Matematická analýza 3

Obsah

Číselné řady

http://upload.wikimedia.org/wikipedia/en/thumb/a/a0/Sierpins Sierpinski_carpet.png

Motivační příklady

Sierpinského koberec

- Achilles běží rychlostí $10\ ms^{-1}$, želva běží rychlostí $1\ ms^{-1}$. Na startu má želva náskok $1\ m$. Za jak dlouho se setkají a kde?
  Úloha vede na součet řady $100 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{10}\right)^n$.
- Jaká je plocha Sierpinského koberce (viz Figure 1) o hraně $1\ j$?
  Úloha vede na součet řady $\frac{1}{9} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{8}{9}\right)^{n-1}$.

Základní pojmy

Definice (řady a základní pojmy): **Řadou (reálných čísel)** rozumíme výraz $a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots \overset{\text{def}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} a_n$, kde pro každé $n \in \mathbb{N}$ je $a_n \in \mathbb{R}$, tj. (a_n) je posloupností reálných čísel. Číslo a_n nazýváme **n-tým členem řady**. Posloupnost $(s_n) := a_1 + \ldots + a_n$ nazýváme **posloupností částečných součtů řady**. Existuje-li $\lim s_n = S \in \mathbb{R}^*$, nazýváme ji **součtem řady** a označíme ji $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Pokud S existuje a platí, že $s \in \mathbb{R}$, pak řekneme, že řada **konverguje**. Pokud $S = \{+\infty, -\infty\}$ nebo S neexistuje, pak řekneme, že řada **diverguje**.

- Aritmetická řada $1 + 2 + \ldots n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} n = \infty$, řada diverguje.
- Geometrická řada $1 + q + q^2 + \ldots + q^n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1} = \begin{cases} \frac{1}{1-q}, q \in (1, -1) \\ \nexists, q \notin (1, -1) \end{cases}$.
- Harmonická řada $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$, řada diverguje.
- Řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1$, řada je konvergentní.
- Řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} = e$ (Taylorův polynom e^x v bodě 0).
- Řada $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{2n-1} = \frac{\pi}{4}$ (Taylorův polynom $atanx$ v bodě 0).

Věta (nutná podmínka konvergence řady): Konverguje-li řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, poté $\lim a_n = 0$.

Z předpokladu platí, že $\lim s_n = S \in \mathbb{R}$ existuje. Poté $\lim a_n = \lim (s_n - s_{n-1}) = \lim s_n - \lim s_{n-1} = S - S = 0$.■

Věta: Konverguje-li řada $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$, poté konverguje i řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Z předpokladu platí $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = S \in \mathbb{R}$. Zavedeme $\forall n \in \mathbb{N} : a_n^+ = \max\{a_n, 0\}, a_n^- = \max\{-a_n, 0\}$. Platí, že $a_n^+ \geq 0$ a $a_n^- \geq 0$. Poté $s_n = a_1 + \ldots a_n = a_1^+ - a_1^- + \ldots + a_n^+ - a_n^- = s_n^+ - s_n^-$. Dále $\lim s_n = \lim s_n^+ - \lim s_n^-$, tudíž pokud s_n^+ a s_n^- jsou konvergentní, poté i s_n je konvergentní. S využitím věty o limitě neklesající a shora omezené posloupnosti ukažme, že posloupnost s_n^+ je neklesající díky definici a_n^+ a shora omezená $s_n^+ = a_1^+ + \ldots + a_n^+ \leq |a_1| + \ldots + |a_n| \to S \leq S$. Podobně $s_n^- = a_1^- + \ldots + a_n^- \leq |a_1| + \ldots |a_n| \to S \leq S$. Proto platí, že s_n^+ a s_n^- jsou konvergentní.■

Definice (absolutní konvergence): Konverguje-li řada $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$, poté řadu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nazýváme **absolutně konvergentní řadou**. Konverguje-li řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, ale řada $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ diverguje, poté řadu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nazýváme **neabsolutně konvergentní řadou**.

Řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ je neabsolutně konvergentní.

Kritéria absolutní konvergence

Poznámka: Píšeme-li „$V(n)$ platí pro všechna dost velká $n \in \mathbb{N}$“, myslíme „$\exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0, n \in \mathbb{N} : V(n)$“.

Věta (srovnávací kritérium): Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ jsou takové řady, že:

1. $|a_n| \leq b_n$, pro všechna dost velká $n \in \mathbb{N}$;
2. řada $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ je konvergentní;

poté $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje absolutně.

