

Numerické metody 1

Obsah

- Korektnost úloh a stabilita výpočetních postupů
 - Typy chyb
 - Aproximace čísla
 - Šíření chyb při aritmetických operacích
- Numerické řešení nelineárních rovnic
 - Separace kořenů
 - Metoda půlení intervalů
 - Metoda prostých iterací

Korektnost úloh a stabilita výpočetních postupů

Definice: Korektní úloha na dvojici (B_1, B_2) je taková úloha $y = U(x)$, $x \in B_1, y \in B_2$, kde

- $\forall x \in B_1 : \exists! y \in B_2$;
- $x_n \rightarrow x, U(x_n) = y_n \Rightarrow U(x_n) \rightarrow U(x) = y$, tj. řešení y spojitě závisí na x .

Definice: Dobře podmíněná úloha $u(x)$ je taková úloha, kde malá změna x vyvolá malou změnu y . Pro dobře podmíněnou úlohu platí $1 < c_p < 100$, kde:

$$c_p = \frac{\frac{\|\Delta y\|}{\|y\|}}{\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|}}$$

Typy chyb

- Chyba matematického modelu** – vzniká nepřesným zachycením reality matematickým modelem
- Chyba numerické metody** – nahrazení $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \approx a_{500}$
- Chyba aproximace** – nahrazení matematické úlohy numerickou, např. spojitá vstupní data za diskrétní
- Chyby ve vstupních datech**
- Chyba aproximace**

Aproximace čísla

Nechť x je přesná hodnota a $\tilde{x} \approx x$ je aproximace hodnoty. **Absolutní chyba** vyjadřuje $\Delta x = x - \tilde{x}$, přičemž hledáme **odhad absolutní chyby** $\|\Delta x\| \leq \varepsilon$. **Relativní chyba** vyjadřuje $\frac{\Delta x}{x}$, přičemž hledáme **odhad relativní chyby** $\frac{\|\Delta x\|}{\|\tilde{x}\|} = \frac{\|\Delta x\|}{\|\tilde{x}\|} \leq \delta$.

Šíření chyb při aritmetických operacích

Mějme odhady \tilde{x}_1, \tilde{x}_2 a $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \delta_1, \delta_2$.

- Součet $\tilde{u} = \tilde{x}_1 + \tilde{x}_2$, $\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$, $\delta = \frac{1}{|\tilde{x}_1 - \tilde{x}_2|} \cdot (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)$

Obecný vzorec chyb: $\varepsilon = \sum_{i=1}^n |f'(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n)| \cdot \varepsilon_i$, $\delta = \frac{\varepsilon}{\|f(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n)\|}$.

Numerické řešení nelineárních rovnic

Definice: Necht' funkce $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, D(f) = \langle a, b \rangle$. Číslo $\bar{x} \in \langle a, b \rangle$ nazýváme **kořen rovnice** $f(x) = 0$ právě tehdy, když $f(\bar{x}) = 0$.

Věta (existence \bar{x}): Necht' f je spojitá na $\langle a, b \rangle$, $f(a) \cdot f(b) < 0$, poté rovnice $f(x) = 0$ má alespoň jeden kořen.

Separace kořenů

Hledáme polohu a počet kořenů.

- Grafická separace kořenů z grafu funkce

- Grafická separace kořenů rozkladem na více funkcí

Příklad: $f(x) := e^x - 2x - 1 = e^x - (2x + 1) = f_1(x) - f_2(x)$ a hledáme průsečík těchto funkcí.

- Tabelace funkce

Metoda půlení intervalů

Mějme a_0, b_0 takové, že $f(a_0) \cdot f(b_0) < 0$. Konstruuujme posloupnosti $(a_k), (b_k)$ takových, že $\langle a_0, b_0 \rangle \supset \langle a_1, b_1 \rangle \supset \dots \supset \langle a_k, b_k \rangle \supset \dots$ a současně $\forall i \in \mathbb{N}^0 : f(a_i) \cdot f(b_i) < 0$. Máme-li $\langle a_k, b_k \rangle$, vypočteme $s_{k+1} = \frac{a_k + b_k}{2}$. Je-li $f(a_k) \cdot f(s_{k+1}) < 0$, poté $a_{k+1} := a_k$ a $b_{k+1} := s_{k+1}$. Je-li $f(b_k) \cdot f(s_{k+1}) < 0$, poté $b_{k+1} := b_k$ a $a_{k+1} := s_{k+1}$.

Věta (konvergence půlení intervalů): Metoda půlení intervalů je konvergentní a navíc $\lim_{k \rightarrow \infty} s_k = \bar{x}$.

Necht' $\bar{x} \in \langle a_k, b_k \rangle$, $s_{k+1} = \frac{a_k + b_k}{2}$, $d_k = \frac{b_k - a_k}{2}$. Víme, že $a_k = s_{k+1} - d_k$, $b_k = s_{k+1} + d_k$, $\bar{x} \in \langle s_{k+1} - d_k, s_{k+1} + d_k \rangle$. Tudíž $|\bar{x} - s_{k+1}| \leq d_k$. Dále $b_k - a_k = \frac{b_{k-1} - a_{k-1}}{2} = \dots = \frac{b_0 - a_0}{2^k}$ a $0 \leq |\bar{x} - s_{k+1}| \leq d_k = \frac{b_0 - a_0}{2^{k+1}} \rightarrow 0$. Víme tudíž, že $\lim_{k \rightarrow \infty} |\bar{x} - s_{k+1}| = 0 \Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} s_{k+1} = \bar{x}$. ■

Metoda prostých iterací

Metoda prostých iterací je založena na konstrukci posloupnosti aproximací (x_k) , $k \in \mathbb{N}^0$ daných rekurzivním předpisem $x_{k+1} = G(x_k)$.

Definice: Zobrazení $G: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ se nazývá **kontraktivní**, platí-li:

$$\exists \varrho \in (0, 1) : \forall x, y \in \Omega : \|G(x) - G(y)\| \leq \varrho \cdot \|x - y\|$$

Definice: Necht' je zobrazení $G: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. Bod $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ se nazývá **pevný bod** zobrazení G , platí-li $\bar{x} = G(\bar{x})$.

Věta (pevný bod): Necht' $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ je souvislá, omezená a uzavřená množina, zobrazení $G : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ je kontraktivní v Ω a postupně aproximace $x_k := G(x_{k-1})$ leží v Ω , poté:

- $\forall x_0 \in \mathbb{R}^n$ platí, že posloupnost (x_k) konverguje a $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = \bar{x}$;
- \bar{x} je pevným bodem G ;
- $\|x_k - \bar{x}\| \leq \frac{\varrho^k}{1-\varrho} \cdot \|x_1 - x_0\|$

Věta (postačující podmínka konvergence metody prostých iterací): Necht' $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ je souvislá, omezená a uzavřená množina, zobrazení $G : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ je kontraktivní v Ω a postupně aproximace $x_k := G(x_{k-1})$ leží v Ω , necht' $G \in C^2(\Omega)$ a $\forall x \in \Omega : \|G'(x)\| \leq M < 1$, poté platí tvrzení věty o pevném bodě.