Statistika I / Statistika A

Obsah

- Exploračnı́ analýza dat
- Teorie pravděpodobnosti
- Náhodná veličina
  - Číselné charakteristiky náhodné veličiny
- Náhodný vektor
  - Charakteristiky náhodného vektoru
- Diskrétní rozdělení pravděpodobnosti
  - Hypergeometrická náhodná veličina
  - Binomická náhodná veličina
  - Geometrická náhodná veličina
  - Negativně binomická náhodná veličina
  - Poissonovo rozdělení pravděpodobnosti
- Spojitá rozdělení pravděpodobnosti
  - Rovnoměrné rozložení
  - Exponenciální rozdělení
  - Erlangovo rozdělení
  - Weibullovo rozdělení
  - Normální rozdělení
    - Normované normální rozdělení
  - χ^2 rozdělení
  - Studentovo rozdělení
  - Fisherovo-Snedecorovo rozdělení
- Limitní věty
  - Centrální limitní věta
- Náhodné výběry a jejich zpracování
  - Teorie odhadu
    - Intervalový odhad
  - Testování hypotéz
  - ANOVA Analýza rozptylu
- Regresní analýza
  - Obecný lineární model

- Lineární regrese s jednou vysvětlující proměnnou

Vytvořeno na základě materiálů prof. Ing. Radima Briše, CSc. pro předmět **AM2401 Statistika I**. Učivo rozšířeno z materiálů RNDr. Anny Madryové, Ph.D. pro předmět **MM0403 Statistika A** v kombinované formě.

Explorační analýza dat

Data představují výsledky **datově generačního procesu** – z množiny měřených objektů (domain) vybíráme proměnné měřených veličin. Množina měřených hodnot musí být vyčerpávající a vzájemně vylučující. Data vybírám z několika charakteristických typů:

- **Kvalitativní proměnná** – nabývá z předem daných hodnot, dělíme na **nominální** (má smysl hodnotu dané kategorie pojmenovat, k popisu slouží **četnost** proměnné) a **ordinální** (má smysl pořadí hodnoty dané kategorie). Dále se dělí na **alternativní** (vlastnosti, atributy, nabývají jedné ze dvou hodnot) nebo **množné**.
- **Kvantitativní proměnná** – nabývá hodnoty z množiny $\mathbb{R}$. Mohou být **diskrétní** (nabývají diskrétních hodnot v **konečné**m počtu nebo **spočtené**m počtu) nebo **spojité**.

Nominální kvalitativní proměnná nabývají absolutní četnosti n_i, přičemž platí $\sum n_i = n$. Relativní četnost $p_i = \frac{n_i}{n}$, přičemž $\sum p_i = 1$. Definujeme **modus** jako název varianty proměnné vykazující nejvyšší četnost. **Histogram** je klasickým grafem, v němž na jednu osu vynášíme varianty a na druhou jejich četnost. **Výsečový graf** prezentuje relativní četnosti jednotlivých variant pomocí plochami kruhových výsečí.

Ordinální kvalitativní proměnná využívá pro popis stejné charakteristiky jako pro popis nominální proměnné. **Kumulativní četnost** m_i definujeme jako počet hodnot proměnné, které nabývají varianty nižší nebo rovné dané variantě. Pokud $x_1 < \ldots < x_n$, platí $m_i = \sum_{j=1}^{i} n_j$. **Kumulativní relativní četnost** $F_i = \frac{m_i}{n}$. **Polygon kumulativních četností** je spojnicovým grafem, v němž se na vodorovnou osu vynáší jednotlivé varianty v pořadí od „nejmenší“ do „největší“ a na svislou osu nanášíme kumulativní četnosti. **Paretův graf** je často užívaným grafem spojením histogramu a polygonu kumulativních četností, v němž na vodorovnou osu vynášíme v pořadí od „největšího významu“ po „nejmenší význam“.

Kvantitativní proměnné využívá stejné charakteristiky jako pro popis ordinální proměnné. Definujeme *míry polohy* určující typické rozložení hodnot proměnné a *míry variability* určující variabilitu hodnot kolem své typické polohy. **Aritmetický průměr** je mírou polohy $\overline{x} = \frac{\sum x_i}{n}$. **Modus pro diskrétní proměnnou** jako hodnotu nejčastější varianty proměnné. **Modus pro spojité proměnné** považujeme za modus hodnotu, kolem níž je největší koncentrace hodnot proměnné. Pro určení hodnoty využijeme **shorth**, což je nejkratší interval, v němž leží alespoň 50 % hodnot proměnné. Modus $\widehat{x}$ definujeme jako střed shorthu.

Kvantily x_p jsou statistiky, které charakterizují polohu jednotlivých hodnot v rámci proměnné. Rozdělují datový soubor na dvě části - $100p$% a zbytek

- **Dolní kvartil** $x_{0.25}$ rozděluje datový soubor tak, že 25 % hodnot je menších než tento kvartil a zbytek, tj. 75 % větších nebo rovných.
- **Medián** $x_{0.5}$ rozděluje datový soubor tak, že 50 % hodnot je menších než medián a zbytek, tj. 50 % větších nebo rovných.

- **Horní kvartil** $x_{0.75}$ rozděluje datový soubor tak, že 75 % hodnot je menších než tento kvartil a zbytek, tj. 25 % větších nebo rovných.
- **Decily** rozdělují výběrový soubor na 10 stejně četných částí.
- **Percentily** dělí výběrový soubor na 100 stejně četných částí.

Lze říci, že hodnota p udává kumulativní relativní četnost kvantilu x_p. Kvantil a kumulativní relativní četnost jsou tedy inverzní hodnoty.

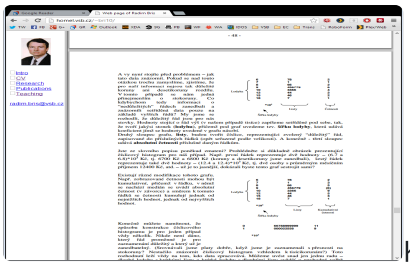
Empirická distribuční funkce $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ pro kvantitativní proměnnou – označme si $p(x_i)$ relativní četnost hodnoty x_i. Poté platí, že $F(x) = \sum p(x_i)$. **Interkvalitové rozpětí IQR** je mírou variability souboru a je definována jako vzdálenost mezi horním a dolním kvartilem $IQR = x_{0.75} - x_{0.25}$. **Median Absolute Deviation from median** (MAD) jakožto charakteristikou rozptýlenosti.

1. Výběrový soubor uspořádáme podle velikosti.
2. Určíme medián souboru $x_{0.5}$.
3. Pro každou hodnotu souboru určíme absolutní hodnotu její odchylky od mediánu $|y_i - x_{0.5}|$.
4. Absolutní odchylky od mediánu uspořádáme podle velikosti.
5. Určíme medián absolutních odchylek od mediánu, tj. MAD.

