# L inMatematická analýza 3

*Fakulta elektrotechniky a informatiky VŠB-TU Ostrava (bakalářský)*

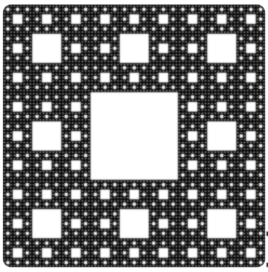
Datum aktualizace originálu: **29. 6. 2025 v 15:44:48**

Datum vygenerování PDF: **2. 7. 2025 v 21:51:14**

# L inMatematická analýza 3

## Obsah

# Číselné řady



## Motivační příklady

Sierpinského koberec

- Achilles běží rychlostí $10\ ms^{-1}$, želva běží rychlostí $1\ ms^{-1}$. Na startu má želva náskok $1\ m$. Za jak dlouho se setkají a kde?
  Úloha vede na součet řady $100 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{10}\right)^n$.
- Jaká je plocha Sierpinského koberce (viz Figure 1) o hraně $1\ j$?
  Úloha vede na součet řady $\frac{1}{9} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{8}{9}\right)^{n-1}$.

## Základní pojmy

*Definice (řady a základní pojmy):* **Řadou (reálných čísel)** rozumíme výraz $a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots \overset{\text{def}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} a_n$, kde pro každé $n \in \mathbb{N}$ je $a_n \in \mathbb{R}$, tj. $(a_n)$ je posloupností reálných čísel. Číslo $a_n$ nazýváme **n-tým členem řady**. Posloupnost $(s_n) := a_1 + \ldots + a_n$ nazýváme **posloupností částečných součtů řady**. Existuje-li $\lim s_n = S \in \mathbb{R}^*$, nazýváme ji **součtem řady** a označíme ji $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Pokud $S$ existuje a platí, že $s \in \mathbb{R}$, pak řekneme, že řada **konverguje**. Pokud $S = \{+\infty, -\infty\}$ nebo $S$ neexistuje, pak řekneme, že řada **diverguje**.

- Aritmetická řada $1 + 2 + \ldots n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} n = \infty$, řada diverguje.
- Geometrická řada $1 + q + q^2 + \ldots + q^n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1} = \begin{cases} \frac{1}{1-q}, q \in (1, -1) \\ \nexists, q \notin (1, -1) \end{cases}$.
- Harmonická řada $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$, řada diverguje.
- Řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1$, řada je konvergentní.

- Řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} = e$ (Taylorův polynom $e^x$ v bodě $0$).
- Řada $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{2n-1} = \frac{\pi}{4}$ (Taylorův polynom $atanx$ v bodě $0$).

*Věta (nutná podmínka konvergence řady):* Konverguje-li řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, poté $\lim a_n = 0$.

Z předpokladu platí, že $\lim s_n = S \in \mathbb{R}$ existuje. Poté $\lim a_n = \lim (s_n - s_{n-1}) = \lim s_n - \lim s_{n-1} = S - S = 0.$■

*Věta:* Konverguje-li řada $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$, poté konverguje i řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Z předpokladu platí $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = S \in \mathbb{R}$. Zavedeme $\forall n \in \mathbb{N} : a_n^+ = \max \{a_n, 0\}, a_n^- = \max \{-a_n, 0\}$. Platí, že $a_n^+ \geq 0$ a $a_n^- \geq 0$. Poté $s_n = a_1 + \ldots a_n = a_1^+ - a_1^- + \ldots + a_n^+ - a_n^- = s_n^+ - s_n^-$. Dále $\lim s_n = \lim s_n^+ - \lim s_n^-$, tudíž pokud $s_n^+$ a $s_n^-$ jsou konvergentní, poté i $s_n$ je konvergentní. S využitím věty o limitě neklesající a shora omezené posloupnosti ukažme, že posloupnost $s_n^+$ je neklesající díky definici $a_n^+$ a shora omezená $s_n^+ = a_1^+ + \ldots + a_n^+ \leq |a_1| + \ldots + |a_n| \to S \leq S$. Podobně $s_n^- = a_1^- + \ldots + a_n^- \leq |a_1| + \ldots |a_n| \to S \leq S$. Proto platí, že $s_n^+$ a $s_n^-$ jsou konvergentní.■

*Definice (absolutní konvergence):* Konverguje-li řada $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$, poté řadu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nazýváme **absolutně konvergentní řadou**. Konverguje-li řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, ale řada $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ diverguje, poté řadu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nazýváme **neabsolutně konvergentní řadou**.

Řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ je neabsolutně konvergentní.

# Kritéria absolutní konvergence

*Poznámka:* Píšeme-li „$V(n)$ platí pro všechna dost velká $n \in \mathbb{N}$“, myslíme „$\exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0, n \in \mathbb{N} : V(n)$“.

*Věta (srovnávací kritérium):* Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ jsou takové řady, že:

1. $|a_n| \leq b_n$, pro všechna dost velká $n \in \mathbb{N}$;
2. řada $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ je konvergentní;

poté $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje absolutně.

Díky druhému předpokladu platí, že $s_n^b = \sum_{k=1}^{n} b_k$ je shora omezená. Určeme $s_n^a = \sum_{k=1}^{n} |a_k|$, poté $s_n^a \leq s_n^b + c, c \in \mathbb{R}$ a $s_n^a$ je také shora omezená. Navíc $s_n^a$ je neklesající a tudíž $s_n^a$ je konvergentní.■

*Důsledek (věta o srovnávacím kritériu):* Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ jsou takové řady, že:

1. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty$;

2. $0 \leq a_n \leq b_n$ pro všechna dost velká $n \in \mathbb{N}$;

poté $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = +\infty$.

- Řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.
  Předpokládejme, že řada konverguje a srovnejme s řadou $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)}$. Platí, že $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2 : \frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n(n-1)}$. Musíme ukázat, že $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)}$ konverguje. K tomu využijeme rovnost s konvergentní řadou $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$.
  Řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ je absolutně konvergentní.

- Řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$.
  Předpokládejme, že řada diverguje a srovnejme s řadou $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty$. Platí, že $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 1 : \frac{1}{\sqrt{n}} \geq \frac{1}{n}$.
  Řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = +\infty$ je divergentní.

*Věta (d'Alambertovo kritérium):* Mějme $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ takovou řadu, že:

1. pokud platí $\exists q \in \mathbb{R}^+, q < 1 : \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq q$ pro všechna dost velká $n \in \mathbb{N}$, pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je absolutně konvergentní.

2. pokud platí $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| > 1$ pro všechna dost velká $n \in \mathbb{N}$, pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je divergentní.

Dokažme první tvrzení: z předpokladu platí, že $|a_{n+1}| \leq q \cdot |a_n|$, tudíž $s = |a_1| + \ldots + |a_{n_0}| + |a_{n_0+1}| + \ldots \leq |a_1| + \ldots + |a_{n_0}| + q\,|a_{n_0}| + q^2\,|a_{n_0}| + \ldots = |a_1| + \ldots + |a_{n_0}| + |a_{n_0}| \cdot \frac{q}{1-q} < \infty$ a řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je absolutně konvergentní. Dokažme druhé tvrzení: $\forall n \geq n_0 : |a_{n+1}| > |a_n| > 0 \Rightarrow \lim a_n \neq 0$ a řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je divergentní.■

*Důsledek (limitní d'Alambertovo kritérium):* Mějme $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Pokud $\lim \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$, pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je absolutně konvergentní. Je-li $\lim \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| > 1$, pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je divergentní.

Pro první tvrzení využijme d'Alambertovo kritérium 1 s $q \in \left(\lim \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|, 1\right)$. Pro druhé tvrzení využijme d'Alambertovo kritérium 2 s podmínkou, že pro všechna dost velká $n \in \mathbb{N}$ platí $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| > 1$.

- Řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$.

  Využijme limitní d'Alambertovo kritérium: $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim \frac{\frac{\left(((n+1)!)^2\right)}{(2n+2)!}}{\frac{(n!)^2}{(2n)!}} =$
  $\lim \frac{\left(((n+1)!)^2\right)}{(2n+2)!} \cdot \frac{(2n)!}{(n!)^2} = \lim \frac{n+1}{2(2n+1)} = \frac{1}{4} < 1$.
  Řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$ je absolutně konvergentní.

- Řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n}$.
  Využijme limitní d'Alambertovo kritérium: $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim \frac{\frac{2^{n+1}}{n+1}}{\frac{2^n}{n}} = \lim \frac{2n}{n+1} = 2 > 1$.
  Řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n} = +\infty$ je divergentní.

*Věta (Cauchyho kritérium):* Mějme $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ takovou řadu, že:

1. pokud platí $\exists q \in \mathbb{R}^+, q < 1 : \sqrt[n]{|a_n|} \leq q$ pro všechna dost velká $n \in \mathbb{N}$, pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je absolutně konvergentní.
2. pokud platí $\sqrt[n]{|a_n|} \geq 1$ pro všechna dost velká $n \in \mathbb{N}$, pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je divergentní.

Dokažme první tvrzení: z předpokladu platí, že $|a_n| \leq q^n$, tudíž $s = |a_1| + \ldots + |a_{n_0}| + |a_{n_0+1}| + \ldots \leq |a_1| + \ldots + |a_{n_0-1}| + q^{n_0} + q^{n_0+1} + \ldots = |a_1| + \ldots + q^n \cdot \frac{1}{1-q} < \infty$ a řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je absolutně konvergentní. Dokažme druhé tvrzení: $\forall n \geq n_0 : |a_n| > 1 \Rightarrow \lim a_n \neq 0$ a řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je divergentní.■

*Důsledek (limitní Cauchyho kritérium):* Mějme $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Pokud $\lim \sqrt[n]{|a_n|} < 1$, pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je absolutně konvergentní. Je-li $\lim \sqrt[n]{|a_n|} > 1$, pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je divergentní.

- Řada $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-1}{n^2}\right)^n$.
  Využijme limitní Cauchyho kritérium: $\lim \sqrt[n]{\left(\frac{n-1}{n^2}\right)^n} = \lim \frac{n-1}{n^2} = 0 < 1$.
  Řada $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-1}{n^2}\right)^n$ je absolutně konvergentní.

- Řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^2}$.
  Využijme limitní Cauchyho kritérium: $\lim \sqrt[n]{\frac{2^n}{n^2}} = \lim \frac{2}{\left(\sqrt[n]{n}\right)^2} = 2 > 1$.
  Řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^2} = +\infty$ je divergentní.

*Věta (integrální kritérium):* Nechť $f$ je nezáporná, nerostoucí a spojitá funkce v intervale $\langle 1, \infty)$. Nechť dále platí, že $\forall n \in \mathbb{N} : |a_n| = f(n)$. Poté řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolutně konverguje <u>právě tehdy</u>, konverguje-li $\int_1^{\infty} f(x)dx$ (tzn. že $\lim_{t\to\infty} \int_1^t f(x)dx$ existuje a je konečná).

Uvědomme si, že existují limity $\lim s_n \in \mathbb{R}^*$ a $\lim_{t\to\infty} \int_1^t f(x)dx \in \mathbb{R}^*$. Dokažme $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty \Leftrightarrow \int_1^{\infty} f(x)dx < \infty$. Z předpokladů $s_n = \sum_{k=1}^{n} |a_k| = \sum_{k=1}^{n} f(k) \geq \int_1^{n+1} f(x)dx \geq \sum_{k=2}^{n+1} f(k) = \sum_{k=2}^{n+1} |a_k| = s_{n+1} - |a_1|$. Přejdeme-li $n \to \infty$: $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| \geq \int_1^{\infty} f(x)dx \geq \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| - |a_1|$.■

- Řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.
  Využijme integrální kritérium: $\lim_{t\to\infty} \int_1^t \frac{1}{x}dx = \lim_{t\to\infty} \ln t = \infty$.
  Řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$ je divergentní.

- Řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.
  Využijme integrální kritérium: $\lim_{t\to\infty} \int_1^t \frac{1}{x^2}dx = \lim_{t\to\infty} \left(-\frac{1}{t} + 1\right) = 1$.
  Řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ je konvergentní.

