Numerické metody 1

Obsah

Korektnost úloh a stabilita výpočetních postupů

Definice: **Korektní úloha** na dvojici (B_1, B_2) je taková úloha $y = U(x), x \in B_1, y \in B_2$, kde

- $\forall x \in B_1 : \exists! y \in B_2$;
- $x_n \to x, U(x_n) = y_n \Rightarrow U(x_n) \to U(x) = y$, tj. řešení y spojitě závisí na x.

Definice: **Dobře podmíněná úloha** $u(x)$ je taková úloha, kde malá změna x vyvolá malou změnu y. Pro dobře podmíněnou úlohu platí$1 < c_p < 100$, kde:

$$c_p = \frac{\frac{\|\Delta y\|}{\|y\|}}{\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|}}$$

Typy chyb

- **Chyba matematického modelu** – vzniká nepřesným zachycením reality matematickým modelem
- **Chyba numerické metody** – nahrazení $\lim_{n\to\infty} a_n \approx a_{500}$
- **Chyba aproximace** – nahrazení matematické úlohy numerickou, např. spojitá vstupní data za diskrétní
- **Chyby ve vstupních datech**
- **Chyba aproximace**

Aproximace čísla

Nechť x je přesná hodnota a $\widetilde{x} \approx x$ je aproximace hodnoty. **Absolutní chyba** vyjadřuje $\Delta x = x - \varepsilon$, přičemž hledáme **odhad absolutní chyby** $\|\Delta x\| \leq \varepsilon$. **Relativní chyba** vyjadřuje $\frac{\Delta x}{x}$, přičemž hledáme **odhad relativní chyby** $\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} = \frac{\|\Delta x\|}{\|\widetilde{x}\|} \leq \delta$.

Šíření chyb při aritmetických operací

Mějme odhady $\widetilde{x_1}, \widetilde{x_2}$ a $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \delta_1, \delta_2$.

- Součet $\widetilde{u} = \widetilde{x_1} + \widetilde{x_2}, \varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2, \delta = \frac{1}{|\widetilde{x_1} - \widetilde{x_2}|} \cdot ($

Obecný vzorec chyb: $\varepsilon = \sum_{i=1}^{n} \left| f'_{x_i}\left(\widetilde{x_1}, \ldots, \widetilde{x_n}\right) \right| \cdot \varepsilon_i, \delta = \frac{\varepsilon}{\|f([\widetilde{x_1}, \ldots, \widetilde{x_n}])\|}$.

Numerické řešení nelineárních rovnic

Definice: Nechť funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,$D(f) = \langle a, b\rangle$. Číslo $\overline{x} \in \langle a, b\rangle$ nazýváme **kořen rovnice $\mathbf{f}\left(\mathbf{x}\right) = \mathbf{0}$** právě tehdy, když $f(x) = 0$.

Věta (existence $\overline{x}$): Nechť f je spojitá na $\langle a, b\rangle$, $f(a) \cdot f(b) < 0$, poté rovnice $f(x) = 0$ má alespoň jeden kořen.

Separace kořenů

Hledáme polohu a počet kořenů.

- Grafická separace kořenů z grafu funkce
- Grafická separace kořenů rozkladem na více funkcí
  Příklad: $f(x) := e^x - 2x - 1 = e^x - (2x + 1) = f_1(x) - f_2(x)$ a hledáme průsečík těchto funkcí.
- Tabelace funkce

Metoda půlení intervalů

Mějme a_0, b_0 takové, že $f\left(a_0\right) \cdot f\left(b_0\right) < 0$. Konstruujme posloupnosti $\left(a_k\right), \left(b_k\right)$ takových, že $\langle a_0, b_0\rangle \supset \langle a_1, b_1\rangle \supset \ldots \supset \langle a_k, b_k\rangle \supset \ldots$ a současně $\forall i \in \mathbb{N}^0 : f\left(a_i\right) \cdot f\left(b_i\right) < 0$. Máme-li $\langle a_k, b_k\rangle$, vypočteme $s_{k+1} = \frac{a_k + b_k}{2}$. Je-li $f\left(a_k\right) \cdot f\left(s_{k+1}\right) < 0$, poté $a_{k+1} := a_k$ a $b_{k+1} := s_{k+1}$. Je-li $f\left(b_k\right) \cdot f\left(s_{k+1}\right) < 0$, poté $b_{k+1} := b_k$ a $a_{k+1} := s_{k+1}$.

Věta (konvergence půlení intervalů): Metoda půlení intervalů je konvergentní a navíc $\lim_{k\to\infty} s_k = \overline{x}$.

Nechť $\overline{x} \in \left\langle a_k, b_k\right\rangle, s_{k+1} = \frac{a_k + b_k}{2}, d_k = \frac{(b_k - a_k)}{2}$. Víme, že $a_k = s_{k+1} - d_k, b_k = s_{k+1} + d_k, \overline{x} \in \langle s_{k+1} - d_k, s_{k+1} + d_k\rangle$. Tudíž $|\overline{x} - s_{k+1}| \leq d_k$. Dále $b_k - a_k = \frac{b_{k-1} - a_{k-1}}{2} = \ldots = \frac{b_0 - a_0}{2^k}$ a $0 \leq |\overline{x} - s_{k+1}| \leq d_k = \frac{b_0 - a_0}{2^{k-1}} \to 0$. Víme tudíž, že $\lim_{k\to\infty} |\overline{x} - s_{k+1}| = 0 \Rightarrow \lim_{k\to\infty} s_{k+1} = \overline{x}$.$\blacksquare$

Metoda prostých iterací

Metoda prostých iterací je založena na konstrukci posloupnosti aproximací $\left(x_k\right), k \in \mathbb{N}^0$ daných rekurzivním předpisem $x_{k+1} = G\left(x_k\right)$.

Definice: Zobrazení $G : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ se nazývá **kontraktivní**, platí-li:

$$\exists \varrho \in (0, 1) : \forall x, y \in \Omega : \|G(x) - G(y)\| \leq \varrho \cdot \|x - y\|$$

Definice: Nechť je zobrazení $G : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Bod $\overline{x} \in \mathbb{R}^n$ se nazývá **pevný bod** zobrazení G, platí-li $\overline{x} = G\left(\overline{x}\right)$.

Věta (pevný bod): Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ je souvislá, omezená a uzavřená množina, zobrazení $G : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ je kontraktivní v Ω a postupně aproximace $x_k := G\left(x_{k-1}\right)$ leží v Ω, poté:

- $\forall x_0 \in \mathbb{R}^n$ platí, že posloupnost $\left(x_k\right)$ konverguje a $\lim_{k \to \infty} x_k = \overline{x}$;
- $\overline{x}$ je pevným bodem G;
- $\|x_k - \overline{x}\| \leq \frac{\varrho^k}{1-\varrho} \cdot \|x_1 - x_0\|$

Věta (postačující podmínka konvergence metody prostých iterací): Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ je souvislá, omezená a uzavřená množina, zobrazení $G : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ je kontraktivní v Ω a postupně aproximace $x_k := G\left(x_{k-1}\right)$ leží v Ω, nechť $G \in C^2(\Omega)$ a $\forall x \in \Omega : \|G'(x)\| \leq M < 1$, poté platí tvrzení věty o pevném bodě.