Mezi charakteristiky rozptýlenosti patří dále **výběrový rozptyl** $s^2 = \frac{\sum (x_i - \overline{x})^2}{n-1}$ a **směrodatná odchylka** $s = \sqrt{s^2}$. Odlehlou hodnotou **outlier** nazýváme hodnotu, která svou charakteristikou nepatří do datového souboru. Existují tři detekce outlier hodnot:

1. Za odlehlé pozorování lze považovat takovou hodnotu, jejíž absolutní hodnota **z-souřadnice** je větší než 3: $z_i = \frac{x_i - \overline{x}}{s}$. Z-souřadnici můžeme interpretovat jako počet směrodatných odchylek, o kolik se hodnota liší od průměru.
2. Za odlehlé pozorování lze považovat takovou hodnotu, jejíž absolutní hodnota **mediánové souřadnice** je větší než 3: $m_i = \frac{x_i - x_{0.5}}{1.483 \cdot MAD}$. Mediánová metoda je vhodnější než z-souřadnice díky menší závislosti na okrajových hodnotách.

Definujme čísla se specifickým významem: **k-tý obecný výběrový moment** definujeme jako $m'_k = \frac{1}{n} \sum (x_i)^k, m'_0 = 1, m'_1 = \overline{x}$ a **k-tý centrální výběrový moment** definujeme jako $m_k = \frac{1}{n} \sum (x_i - \overline{x})^k, m_0 = 1, m_1 = 0, m_2 = s_0^2 = \frac{1}{n} \sum (x_i - \overline{x})^2$. **Výběrová šikmost** vyjadřuje asymetrii rozložení hodnot kolem jejího průměru $\alpha = \frac{m_3}{s_0^3} = \frac{1}{n \cdot s^3} \cdot \sum (x_i - \overline{x})^3$. Interpretujme: pokud $\alpha = 0$, tak jsou hodnoty proměnné kolem jejího průměru rozloženy symetricky; pokud $\alpha > 0$, tak u proměnné převažují hodnoty menší než průměr a pokud $\alpha < 0$, tak u proměnné převažují hodnoty větší než průměr. **Výběrová špičatost** $\beta = \frac{m_4}{s_0^4} - 3 = \frac{1}{n} \cdot \frac{\sum (x_i - \overline{x})^4}{s^4} - 3$ vyjadřuje podobnost rozdělení k normálnímu rozdělení. Interpretujme: pokud $\beta = 0$, tak špičatost odpovídá normálnímu rozdělení; pokud $\beta > 0$, tak je proměnná rozdělena špičatě a pokud $\beta < 0$, tak je proměnná rozdělena plošně.



Kvalitativní proměnné vizualizujeme pomocí **box-and-whiskers** grafu, který reprezentuje minimum, dolní kvartil, medián, horní kvartil a maximum. Často se využívá s **histogramem četnosti** dělící datový soubor na třídy stejné délky a různé četnosti. **Číslicový histogram** (**steam and leaf plot**) dělí datový soubor na třídy stejné délky, v rámci každé třídy na lodyze máme listy určující jednotlivé položky v dané třídě.

Teorie pravděpodobnosti

Pokus je konečný děj, který probíhá při určitém souboru fyzikálních podmínek. **Náhodný pokus** je takový pokus, jehož výsledek je náhodný při konstantních podmínkách. **Hromadný pokus** je pokus, který můžeme libovolněkrát opakovat při konstantních podmínkách. Výsledky pokusů musí být neslučitelné (k dvěma různým výsledkům nemůže dojít současně) a vyčerpávající (k nějakému výsledku dojít musí) – množinu všech výsledků nazýváme $\Omega \neq \varnothing$ **základní prostor**. Jednoprvkové podmnožiny $\omega \subset \Omega$ nazýváme **elementární jev**. Libovolné podmnožiny $A \subset \Omega$ nazýváme **jevy**. **Jev nemožný** $\varnothing$ nemůže nastat za žádných okolností. **Jev jistý** Ω nastane při každé realizaci náhodného pokusu.

Jevové pole $\mathcal{S}$ je systém podmnožin, pro který platí $A \in \mathcal{S} \Rightarrow \overline{A} \in \mathcal{S}$ (systém je uzavřený vůči svým doplňkům) a $(A_1, \ldots), A_i \in \mathcal{S} \Rightarrow \bigcup A_i \in \mathcal{S}$. Elementy jevového pole nazýváme **náhodnými** jevy. Uspořádaná trojice $(\Omega, \mathcal{S}, P)$ tvoří **pravděpodobnostní prostor** náhodného pokus, kde **pravděpodobnostní funkce** $\mathbf{P}$: $\mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}$ splňuje $A \in \mathcal{S} : P(A) \geq 0$, $P(\Omega) = 0$ a $(A_1, ..), A_i \in \mathcal{S}, A_i \cap A_j = \varnothing : P\left(\bigcup A_i\right) = \sum P\left(A_i\right)$ (tzv. sigmaaditivita).

- $A, B \in \mathcal{S}, A \subset B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$
- $P\left(\overline{A}\right) = 1 - P(A)$
- $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Podmíněná pravděpodobnost značí vztah $P\left(A|B\right) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, P(B) \neq 0$. Jevy jsou **nezávislé**, pokud $P\left(A|B\right) = P(A)$ nebo $P(B) = 0$. Pro nezávislé jevy platí $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$. Jevy $A_1, \ldots, A_n$ jsou **stochasticky nezávislé** právě tehdy, když $P\left(\bigcap A_i\right) = \prod P\left(A_i\right)$.

Pro úplnou skupinu disjunktních jevů $B_1, .., B_n, B_i \cup B_j = \varnothing$ vyslovme **Total Probability Theorem**: $A \in \mathcal{S}, P(A) = \sum P\left(A|B_i\right) \cdot P\left(B_i\right) = \sum P\left(A \cap B_i\right)$ a **Bayes Theorem:** $P\left(B_k|A\right) = \frac{P(A|B_k) \cdot P(B_k)}{\sum P(A|B_i) \cdot P(B_i)}$.

Náhodná veličina

Mějme pravděpodobnostní prostor (Ω, S, P). **Náhodná veličina** X je reálná funkce prvků $\omega \in \Omega$ ze základního prostoru taková, že pro každé reálné $x \in \mathbb{R}$ je množina $\{\omega \in \Omega | X(\omega < x)\} \in S$, tj. náhodným jevem. Náhodná veličina je zobrazením $X : \Omega \to \mathbb{R}$ takové, že pro každé $x \in R$ platí $X\left((-\infty, x)\right) = \{\omega \in \Omega | X(\omega < x)\} \in S$. Množina $\{x = X(\omega), \omega \in \Omega\}$ se nazývá **základní soubor**.

Nechť X je náhodná veličina. Reálnou funkci $F(t)$ definovanou pro všechna reálná $t \in \mathbb{R}$ vztahem

$$F(t) = P\left\{X \in (-\infty, t)\right\} = P(X < t)$$

Nazveme **distribuční funkcí** náhodné veličiny X. Jedná se tedy o funkci, která každému reálnému číslu přiřazuje pravděpodobnost, že náhodná veličina nabude hodnoty menší než toto reálné číslo.

