Příklad z teoretické mechaniky č. 1 (2023) - řešení

Vojtěch Votruba

1. listopadu 2024

Podúloha 1

Při řešení vyjdeme z Hookova zákona pro pružinu ve tvaru

$$\mathbf{F} = -k \cdot \Delta \mathbf{y}, \tag{1}$$

kde $\mathbf{F}$ je síla působící na těleso na pružině zachycené, k je tuhost pružiny a $\Delta \mathbf{y}$ je orientované prodloužení pružiny.
Vzhledem k tomu, že neuvažujeme žádné působení na dálku – gravitaci, elektromagnetismus atp., jsou mechanické síly, jimiž působí pružiny na jednotlivá tělesa, jedinými silami, které se v úloze vyskytují. Přesněji řečeno, na každé těleso působí pouze síly způsobené prodloužením pružin, ke kterým je těleso přichyceno.
Newtonovy pohybové rovnice, proto můžeme psát pro jednotlivá tělesa ve tvaru

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_1 &= k(-x_1 + x_2), \\ m\ddot{x}_2 &= k(x_1 - 2x_2 + x_3), \\ m\ddot{x}_3 &= k(x_2 - 2x_3 + x_4), \\ m\ddot{x}_4 &= k(-x_4 + x_3), \end{aligned}$$

což lze průhledně zapsat také maticově jako

$$m \begin{pmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_3 \\ \ddot{x}_4 \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Podúloha 2

Předpokládáme-li, že platí funkční předpis

$$x_i = C_i \exp(i\omega t), \tag{3}$$

získáváme okamžitě také zderivováním funkční předpis pro $\ddot{x}_i$.

$$\dot{x}_i = i\omega C_i \exp(i\omega t), \tag{4}$$
$$\ddot{x}_i = -\omega^2 C_i \exp(i\omega t). \tag{5}$$

Prostým dosazením z rovnic (3) a (5) do rovnice (2) dostáváme rovnici

$$-m\omega^2 \exp(i\omega t) \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{pmatrix} = k \exp(i\omega t) \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{pmatrix}, \tag{6}$$

která po zkrácení exponenciál a přenesení obou výrazů na pravou stranu, má podobu

$$m\omega^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{pmatrix} - k \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{pmatrix} = 0$$

neboli

$$\begin{pmatrix} (m\omega^2 - k) & k & 0 & 0 \\ k & (m\omega^2 - 2k) & k & 0 \\ 0 & k & (m\omega^2 - 2k) & k \\ 0 & 0 & k & (m\omega^2 - k) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{pmatrix} = 0. \tag{7}$$

Podúloha 3

Determinant matice z konce předchozí podúlohy položíme roven nule.

$$\begin{vmatrix} (m\omega^2 - k) & k & 0 & 0 \\ k & (m\omega^2 - 2k) & k & 0 \\ 0 & k & (m\omega^2 - 2k) & k \\ 0 & 0 & k & (m\omega^2 - k) \end{vmatrix} = 0. \tag{8}$$

K jeho vypočtení použijeme Laplaceův rozvoj podle prvního sloupce a dostáváme

$$(m\omega^2 - k) \begin{vmatrix} (m\omega^2 - 2k) & k & 0 \\ k & (m\omega^2 - 2k) & k \\ 0 & k & (m\omega^2 - k) \end{vmatrix} - k \begin{vmatrix} k & 0 & 0 \\ k & (m\omega^2 - 2k) & k \\ 0 & k & (m\omega^2 - k) \end{vmatrix} = 0,$$

kde na vzniklé minory můžeme znovu aplikovat Laplaceův rozvoj, čímž máme

$$\begin{aligned} (m\omega^2 - k)(m\omega^2 - 2k) \begin{vmatrix} (m\omega^2 - 2k) & k \\ k & (m\omega^2 - k) \end{vmatrix} \\ -k(m\omega^2 - k) \begin{vmatrix} k & 0 \\ k & (m\omega^2 - k) \end{vmatrix} - k^2 \begin{vmatrix} (m\omega^2 - 2k) & k \\ k & (m\omega^2 - k) \end{vmatrix} = 0. \end{aligned}$$

