

Matematická analýza 3

Obsah

- Číselné řady

-  [http://upload.wikimedia.org/wikipedia/en/thumb/a/a0/Sierpinski_carpet.png/243px-](http://upload.wikimedia.org/wikipedia/en/thumb/a/a0/Sierpinski_carpet.png/243px-Sierpinski_carpet.png)

- Sierpinski carpet.png

- Motivační příklady

- Základní pojmy

- Kritéria absolutní konvergence

- Kritéria neabsolutní konvergence

- Odhad zbytku řady

- Přerovnávání řad

- Vektorové funkce

- Motivační příklady

- Základní pojmy

- Limita a spojitost vektorové funkce

- Limita vektorové funkce

- Spojitost vektorové funkce

- Diferenciál vektorové funkce

Číselné řady



http://upload.wikimedia.org/wikipedia/en/thumb/a/a0/Sierpinski_carpet.png

Motivační příklady

Sierpinského koberec

- Achilles běží rychlostí 10 m s^{-1} , želva běží rychlostí 1 m s^{-1} . Na startu má želva náskok 1 m . Za jak dlouho se setkají a kde?
Úloha vede na součet řady $100 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{10}\right)^n$.
- Jaká je plocha Sierpinského koberce (viz Figure 1) o hraně 1 j ?
Úloha vede na součet řady $\frac{1}{9} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{8}{9}\right)^{n-1}$.

Základní pojmy

Definice (řady a základní pojmy): **Řadou (reálných čísel)** rozumíme výraz $a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} a_n$, kde pro každé $n \in \mathbb{N}$ je $a_n \in \mathbb{R}$, tj. (a_n) je posloupností reálných čísel. Číslo a_n nazýváme **n-tým členem řady**. Posloupnost $(s_n) := a_1 + \dots + a_n$ nazýváme **posloupností částečných součtů řady**. Existuje-li $\lim s_n = S \in \mathbb{R}^*$, nazýváme ji **součtem řady** a označíme ji $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Pokud S existuje a platí, že $s \in \mathbb{R}$, pak řekneme, že řada **konverguje**. Pokud $S = \{+\infty, -\infty\}$ nebo S neexistuje, pak řekneme, že řada **diverguje**.

- Aritmetická řada $1 + 2 + \dots + n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} n = \infty$, řada diverguje.
- Geometrická řada $1 + q + q^2 + \dots + q^n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1} = \begin{cases} \frac{1}{1-q}, & q \in (1, -1) \\ \nexists, & q \notin (1, -1) \end{cases}$.
- Harmonická řada $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$, řada diverguje.
- Řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1$, řada je konvergentní.
- Řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} = e$ (Taylorův polynom e^x v bodě 0).
- Řada $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{2n-1} = \frac{\pi}{4}$ (Taylorův polynom $\arctan x$ v bodě 0).

Věta (nutná podmínka konvergence řady): Konverguje-li řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, poté $\lim a_n = 0$.

Z předpokladu platí, že $\lim s_n = S \in \mathbb{R}$ existuje. Poté $\lim a_n = \lim (s_n - s_{n-1}) = \lim s_n - \lim s_{n-1} = S - S = 0$. ■

Věta: Konverguje-li řada $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$, poté konverguje i řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Z předpokladu platí $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = S \in \mathbb{R}$. Zavedeme $\forall n \in \mathbb{N} : a_n^+ = \max \{a_n, 0\}$, $a_n^- = \max \{-a_n, 0\}$. Platí, že $a_n^+ \geq 0$ a $a_n^- \geq 0$. Poté $s_n = a_1 + \dots + a_n = a_1^+ - a_1^- + \dots + a_n^+ - a_n^- = s_n^+ - s_n^-$. Dále $\lim s_n = \lim s_n^+ - \lim s_n^-$, tudíž pokud s_n^+ a s_n^- jsou konvergentní, poté i s_n je konvergentní. S využitím věty o limitě neklesající a shora omezené posloupnosti ukažme, že posloupnost s_n^+ je neklesající díky definici a_n^+ a shora omezená $s_n^+ = a_1^+ + \dots + a_n^+ \leq |a_1| + \dots + |a_n| \rightarrow S \leq S$. Podobně $s_n^- = a_1^- + \dots + a_n^- \leq |a_1| + \dots + |a_n| \rightarrow S \leq S$. Proto platí, že s_n^+ a s_n^- jsou konvergentní. ■