1. Distribuční funkce je nezáporné číslo menší nebo rovno jedné.

$$0 \leq F(x) \leq 1$$

2. Distribuční funkce je neklesající.

$$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R} : x_1 < x_2 \Rightarrow F\left(x_1\right) \leq F\left(x_2\right)$$

3. Distribuční funkce je zleva spojitá.

4. $\lim_{x \to \infty} F(x) = 1, \lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$

5. $\forall a, b \in \mathbb{R}, a < b : P(a \leq X < b) = F(b) - F(a)$

6. $P\left(x = x_0\right) = \lim_{x \to x_0^+} F(x) - F\left(x_0\right)$

Pro **diskrétní náhodnou veličinu** platí, že existuje konečná nebo spočetná množina reálných čísel $M = \{x_1, \ldots, x_n, \ldots\}$ takových, že $P\left(X = x_i\right) > 0, i = 1, \ldots, n, \ldots$ a $\sum P\left(X = x_i\right) = 1$. Funkce $P\left(x_i\right) = P(X = x_i)$ se nazývá **pravděpodobnostní funkcí** náhodné veličiny X. Distribuční funkce je schodovitá a platí pro ni $F(x) = \sum_{x_i < x} P(X = x_i)$.

Pro **spojitou náhodnou veličinu** platí, že distribuční funkce má tvar $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$, kde $f(x)$ je nezáporná funkce zvaná **hustota pravděpodobnosti**, pro kterou platí, že $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$. Ve všech bodech, kde existuje derivace distribuční funkce platí $f(x) = \frac{dF(x)}{dx}$. Platí, že

1. $P(X < a) = F(a) = \int_{-\infty}^{a} f(x)dx$
2. $P(X \geq a) = 1 - F(a) = \int_{a}^{\infty} f(x)dx$
3. $P(a \leq X < b) = F(b) - F(a) = \int_{a}^{b} f(x)dx$
4. $P(X = x) = 0$

Dvě náhodné veličiny X, Y jsou **nezávislé**, pokud pro náhodný vektor (viz Náhodný vektor) $A = (X, Y)$ platí $F(x, y) = F_x(x) \cdot F_y(y)$.

Číselné charakteristiky náhodné veličiny

Obecný moment r-tého řádu $\mu_r' = EX^r = \int_{-\infty}^{\infty} x^r f(x)dx$.

Centrální moment r-tého řádu $\mu_r = E(X - EX)^r = \int_{-\infty}^{\infty} (x - EX)^r f(x)dx$.

Střední hodnota $EX = \mu = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$

- $E(aX + b) = aEX + b$
- $E\left(X_1 + X_2\right) = EX_1 + EX_2$
- $E\left(X_1 X_2\right) = E\left(X_1\right) E(X_2)$ pro nezávislé náhodné veličiny
- $Y = g(X) \Rightarrow EY = E\left(g(X)\right) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f(x)dx$

Rozptyl $DX = \mu_2 = E(X - EX)^2 = EX^2 - (EX)^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx - \left(\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx\right)^2$.

- $D(aX + b) = a^2 DX$
- $D\left(X_1 + X_2\right) = DX_1 + DX_2$ pro nezávislé náhodné veličiny

Směrodatná odchylka $\sigma_x = \sqrt{DX}$

Šikmost (*skewness*) – mírou symetrie daného rozdělení $a_3 = \frac{\mu_3}{\sigma_x^3}$ ($a_3 = 0$ symetrický soubor, $a_3 < 0$ negativně zešikmený soubor, $a_3 > 0$ pozitivně zešikmený soubor).

Špičatost (*kurtosis*) – míra plochosti/špičatosti $a_4 = \frac{\mu_4}{\sigma_x^4}$ ($a_4 < 3$ plošší, $a_4 > 3$ špičatější).

Kvantily jsou definovány jako v Explorační analýza dat $F\left(x_p\right) = p$.

Modus $\widehat{x}$ je pro diskrétní NV hodnota $P\left(X = \widehat{x}\right) \geq P\left(X = x_i\right)$, pro spojitou NV $f\left(\widehat{x}\right) \geq f(x)$.

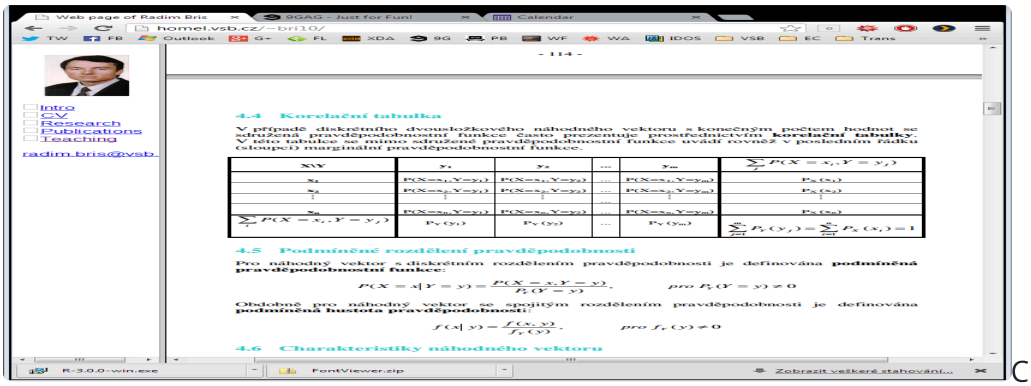
Náhodný vektor

Náhodným vektorem rozumíme sloupcový vektor složený z náhodných veličin $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$.
Sdružená distribuční funkce náhodných veličin $F\left(x_1, .., x_2\right) = P\left(X_1 < x_1, \ldots, X_n < x_n\right)$.

- $\lim_{\mathbf{x} \to -\infty} F(\mathbf{x}) = 0$
- $\lim_{\mathbf{x} \to \infty} F(\mathbf{x}) = 1$
- Funkce je neklesající a zleva spojitá v každé proměnné
- $P\left(a_1 \leq X_1 < b_1, a_2 \leq Y < b_2\right) = F\left(b_1, b_2\right) - F\left(b_1, a_2\right) - F\left(a_1, b_2\right) + F(a_1, a_2)$

V případě **náhodného vektoru s diskrétním rozdělením** definujeme sdruženou distribuční funkci jako $F\left(x_1, \ldots, x_n\right) = \sum_{x_{1i} < x_1, \ldots, x_{ni} < x_n} P(X_1 = x_{1i}, \ldots, X_n = x_{ni})$, kde $P(x_{1i}, \ldots, x_{ni})$ je **sdružená**

pravděpodobnostní funkce. V případě **náhodného vektoru se spojitým rozdělením** platí běžné definice rozložené do více dimenzí.



Chceme-li určit distribuční funkci veličiny X z dvousložkového vektoru, mluvíme o **marginální distribuční funkci** $F_x(x) = P(X < x) = \lim_{y\to\infty} F(x, y)$, $F_y(Y) = P(Y < y) = \lim_{x\to\infty} F(x, y)$.

Chceme-li určit hustotu pravděpodobnosti veličiny X z dvousložkového vektoru, mluvíme o **marginální hustotě pravděpodobnosti** $f_x(x) = \int_{y\to\infty} F(x, y)$, $f_y(y) = \int_{x\to\infty} F(x, y)$.