# Kritéria neabsolutní konvergence

*Věta (Leibnizovo kritérium):* Nechť posloupnost $(a_n)$ je taková, že platí:

1. $\forall n \in \mathbb{N} : a_n \geq 0$;
2. $\forall n \in \mathbb{N} : a_n \geq a_{n+1}$;
3. $\lim a_n = 0$;

poté řada $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot a_n$ je konvergentní.

Označme si posloupnost sudých částečných součtů $s_n^* := s_{2n} = \sum_{k=1}^{2n} (-1)^{k+1} \cdot a_k$. Víme, že $s_{n+1}^* = s_{2n+2} = s_{2n} - a_{2n+1} + a_{2n+2} \geq s_n^*$, neboť $a_{2n+1} \geq a_{2n+2} \Rightarrow 0 \geq a_{2n+2} - a_{2n+1}$. Dále $s_n^* = s_{2n} = a_1 - a_2 + a_3 - \cdots + a_{2n-1} - a_{2n} = a_1 - (a_2 - a_3) - \cdots - (a_{2n-2} - a_{2n-1}) - a_{2n}$. Každá s postupných závorek je nezáporná, $a_{2n}$ je také nezáporné, tudíž $s_n^* \leq a_1$. Jedná se o neklesající, shora omezenou posloupnost, tudíž $\lim s_n^* = s \in \mathbb{R}$. Označme si posloupnost lichých částečných součtů $s_n^{**} = s_{2n+1} = \sum_{k=1}^{2n+1} (-1)^{k+1} \cdot a_k$. Víme, že $s_n^{**} = s_n^* + a_{2n+1}$ a $\lim s_n^{**} = \lim s_n^* + \lim a_{n2+1} = s + 0 = s \in \mathbb{R}$.■

- Řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$.
  Členy $a_n = \frac{1}{n}$ jsou nezáporné, nerostoucí a $\lim \frac{1}{n} = 0$. Jsou splněny předpoklady Leibnizova kritéria.
  Řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ je konvergentní.
- Řada $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{n+1}{n}$.
  Členy $a_n = \frac{n+1}{n}$ jsou nezáporné, nerostoucí, avšak $\lim \frac{n+1}{n} = 1$, tudíž nejsou splněny předpoklady Leibnizova kritéria. Neboť $\lim (-1)^{n+1} \cdot \frac{n+1}{n}$ neexistuje (posloupnost lichých a sudých členů má různou limitu), není splněna nutná podmínka konvergence.
  Řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ je divergentní.

*Věta (Abelovo-Dirichletovo kritérium):* Nechť posloupnost $(a_n)$ je monotónní. Platí-li jedna z následujících podmínek:

1. posloupnost $(a_n)$ je omezená a řada $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ je konvergentní. (Abelovo kritérium.)
2. $\lim a_n = 0$ a posloupnost částečných součtů řady $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ je omezená. (Dirichletovo kritérium.)

Poté řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot b_n$ je konvergentní.

- Řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$.
  Využijme Dirichletovo kritérium: $a_n = \frac{1}{n}$ (posloupnost je monotónní a $\lim \frac{1}{n} = 0$) a $b_n =$

$(-1)^n$ (posloupnost částečných součtů $-1 \leq \sum_{k=1}^{n}(-1)^k \leq 0$ je omezená).
Řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ je konvergentní.

- Řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 \cdot \sin n}{(n^2+1)\cdot 2^n}$.
  Využijeme Abelovo kritérium: $a_n = \frac{n^2}{n^2+1}$ (posloupnost je monotónní, kladná, shora omezená) a $b_n = \frac{\sin n}{2^n}$ (absolutní konvergenci ukažme srovnávacím kritériem: $\frac{|\sin n|}{2^n} \leq \frac{1}{2^n}, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1$).
  Řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 \cdot \sin n}{(n^2+1)\cdot 2^n}$ je konvergentní.

- Řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cdot \sin \frac{n \cdot \pi}{4}$.
  Využijme Dirichletovo kritérium; $a_n = \frac{1}{n}$ (posloupnost je monotónní a $\lim \frac{1}{n} = 0$) a $b_n = \sin \frac{n \cdot \pi}{4}$ (platí $0 \leq \sum_{k=1}^{n} \sin \frac{k \cdot \pi}{4} \leq 1 + \sqrt{2}$).
  Řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cdot \sin \frac{n \cdot \pi}{4}$ je konvergentní.

# Odhad zbytku řady

Mějme řadu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Řadu $a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k$ nazveme **zbytkem řady $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ po n-tém členu**. Pro konvergentní řady je užitečné odhadnout součet jejího zbytku. Platí, že $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = s_1 \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k = s_2 \in \mathbb{R}$.

Součet zbytku řady můžeme odhadnout pomocí několika metod:

- pomocí srovnávacího kritéria ($\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} b_k = s$);
- pomocí integrálního kritéria ($\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k \leq \int_n^{\infty} f(x)dx$);
- pomocí limitního d'Alambertova kritéria – nechť $q = \frac{a_{n+1}}{a_n}$, poté $r_n \leq |a_n| \cdot \frac{q}{1-q}$;
- pomocí Leibnizova kritéria ($\sum_{k=n+1}^{\infty} (-1)^{k+1} \cdot a_k \leq a_{2n+1}$; je-li $n$ sudé, $\sum_{k=n+1}^{\infty} (-1)^{k+1} \cdot a_k \geq 0$; je-li $n$ liché, $\sum_{k=n+1}^{\infty} (-1)^{k+1} \cdot a_k \leq 0$).
- Odhadněte součet $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!}$.
  Podle limitního d'Alambertova kritéria je řada absolutně konvergentní.
  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \sum_{n=5}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!}$ a využijeme srovnávací kritérium pro odhad zbytku řady $\sum_{n=5}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} \leq \sum_{n=5}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}} = \frac{1}{8}$.
  Tudíž $\frac{8}{3} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} \leq \frac{8}{3} + \frac{1}{8} \approx e$.

- Odhadněte součet $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.
  Podle integrálního kritéria je řada absolutně konvergentní. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{1} + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \sum_{n=5}^{\infty} \frac{1}{n^2}$. Využijeme integrální kritérium pro odhad zbytku řady: $0 \leq \sum_{n=5}^{\infty} \frac{1}{n^2} \leq \int_4^{\infty} \frac{1}{x^2} dx = \lim_{t \to \infty} \left[-\frac{1}{x}\right]_4^t = \lim_{t \to \infty} \left(-\frac{1}{t} + \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4}$.
  Tudíž $\frac{205}{144} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \leq \frac{205}{144} + \frac{1}{4}$.

- Odhadněte součet $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$.
  Podle Leibnizova kritéria je řada konvergentní. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} = \frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \sum_{n=5}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$. Využijeme Leibnizovo kritérium pro odhad zbytku řady: $0 \leq \sum_{n=5}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} \leq \frac{1}{9}$.
  Tudíž $\frac{76}{105} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} \leq \frac{76}{105} + \frac{1}{9}$.

## Přerovnávání řad

*Definice:* Mějme prosté zobrazení $\varphi$: $\mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}$. Řadu $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\varphi(n)}$ nazveme **přerovnáním řady** $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

*Věta (komutativita přerovnání řady):* Konverguje-li $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolutně, konverguje absolutně i řada přerovnaná a má stejný součet. Konverguje-li $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ neabsolutně, přerovnaná řada má libovolný součet či přerovnaná řada byla divergentní.

