Obyčejné diferenciální rovnice
Mgr. Bohumil Krajc, Ph.D.

Vojtěch Zicha [*]

18. září 2013 – 18. prosince 2013

Obsah

1 Lineární diferencovatelná rovnice 1. řádu

1.1 *Metoda variace konstanty*

Mějme lineární diferencální rovnici:

(1) $y' + a(t)y = b(t)$

Pro přidruženou rovnici $y' + a(t)y = 0$ platí, že je-li $\varphi(t) \neq 0$ je jedním z řešení, pro všechna řešení platí $y_n(t) = c \cdot \varphi(t), c \in \mathbb{R}$. Metoda variace konstanty slouží k nalezení partikulárního řešení $y_p(t) = k(t) \cdot \varphi(t), k \in C^1(J)$ rovnice 1. Po dosazení do 1 platí:

$$
\begin{aligned}
k'(t) \cdot \varphi(t) + k(t)\varphi'(t) + a(t)k(t)\varphi(t) &= b(t) \\
k'(t) \cdot \varphi(t) + k(t) \cdot \big(\varphi'(t) + a(t)\varphi(t)\big) &= b(t) \\
k'(t) &= \frac{b(t)}{\varphi(t)} \\
k(t) &= \int \frac{b(t)}{\varphi(t)} \mathrm{d}t
\end{aligned}
$$

1.1 příklad. Řešme: $y' + \cos t \cdot y = \cos t$. Pro přidruženou rovnici $y' + \cos t \cdot y = 0$ nalezneme jedno z řešení $\varphi(t) = c \cdot e^{-\sin t}, c \in \mathbb{R}$. Hledáme řešení ve

[*] vojtech@zicha.name

tvaru $y_p(t) = k(t) \cdot e^{-\sin t}$.

$$\begin{aligned} y' + \cos t \cdot y &= \cos t \\ k'(t) \cdot e^{-\sin t} - \cos t \cdot k(t) \cdot e^{-\sin t} + \cos t \cdot k(t) \cdot e^{-\sin t} &= \cos t \\ k'(t) &= \cos t \cdot e^{\sin t} \\ k(t) &= \int \cos t \cdot e^{\sin t} \\ k(t) &= e^{\sin t} \\ y_p(t) &= 1 \end{aligned}$$

Proto pro obecné řešení platí $y(t) = \underline{\underline{c \cdot e^{-\sin t} + 1, c \in \mathbb{R}}}$.

2 Diferenciální rovnice 1. řádu

Mějme rovnici:

(2) $\quad y' = f(t, y), y(t_0) = y_0$

2.1 věta (Peanova, o existenci řešení). *Nechť $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ je spojitá funkce definovaná na otevřené množině a bod $[t_0, y_0]$ patří do definičního oboru této funkce. Potom Cauchyova úloha 1 má alespoň jedno maximální řešení.*

2.2 věta (O existenci a jednoznačnost). *Nechť $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ je spojitá funkce definovaná na otevřené množině $\Omega \in \mathbb{R}^2$, přičemž $[t_0, y_0]$ patří do definičního oboru téo funkce. Nechť je na Ω navíc spojitá funkce $\frac{\partial f}{\partial y}$, to znamená parciální derivace funkce f podle druhé proměnné. Potom Cauchyova úloha má právě jedno maximální řešení.*

2.3 věta (Picardova-Lindelöffova). *Předpokládejme, že funkce $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ je spojitá na obdélníku $V = \langle t_0 - a, t_0 + a \rangle \times \langle y_0 - b, y_0 + b \rangle$, kde $a > 0, b > 0$. Nechť existuje číslo (zvané **Libschitzova konstanta**) $L \in \mathbb{R}$ takové, že pro každé dva body $[t, y] \in V, [t, z] \in V$: platí:*

$$|f(t, y) - f(t, z)| \leq L \cdot |y - z| .$$

Označme $M = \max_{[t,y] \in V} |f(t, y)|$ a předpokládejme, že f je na V nenulová funkce, tedy $M > 0$. Položme $\alpha = \min \left\{ a, \frac{b}{M} \right\}$. Potom existuje právě jedna funkce φ definovaná na intervalu $(t_0 - \alpha, t_0 + \alpha)$, která je na tomto intervalu řešením Cauchyovy úlohy 1.

2.4 poznámka. Existence Lipschitzovy konstanty L lze zajistit spoojitostí $\frac{\partial f}{\partial y}$ na V - tvrzení plyne z Mean-Value Theorem a Weierr-Strass.

2.5 poznámka (Posloupnost Picardových iterací). Zvolme $\varphi_0, \varphi_0(t_0) = y_0$. Můžeme iterovat $\varphi_1(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \varphi_0(s))\, \mathrm{d}s$ a rekurentně pokračovat. Limita posloupnosti těchto funkcí je pevným bodem tohoto zobrazení a řeší zadanou Cauchyovu úlohu.

2.1 *Geometrická interpretace*