Zde můžeme oba determinanty již jednoduše spočítat, přičemž jeden z nich můžeme i hezky vytknout

$$\begin{aligned} [(m\omega^2 - k)(m\omega^2 - 2k) - k^2][(m\omega^2 - k)(m\omega^2 - 2k) - k^2] \\ - k(m\omega^2 - k)k(m\omega^2 - k) = \\ = [(m\omega^2 - k)(m\omega^2 - 2k) - k^2]^2 - k^2(m\omega^2 - k)^2 = 0. \end{aligned}$$

Poslední výraz, ke kterému jsme došli, se nám hodí, neboť ho, jakožto rozdíl druhýho mocnin, můžeme přepsat na součin, ten budeme dále upravovat

$$\begin{aligned} [(m\omega^2 - k)(m\omega^2 - 2k) - k^2 + k(m\omega^2 - k)][(m\omega^2 - k)(m\omega^2 - 2k) - k^2 - k(m\omega^2 - k)] = \\ = [m^2\omega^4 - 3km\omega^2 + 2k^2 - k^2 + km\omega^2 - k^2][m^2\omega^4 - 3km\omega^2 + 2k^2 - k^2 - km\omega^2 + k^2] = \\ = [m^2\omega^4 - 2km\omega^2][m^2\omega^4 - 4km\omega^2 + 2k^2] = \\ = m\omega^2[m\omega^2 - 2k][m^2\omega^4 - 4km\omega^2 + 2k^2] = 0. \end{aligned}$$

Z této poslední rovnice už můžeme okamžitě vidět řešení $\omega_1 = 0$, ale i $\omega_3 = \sqrt{2\frac{k}{m}}$. Poslední dvě řešení dostáváme jako řešení kvadratické rovnice

$$t^2 - 4kt + 2k^2 = 0, \text{ kde } t = m\omega^2.$$

Podle výpočtu přes kvadratický vzorec pak

$$t_{1,2} = \frac{4k \pm \sqrt{16k^2 - 8k^2}}{2} = k(2 \pm \sqrt{2}),$$

což nás vede na finální dvě [1] řešení

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{k}{m}(2-\sqrt{2})}, \omega_4 = \sqrt{\frac{k}{m}(2+\sqrt{2})}.$$

Podúloha 4

Vlastní vektory spočteme tak, že pro každou vlastní frekvenci dosadíme do rovnice (7) a pomocí Gaussovy eliminaci ji vyřešíme. Máme tedy popořadě pro $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4$:

$$\begin{pmatrix} -k & k & 0 & 0 \\ k & -2k & k & 0 \\ 0 & k & -2k & k \\ 0 & 0 & k & -k \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} (1-\sqrt{2})k & k & 0 & 0 \\ k & -\sqrt{2}k & k & 0 \\ 0 & k & -\sqrt{2}k & k \\ 0 & 0 & k & (1-\sqrt{2})k \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1-\sqrt{2} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1-\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} k & k & 0 & 0 \\ k & 0 & k & 0 \\ 0 & k & 0 & k \\ 0 & 0 & k & k \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} (1+\sqrt{2})k & k & 0 & 0 \\ k & \sqrt{2}k & k & 0 \\ 0 & k & \sqrt{2}k & k \\ 0 & 0 & k & (1+\sqrt{2})k \end{pmatrix} \sim, \begin{pmatrix} 1+\sqrt{2} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1+\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

[1] Zde, ale i pro předchozí řešení, při zpětné substituci vylučujeme řešení $\omega < 0$, ta nemají fyzikální smysl.

z čehož už pak jednoduše plynou konkrétní vlastní vektory

$$\omega_1 : \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \tag{9}$$

$$\omega_2 : \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} -1 \\ 1-\sqrt{2} \\ \sqrt{2}-1 \\ 1 \end{pmatrix}, \tag{10}$$

$$\omega_3 : \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \tag{11}$$

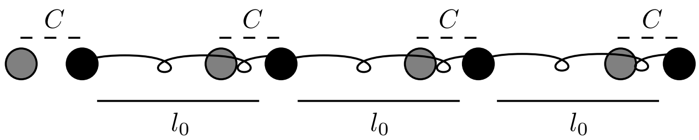
$$\omega_4 : \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} -1 \\ 1+\sqrt{2} \\ -1-\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}, \tag{12}$$

kde C bude libovolná amplituda s rozměrem vzdálenosti.

