Obyčejné diferenciální rovnice

Obsah

Rovnice se separovanými proměnnými

Obyčejné diferenciální rovnice, kterou lze zapsat v následujícím tvaru, budeme nazývat rovnicí se separovanými proměnnými.

$$g(y) \cdot y' = h(t)$$

Předpokládáme $g \in C(J), h \in C(I)$. Nechť φ řeší předchozí rovnici na $I_1 \subset I$. Pak na $I_1 : g(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) = h(t)$. Označme $H(t) = \int h(t)dt$ na I a $G(y) = \int g(y)dy$ na J. Poté na $I_1 : \exists c \in \mathbb{R} : G(\varphi(t)) = H(t) + c$. Obráceně nechť $\exists c \in \mathbb{R} \wedge \varphi \in C^2(I_1) : \forall t \in I_1 : G(\varphi(t)) = H(t)$. Pak na $I_1 : g(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) = h(t)$. Tedy φ řeší původní rovnici.

Řešme Cauchyovu úlohu $g(y) \cdot y' = h(t), y(t_0) = y_0$. Nechť je jím řešením funkce φ. Tedy $\int_{t_0}^{t} g(\varphi(s)) \cdot \varphi'(s)ds = \int_{t_0}^{t} h(s)ds, \varphi(t_0) = y_0$. Odtud $\int_{y_0}^{\varphi(t)} g(s)ds = \int_{t_0}^{t} h(s)ds, \varphi(t_0) = y_0$.

Věta: (existence a unikátnost řešení Cauchyovy úlohy pro RSP): Uvažujme $g(y) \cdot y' = h(t), y(t_0) = y_0$, kde $I \subset \mathbb{R}, J \subset \mathbb{R}$ jsou otevřené intervaly, $h \in C(I), g \in C(J)$. Nechť $t_0 \in I$ a $\forall y \in J : g(y) \neq 0$. Pak zadaná Cauchyova úloha má právě jedno maximální řešení.