# Vektorové funkce

## Motivační příklady

- Mějme hmotný bod v gravitačním poli ($g = 10ms^{-2}$). Pohybujeme se pod úhlem $\varphi = \frac{\pi}{4}$. Známe $v_0, t_0, (x, y)$ a hledáme $v, t, (x, y)$. Tento příklad můžeme řešit funkcí $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : f(t, v) = \left[\frac{\sqrt{2}}{2}vt, \frac{\sqrt{2}}{2}vt - 10t^2\right]^T$. Pokud $c = [t_0, v_0]$, hledáme $c + h = [t, v]$. Víme, že $f(c+h) \approx f(c) + df_c(h) = \left[\frac{\sqrt{2}}{2}v_0t_0, \frac{\sqrt{2}}{2}v_0t_0 - 5t_0^2\right]^T + \left[{f_1}'_t\left(t_0, v_0\right)h_1 + {f_1}'_v\left(t_0, v_0\right)h_1, {f_2}'_t\left(t_0, v_0\right)h_2 + {f_2}'_v\left(t_0, v_0\right)h_2\right]^T = \left[\frac{\sqrt{2}}{2}v_0t_0, \frac{\sqrt{2}}{2}v_0t_0 - 5t_0^2\right]^T + \begin{bmatrix} {f_1}'_t & {f_1}'_v \\ {f_2}'_t & {f_2}'_v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix}$.

## Základní pojmy

- Symbolem $\mathbb{R}^n$ rozumíme metrický a vektorový prostor. Prvky $\mathbb{R}^n$ jsou uspořádané $n$-tice reálných čísel $x = [x_1, \ldots, x_n]$, **euklidovská metrika** $\rho(x, y) :=$

$\sqrt{(x_1-y_1)^2+\ldots+(x_n-y_n)^2}$

- Zavádíme **normu** prvku $x$:$\|x\| = \rho(x, 0) = \sqrt{x_1^2+\ldots x_n^2}$. Víme, že $\rho(x, y) = \|x-y\|$. Zavádíme **okolí bodu $\mathbf{x}$ o poloměru** $\varepsilon$: $U(x, \varepsilon) \coloneqq \{y \in \mathbb{R}^n : \rho(x, y) < \varepsilon\}$ a **prstencové okolí bodu $\mathbf{x}$ o poloměru** $\varepsilon$: $P(x, \varepsilon) = U(x, \varepsilon) \setminus \{x\}$.

- Pro **limitu $\mathbf{n}$-rozměrné posloupnosti** $a_k$ platí $\lim a_k = \lim [a_{k_1}, a_{k_2}, \ldots, a_{k_n}] = [a_1, a_2, \ldots, a_n] = a \in \mathbb{R}^n \Leftrightarrow \lim \rho(a_k, a) = 0 \Leftrightarrow \|a_k - a\| = 0 \Leftrightarrow \forall i \in \{1, \ldots, n\} : \lim a_{k_i} = a_i$.

*Definice:* **Vektorovou funkcí** z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}^m$ (reálnou $m$-rozměrnou funkcí $n$ reálných proměnných) nazýváme každé zobrazení $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, tzn. každému $x = [x_1, \ldots, x_n] \in D_f \subset \mathbb{R}^n$ přiřadí právě jednu hodnotu $f(x) = [f_1(x), \ldots, f_m(x)] \in H_f \subset \mathbb{R}^m$. Množinu $D_f$ nazýváme **definiční obor funkce** $f$, množinu $H_f$ nazýváme **oborem hodnot funkce** $f$ a $f_1, .., f_m$ nazýváme **složky vektorové funkce** $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$.

- Pokud $m = n$, nazýváme funkci $f$ **vektorovým polem**. Je-li $m = 1$, nazýváme funkce $f$ **skalárním polem**.

*Úmluva:* Je-li $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ dána pouze svým předpisem, chápeme $D_f$ jako množinu všech $x \in \mathbb{R}^n$, pro které má předpis smysl.

- Nechť $f = [f_1, \ldots, f_n] : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Poté $D_f = \bigcap_{i=1}^m D_{f_i}$.

- Určete $D_f$ pro $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 : f(x, y) = \left[\sqrt{x+y}, x^2+1, x \cdot \sqrt{y}\right]$.
  Víme, že $D_f = \left\{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : x + y \geq 0\right\} \cap \mathbb{R}^2 \cap \left\{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0\right\} = \left\{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : y \geq -x \wedge y \geq 0\right\}$.

*Definice:* Mějme $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ a $c \in \mathbb{R}$. Funkce $f+g, f-g, c \cdot f$ definujeme takto:

- $(f+g)(x) \coloneqq f(x) + g(x)$;
- $(f-g)(x) \coloneqq f(x) - g(x)$;
- $(c \cdot f)(x) \coloneqq c \cdot f(x)$.