Definice (absolutní konvergence): Konverguje-li řada $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$, poté řadu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nazýváme **absolutně konvergentní řadou**. Konverguje-li řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, ale řada $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ diverguje, poté řadu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nazýváme **neabsolutně konvergentní řadou**.

Řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ je neabsolutně konvergentní.

Kritéria absolutní konvergence

Poznámka: Píšeme-li „ $V(n)$ platí pro všechna dost velká $n \in \mathbb{N}$ “, myslíme „ $\exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0, n \in \mathbb{N} : V(n)$ “.

Věta (srovnávací kritérium): Necht' $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ jsou takové řady, že:

- $|a_n| \leq b_n$, pro všechna dost velká $n \in \mathbb{N}$;
- řada $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ je konvergentní;

poté $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje absolutně.

Díky druhému předpokladu platí, že $s_n^b = \sum_{k=1}^n b_k$ je shora omezená. Určeme $s_n^a = \sum_{k=1}^n |a_k|$, poté $s_n^a \leq s_n^b + c$, $c \in \mathbb{R}$ a s_n^a je také shora omezená. Navíc s_n^a je neklesající a tudíž s_n^a je konvergentní. ■

Důsledek (věta o srovnávacím kritériu): Necht' $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ jsou takové řady, že:

- $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty$;
- $0 \leq a_n \leq b_n$ pro všechna dost velká $n \in \mathbb{N}$;

poté $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = +\infty$.

- Řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

Předpokládejme, že řada konverguje a srovnajme s řadou $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)}$. Platí, že $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2 : \frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n(n-1)}$. Musíme ukázat, že $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)}$ konverguje. K tomu využijeme rovnost s konvergentní řadou

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}.$$

Řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ je absolutně konvergentní.

- Řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$.

Předpokládejme, že řada diverguje a srovnajme s řadou $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty$. Platí, že $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 1 : \frac{1}{\sqrt{n}} \geq$

$$\frac{1}{n}.$$

Řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = +\infty$ je divergentní.

Věta (d'Alambertovo kritérium): Mějme $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ takovou řadu, že:

1. pokud platí $\exists q \in \mathbb{R}^+, q < 1 : \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \leq q$ pro všechna dost velká $n \in \mathbb{N}$, pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je absolutně konvergentní.

2. pokud platí $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| > 1$ pro všechna dost velká $n \in \mathbb{N}$, pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je divergentní.

Dokažme první tvrzení: z předpokladu platí, že $|a_{n+1}| \leq q \cdot |a_n|$, tudíž $s = |a_1| + \dots + |a_{n_0}| + |a_{n_0+1}| + \dots \leq |a_1| + \dots + |a_{n_0}| + q|a_{n_0}| + q^2|a_{n_0}| + \dots = |a_1| + \dots + |a_{n_0}| + |a_{n_0}| \cdot \frac{q}{1-q} < \infty$ a řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je absolutně konvergentní. Dokažme druhé tvrzení: $\forall n \geq n_0 : |a_{n+1}| > |a_n| > 0 \Rightarrow \lim a_n \neq 0$ a řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je divergentní. ■

Důsledek (limitní d'Alambertovo kritérium): Mějme $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Pokud $\lim \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < 1$, pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je absolutně konvergentní. Je-li $\lim \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| > 1$, pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je divergentní.

