Zápočtový problém 1

Vojtěch Votruba

1. listopadu 2024

a)

Řešíme na intervalu $[\varepsilon;1]$ zadanou rovnici

$$-\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}G(x,y)+\frac{6}{x^2}G(x,y)=\delta(x-y). \tag{1}$$

Vzhledem k tomu, že $\delta(x-y)=0$ s.v., vyřešíme nejprve homogenní úlohu

$$-\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}g(x)+\frac{6}{x^2}g(x)=0, \tag{2}$$

Přenásobíme-li obě strany rovnice faktorem x^2 (což můžeme udělat, protože jsme na intervalu $[\varepsilon;1]$), dostáváme tzv. Eulerovu diferenciální rovnici. Tu řešíme např. substitucí $t=\ln x$. Přepíšeme si $g(x)=\gamma(t)$ a můžeme podle pravidla o derivování složené funkce spočítat

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\gamma(t)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}\right)=\frac{\mathrm{d}^2\gamma}{\mathrm{d}t^2}\left(\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}\right)^2+\frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}^2t}{\mathrm{d}x^2}=\frac{1}{x^2}\left(\frac{\mathrm{d}^2\gamma}{\mathrm{d}t^2}-\frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t}\right). \tag{3}$$

Dosadíme-li tuto derivaci do (2), získáváme

$$\frac{\cancel{x^2}}{\cancel{x^2}}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\gamma(t)-\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\gamma(t)\right)+6\gamma(t)=0, \tag{4}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\gamma(t)-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\gamma(t)-6\gamma(t)=0. \tag{5}$$

To už je homogenní lineární diferenciální rovnice 2. řádu s konst. koeficienty, a tudíž má obecná řešení ve tvaru $\gamma(t)=A\mathrm{e}^{\lambda t}$. Dosazením do (5) dostáváme algebraickou rovnici

$$\lambda^2-\lambda-6=0, \tag{6}$$

která má řešení $\lambda=-2$ a $\lambda=3$. Máme tak celkem

$$\gamma^{\pm}(t)=A^{\pm}\mathrm{e}^{-2t}+B^{\pm}\mathrm{e}^{3t}\xRightarrow{t=\ln x}g^{\pm}(x)=\frac{A^{\pm}}{x^2}+B^{\pm}x^3. \tag{7}$$

Pro toto obecné řešení homogenní rovnice musíme nyní ošetřit Dirichletovy okrajové podmínky, konkrétně $g^-(\varepsilon)=0$ a $g^+(1)=0$

$$0=A^++B^+\implies g^+(x)=A^+\left(\frac{1}{x^2}-x^3\right), \tag{8}$$

$$0=\frac{A^-}{\varepsilon^2}+B^-\varepsilon^3\implies g^-(x)=A^-\left(\frac{1}{x^2}-\frac{x^3}{\varepsilon^5}\right). \tag{9}$$

A dále zajistit navázání obou funkcí v $x=y$. Nejprve požadujeme rovnost funkčních hodnot

$$A^+\left(\frac{1}{y^2}-y^3\right)=A^-\left(\frac{1}{y^2}-\frac{y^3}{\varepsilon^5}\right), \tag{10}$$

$$\underline{\underline{A^+-A^-+y^5\left(\frac{A^-}{\varepsilon^5}-A^+\right)=0,}} \tag{11}$$

pak také to, aby skok byl přítomen v předposlední derivaci.

$$A^{+}\left(\frac{-2}{y^3}-3y^2\right)-A^{-}\left(\frac{-2}{y^3}-3\frac{y^2}{\varepsilon^5}\right)=-1, \tag{12}$$

$$\underline{\underline{2(A^{-}-A^{+})+y^5\left(\frac{3}{\varepsilon^5}A^{-}-3A^{+}\right)+y^3=0.}} \tag{13}$$

Vyřešením soustavy rovnic (11) a (13) dostáváme

$$A^{+}=\frac{\varepsilon^5-y^5}{5y^2(\varepsilon^5-1)},\qquad A^{-}=-\frac{\varepsilon^5(y^5-1)}{5y^2(\varepsilon^5-1)}. \tag{14}$$