Díky druhému předpokladu platí, že $s_n^b = \sum_{k=1}^{n} b_k$ je shora omezená. Určeme $s_n^a = \sum_{k=1}^{n} |a_k|$, poté $s_n^a \leq s_n^b + c, c \in \mathbb{R}$ a s_n^a je také shora omezená. Navíc s_n^a je neklesající a tudíž s_n^a je konvergentní.■

Důsledek (věta o srovnávacím kritériu): Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ jsou takové řady, že:

1. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty$;
2. $0 \leq a_n \leq b_n$ pro všechna dost velká $n \in \mathbb{N}$;

poté $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = +\infty$.

- Řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.
  Předpokládejme, že řada konverguje a srovnejme s řadou $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)}$. Platí, že $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2 : \frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n(n-1)}$. Musíme ukázat, že $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)}$ konverguje. K tomu využijeme rovnost s konvergentní řadou $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$.
  Řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ je absolutně konvergentní.
- Řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$.
  Předpokládejme, že řada diverguje a srovnejme s řadou $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty$. Platí, že $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 1 : \frac{1}{\sqrt{n}} \geq$

$\frac{1}{n}$.
Řada $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}=+\infty$ je divergentní.

Věta (d'Alambertovo kritérium): Mějme $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ takovou řadu, že:

1. pokud platí $\exists q\in\mathbb{R}^+, q<1: \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\leq q$ pro všechna dost velká $n\in\mathbb{N}$, pak $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ je absolutně konvergentní.
2. pokud platí $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|>1$ pro všechna dost velká $n\in\mathbb{N}$, pak $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ je divergentní.

Dokažme první tvrzení: z předpokladu platí, že $|a_{n+1}|\leq q\cdot|a_n|$, tudíž $s=|a_1|+\ldots+|a_{n_0}|+|a_{n_0+1}|+\ldots\leq|a_1|+\ldots+|a_{n_0}|+q\,|a_{n_0}|+q^2\,|a_{n_0}|+\ldots=|a_1|+\ldots+|a_{n_0}|+|a_{n_0}|\cdot\frac{q}{1-q}<\infty$ a řada $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ je absolutně konvergentní. Dokažme druhé tvrzení: $\forall n\geq n_0:|a_{n+1}|>|a_n|>0\Rightarrow\lim a_n\neq 0$ a řada $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ je divergentní.■

Důsledek (limitní d'Alambertovo kritérium): Mějme $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$. Pokud $\lim\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|<1$, pak $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ je absolutně konvergentní. Je-li $\lim\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|>1$, pak $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ je divergentní.

Pro první tvrzení využijme d'Alambertovo kritérium 1 s $q\in\left(\lim\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|,1\right)$. Pro druhé tvrzení využijme d'Alambertovo kritérium 2 s podmínkou, že pro všechna dost velká $n\in\mathbb{N}$ platí $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|>1$.

- Řada $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}$.
  Využijme limitní d'Alambertovo kritérium: $\lim\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim\frac{\left(\frac{((n+1)!)^2}{(2n+2)!}\right)}{\frac{(n!)^2}{(2n)!}}=\lim\frac{\left(((n+1)!)^2\right)}{(2n+2)!}\cdot\frac{(2n)!}{(n!)^2}=\lim\frac{n+1}{2(2n+1)}=\frac{1}{4}<1.$
  Řada $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}$ je absolutně konvergentní.
- Řada $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n}$.
  Využijme limitní d'Alambertovo kritérium: $\lim\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim\frac{\frac{2^{n+1}}{n+1}}{\frac{2^n}{n}}=\lim\frac{2n}{n+1}=2>1.$
  Řada $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n}=+\infty$ je divergentní.

Věta (Cauchyho kritérium): Mějme $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ takovou řadu, že:

1. pokud platí $\exists q\in\mathbb{R}^+, q<1:\sqrt[n]{|a_n|}\leq q$ pro všechna dost velká $n\in\mathbb{N}$, pak $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ je absolutně konvergentní.
2. pokud platí $\sqrt[n]{|a_n|}\geq 1$ pro všechna dost velká $n\in\mathbb{N}$, pak $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ je divergentní.

Dokažme první tvrzení: z předpokladu platí, že $|a_n|\leq q^n$, tudíž $s=|a_1|+\ldots+|a_{n_0}|+|a_{n_0+1}|+\ldots\leq|a_1|+\ldots+|a_{n_0-1}|+q^{n_0}+q^{n_0+1}+\ldots=|a_1|+\ldots+q^n\cdot\frac{1}{1-q}<\infty$ a řada $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ je absolutně konvergentní. Dokažme druhé tvrzení: $\forall n\geq n_0:|a_n|>1\Rightarrow\lim a_n\neq 0$ a řada $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ je divergentní.■

Důsledek (limitní Cauchyho kritérium): Mějme $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$. Pokud $\lim\sqrt[n]{|a_n|}<1$, pak $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ je absolutně konvergentní. Je-li $\lim\sqrt[n]{|a_n|}>1$, pak $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ je divergentní.