Pro první tvrzení využijme d'Alambertovo kritérium 1 s $q \in \left(\lim \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|, 1 \right)$. Pro druhé tvrzení využijme d'Alambertovo kritérium 2 s podmínkou, že pro všechna dost velká $n \in \mathbb{N}$ platí $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| > 1$.

- Řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$.

Využijme limitní d'Alambertovo kritérium: $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim \frac{\frac{((n+1)!)^2}{(2n+2)!}}{\frac{(n!)^2}{(2n)!}} = \lim \frac{((n+1)!)^2}{(2n+2)!} \cdot \frac{(2n)!}{(n!)^2} =$

$$\lim \frac{n+1}{2(2n+1)} = \frac{1}{4} < 1.$$

Řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$ je absolutně konvergentní.

- Řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n}$.

Využijme limitní d'Alambertovo kritérium: $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim \frac{\frac{2^{n+1}}{n+1}}{\frac{2^n}{n}} = \lim \frac{2n}{n+1} = 2 > 1$.

Řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n} = +\infty$ je divergentní.

Věta (Cauchyho kritérium): Mějme $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ takovou řadu, že:

1. pokud platí $\exists q \in \mathbb{R}^+, q < 1 : \sqrt[n]{|a_n|} \leq q$ pro všechna dost velká $n \in \mathbb{N}$, pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je absolutně konvergentní.

2. pokud platí $\sqrt[n]{|a_n|} \geq 1$ pro všechna dost velká $n \in \mathbb{N}$, pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je divergentní.

Dokažme první tvrzení: z předpokladu platí, že $|a_n| \leq q^n$, tudíž $s = |a_1| + \dots + |a_{n_0}| + |a_{n_0+1}| + \dots \leq |a_1| + \dots + |a_{n_0-1}| + q^{n_0} + q^{n_0+1} + \dots = |a_1| + \dots + q^{n_0} \cdot \frac{1}{1-q} < \infty$ a řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je absolutně konvergentní. Dokažme druhé tvrzení: $\forall n \geq n_0 : |a_n| > 1 \Rightarrow \lim a_n \neq 0$ a řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je divergentní. ■

Důsledek (limitní Cauchyho kritérium): Mějme $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Pokud $\lim \sqrt[n]{|a_n|} < 1$, pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je absolutně konvergentní. Je-li $\lim \sqrt[n]{|a_n|} > 1$, pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je divergentní.

- Řada $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-1}{n^2} \right)^n$.

Využijme limitní Cauchyho kritérium: $\lim \sqrt[n]{\left(\frac{n-1}{n^2} \right)^n} = \lim \frac{n-1}{n^2} = 0 < 1$.

Řada $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-1}{n^2}\right)^n$ je absolutně konvergentní.

- Řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^2}$.

Využijme limitní Cauchyho kritérium: $\lim \sqrt[n]{\frac{2^n}{n^2}} = \lim \frac{2}{(\sqrt[n]{n})^2} = 2 > 1$.

Řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^2} = +\infty$ je divergentní.

Věta (integrální kritérium): Necht' f je nezáporná, nerostoucí a spojitá funkce v intervalu $\langle 1, \infty \rangle$. Necht' dále platí, že $\forall n \in \mathbb{N} : |a_n| = f(n)$. Poté řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolutně konverguje právě tehdy, konverguje-li $\int_1^{\infty} f(x) dx$ (tzn. že $\lim_{t \rightarrow \infty} \int_1^t f(x) dx$ existuje a je konečná).

Uvědomme si, že existují limity $\lim s_n \in \mathbb{R}^*$ a $\lim_{t \rightarrow \infty} \int_1^t f(x) dx \in \mathbb{R}^*$. Dokažme $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty \Leftrightarrow \int_1^{\infty} f(x) dx < \infty$. Z předpokladů $s_n = \sum_{k=1}^n |a_k| = \sum_{k=1}^n f(k) \geq \int_1^{n+1} f(x) dx \geq \sum_{k=2}^{n+1} f(k) = \sum_{k=2}^{n+1} |a_k| = s_{n+1} - |a_1|$. Přejdeme-li $n \rightarrow \infty$: $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| \geq \int_1^{\infty} f(x) dx \geq \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| - |a_1|$. ■

- Řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.