A celkové řešení zapsané pomocí Heavisideových Θ funkcí

$$\boxed{G(x,y)=\frac{\varepsilon^5-y^5}{5y^2(\varepsilon^5-1)}\left(\frac{1}{x^2}-x^3\right)\Theta(x-y)-\frac{\varepsilon^5(y^5-1)}{5y^2(\varepsilon^5-1)}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{x^3}{\varepsilon^5}\right)\Theta(y-x)}. \tag{15}$$

b)

Nyní máme za úkol spočítat

$$G_0(x,y)=\lim_{\varepsilon\to 0}G(x,y). \tag{16}$$

Podle věty o aritmetice limit můžeme limitu součtu rozdělit na součet limit (předpokládáme-li, že obě limity existují). Strana + Greenovy funkce je v bodě $\varepsilon=0$ spojitá, a proto do ní stačí pouze dosadit. Se stranou – si musíme trochu pohrát

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\varepsilon^5(y^5-1)}{5y^2(\varepsilon^5-1)}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{x^3}{\varepsilon^5}\right)\Theta(y-x)=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\cancel{\varepsilon^5}}{\cancel{\varepsilon^5}}\frac{(y^5-1)}{5y^2(\varepsilon^5-1)}\left(\frac{\varepsilon^5}{x^2}-x^3\right)\Theta(y-x) \tag{17}$$

$$=\frac{(y^5-1)}{5y^2(0-1)}\left(\frac{0}{x^2}-x^3\right)\Theta(y-x)=\underline{\underline{\frac{x^3(y^5-1)}{5y^2}\Theta(y-x).}} \tag{18}$$

Získáváme Greenovu funkci

$$\boxed{G_0(x,y)=\frac{y^3}{5}\left(\frac{1}{x^2}-x^3\right)\Theta(x-y)-\frac{x^3(y^5-1)}{5y^2}\Theta(y-x)}. \tag{19}$$

Vidíme, že pro $x=0$ je okamžitě pravý člen roven 0, protože ho násobíme x^3. V levém členu sice máme faktor $\frac{1}{x}$, ale máme v něm také funkci $\Theta(x-y)$, která bude na jistém okolí 0 vždy rovna 0, proto bude celý levý člen také roven 0, čímž se splní naše Dirichletovy okr. podmínky.

c)

Pro nalezení řešení nám stačí spočíst zadaný integrál. Nejprve si ho rozdělme podle domény integrace, abychom se zbavili absolutní hodnoty

$$\int_0^1 G_0(x,y)\left(\frac{1}{2}-\left|y-\frac{1}{2}\right|\right)\mathrm{d}y=\int_0^{0,5}G_0(x,y)y\,\mathrm{d}y+\int_{0,5}^1 G_0(x,y)(1-y)\,\mathrm{d}y. \tag{20}$$

Dál pro každý z integrálů budeme integrovat Heavisideovu funkci. To znamená, že budeme muset integrovat odlišně pro $x \in [0;0,5]$ a $x \in [0,5;1]$. Pro případ $x \in [0;0,5]$ tedy píšeme

$$\begin{aligned}
&\int_0^x G_0(x,y)y\,\mathrm{d}y + \int_x^{0,5} G_0(x,y)y\,\mathrm{d}y + \int_{0,5}^1 G_0(x,y)(1-y)\,\mathrm{d}y \\
&\qquad = \frac{1}{5}\left(\frac{1}{x^2}-x^3\right)\int_0^x y^4\,\mathrm{d}y - \frac{x^3}{5}\int_x^{0,5}\frac{y^5-1}{y}\,\mathrm{d}y - \frac{x^3}{5}\int_{0,5}^1 \frac{(y^5-1)(1-y)}{y^2}\,\mathrm{d}y \\
&\qquad = \frac{x^5}{25}\left(\frac{1}{x^2}-x^3\right) - \frac{x^3}{5}\left[\frac{y^5}{5}-\ln y\right]_x^{0,5} - \frac{x^3}{5}\left[\frac{y^4}{4}-\frac{y^5}{5}+\frac{1}{y}+\ln y\right]_{0,5}^1 \\
&\qquad = \underline{\underline{\frac{369}{1600}x^3 - \frac{\ln 2x}{5}x^3 - \frac{2}{5}\ln(2)x^3}}.
\end{aligned} \tag{21}$$

