Příklad z teoretické mechaniky č. 4 (2023) - řešení

Vojtěch Votruba

4. ledna 2024

Podúloha 1

Jak víme již ze zadání úlohy, celková kinetické energie tuhého tělesa T se spočte jako součet rotační složky kin. energie T_R a translační složky kin. energie T_T

$$T = T_R + T_T. \tag{1}$$

Nejprve se zaměřme na translační složku. Ta bude rovna kinetické energii hmotného středu mince, kdy mu přisoudíme celou její hmotnost m. Standardně pro hmotný bod ve 3D, vyjádřená v kartézských souřadnicích, má kinetická energie tvar

$$T_T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2). \tag{2}$$

Ježto máme ale podle zadání použít pouze kartézské souřadnice středu (x, y) a Eulerovy úhly, musíme derivaci $\dot{z}$ nějak vyjádřit. Uděláme tak pomocí nutačního úhlu ϑ. Z geometrického náhledu a věty o derivování složené funkce totiž patrně platí

$$z = a\cos\left(\frac{\pi}{2} - \vartheta\right) = a\sin\vartheta, \tag{3}$$

$$\dot{z} = a\cos(\vartheta)\dot{\vartheta}, \tag{4}$$

kde a je poloměr podstavy mince. Dostáváme tedy

$$T_T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{2}ma^2\dot{\vartheta}^2\cos^2\vartheta. \tag{5}$$

Dále nás bude zajímat rotační složka kinetické energie. Pro její obecné určení potřebujeme znát tenzor setrvačnosti I vůči dané bázi a příslušný vektor úhlové rychlosti Ω. Vztahem, který tyto veličiny sjednocuje, pak je

$$T_R = \frac{1}{2}I_{ij}\Omega_i\Omega_j, \tag{6}$$

kde používáme Einsteinovu sumační konvenci. Vezmeme-li tenzor setrvačnosti a vektor úhlové rychlosti v hlavních osách, budou smíšené členy nulové a máme

$$T_R = \frac{1}{2}(I_1\Omega_1^2 + I_2\Omega_2^2 + I_3\Omega_3^2). \tag{7}$$

Nakonec tedy můžeme zapsat výraz pro kinetickou energii jako

$$\boxed{T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{2}ma^2\dot{\vartheta}^2\cos^2\vartheta + \frac{1}{2}(I_1\Omega_1^2 + I_2\Omega_2^2 + I_3\Omega_3^2)}. \tag{8}$$

Podúloha 2

Abychom sestavili korektní lagrangián, nemůžou se ve výrazu pro kinetickou energii vyskytovat členy s Ω. K jich zbavení se využijeme Eulerovy kinematické rovnice ve tvaru

$$\Omega_1 = \dot{\varphi} \sin\vartheta \sin\psi + \dot{\vartheta} \cos\psi, \tag{9}$$
$$\Omega_2 = \dot{\varphi} \sin\vartheta \cos\psi - \dot{\vartheta} \sin\psi, \tag{10}$$
$$\Omega_3 = \dot{\varphi} \cos\vartheta + \dot{\psi}. \tag{11}$$

Umocněním okamžitě získáváme

$$\Omega_1^2 = \dot{\varphi}^2 \sin^2\vartheta \sin^2\psi + 2\dot{\varphi}\dot{\vartheta} \sin\vartheta \sin\psi \cos\psi + \dot{\vartheta}^2 \cos^2\psi, \tag{12}$$
$$\Omega_2^2 = \dot{\varphi}^2 \sin^2\vartheta \cos^2\psi - 2\dot{\varphi}\dot{\vartheta} \sin\vartheta \sin\psi \cos\psi + \dot{\vartheta}^2 \sin^2\psi, \tag{13}$$
$$\Omega_3^2 = \dot{\varphi}^2 \cos^2\vartheta + 2\dot{\varphi}\dot{\psi} \cos\vartheta + \dot{\psi}^2 \tag{14}$$

a dosazením do vztahu (8) pak

$$\begin{aligned} T = {} & \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{2}ma^2\dot{\vartheta}^2 \cos^2\vartheta \\ & + \frac{1}{2}I_1(\dot{\varphi}^2 \sin^2\vartheta \sin^2\psi + 2\dot{\varphi}\dot{\vartheta} \sin\vartheta \sin\psi \cos\psi + \dot{\vartheta}^2 \cos^2\psi) \\ & + \frac{1}{2}I_2(\dot{\varphi}^2 \sin^2\vartheta \cos^2\psi - 2\dot{\varphi}\dot{\vartheta} \sin\vartheta \sin\psi \cos\psi + \dot{\vartheta}^2 \sin^2\psi) \\ & + \frac{1}{2}I_3(\dot{\varphi}^2 \cos^2\vartheta + 2\dot{\varphi}\dot{\psi} \cos\vartheta + \dot{\psi}^2). \end{aligned} \tag{15}$$

