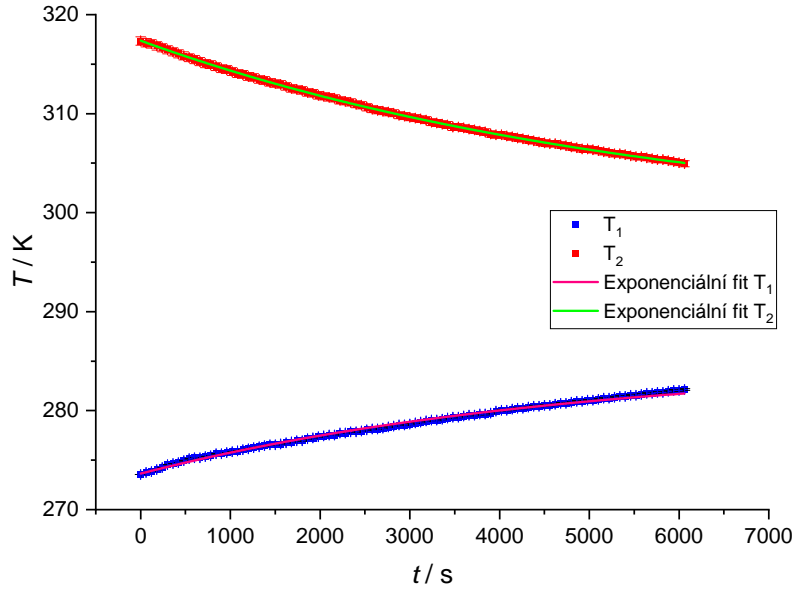
$$\sigma_\varepsilon = \varepsilon \sqrt{\left(\frac{\sigma_{\Delta T}}{\Delta T}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_W}{W}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_m}{m}\right)^2}. \quad (10)$$



Obrázek 6: Numerická integrace grafu podle obrázku 3

## 2.4 Chladnutí

V této podsekcí jsme pouze znovu použili program *Origin*, tentokrát funkci *Analysis::Fitting:Exponential Fit*. Všechny použité vzorce a odhady chyb i princip měření jsou již popsány výše. Fit a naměřené hodnoty byly vyneseny do grafu 7.



Obrázek 7: Exponenciální fit teploty  $T$  v závislosti na čase  $t$  při vypnutém kompresoru

Konkrétní funkce, která byla použita, má tvar  $y = a - be^{cx}$ . Funkce nafitovaná na teplotu  $T_1$  pak má parametry

$$a_1 = 285,0(4) \text{ K}, \quad (11)$$

$$b_1 = 11,3(4) \text{ K}, \quad (12)$$

$$c_1 = -0,000\,21(1) \text{ s}^{-1}. \quad (13)$$

A funkce nafitovaná na teplotu  $T_2$

$$a_2 = 298,4(1) \text{ K}, \quad (14)$$

$$b_2 = -19,0(1) \text{ K}, \quad (15)$$

$$c_2 = -0,000\,17(1) \text{ s}^{-1}. \quad (16)$$

Na těchto parametrech je pozoruhodné například to, že v obou případech je parametr  $c$  velmi malý. To značí, že exponenciála není příliš strmá a mohli bychom závislost dobře aproximovat lineární funkcí pomocí Taylorova rozvoje. Ostatní parametry fitu vycházejí poměrně očekávatelně, jde přeci jen o jednoduchý exponenciální model.

## 2.5 Tepelné ztráty

K dolnímu odhadu tepelných ztrát použijeme rovnici (6) a data naměřená při vyrovnávání aparatury. Ježto byl kompresor v této části vypnutý, bude platit, že člen  $W = 0$ . Dostáváme tedy

$$\Delta Q = \Delta Q_1 - \Delta Q_2, \quad (17)$$

$$\Delta Q = cm(\Delta T_1 - \Delta T_2). \quad (18)$$

Chladnutí bohužel probíhalo tak pomalu, že jsme se nedostali zpět na počáteční hodnoty. To nám ale nevadí, neboť podle 1. termodynamického zákona bereme rozdíl rozdílů. Použitím krajních hodnot z grafu 7 nám tedy vychází