# Limita a spojitost vektorové funkce

## Limita vektorové funkce

Mějme $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$,$x_0 \in \mathbb{R}^n$, $a \in \mathbb{R}^*$. Poté platí $x_0 \neq x_n \to x_0 \Rightarrow f(x_n) \to a \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) = a$.

*Definice:* Řekneme, že funkce $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ **má v bodě $\mathbf{x_0} \in \mathbb{R}^\mathbf{n}$ limitu** $a \in \mathbb{R}^m$ (píšeme $\lim_{x\to x_0} f(x) = a$), platí-li:

$$x_0 \neq x_k \to x_0 \Rightarrow [f_1(x_k), \ldots, f_m(x_k)] \to a = [a_1, \ldots, a_m]$$

- $\lim_{x\to x_0} f(x) = a \Rightarrow \exists P(x_0) \subset D_f$.

*Věta:* Nechť $f(x) = [f_1(x), \ldots f_n(x)] : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, x_0 \in \mathbb{R}^n, a \in \mathbb{R}^m$. Poté $\lim_{x\to x_0} f(x) = a \Leftrightarrow \forall i \in \{1, \ldots, n\} : \lim_{x\to x_0} f_i(x) = a_i$.

### Spojitost vektorové funkce

Mějme $f:\mathbb{R}^n\to \mathbb{R}$,$x_0 \in \mathbb{R}^n$. Funkce je spojitá v bodě $x_0$ právě tehdy, když $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

*Definice:* Řekneme, že funkce $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ je **spojitá v bodě $\mathbf{x_0} \in \mathbb{R}^\mathbf{n}$**, platí-li:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$$

- Ze spojitosti $f$ v bodě $x_0$ plyne, že $\exists U(x_0) \subset D_f$.

Řekneme, že funkce $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ je **spojitá v bodě $\mathbf{x_0} \in \mathbb{R}^\mathbf{n}$ vzhledem k $\mathbf{M} \subset\mathbb{R}^\mathbf{n}$**, platí-li:

$$\forall i\in \mathbb{N} : x_{k i} \in M : x_0 \neq x_k \to x_0 \Rightarrow f(x_k) \to f(x_0)$$

Řekneme, že funkce $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ je **spojitá na množině $\mathbf{M} \subset\mathbb{R}^\mathbf{n}$**, platí-li, že pro všechna $x_0 \in M$ je $f$ spojitá v bodě $x_0$ vzhledem k množině $M$.

Řekneme, že funkce $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ je **spojitá**, platí-li, že je spojitá na množině $D_f$.

*Věta:* Nechť $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, x_0 \in M \subset \mathbb{R}^n$. Poté $f$ je spojitá v $x_0$ (spojitá v $x_0$ vzhledem k $M$, spojitá na $M$, spojitá) právě tehdy, platí-li:

$\forall i \in \{1, .., m\} : f_i$ je spojitá v $x_0$ (spojitá v $x_0$ vzhledem k $M$, spojitá na $M$, spojitá).

## Diferenciál vektorové funkce

Pro $f:\mathbb{R}^n\to \mathbb{R}$ platí $f(c+h) = f(x) + df(c) + \omega(h), \lim_{\|h\|\to 0} \frac{\omega(h)}{\|h\|} = 0$. Pro diferenciál vektorové funkce v bodě $c$ platí $df_c(h) = f'(c)h = \begin{bmatrix} f'_{1_{x_1}}(c) & \cdots & f'_{1_{x_n}}(c) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f'_{m_{x_1}}(c) & \cdots & f'_{m_{x_n}}(c) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{bmatrix} = [df_1(c), \ldots, df_m(c)]^T$.

# Závěrečné informace

Veškeré materiály v tomto dokumentu jsou osobními poznámkami autora, vytvořenými na základě univerzitních přednášek. Jsou poskytovány bez záruky a slouží výhradně ke studijním účelům.

Datum aktualizace originálu: **29. 6. 2025 v 15:44:48**

Datum vygenerování PDF: **2. 7. 2025 v 21:51:14**