Využijme integrální kritérium: $\lim_{t \rightarrow \infty} \int_1^t \frac{1}{x} dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \ln t = \infty$.

Řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$ je divergentní.

- Řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

Využijme integrální kritérium: $\lim_{t \rightarrow \infty} \int_1^t \frac{1}{x^2} dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{t} + 1\right) = 1$.

Řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ je konvergentní.

Kritéria neabsolutní konvergence

Věta (Leibnizovo kritérium): Necht' posloupnost (a_n) je taková, že platí:

1. $\forall n \in \mathbb{N} : a_n \geq 0$;

2. $\forall n \in \mathbb{N} : a_n \geq a_{n+1}$;

3. $\lim a_n = 0$;

poté řada $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot a_n$ je konvergentní.

Označme si posloupnost sudých částečných součtů $s_n^* := s_{2n} = \sum_{k=1}^{2n} (-1)^{k+1} \cdot a_k$. Víme, že $s_{n+1}^* = s_{2n+2} = s_{2n} - a_{2n+1} + a_{2n+2} \geq s_n^*$, neboť $a_{2n+1} \geq a_{2n+2} \Rightarrow 0 \geq a_{2n+2} - a_{2n+1}$. Dále $s_n^* = s_{2n} = a_1 - a_2 + a_3 - \dots + a_{2n-1} - a_{2n} = a_1 - (a_2 - a_3) - \dots - (a_{2n-2} - a_{2n-1}) - a_{2n}$. Každá s postupných závorek je nezáporná, a_{2n} je také nezáporné, tudíž $s_n^* \leq a_1$. Jedná se o neklesající, shora omezenou posloupnost, tudíž $\lim s_n^* = s \in \mathbb{R}$. Označme si posloupnost lichých částečných součtů $s_n^{**} = s_{2n+1} = \sum_{k=1}^{2n+1} (-1)^{k+1} \cdot a_k$. Víme, že $s_n^{**} = s_n^* + a_{2n+1}$ a $\lim s_n^{**} = \lim s_n^* + \lim a_{2n+1} = s + 0 = s \in \mathbb{R}$. ■

- Řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$.

Členy $a_n = \frac{1}{n}$ jsou nezáporné, nerostoucí a $\lim \frac{1}{n} = 0$. Jsou splněny předpoklady Leibnizova kritéria.

Řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ je konvergentní.

- Řada $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{n+1}{n}$.

Členy $a_n = \frac{n+1}{n}$ jsou nezáporné, nerostoucí, avšak $\lim \frac{n+1}{n} = 1$, tudíž nejsou splněny předpoklady

Leibnizova kritéria. Neboť $\lim (-1)^{n+1} \cdot \frac{n+1}{n}$ neexistuje (posloupnost lichých a sudých členů má různou limitu), není splněna nutná podmínka konvergence.

Řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ je divergentní.

Věta (Abelovo-Dirichletovo kritérium): Necht' posloupnost (a_n) je monotónní. Platí-li jedna z následujících podmínek:

1. posloupnost (a_n) je omezená a řada $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ je konvergentní. (Abelovo kritérium.)
2. $\lim a_n = 0$ a posloupnost částečných součtů řady $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ je omezená. (Dirichletovo kritérium.)

Poté řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot b_n$ je konvergentní.

- Řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$.

Využijme Dirichletovo kritérium: $a_n = \frac{1}{n}$ (posloupnost je monotónní a $\lim \frac{1}{n} = 0$) a $b_n = (-1)^n$ (posloupnost částečných součtů $-1 \leq \sum_{k=1}^n (-1)^k \leq 0$ je omezená).

Řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ je konvergentní.

- Řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 \cdot \sin n}{(n^2+1) \cdot 2^n}$.

Využijeme Abelovo kritérium: $a_n = \frac{n^2}{n^2+1}$ (posloupnost je monotónní, kladná, shora omezená) a $b_n = \frac{\sin n}{2^n}$ (absolutní konvergenci ukažme srovnávacím kritériem: $\frac{|\sin n|}{2^n} \leq \frac{1}{2^n}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1$).

Řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 \cdot \sin n}{(n^2+1) \cdot 2^n}$ je konvergentní.

- Řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cdot \sin \frac{n \cdot \pi}{4}$.

Využijme Dirichletovo kritérium; $a_n = \frac{1}{n}$ (posloupnost je monotónní a $\lim \frac{1}{n} = 0$) a $b_n = \sin \frac{n \cdot \pi}{4}$ (platí $0 \leq \sum_{k=1}^n \sin \frac{k \cdot \pi}{4} \leq 1 + \sqrt{2}$).

Řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cdot \sin \frac{n \cdot \pi}{4}$ je konvergentní.

Odhad zbytku řady

Mějme řadu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Řadu $a_{n+1} + a_{n+2} + \dots = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k$ nazveme **zbytkem řady** $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ **po n-tém členu**. Pro konvergentní řady je užitečné odhadnout součet jejího zbytku. Platí, že $\sum_{k=1}^{\infty} a_k =$

$$s_1 \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k = s_2 \in \mathbb{R}.$$

Součet zbytku řady můžeme odhadnout pomocí několika metod:

- pomocí srovnávacího kritéria ($\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} b_k = s$);
- pomocí integrálního kritéria ($\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k \leq \int_n^{\infty} f(x)dx$);
- pomocí limitního d'Alambertova kritéria – necht' $q = \frac{a_{n+1}}{a_n}$, poté $r_n \leq |a_n| \cdot \frac{q}{1-q}$;
- pomocí Leibnizova kritéria ($\sum_{k=n+1}^{\infty} (-1)^{k+1} \cdot a_k \leq a_{2n+1}$; je-li n sudé, $\sum_{k=n+1}^{\infty} (-1)^{k+1} \cdot a_k \geq 0$; je-li n liché, $\sum_{k=n+1}^{\infty} (-1)^{k+1} \cdot a_k \leq 0$).
- Odhadněte součet $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!}$.

Podle limitního d'Alambertova kritéria je řada absolutně konvergentní.

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \sum_{n=5}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!}$ a využijeme srovnávací kritérium pro odhad zbytku řady

$$\sum_{n=5}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} \leq \sum_{n=5}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}} = \frac{1}{8}.$$

Tudíž $\frac{8}{3} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} \leq \frac{8}{3} + \frac{1}{8} \approx e$.

- Odhadněte součet $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

Podle integrálního kritéria je řada absolutně konvergentní. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{1} + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \sum_{n=5}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.
Využijeme integrální kritérium pro odhad zbytku řady: $0 \leq \sum_{n=5}^{\infty} \frac{1}{n^2} \leq \int_4^{\infty} \frac{1}{x^2} dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \left[-\frac{1}{x} \right]_4^t = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{t} + \frac{1}{4} \right) = \frac{1}{4}$.

$$\text{Tudíž } \frac{205}{144} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \leq \frac{205}{144} + \frac{1}{4}.$$

- Odhadněte součet $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$.

Podle Leibnizova kritéria je řada konvergentní. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} = \frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \sum_{n=5}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$.

Využijeme Leibnizovo kritérium pro odhad zbytku řady: $0 \leq \sum_{n=5}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} \leq \frac{1}{9}$.

$$\text{Tudíž } \frac{76}{105} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} \leq \frac{76}{105} + \frac{1}{9}.$$

Přerovnávání řad

Definice: Mějme prosté zobrazení $\varphi: \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}$. Řadu $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\varphi(n)}$ nazveme **přerovnáním řady** $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Věta (komutativita přerovnání řady): Konverguje-li $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolutně, konverguje absolutně i řada přerovnaná a má stejný součet. Konverguje-li $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ neabsolutně, přerovnaná řada má libovolný součet či přerovnaná řada byla divergentní.