Složky X, Y dvousložkového náhodného vektoru jsou navzájem nezávislé právě tehdy, jsou-li nezávislé náhodné veličiny X, Y. Platí tedy, že $F(x, y) = F_x(x)F_y(y)$. Z těchto údajů můžeme vytvořit korelační tabulku.

Pro náhodný vektor je definována **podmíněná pravděpodobnostní funkce** $f\,(x|y) = \frac{f(x,y)}{f_y(y)}$.

Charakteristiky náhodného vektoru

Smíšený obecný moment řádu k, n: $\mu'_{kn} = E(X^k Y^n)$.

Smíšený centrální moment řádu k, n: $\mu_{kn} = E\left[(X - EX)^k (Y - EY)^n\right]$

Kovariance je nejjednodušším ukazatelem souvislosti dvou náhodných veličin $Cov(X, Y) = \mu_{11} = E\left[(X - EX)(Y - EY)\right]$. Kladná hodnota kovariance znamená, že se zvětšením hodnoty X se pravděpodobně zvýší i hodnota Y, oproti tomu záporná hodnota kovariance znamená, že se zvětšením hodnoty X se pravděpodobně sníží hodnota Y. Často definujeme kovarianční matici $\begin{bmatrix} DX & Cov(X,Y) \\ Cov(X,Y) & DY \end{bmatrix}$.

Jednoduchý korelační koeficient je mírou lineární závislosti dvou náhodných veličin definovaný jako $\rho_{x,y} = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{DX \cdot DY}}$. Mohou být nekorelované, pozitivně korelované a negativně korelované.

Diskrétní rozdělení pravděpodobnosti

Definujme **Bernoulliho pokusy** posloupnost nezávislých pokusů majících pouze 2 možné výsledky a pravděpodobnost výskytu události p je konstantní v každém pokuse.

Poissonův proces popisuje výskyt náhodných událostí na nějakém pevném časovém intervalu – speciální případ bodového procesu. Každý proces musí dodržet následující předpoklady – rychlost výskytu událostí je konstantní v průběhu celého intervalu a jednotlivé události musí být nezávislé.

Hypergeometrická náhodná veličina

Předpokládejme, že v souboru N prvků M prvků s danou vlastností a zbylých ($N - M$) prvků tuto vlastnost nemá. Postupně vybereme ze souboru n prvků, z nichž žádný nevracíme zpět. Definujme náhodnou veličinu X jako počet se sledovanou vlastností ve výběru n prvků, pak tato veličina má hypergeometrické rozdělení s parametry N, M, n, což značíme $X \to H(N; M; n)$.

$$P(X = k) = \frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

Hypergeometrické rozdělení využijeme při statistické kontrole jakosti, když zkoumáme jakost malého počtu výrobků nebo když kontrola má ráz destrukční zkoušky.

Binomická náhodná veličina

Binomická náhodná veličina X je definována jako počet výskytu události v n Bernoulliho pokusech. Pro rozložení veličiny $X \to Bi(n, p)$ musíme znát počet pokusů n a pravděpodobnost výskytu události p.

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

Je-li výběrový poměr $\frac{n}{N}$ v hypergeometrickém rozdělení menší než 0,05, lze hypergeometrické rozdělení nahradit binomickým $H(N; M; n) \to Bi(n; \frac{M}{N})$.

Variantou binomické veličiny pro $n = 1$ je **alternativní náhodná veličina**. Pokud $X \to A(p)$, poté $P(X = 1) = p$, $P(X = 0) = 1 - p$.

Geometrická náhodná veličina

Geometrická náhodná veličina X je definovaná jako počet Bernoulliho pokusů do prvního výskytu události, **včetně něj**. Značíme $X \to G(p)$, kde p je pravděpodobnost výskytu události.

$$P(X = n) = p(1-p)^{n-1}$$

Negativně binomická náhodná veličina

Negativně binomická náhodná veličina X je definována jako počet Bernoulliho pokus; do k-tého výskytu události, včetně k-tého výskytu. Geometrická náhodná veličina je speciálním případem negativně binomické náhodné veličiny pro $k = 1$. Značíme $X \to NB(k, p)$, kde k je požadovaný počet výskytů událostí a p je pravděpodobnost výskytu události.

$$P(X = n) = \binom{n-1}{k-1} p^k (1-p)^{n-k}$$

Poissonovo rozdělení pravděpodobnosti

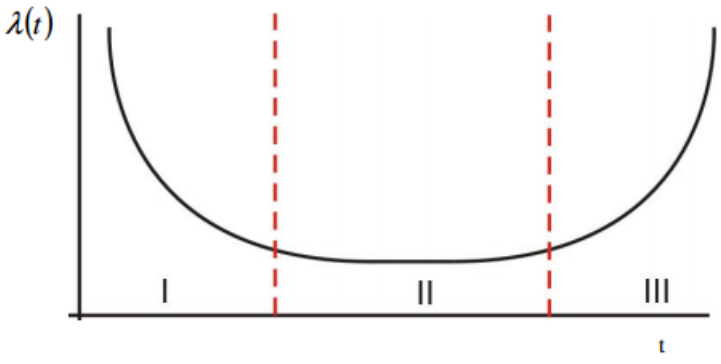
Definujme si náhodný pokus jako Poissonův proces probíhající v čase t s rychlostí výskytu λ. Pokud veličina X značí počet výskytu události v časovém intervalu t poté $X \to Po(\lambda t)$.

$$P(X = k) = \frac{(\lambda t)^k e^{-\lambda t}}{k!}$$

Je-li počet pokusů $n \to \infty$ a pravděpodobnost výskytu události $p \to 0$, poté můžeme binomické rozdělení aproximovat Poissonovým rozdělením $Bi(n, p) \sim Po(\lambda), \lambda = np$. Dobrou aproximaci splňují podmínky $n > 30$ a $p < 0.3$.

Spojitá rozdělení pravděpodobnosti

Pro nezápornou náhodnou veličinu X se spojitým rozdělením definujeme pro $F(t) \neq 1$ **intenzitu poruch** $\lambda(t) = \frac{f(t)}{1-F(t)}$. Představuje-li náhodná veličina X dobu do poruchy nějakého zařízení, pak intenzita poruch vyjadřuje, že pokud do času t nedošlo k žádné poruše, tak pravděpodobnost, že k ní dojde v následujícím okamžiku malé délky dt, je přibližně $\lambda(t) \cdot dt$.



Křivka na obrázku se nazývá **vanová křivka** a obvykle se dělí na tři úseky.

1. V prvním úseku křivka poruch klesá. Odpovídající časový interval se nazývá **období časných poruch**. Příčinou zvětšené intenzity poruch v tomto období jsou poruchy v důsledku výrobních vad, nesprávné

montáže, chyb při návrhu nebo při výrobě.

2. Ve druhém úseku dochází k běžnému využívání zaběhnutého výrobku, k poruchám dochází většinou z vnějších příčin, nedochází k opotřebení, které by změnilo funkční vlastnosti výrobku. Např. exponenciální rozdělení.