$$\Delta Q = 64(7) \text{ kJ}, \quad (19)$$

kde jsme nejistotu stanovili podle metody přenosu chyb jako

$$\sigma_{\Delta Q} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_m}{m}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{\Delta T_1 - \Delta T_2}}{\Delta T_1 - \Delta T_2}\right)^2}, \quad (20)$$

kde  $\sigma_{\Delta T_1 - \Delta T_2}^2 = \sigma_{\Delta T_1}^2 + \sigma_{\Delta T_2}^2$ .

## 3 Diskuse výsledků

### 3.1 Přenos tepla

V této části měření závislosti vyšly poměrně očekávatelně. Rozdíl teplot se postupně zvyšoval a jejich trendové čáry následoval velmi dobře i naměřený tlak. Nedošlo tedy k žádným výrazným systematickým chybám a většina nejistoty byla obsažena pouze pomocí systematických chyb měřicích přístrojů.

Výjimku zde tvoří měření závislosti  $P = P(t)$ . V úseku 250 s – 500 s to vypadá to, jako by vypadlo značné množství hodnot a křivku tak není lehké proložit polynomem i třeba 9. stupně (viz další sekce). Jedno z vysvětlení může být, že sestup hodnot byl opravdu tak rychlý, že ho experimentátor nestihnul dostatečně rychle zapsat. Pro zkvalitnění měření nebo alespoň k nalezení přesné příčiny problému by pak mohlo pomoci nastavit vyšší vzorkovací frekvenci, což by vedlo k většímu množství naměřených dat v problematické oblasti.

### 3.2 Chladicí a topný faktor

Měření chladicího a topného faktoru byla bohužel zanesena poměrně velkou chybou vypočtenou z chyb měřicích přístrojů. V této části je také referát napadnutelný, neboť nejistota objemu  $\sigma_V$  byla zvolena poměrně arbitrárně. Experimentátor je ale přesvědčen, že by rozdíl 0,1 dm<sup>3</sup> v rezervoáru díky rysce poznal.

Metoda numerické integrace pomocí *Origin* byla zvolena jako nejlepší metoda v poměru „cena/výkon“. Byť by závislost šla proložit polynomem a ten pak jednoduše zintegrovat, my bohužel nemáme žádné informace o tom, jak by závislost ve skutečnosti měla vypadat. Předpokládat tedy polynomiální závislost by nemuselo vést k dobrému výsledku.

Na druhou stranu. Samotný topný a chladicí faktor nevyšly v rámci svých nejistot v dobré shodě. Podle [5] totiž platí  $\tau - \varepsilon = 1$ , nejistota integrace byla tedy pravděpodobně podhodnocená. Naštěstí z grafu alespoň je vidět, že ve většině bodech platí nerovnost  $\tau > \varepsilon$ .

### 3.3 Chladnutí

Fit, který vytvořil program *Origin* se zdá být velmi přesný i přes velké množství naměřených hodnot. Prokládat proces chladnutí exponenciální závislostí dává fyzikální smysl. Exponenciála se běžně objevuje v jevech typu: vybíjení, úbytek koncentrace apod. Proto můžeme tuto část měření označit za podařenou.

### 3.4 Tepelné ztráty

Velikost tepelných ztrát vyšla vzhledem k hodnotám, ve kterých se pohybujeme rozumně. Je jasné, že laboratorní tepelné čerpadlo nebude jako tepelný stroj příliš efektivní a tak není hodnota dolního odhadu překvapující.

## 4 Závěr

Podařilo se nám proměřit kýžené závislosti teploty, tlaku, výkonu, chladicího a topného faktoru a graficky je znázornit. Pomocí numerické integrace jsme pak stanovili celkový chladicí a topný faktor na hodnoty

$$\varepsilon = 1.64(7), \quad (21)$$

$$\tau = 2,0(1). \quad (22)$$

Dále jsme časové průběhy teplot získané při vyrovnávání celé soustavy tepelného čerpadla proložili exponenciální křivkou, diskutovali její parametry a celý fit graficky znázornili.