Vektorové funkce

Motivační příklady

- Mějme hmotný bod v gravitačním poli ($g = 10ms^{-2}$). Pohybujeme se pod úhlem $\varphi = \frac{\pi}{4}$. Známe $v_0, t_0, (x, y)$ a hledáme $v, t, (x, y)$. Tento příklad můžeme řešit funkcí $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2: f(t, v) = \left[\frac{\sqrt{2}}{2}vt, \frac{\sqrt{2}}{2}vt - 10t^2 \right]^T$. Pokud $c = [t_0, v_0]$, hledáme $c + h = [t, v]$. Víme, že $f(c + h) \approx f(c) + df_c(h) = \left[\frac{\sqrt{2}}{2}v_0t_0, \frac{\sqrt{2}}{2}v_0t_0 - 5t_0^2 \right]^T + \left[f'_{1t}(t_0, v_0) h_1 + f'_{1v}(t_0, v_0) h_2, f'_{2t}(t_0, v_0) h_1 + f'_{2v}(t_0, v_0) h_2 \right]^T = \left[\frac{\sqrt{2}}{2}v_0t_0, \frac{\sqrt{2}}{2}v_0t_0 - 5t_0^2 \right]^T + \begin{bmatrix} f'_{1t} & f'_{1v} \\ f'_{2t} & f'_{2v} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix}.$

Základní pojmy

- Symbolem \mathbb{R}^n rozumíme metrický a vektorový prostor. Prvky \mathbb{R}^n jsou uspořádané n -tice reálných čísel $x = [x_1, \dots, x_n]$, **euklidovská metrika** $\rho(x, y) := \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2}$
- Zavádíme **normu** prvku $x: \|x\| = \rho(x, 0) = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$. Víme, že $\rho(x, y) = \|x - y\|$. Zavádíme **okolí bodu x o poloměru ε** : $U(x, \varepsilon) := \{y \in \mathbb{R}^n : \rho(x, y) < \varepsilon\}$ a **prstencové okolí bodu x o poloměru ε** : $P(x, \varepsilon) = U(x, \varepsilon) \setminus \{x\}$.
- Pro **limitu n -rozměrné posloupnosti** a_k platí $\lim a_k = \lim [a_{k_1}, a_{k_2}, \dots, a_{k_n}] = [a_1, a_2, \dots, a_n] = a \in \mathbb{R}^n \Leftrightarrow \lim \rho(a_k, a) = 0 \Leftrightarrow \|a_k - a\| = 0 \Leftrightarrow \forall i \in \{1, \dots, n\} : \lim a_{k_i} = a_i$.

Definice: **Vektorovou funkcí** z \mathbb{R}^n do \mathbb{R}^m (reálnou m -rozměrnou funkcí n reálných proměnných) nazýváme každé zobrazení $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, tzn. každému $x = [x_1, \dots, x_n] \in D_f \subset \mathbb{R}^n$ přiřadí právě jednu hodnotu $f(x) = [f_1(x), \dots, f_m(x)] \in H_f \subset \mathbb{R}^m$. Množinu D_f nazýváme **definiční obor funkce f** , množinu H_f nazýváme **oborem hodnot funkce f** a f_1, \dots, f_m nazýváme **složky vektorové funkce $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$** .

- Pokud $m = n$, nazýváme funkci f **vektorovým polem**. Je-li $m = 1$, nazýváme funkci f **skalárním polem**.

Úmluva: Je-li $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ dána pouze svým předpisem, chápeme D_f jako množinu všech $x \in \mathbb{R}^n$, pro které má předpis smysl.