3. Ve třetím úseku procesy stárnutí a opotřebení mění funkční vlastnosti výrobku, projevují se nastřádané otřesy, trhliny a intenzita poruch vzrůstá. Např. Erlangovo rozdělení.

Rovnoměrné rozložení

Rozložení s hustotou pravděpodobností je konstantní na intervalu $\langle a, b \rangle$. Náhodnou veličinu s tímto rozdělením značíme $X \to R(a, b)$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & x \in \langle a, b \rangle \\ 0 & jinde \end{cases}$$

Exponenciální rozdělení

Mějme Poissonův proces, tj. v určitém časovém intervalu se s konstantní rychlostí výskytu λ objevují události, které jsou na sobě nezávislé. Poté exponenciální rozdělení značí dobu do výskytu první události. Náhodnou veličinu X s exponenciálním rozdělením značíme $X \to E(\lambda)$, kde λ je parametrem Poissonova procesu.

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$$

Exponenciální rozdělení bývá někdy nazýváno **rozdělení bez paměti** $P\left(X > (t_1 + t_2) | X > t_1\right) = P(X > t_2)$. Toto rozdělení dobře popisuje dobu života zařízení, u kterých dochází k poruše ze zcela náhodných příčin.

Exponenciální rozdělení je využito v teorii hromadné obsluhy nebo v teorii spolehlivosti.

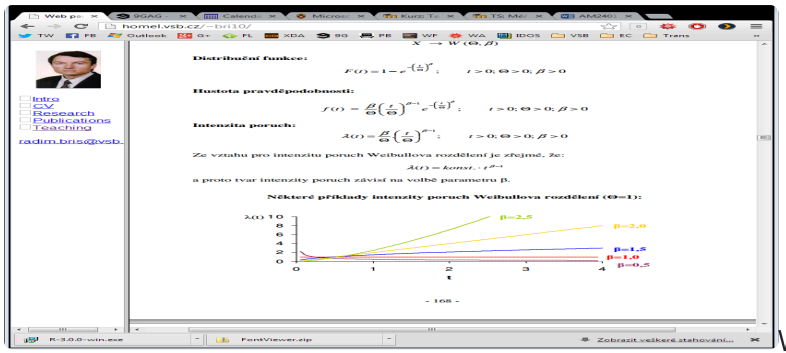
Erlangovo rozdělení

Určitým zobecněním exponenciální náhodné veličiny je veličina s Erlangovým rozdělením, která popisuje dobu do výskytu k-té události v Poissonově procesu. Erlangovo rozdělení je speciálním typem tzv. Gamma rozdělení pro k z množiny celých čísel. Značíme $X_k \to Erlang(k, \lambda)$, kde k je počet událostí (parametr tvaru) a λ je rychlost výskytu těchto událostí.

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t} \cdot \frac{(\lambda t)^{k-1}}{(k-1)!}$$

Intenzita poruch je v případě Erlangova rozdělení rostoucí funkce a proto je toto rozdělení vhodné pro modelování procesů stárnutí.

Weibullovo rozdělení



Weibullovo rozdělení je velmi flexibilní a proto se jím popisují veličiny jako doba do poruchy. Používá se při popisu komponent v období raných poruch nebo v období stárnutí. Weibullovo rozdělení má dva parametry Θ – parametr měřítka, scale, závisí na materiálu, namáhání a podmínkách užívání – a β – parametr tvaru, shape, na jeho hodnotě závisí tvar intenzity poruch a tím i vhodnost použití pro určité období doby života. Veličinu značíme $X \to W(\Theta, \beta)$.

$$F(t) = 1 - e^{-\left(\frac{t}{\Theta}\right)^{\beta}}$$

Pro intenzitu poruch platí $\lambda(t) = konst. \cdot t^{\beta-1}$, tudíž tvar intenzity poruch závisí na volbě parametru β.

$0 < \beta < 1$	**období dětských nemocí**	**klesající funkce**
$\beta = 1$	období stabilního života	exponenciální rozdělení
$1 < \beta < 2$	období stárnutí	konvexní, rostoucí funkce
$\beta = 2$	období stárnutí	lineárně rostoucí funkce
$\beta > 2$	období stárnutí	konkávní, rostoucí funkce

Normální rozdělení

Lze říci, že normální rozdělení je vhodným pravděpodobnostním modelem tehdy, působí-li na kolísání náhodné veličiny velký počet nepatrných a vzájemně nezávislých vlivů. Za určitých podmínek lze pomocí něj aproximovat řadu jiných spojitých i nespojitých rozdělení. Normální rozdělení má dva parametry: μ – střední hodnotu charakterizující polohu a σ^2 – rozptyl. Náhodnou veličinu s normálním rozdělením značíme $X \to N\left(\mu; \sigma^2\right)$.

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\left(\frac{x-\mu}{\sqrt{2}\sigma}\right)^2}$$

Normované normální rozdělení

Normální rozdělení se středním hodnotou rovnou nule a jednotkovým rozptylem. To, že má náhodná veličina $Z \to N(0,1)$.

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$$

Nechť $X \to N\left(\mu, \sigma^2\right)$, poté definujme $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$ se stejným, ale normovaným rozdělením. Mezi distribuční funkci normální a normované normální náhodné veličiny plat vztah $F(x) = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$.

Pravidlo 6σ je jedním ze základních principů, na nichž stojí kontrola kvality a jakosti. Máme-li data pocházející z normálního rozdělení o parametrech μ, σ^2, pak téměř všechna (99,8 %) leží v intervalu $\mu \pm 3\sigma$.

χ^2 rozdělení

Nechť $Z_1, \ldots, Z_n$ jsou nezávislé náhodné veličiny, $Z_i \to N(0,1)$. Poté náhodná veličina $\chi^2_n = \sum Z_i^2 \to \chi^2(n)$ má chí-kvadrát rozdělení o n stupních volnosti. $E\left(\chi^2_n\right) = n$, $D\left(\chi^2_n\right) = 2n$.

Studentovo rozdělení

Náhodná veličina $t_n = \frac{Z}{\sqrt{\frac{\chi^2_n}{n}}}$ má Studentovo rozdělení o n stupních volnosti. $E\left(\chi^2_n\right) = 0$, $D\left(\chi^2_n\right) = \frac{n}{n-2}$.
Tvarem Studentova rozdělení je také symetrická zvonovitá křivka, stejně jako o normálního rozdělení. Pro velká n je rozdělení blízké k $N(0,1)$.

Fisherovo-Snedecorovo rozdělení

Náhodná veličina $F_{n,m} = \frac{\frac{\chi^2_m}{n}}{\frac{\chi^2_m}{m}}$ má Fisherovo-Snedecorovo rozdělení o m a n stupních volnosti. $E\left(F_{m,n}\right) = \frac{m}{m-2}$. Pro velká m se střední hodnota blíží k 1.

Limitní věty

Definujme **konvergenci podle pravděpodobnosti ke konstantě**: je dána posloupnost náhodných veličin $\{X_n\} = (X_1, \ldots, X_n)$ a reálné číslo a, poté pokud pro $\varepsilon > 0$ platí $\lim_{n\to\infty} P\left(|X_n - a| < \varepsilon\right) = 1$, pak říkáme posloupnost $\{X_n\}$ konverguje k a podle pravděpodobnosti. Značíme $X_n \xrightarrow{p} \mu$.