- Řada $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n-1}{n^2}\right)^n$.
  Využijme limitní Cauchyho kritérium: $\lim\sqrt[n]{\left(\frac{n-1}{n^2}\right)^n}=\lim\frac{n-1}{n^2}=0<1.$

Řada $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n-1}{n^2}\right)^n$ je absolutně konvergentní.

- Řada $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n^2}$.
  Využijme limitní Cauchyho kritérium: $\lim\sqrt[n]{\frac{2^n}{n^2}}=\lim\frac{2}{\left(\sqrt[n]{n}\right)^2}=2>1.$
  Řada $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n^2}=+\infty$ je divergentní.

Věta (integrální kritérium): Nechť f je nezáporná, nerostoucí a spojitá funkce v intervale $\langle 1,\infty)$. Nechť dále platí, že $\forall n\in\mathbb{N}:|a_n|=f(n)$. Poté řada $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ absolutně konverguje právě tehdy, konverguje-li $\int_1^{\infty}f(x)dx$ (tzn. že $\lim_{t\to\infty}\int_1^t f(x)dx$ existuje a je konečná).

Uvědomme si, že existují limity $\lim s_n\in\mathbb{R}^*$ a $\lim_{t\to\infty}\int_1^t f(x)dx\in\mathbb{R}^*$. Dokažme $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|<\infty\Leftrightarrow\int_1^{\infty}f(x)dx<\infty$. Z předpokladů $s_n=\sum_{k=1}^{n}|a_k|=\sum_{k=1}^{n}f(k)\geq\int_1^{n+1}f(x)dx\geq\sum_{k=2}^{n+1}f(k)=\sum_{k=2}^{n+1}|a_k|=s_{n+1}-|a_1|$. Přejdeme-li $n\to\infty$: $\sum_{k=1}^{\infty}|a_k|\geq\int_1^{\infty}f(x)dx\geq\sum_{k=1}^{\infty}|a_k|-|a_1|$.■

- Řada $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$.
  Využijme integrální kritérium: $\lim_{t\to\infty}\int_1^t\frac{1}{x}dx=\lim_{t\to\infty}\ln t=\infty$.
  Řada $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=\infty$ je divergentní.

- Řada $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$.
  Využijme integrální kritérium: $\lim_{t\to\infty}\int_1^t\frac{1}{x^2}dx=\lim_{t\to\infty}\left(-\frac{1}{t}+1\right)=1.$
  Řada $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ je konvergentní.

Kritéria neabsolutní konvergence

Věta (Leibnizovo kritérium): Nechť posloupnost (a_n) je taková, že platí:

1. $\forall n\in\mathbb{N}: a_n\geq 0$;
2. $\forall n\in\mathbb{N}: a_n\geq a_{n+1}$;
3. $\lim a_n=0$;

poté řada $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot a_n$ je konvergentní.

Označme si posloupnost sudých částečných součtů $s_n^*:=s_{2n}=\sum_{k=1}^{2n}(-1)^{k+1}\cdot a_k$. Víme, že $s_{n+1}^*=s_{2n+2}=s_{2n}-a_{2n+1}+a_{2n+2}\geq s_n^*$, neboť $a_{2n+1}\geq a_{2n+2}\Rightarrow 0\geq a_{2n+2}-a_{2n+1}$. Dále $s_n^*=s_{2n}=a_1-a_2+a_3-\cdots+a_{2n-1}-a_{2n}=a_1-(a_2-a_3)-\cdots-(a_{2n-2}-a_{2n-1})-a_{2n}$. Každá s postupných závorek je nezáporná, a_{2n} je také nezáporné, tudíž $s_n^*\leq a_1$. Jedná se o neklesající, shora omezenou posloupnost, tudíž $\lim s_n^*=s\in\mathbb{R}$. Označme si posloupnost lichých částečných součtů $s_n^{**}=s_{2n+1}=\sum_{k=1}^{2n+1}(-1)^{k+1}\cdot a_k$. Víme, že $s_n^{**}=s_n^*+a_{2n+1}$ a $\lim s_n^{**}=\lim s_n^*+\lim a_{n2+1}=s+0=s\in\mathbb{R}$.■

- Řada $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$.
  Členy $a_n=\frac{1}{n}$ jsou nezáporné, nerostoucí a $\lim\frac{1}{n}=0$. Jsou splněny předpoklady Leibnizova kritéria.
  Řada $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$ je konvergentní.