Podúloha 3

Pro výpočet složek tenzoru setrvačnosti existuje běžně používaný vztah

$$I_{ij} = \rho \int (\delta_{ij}x_k x_k - x_i x_j)\ \mathrm{d}V, \tag{16}$$

kde ρ značí konstantní objemovou hustotu. Pro naši velmi tenkou minci ovšem bude vhodnější použít plošnou hustotu $\sigma = \frac{m}{\pi a^2}$, kdy vztah přechází do tvaru

$$I_{ij} = \sigma \int (\delta_{ij}x_k x_k - x_i x_j)\ \mathrm{d}S = \frac{m}{\pi a^2} \int (\delta_{ij}x_k x_k - x_i x_j)\ \mathrm{d}S. \tag{17}$$

Abychom dále vyjádřili tenzor setrvačnosti v hlavních osách, střed souřadnic pokládáme do středu mince (z důvodů symetrie) a pracujeme v korotující bázi. Pro jednotlivé osy můžeme ze vztahu (17) psát

$$I_1 = \frac{m}{\pi a^2} \int (x_2^2 + x_3^2)\ \mathrm{d}S, \tag{18}$$
$$I_2 = \frac{m}{\pi a^2} \int (x_1^2 + x_3^2)\ \mathrm{d}S, \tag{19}$$
$$I_3 = \frac{m}{\pi a^2} \int (x_1^2 + x_2^2)\ \mathrm{d}S, \tag{20}$$

leč pro všechny elementy objemu na minci platí, že $x_3 = 0$. Z toho dostáváme

$$I_1 = \frac{m}{\pi a^2} \int x_2^2 \, \mathrm{d}S, \tag{21}$$

$$I_2 = \frac{m}{\pi a^2} \int x_1^2 \, \mathrm{d}S, \tag{22}$$

$$I_3 = \frac{m}{\pi a^2} \int (x_1^2 + x_2^2) \, \mathrm{d}S. \tag{23}$$

Ze symetrie os x_1 a x_2 (při jejich vzájemném přejmenování by se fyzikálně nic nezměnilo) můžeme okamžitě vidět, že $I_1 = I_2$. Zároveň kvůli linearitě integrálu vidíme, že $I_1 + I_2 = I_3$. Pro určení všech složek tak stačí spočítat 3. složku tenzoru.
K výpočtení daného integrálu přejdeme do polárních souřadnic (r, α), kdy $x_1 = r\cos\alpha$ a $x_2 = r\sin\alpha$. Jacobián při této transformaci vychází jako r a máme tak celkem

$$\begin{aligned} I_3 &= \frac{m}{\pi a^2} \int (x_1^2 + x_2^2) \, \mathrm{d}S = \frac{m}{\pi a^2} \int_0^{2\pi} \int_0^a (r^2 \cos^2\alpha + r^2 \sin^2\alpha) r \, \mathrm{d}r\mathrm{d}\alpha \\ &= \frac{m}{\pi a^2} \int_0^{2\pi} \int_0^a r^3 \, \mathrm{d}r\mathrm{d}\alpha = \frac{m}{\pi a^2} \cdot 2\pi \cdot \frac{a^4}{4} = \boxed{\frac{1}{2} m a^2} \end{aligned} \tag{24}$$

Z následující lineární soustavy:

$$\begin{cases} I_1 + I_2 = \frac{1}{2} m a^2, \\ I_1 = I_2, \end{cases} \tag{25}$$

pak jednoduše dostáváme $\boxed{I_1 = I_2 = \frac{1}{4} m a^2}$.