Definujme **konvergenci v distribuci**: je dána posloupnost náhodných veličin $\{X_n\}$ a náhodná veličina X s distribuční funkcí $F(x)$. Jestliže $\lim_{n\to\infty} F_n(x) = F(x)$, pak říkáme, že posloupnost náhodných veličin $\{X_n\}$ konverguje k náhodné veličině X v distribuci a $F(x)$ nazýváme **asymptotickou distribuční funkcí**. Poté můžeme náhodnou veličinu X_n aproximovat asymptotickou distribučních funkcí.

Je-li X libovolná náhodná veličina se střední hodnotou EX a konečným rozptylem $DX = \sigma^2$, pak **Čebyševova nerovnost** odhaduje pravděpodobnost odchylky náhodné veličiny X od její střední hodnoty.

$$\forall \epsilon > 0 : P\left(|X - EX| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{DX}{\varepsilon^2}$$

Čebyševova nerovnost pro případ, kdy chceme odhadnout pravděpodobnost, že náhodná veličina X je od své střední hodnoty vzdálená o více než k-násobek směrodatná odchylky σ

$$\forall \sigma, k > 0 : P\left(|X - EX| \geq k\sigma\right) \leq \frac{1}{k^2}$$

Zákon velkých čísel označuje tvrzení o konvergenci průměru v posloupnosti náhodných veličin: $X_1, \ldots, X_n$ jsou nezávislé náhodné veličiny, jejichž střední hodnoty jsou rovny μ. Jestliže $\overline{X_n}$ definujeme jako $\overline{X_n} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} X_j$, pak posloupnost $\left(\overline{X_n} \xrightarrow{p} \mu\right)$. Posloupnost nemusí mít stejné rozdělení, a zároveň nemáme žádné požadavky na jejich rozptyl.

Důsledkem zákona velkých čísel je **Bernoulliho věta**, která tvrdí, že relativní četnost sledovaného jevu stochasticky konverguje (konverguje podle pravděpodobnosti) k jeho pravděpodobnosti. Nechť $X_1, X_2, \ldots$ jsou nezávislé náhodné veličiny s alternativním rozdělením s parametrem p, jestliže $\overline{X_n}$ definujeme jako $\overline{X_n} = \frac{1}{n}\sum X_j$, pak $(\overline{X_n} \xrightarrow{p} p)$.

Centrální limitní věta

O náhodných veličinách, jež konvergují v distribuci k normálnímu rozdělení, říkáme, že mají **asymptoticky normální rozdělení**.

Lindenberg-Lévy – jestliže $X_1, \ldots, X_n$ jsou nezávislé náhodné veličiny se stejnými středními hodnotami μ a se stejnými rozptyly σ^2, pak platí

$$Y_n = \frac{\sum X_i - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} P(Y_n < u) = \Phi(u)$$

Čili Y_n má asymptoticky normální rozdělení $N(0,1)$. Proto platí, že

1. $X = \sum X_i \Rightarrow EX = n\mu, DX = n\sigma^2$,
   rozdělení náhodné veličiny X lze aproximovat rozdělením $N\left(n\mu; n\sigma^2\right)$
2. $\overline{X} = \frac{\sum X_i}{n} = \frac{X}{n} \Rightarrow E\overline{X} = \mu, D\overline{X} = \frac{\sigma^2}{n}$
   rozdělení náhodné veličiny $\overline{X}$ lze aproximovat rozdělením $N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$

Moivre-Laplace – nechť $X \to Bi(n;p), EX = np; DX = np(1-p)$, potom pro velká n platí, že:

$$U = \frac{X - np}{\sqrt{np(1-p)}} \to N(0,1)$$

Aproximace binomického rozdělení normálním se zlepšuje s rostoucím rozptylem. Poměrně dobré výsledky dává tato aproximace v případě, že $np(1-p) > 9$ nebo $\min\{np; n(1-p)\} > 5$.

Aproximace rozdělení výběrové relativní četnosti normálním rozdělením – máme-li n Bernoulliho pokusů, při kterých nastane k výskytů nějaké události, můžeme určit výběrovou relativní četnost $p = \frac{k}{n} = \frac{\sum X_i}{n}$, kde $X_i \to A(\pi)$. Na základě Lindenberg-Lévy můžeme tento součet aproximovat normálním rozdělením $\sum X_i = N(n\pi, n\pi(1-\pi))$, jejich průměr $p \to N\left(\pi, \frac{\pi(1-\pi)}{\pi}\right)$ a $\frac{p-\pi}{\sqrt{\frac{\pi(1-\pi)}{\pi}}} \to N(0,1)$. Pro přesnější výpočty se provádí **oprava na spojitost**.

$$P\left(k_1 < \sum X_i < k_2\right) = F(k_2) - F(k_1) \approx \Phi\left(\frac{k_2 + 0.5 - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right) - \Phi\left(\frac{k_1 - 0.5 - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right)$$

Aproximace Poissonova rozdělení normálním rozdělením – pokud interval $(0,t)$ je dostatečně velký, lze Poissonovo rozdělení aproximovat $X \to Po(\lambda t) \to N(\lambda t, \lambda t)$ pro dostatečně velké t. Dále lze průměrný počet výskytů událostí za časovou jednotku aproximovat normálním rozdělením $Y = \frac{X}{t} \to N\left(\lambda, \frac{\lambda}{t}\right)$.

$$P(k_1 < X < k_2) = F(k_2) - F(k_1) \approx \Phi\left(\frac{k_2 + 0.5 - \lambda t}{\sqrt{\lambda t}}\right) - \Phi\left(\frac{k_1 - 0.5 - \lambda t}{\sqrt{\lambda t}}\right)$$

Náhodné výběry a jejich zpracování

Náhodný výběr je speciální náhodný vektor, jehož složky jsou nezávislé náhodné veličiny se stejným rozdělením pravděpodobnosti. Opakujeme-li n-krát nezávisle pokus, jehož výsledkem je náhodná veličina X s distribuční funkcí $F(x)$, sledujeme náhodný výběr $X = (X_1, \ldots, X_n), X_i \sim F(x)$ z rozdělení $F(x)$, kde n značí rozsah výběru. Obvykle rozdělujeme náhodné výběry na **malé** pro $n \leq 30$ a **velké** pro $n > 30$. Náhodný výběr má simultánní distribuční funkci $F\left(x\right) = \prod F\left(x_i\right)$ a simultánní hustotu pravděpodobností $f\left(x\right) = \prod f\left(x_i\right)$.