Posledním úkolem, co jsme splnili, byl dolní odhad tepelných ztrát, který jsme stanovili na

$$\Delta Q = \Delta Q = 64(7) \text{ kJ}, . \quad (23)$$

## Reference

- [1] *(XXVII) Tepelné čerpadlo* [online]. [cit. 2023-04-19]. Dostupné z: <https://physics.mff.cuni.cz/vyuka/zfp/zadani/127>
- [2] MIKULČÁK, J., F. ZEMÁNEK, B. KLIMEŠ, J. ŠIROKÝ a V. ŠŮLA. *Matematické, fyzikální, chemické tabulky a vzorce pro střední školy*. Praha: Státní pedagogické nakladatelství, n.p., 1988.
- [3] *Návod k použití digitálního měřiče spotřeby elektrické energie Solight DT26* [online]. [cit. 2023-04-19]. Dostupné z: [https://www.solight.cz/documents/dt26\\_cz%20n%C3%A1vod.pdf](https://www.solight.cz/documents/dt26_cz%20n%C3%A1vod.pdf)
- [4] ENGLISH, Jiří. *Úvod do praktické fyziky*. Praha: Matfyzpress, 2006. ISBN 80-86732-93-2.
- [5] Coefficient of performance. In: Wikipedia: the free encyclopedia [online]. San Francisco (CA): Wikimedia Foundation, 2001- [cit. 2023-04-20]. Dostupné z: [https://en.wikipedia.org/wiki/Coefficient\\_of\\_performance](https://en.wikipedia.org/wiki/Coefficient_of_performance)



Tabulka 2: Naměřené hodnoty příkonu  $P$  v čase  $t$

$t/s$	$P/W$
0(2)	125(3)
30(2)	125(3)
60(2)	127(3)
90(2)	128(3)
120(2)	130(3)
150(2)	133(3)
180(2)	134(3)
210(2)	136(3)
240(2)	137(3)
270(2)	138(3)
300(2)	139(3)
330(2)	139(3)
360(2)	138(3)
390(2)	126(3)
420(2)	126(3)
450(2)	126(3)
480(2)	125(3)
510(2)	126(3)
540(2)	124(2)
570(2)	128(3)
600(2)	127(3)
630(2)	126(3)
660(2)	126(3)
690(2)	127(3)
720(2)	128(3)
750(2)	128(3)
780(2)	128(3)
810(2)	126(3)
840(2)	126(3)
870(2)	127(3)
900(2)	128(3)
930(2)	128(3)
960(2)	127(3)
990(2)	126(3)
1020(2)	126(3)
1050(2)	127(3)
1080(2)	127(3)
1110(2)	126(3)
1140(2)	125(3)
1170(2)	125(2)
1200(2)	125(3)
1230(2)	126(3)
1260(2)	126(3)
1290(2)	125(2)
1320(2)	124(2)
1350(2)	124(2)
1380(2)	125(2)
1410(2)	125(3)
1440(2)	124(2)
1470(2)	123(2)
1500(2)	123(2)
1530(2)	123(2)
1560(2)	124(2)
1590(2)	123(2)
1620(2)	122(2)

Tabulka 1: Naměřené hodnoty tlaku  $p$  v čase  $t$ .  $p_1$  značí tlak na nízkotlakém manometru a  $p_2$  tlak na vysokotlakém manometru

$t/s$	$p_1/\text{bar}$	$p_2/\text{bar}$
0(5)	4,8(1)	5,0(1)
120(5)	3,2(1)	6,6(1)
330(5)	3,0(1)	9,4(1)
510(5)	2,5(1)	10(1)
690(5)	2,3(1)	10,7(1)
870(5)	2,0(1)	11,6(1)
1110(5)	1,9(1)	12,1(1)
1230(5)	1,8(1)	12,5(1)
1410(5)	1,7(1)	12,8(1)
1590(5)	1,7(1)	13,1(1)