- Necht' $f = [f_1, \dots, f_n] : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$. Poté $D_f = \bigcap_{i=1}^m D_{f_i}$.
- Určete D_f pro $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 : f(x, y) = [\sqrt{x+y}, x^2 + 1, x \cdot \sqrt{y}]$.
Víme, že $D_f = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : x + y \geq 0\} \cap \mathbb{R}^2 \cap \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0\} = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : y \geq -x \wedge y \geq 0\}$.

Definice: Mějme $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ a $c \in \mathbb{R}$. Funkce $f + g, f - g, c \cdot f$ definujeme takto:

- $(f + g)(x) := f(x) + g(x);$
- $(f - g)(x) := f(x) - g(x);$
- $(c \cdot f)(x) := c \cdot f(x).$

Limita a spojitost vektorové funkce

Limita vektorové funkce

Mějme $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m, x_0 \in \mathbb{R}^n, a \in \mathbb{R}^m$. Poté platí $x_0 \neq x_n \rightarrow x_0 \Rightarrow f(x_n) \rightarrow a \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$.

Definice: Řekneme, že funkce $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ **má v bodě $x_0 \in \mathbb{R}^n$ limitu $a \in \mathbb{R}^m$** (píšeme $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$), platí-li:

$$x_0 \neq x_k \rightarrow x_0 \Rightarrow [f_1(x_k), \dots, f_m(x_k)] \rightarrow a = [a_1, \dots, a_m]$$

- $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a \Rightarrow \exists P(x_0) \subset D_f$.

Věta: Necht' $f(x) = [f_1(x), \dots, f_n(x)] : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m, x_0 \in \mathbb{R}^n, a \in \mathbb{R}^m$. Poté $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a \Leftrightarrow \forall i \in \{1, \dots, n\} : \lim_{x \rightarrow x_0} f_i(x) = a_i$.

Spojitosť vektorové funkce

Mějme $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, x_0 \in \mathbb{R}^n$. Funkce je spojitá v bodě x_0 právě tehdy, když $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

Definice: Řekneme, že funkce $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ je **spojitá v bodě $x_0 \in \mathbb{R}^n$** , platí-li:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

- Ze spojitosti f v bodě x_0 plyne, že $\exists U(x_0) \subset D_f$.

Řekneme, že funkce $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ je **spojitá v bodě $x_0 \in \mathbb{R}^n$ vzhledem k $M \subset \mathbb{R}^n$** , platí-li:

$$\forall i \in \mathbb{N} : x_{k_i} \in M : x_0 \neq x_k \rightarrow x_0 \Rightarrow f(x_k) \rightarrow f(x_0)$$

Řekneme, že funkce $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ je **spojitá na množině $M \subset \mathbb{R}^n$** , platí-li, že pro všechna $x_0 \in M$ je f spojitá v bodě x_0 vzhledem k množině M .

Řekneme, že funkce $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ je **spojitá**, platí-li, že je spojitá na množině D_f .

Věta: Necht' $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m, x_0 \in M \subset \mathbb{R}^n$. Poté f je spojitá v x_0 (spojitá v x_0 vzhledem k M , spojitá na M , spojitá) právě tehdy, platí-li:

$\forall i \in \{1, \dots, m\} : f_i$ je spojitá v x_0 (spojitá v x_0 vzhledem k M , spojitá na M , spojitá).

Diferenciál vektorové funkce

Pro $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ platí $f(c+h) = f(c) + df(c)h + \omega(h), \lim_{\|h\| \rightarrow 0} \frac{\omega(h)}{\|h\|} = 0$. Pro diferenciál vektorové funkce

$$\text{v bodě } c \text{ platí } df_c(h) = f'(c)h = \begin{bmatrix} f'_{1x_1}(c) & \cdots & f'_{1x_n}(c) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f'_{mx_1}(c) & \cdots & f'_{mx_n}(c) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{bmatrix} = [df_1(c), \dots, df_m(c)]^T.$$