Podúloha 5

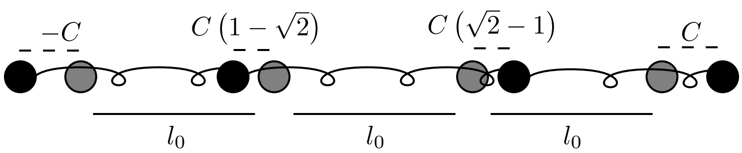
Diskuse nad průběhem pohybu pro každou z vlastních frekvencí byla zpracována formou přiložených schémat s komentáři. Kolečka vyplněná černou barvou značí reálnou polohu těles v nějakém význačném časovém bodě. Naproti tomu šedě vyplněná kolečka značí nijak nevychýlenou polohu těles setrvávajících v klidu.

Případ první: $\omega_1 = 0$



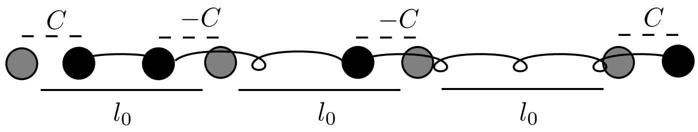
Po dosazení za ω do rovnice (3) si můžeme povšimnout, že nám vyjde rovnost $x_i = C_i = C$. To značí, že systém se chová konstantně v čase. Všechna tělesa jsou v klidu, pružiny nejsou stlačeny, celý systém je pouze posunutý.

Případ druhý: $\omega_2 = \sqrt{(2-\sqrt{2})\frac{k}{m}}$



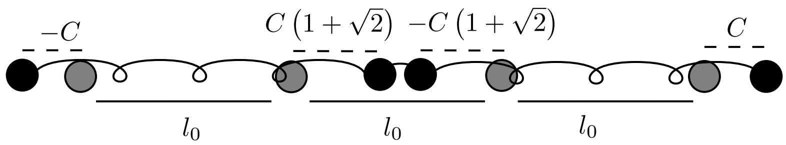
V tomto případě již tělesa v klidu nejsou. Vychýlení je zde symetrické podle osy úsečky procházející mezi dvěma prostředními body.

Případ třetí: $\omega_3 = \sqrt{2\frac{k}{m}}$



Z vlastního vektoru zde můžeme vyčíst, že v maximu cosinu (jakožto reálné části komplexní exponenciály), jsou pružiny stlačené tak, jak je vidět na obrázku. Ježto druhé a třetí těleso kmitají ve fázi se stejnou amplitudou, zachovávají si mezi sebou konstantní vzdálenost l_0.

Případ čtvrtý: $\omega_4 = \sqrt{(2+\sqrt{2})\frac{k}{m}}$



Tento případ je velmi podobný případu 2. Jediný rozdíl je, že prostřední dvě tělesa jsou posunuty blíže ke středu o $2\sqrt{2}C$.

Podúloha 6

Pro n těles bude sestavení Newtonových rovnic analogické případu se 4 tělesy – to proto, že přidáním libovolného množství těles se nikdy nezmění počet pružinek působících na jedno těleso, vždy budou pouze dvě [2]. V rámci zobecnění můžeme zapsat univerzální pohybovou rovnici pro i-té těleso jako

$$m\ddot{x}_i = k(x_{x-1} - 2x_i + x_{i+1}), \tag{13}$$

což pak po dosazení z rovnice (3) a (5) vede na soustavu s maticí analogickou k rovnici (7).

Další otázkou je, jestli bude pro n těles vždy existovat vlastní frekvence $\omega_1 = 0$, a odpověď je, že ano. Frekvence ω_1 totiž odpovídá stavu, kdy jsou tělesa v klidu (viz předchozí podkapitola) a kdy žádné pružiny nejsou prodloužené.[3] Tento stav jistě jsme schopni zařídit, a proto klidová frekvence ω_1 bude existovat.[4]

[2] Kromě prvního a posledního tělesa, pro ně však budou pohybové rovnice vždy stejné – resp. pro poslední těleso bude mírná modifikace indexů podle počtu n.

[3] Pokud bychom se zabývali hledáním vlastních vektorů pro tuto frekvenci, zjistili bychom, že znovu dostáváme vektor $(C_1, C_2, C_3, ...) = (1, 1, 1, ...)$, celá soustava je tak pouze „posunutá“.

[4] V realitě by do tohoto stavu dokonce měl systém sám dokonvergovat kvůli různým třecím silám apod.