Podúloha 4

Předposledním krokem v této úloze je sjednocení výsledků předchozích podúloh, konkrétně dosazujeme za složky tenzoru setrvačnosti z podúlohy 3 do vztahu (15) výše.

$$\begin{aligned} T = &\frac{1}{2} m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{2} m a^2 \dot{\vartheta}^2 \cos^2\vartheta \\ &+ \frac{1}{8} m a^2 \dot{\varphi}^2 \sin^2\vartheta \sin^2\psi + \frac{1}{4} m a^2 \dot{\varphi}\dot{\vartheta} \sin\vartheta \sin\psi \cos\psi + \frac{1}{8} m a^2 \dot{\vartheta}^2 \cos^2\psi \\ &+ \frac{1}{8} m a^2 \dot{\varphi}^2 \sin^2\vartheta \cos^2\psi - \frac{1}{4} m a^2 \dot{\varphi}\dot{\vartheta} \sin\vartheta \sin\psi \cos\psi + \frac{1}{8} m a^2 \dot{\vartheta}^2 \sin^2\psi \\ &+ \frac{1}{4} m a^2 \dot{\varphi}^2 \cos^2\vartheta + \frac{1}{2} m a^2 \dot{\varphi}\dot{\psi} \cos\vartheta + \frac{1}{4} m a^2 \dot{\psi}^2, \end{aligned} \tag{26}$$

v tomto výrazu se nám nejprve některé členy odečtou a jiné se složí do goniometrické jedničky

$$\begin{aligned} T = &\frac{1}{2} m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{2} m a^2 \dot{\vartheta}^2 \cos^2\vartheta + \frac{1}{8} m a^2 \dot{\varphi}^2 \sin^2\vartheta (\sin^2\psi + \cos^2\psi) \\ &+0 + \frac{1}{8} m a^2 \dot{\vartheta}^2 (\sin^2\psi + \cos^2\psi) + \frac{1}{4} m a^2 \dot{\varphi}^2 \cos^2\vartheta + \frac{1}{2} m a^2 \dot{\varphi}\dot{\psi} \cos\vartheta + \dot{\psi}^2. \end{aligned} \tag{27}$$

Po zjednodušení dostáváme výraz

$$\begin{aligned} T = &\frac{1}{2} m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{2} m a^2 \dot{\vartheta}^2 \cos^2\vartheta + \frac{1}{8} m a^2 \dot{\varphi}^2 \sin^2\vartheta \\ &+\frac{1}{8} m a^2 \dot{\vartheta}^2 + \frac{1}{4} m a^2 \dot{\varphi}^2 \cos^2\vartheta + \frac{1}{2} m a^2 \dot{\varphi}\dot{\psi} \cos\vartheta + \frac{1}{4} m a^2 \dot{\psi}^2, \end{aligned} \tag{28}$$

který nakonec ještě můžeme elegantně uzávorkovat[1] a dostáváme tak

$$\boxed{T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{8}ma^2\dot{\vartheta}^2(4\cos^2\vartheta + 1) + \frac{1}{8}ma^2\dot{\varphi}^2\sin^2\vartheta + \frac{1}{4}ma^2(\dot{\varphi}\cos\vartheta + \dot{\psi})^2}. \tag{29}$$

Podúloha 5

Finálně vyjádříme Lagrangeovu funkci, která má ve vší obecnosti tvar

$$L = T - V. \tag{30}$$

Kinetickou energii T jsme pracně spočetli výše. Spočíst potenciální energii V je oproti tomu triviální, protože (podobně jako u translační kinetické energie) potenciální gravitační energie tuhého tělesa je rovna potenciální gravitační energii jeho hmotného středu (též jeho *těžiště*), přisoudíme-li tomuto středu veškerou hmotnost. Předpokládáme, že tíhové zrychlení g působí svisle dolu, a proto můžeme psát

$$V = mgz = mga\sin\vartheta. \tag{31}$$

Což nám po dosazení do vztahu (30) dává konečný výsledek úlohy

$$\boxed{L = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{8}ma^2\dot{\vartheta}^2(4\cos^2\vartheta + 1) + \frac{1}{8}ma^2\dot{\varphi}^2\sin^2\vartheta + \frac{1}{4}ma^2(\dot{\varphi}\cos\vartheta + \dot{\psi})^2 - mga\sin\vartheta}.$$

[1] Pomocí vzorce $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.