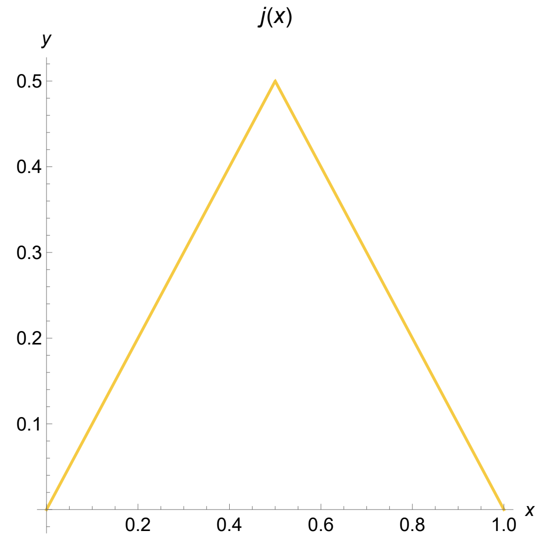
A obdobně budeme postupovat pro případ $x \in [0,5;1]$

$$\begin{aligned}
&\int_0^{0,5} G_0(x,y)y\,\mathrm{d}y + \int_{0,5}^x G_0(x,y)(1-y)\,\mathrm{d}y + \int_x^1 G_0(x,y)(1-y)\,\mathrm{d}y \\
&\qquad = \frac{1}{5}\left(\frac{1}{x^2}-x^3\right)\int_0^{0,5} y^4\,\mathrm{d}y + \frac{1}{5}\left(\frac{1}{x^2}-x^3\right)\int_{0,5}^x y^3(1-y)\,\mathrm{d}y - \frac{x^3}{5}\int_x^1 \frac{(y^5-1)(1-y)}{y^2}\,\mathrm{d}y \\
&\qquad = \frac{1}{5}\left(\frac{1}{x^2}-x^3\right)\left[\frac{y^5}{5}\right]_0^{0,5} + \frac{1}{5}\left(\frac{1}{x^2}-x^3\right)\left[\frac{y^4}{4}-\frac{y^5}{5}\right]_{0,5}^x - \frac{x^3}{5}\left[\frac{y^4}{4}-\frac{y^5}{5}+\frac{1}{y}+\ln y\right]_x^1 \\
&\qquad = \underline{\underline{-\frac{1}{1600}\frac{1}{x^2} + \frac{1}{4}x^2 - \frac{399}{1600}x^3 + \frac{\ln x}{5}x^3}}.
\end{aligned} \tag{22}$$

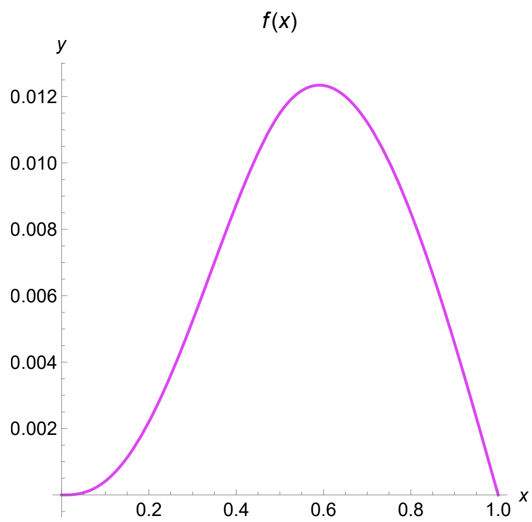
Nakonec funkci můžeme zapsat jako

$$\boxed{f(x) = \begin{cases} \frac{369}{1600}x^3 - \frac{\ln 2x}{5}x^3 - \frac{2}{5}\ln(2)x^3; & x \in [0;0,5] \\ -\frac{1}{1600}\frac{1}{x^2} + \frac{1}{4}x^2 - \frac{399}{1600}x^3 + \frac{\ln x}{5}x^3 & x \in [0,5;1] \end{cases}} \tag{23}$$

d)



Obrázek 1: Pravá strana naší úlohy: $j(x)$



Obrázek 2: Řešení naší úlohy: $f(x)$