1. $T_1\left(X\right) = \overline{X_n} = \frac{\sum_i X_i}{n}$, $E\overline{X_n} = EX_i$
   výběrový průměr pro odhad střední hodnoty
2. $T_2\left(X\right) = \frac{1}{n-1}\sum_i \left(X_i - \overline{X_n}\right)^2$, $E\left(T_2\left(X\right)\right) = DX_i$
   výběrový rozptyl, $T_3\left(X\right) = \sqrt{T_2\left(X\right)} = S$ výběrová směrodatná odchylka

> *Předpokládejme, že $X = (X_1, \ldots, X_n), X_i \to N\left(\mu, \sigma^2\right)$. Definujme výběrová rozdělení*

1. $\overline{X_n} \to N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$
2. $Z_n = \frac{\overline{X_n} - \mu}{\sigma}\sqrt{n} \to N(0,1)$

3. $\frac{S_n^2}{\sigma^2}(n-1) \to \chi^2(n-1)$
   jeden stupeň volnosti ztrácíme na náhradu μ za $\overline{X_n}$
4. $\frac{(\overline{X_n}-\mu)}{S}\sqrt{n} \to t_{n-1}$

Předpokládejme navíc, že $Y = (Y_1, \ldots, Y_m), Y_i \to N\left(\mu', \sigma'^2\right)$.

5. $\frac{\overline{X}-\overline{Y}-\left(\mu-\mu'\right)}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}+\frac{\sigma'^2}{m}}} \to N(0,1)$
6. $\frac{\frac{\frac{S_x^2}{\sigma^2}(n-1)}{n-1}}{\frac{\frac{S_y^2}{\sigma'^2}(m-1)}{m-1}} = \frac{\frac{S_x^2}{\sigma^2}}{\frac{S_y^2}{\sigma'^2}} \to F_{n-1,m-1}$

Předpokládejme navíc, že $\sigma_x^2 = \sigma_y^2$.

7. $\frac{\overline{X}-\overline{Y}-\left(\mu-\mu'\right)}{\sqrt{S_x^2(n-1)+S_y^2(m-1)}} \cdot \sqrt{\frac{nm}{n+m}} \cdot \sqrt{n+m-2} \to t_{n+m-2}$

Teorie odhadu

Nechť máme náhodný výběr $X = (X_1, \ldots, X_n) \sim F(x, \Theta)$. Cílem naší teorie odhadu je pro známé pravděpodobnostní rozdělení F najít parametr $\Theta \in \Omega$, kde Ω značí parametrický prostor pomocí výběrové charakteristiky **odhadu** $\widehat{\Theta} = T\left(X\right)$ pro nalezení **bodového odhadu** $t(x)$. Aby odhad byl přesný, požadujeme splnění tří vlastností odhadu – nestrannost, konzistence a efektivita.

Nestrannost odhadu – požadujeme, aby $\forall\Theta \in \Omega : E\widehat{\Theta} = \Theta$. Často požadujeme, aby byl odhad alespoň **asymptoticky nestranný** $\forall\Theta \in \Omega : \lim_{n\to\infty} E\widehat{\Theta}_n = \Theta$.

- Výběrový průměr $\widehat{\Theta} = \overline{X}$ je nestranným odhadem střední hodnoty.

Konzistence odhadu – požadujeme, aby byl nestranný nebo asymptoticky nestranný a zároveň $\lim_{n\to\infty} D\widehat{\Theta}_n = 0$.

- Výběrový průměr $\widehat{\Theta} = \overline{X}$ je konzistentním odhadem střední hodnoty, neboť $D\widehat{\Theta} = \frac{\sigma^2}{n} n \overset{\to}{\to} \infty 0$.

Efektivnost odhadu – odhad je efektivní, značíme $\widehat{\Theta}_0$, právě tehdy když je nestranný a zároveň $\forall\widehat{\Theta}_1, E\widehat{\Theta}_1 = \Theta : D\widehat{\Theta}_0 \leq D\widehat{\Theta}_1$.

Intervalový odhad

Často hledáme **intervalový odhad** – hledáme funkce $T_D(X)$ a $T_H(X)$ tak, aby $P\left(T_D \leq \Theta \leq T_H\right) = 1-\alpha$, kde α je nejčastěji 0.01. Těmto mezím říkáme **interval spolehlivosti pro Θ** se spolehlivostí $1-\alpha$. Konkrétní reprezentaci $t_D\left(X\right)$ a $t_H(X)$ nazýváme **intervalový odhad pro Θ** se spolehlivostí $1-\alpha$.

Rozdělme $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2; \alpha_1, \alpha_2 \geq 0$ tak, aby $P\left(\Theta \leq T_H\left(X\right)\right) = 1-\alpha_2$ a $P\left(\Theta < T_D\left(X\right)\right) = \alpha_1$. Nejčastěji volíme $\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{\alpha}{2}$ nebo $\alpha_1 = \alpha, \alpha_2 = 0$ pro jednostranný interval spolehlivosti.

1. Zvolme vhodnou $T\left(X\right)$, ze které jsme schopni odvodit T_D a T_H.
2. Algebraickou metodou najděme T_D a T_H.

Testování hypotéz

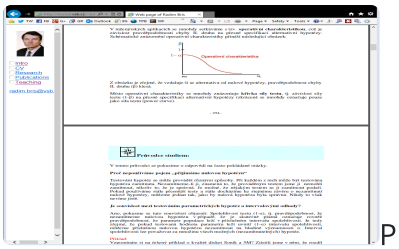
Testování hypotéz je pojat jako rozhodovací proces, v němž proti sobě stojí dvě tvrzení. **Nulová hypotéza** H_0 představuje rovnovážný stav, bývá vyjádřena rovností. Jde o tvrzení o populaci, které je bráno jako předpoklad při testování. Oproti ní stavíme tzv. **alternativní hypotézu** H_A. Ta představuje porušení rovnovážného stavu a zapisujeme je nerovností nebo nerovnicí. Alternativní hypotézu volíme v souladu s daty.

Čistý test významnosti zodpovídá otázku, zda získaný náhodný výběr X je či není extrémní s ohledem na testovanou hypotézu (zda zjištěné údaje podporují nulovou hypotézu).

1. Formulace nulové hypotézy H_0 a alternativní hypotézy H_A.
2. Volba testové statistiky $T(X)$ – funkce výběru, která vyjadřuje sílu platnosti nulové hypotézy ve srovnání s hypotézou alternativní. Je třeba znát nulové rozdělení $F_0(x) = P\left(T\left(X\right) < x \middle| H_0\right)$.
3. Výpočet pozorované hodnoty testové statistky x_{OBS}.
    1. Je-li H_A ve tvaru „$<$“: $p_{value} = F_0\left(x_{OBS}\right)$.
    2. Je-li H_A ve tvaru „$>$“: $p_{value} = 1 - F_0\left(x_{OBS}\right)$.
    3. Je-li H_A ve tvaru „$\neq$“ a nulové rozdělení je symetrické: $p_{value} = 2\min\left\{F_0\left(x_{OBS}\right); 1 - F_0\left(x_{OBS}\right)\right\}$.
4. p_{value} určuje minimální hladinu významnosti, na níž bychom při daném výběrovém souboru mohli nulovou hypotézu zamítnout. Čím menší je p_{value}, tím silnější je výpověď náhodného výběru proti nulové hypotéze. Nejběžněji:
    1. Je-li $p_{value} < 0.01 = \alpha$: zamítáme H_0.
    2. Je-li $0.01 < p_{value} < 0.05$: nedokážeme rozhodnout.
    3. Je-li $p_{value} > 0.05$: nezamítáme H_0.

Jelikož při rozhodování o nulové hypotéze vycházíme z výběrového souboru, který nemusí dostatečně přesně odpovídat vlastnostem základního souboru, můžeme se při rozhodování dopustit chyby.

		VÝSLEDEK TESTU	
		Nezamítáme H_0	Zamítáme H_0
SKUTEČNOST	Platí H_0	OK, pravděpodobnost $1 - \alpha$ zvaná *spolehlivost*	**Chyba 1. druhu**, pravděpodobnost α zvaná *hladina významnosti*
	Platí H_A	**Chyba 2. druhu**, pravděpodobnost β	OK, pravděpodobnost $\gamma := 1 - \beta$ zvaná *síla testu*


Pravděpodobnost chyby 2. druhu závisí na přesné hodnotě alternativní hypotézy. Dokážeme určit β pro případ, že alternativní hypotéza je přesně specifikována. **Operativní charakteristika** je závislost pravděpodobnosti chyby 2. druhu na přesné specifikaci alternativní hypotézy.

Při testování více než dvou hypotéz nelze použít testování „po dvojicích“, neboť $P\left(\min p_1, \ldots, p_k < p\right) \approx np \sim 1$.

ANOVA Analýza rozptylu

Předpokládejme k datových tříd z normálního rozdělení a mající stejný rozptyl – homeskedaticitu, každá z nich n_i hodnot ($N = \sum_i n_i$). Testujeme hypotézu $H_0 : \mu_1 = \ldots = \mu_k$ proti alternativně $H_A : \neg H_0$. Hledáme takovou testovou statistiku F, která nejen umožní implementaci H_0, ale je i citlivá na platnost H_0.

Sestavme **totální variabilitu** $SS_T = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{n_i} \left(X_{ij} - \overline{X}\right)^2$, kde $\overline{X}$ je výběrový průměr ze všech pozorovaných hodnot. Rozdělme $SS_T = SS_w + SS_B = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{n_i} \left(X_{ij} - \overline{X_i}\right)^2 + \sum_{i=1}^{k} n_i \left(\overline{X_i} - \overline{X}\right)^2$, kde SS_W je vnitřní variabilita a SS_B je mezitřídní variabilita. Zaveďme **vnitřní výběrový rozptyl** jako $S_W^2 = \frac{SS_W}{N-k}$, **mezitřídní výběrový rozptyl** $S_B^2 = \frac{SS_B}{k-1}$ a **F-poměr** jako $F = \frac{S_B^2}{S_W^2} \to F_{k-1,N-k}$.

Post Hoc je proces, který provádíme v případě, že zamítneme H_0. Cílem je vytvořit takové rozdělení datových tříd, v rámci kterých platí H_0. Můžeme využít statistiku $LSD_{i,j} = \frac{\overline{X_i} - \overline{X_j} - (\mu_i - \mu_j)}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n_i} + \frac{\sigma^2}{n_j}}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{\frac{S_W^2}{\sigma^2}(N-k)}{N-k}}} = \frac{\overline{X_i} - \overline{X_j}}{S_W \cdot \sqrt{\frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_j}}}$

pro porovnání.

V případě, že nejsou splněny požadavky ANOVA analýzy, můžeme využít **Kruskal-Wallisův test**, kde rozhodujeme o $H_0 : x_{0.5_1} = \ldots = x_{0.5_k}$.

Regresní analýza

Regrese značí systematické změny jedněch veličin při změnách jiných veličin a popis těchto změn matematickými funkcemi. Snažíme se tedy napozorované hodnoty vyrovnat vhodnou matematickou funkcí.

Vysvětlovaná (závisle) proměnná – proměnná v regresním modelu, jejíž chování se snažíme vysvětlit, popsat matematickou křivkou. Jedná se o proměnnou na levé straně regresní funkce a většinou ji označujeme symbolem A. **Vysvětlující (nezávisle) proměnné** – proměnné v regresním modelu, jejichž chování vysvětluje chování závisle proměnné Y. Jedná se o proměnné na pravé straně regresní funkce a většinou je označujeme symboly $X, Z, \ldots$.

Obecný lineární model

$$Y = \mathbf{X}\beta + e$$

- Y je náhodný vektor n hodnot vysvětlované proměnné
- $\mathbf{X}$ je matice zadaných hodnot vysvětlujících proměnných o rozměrech $n \times k$
- β je vektor $p = k$ neznámých parametrů
- e je vektor n hodnot náhodných chyb

Předpoklady obecného lineárního modelu

1. $\forall i \leq n : Ee_i = 0$
   náhodná složka nepůsobí systematickým způsobem na hodnoty vysvětlované proměnné Y
2. $\forall i \leq n : De_i = \sigma^2$
   homoskedasticita náhodných složek, variabilita náhodné složky nezávisí na hodnotách vysvětlujících proměnných
3. $\forall i, j \leq n; i \neq j : Cov\left(e_i, e_j\right) = 0$
   náhodné složky jsou nekorelované
4. $\mathbf{X}$ je nestochastická matice.
5. Parametry $\beta_j, j \leq k$ nabývají libovolných hodnot.

Pokud platí předpoklady 6 a 7, nazýváme model **regresní model**.

6. $h\left(\mathbf{X}\right) = k \wedge n > k$
   mezi vysvětlujícími proměnnými nebyla funkční lineární závislost
7. $\forall i \leq n : e_i \sim N$
   toto také implikuje normalitu proměnné Y

Mezi několik regresních modelů patří:

- Obecná regresní přímka, nebo lineární regrese s jednou vysvětlující proměnnou

$$Y_i = \beta_0 + \beta_i x_i + e_i, X = \begin{pmatrix} 1 & x_i \\ \cdots & \cdots \\ 1 & x_n \end{pmatrix}, \beta = \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \end{pmatrix}$$

- Kvadratická regrese

$$Y_i = \beta_0 + \beta_i x_i + \beta_2 x_i^2 + e_i$$

Lineární regrese s jednou vysvětlující proměnnou

Mějme $n > 2$ pozorování, tedy n dvojic (Y_i, x_i), ze kterých sestavíme model $Y_i = \beta_0 + \beta_i x_i + e_i$. Pro jeho určení využijeme metody nejmenších čtverců, tj. $\min \sum_{i=1}^{n} e_i^2$. Toto vede na soustavu normálních rovnic vedoucí k řešení $b_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})Y_i}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}$ a $b_0 = \overline{Y} - b_1\overline{x}$. Odhadem hodnoty $E(Y|x)$ je poté statistika $\widehat{Y}(x) = b_0 + b_1 x$. Jako vektor **reziduí** považujeme $\widehat{e_i} = Y_i - \widehat{Y_i}$.

Pro hledání intervalového odhadu pro $E(Y|x)$ budeme vycházet ze statistiky $\frac{\widehat{Y}(x) - \beta_0 - \beta_1 x}{S_{\widehat{Y}}} \sim t_{n-2}$.