- Řada $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{n+1}{n}$.
  Členy $a_n=\frac{n+1}{n}$ jsou nezáporné, nerostoucí, avšak $\lim\frac{n+1}{n}=1$, tudíž nejsou splněny předpoklady

Leibnizova kritéria. Neboť $\lim (-1)^{n+1} \cdot \frac{n+1}{n}$ neexistuje (posloupnost lichých a sudých členů má různou limitu), není splněna nutná podmínka konvergence.
Řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ je divergentní.

Věta (Abelovo-Dirichletovo kritérium): Nechť posloupnost (a_n) je monotónní. Platí-li jedna z následujících podmínek:

1. posloupnost (a_n) je omezená a řada $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ je konvergentní. (Abelovo kritérium.)
2. $\lim a_n = 0$ a posloupnost částečných součtů řady $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ je omezená. (Dirichletovo kritérium.)

Poté řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot b_n$ je konvergentní.

- Řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$.
  Využijme Dirichletovo kritérium: $a_n = \frac{1}{n}$ (posloupnost je monotónní a $\lim \frac{1}{n} = 0$) a $b_n = (-1)^n$ (posloupnost částečných součtů $-1 \leq \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \leq 0$ je omezená).
  Řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ je konvergentní.
- Řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 \cdot \sin n}{(n^2+1) \cdot 2^n}$.
  Využijeme Abelovo kritérium: $a_n = \frac{n^2}{n^2+1}$ (posloupnost je monotónní, kladná, shora omezená) a $b_n = \frac{\sin n}{2^n}$ (absolutní konvergenci ukažme srovnávacím kritériem: $\frac{|\sin n|}{2^n} \leq \frac{1}{2^n}, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1$).
  Řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 \cdot \sin n}{(n^2+1) \cdot 2^n}$ je konvergentní.
- Řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cdot \sin \frac{n \cdot \pi}{4}$.
  Využijme Dirichletovo kritérium; $a_n = \frac{1}{n}$ (posloupnost je monotónní a $\lim \frac{1}{n} = 0$) a $b_n = \sin \frac{n \cdot \pi}{4}$ (platí $0 \leq \sum_{k=1}^{n} \sin \frac{k \cdot \pi}{4} \leq 1 + \sqrt{2}$).
  Řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cdot \sin \frac{n \cdot \pi}{4}$ je konvergentní.

Odhad zbytku řady

Mějme řadu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Řadu $a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k$ nazveme **zbytkem řady $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ po n-tém členu**. Pro konvergentní řady je užitečné odhadnout součet jejího zbytku. Platí, že $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = s_1 \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k = s_2 \in \mathbb{R}$.

Součet zbytku řady můžeme odhadnout pomocí několika metod:

- pomocí srovnávacího kritéria ($\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} b_k = s$);
- pomocí integrálního kritéria ($\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k \leq \int_{n}^{\infty} f(x) dx$);
- pomocí limitního d'Alambertova kritéria – nechť $q = \frac{a_{n+1}}{a_n}$, poté $r_n \leq |a_n| \cdot \frac{q}{1-q}$;
- pomocí Leibnizova kritéria ($\sum_{k=n+1}^{\infty} (-1)^{k+1} \cdot a_k \leq a_{2n+1}$; je-li n sudé, $\sum_{k=n+1}^{\infty} (-1)^{k+1} \cdot a_k \geq 0$; je-li n liché, $\sum_{k=n+1}^{\infty} (-1)^{k+1} \cdot a_k \leq 0$).
- Odhadněte součet $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!}$.
  Podle limitního d'Alambertova kritéria je řada absolutně konvergentní.
  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \sum_{n=5}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!}$ a využijeme srovnávací kritérium pro odhad zbytku řady

$\sum_{n=5}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} \leq \sum_{n=5}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}} = \frac{1}{8}$.
Tudíž $\frac{8}{3} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} \leq \frac{8}{3} + \frac{1}{8} \approx e$.

- Odhadněte součet $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.
  Podle integrálního kritéria je řada absolutně konvergentní. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{1} + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \sum_{n=5}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.
  Využijeme integrální kritérium pro odhad zbytku řady: $0 \leq \sum_{n=5}^{\infty} \frac{1}{n^2} \leq \int_4^{\infty} \frac{1}{x^2} dx = \lim_{t \to \infty} \left[-\frac{1}{x}\right]_4^t = \lim_{t \to \infty} \left(-\frac{1}{t} + \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4}$.
  Tudíž $\frac{205}{144} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \leq \frac{205}{144} + \frac{1}{4}$.

- Odhadněte součet $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$.
  Podle Leibnizova kritéria je řada konvergentní. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} = \frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \sum_{n=5}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$.
  Využijeme Leibnizovo kritérium pro odhad zbytku řady: $0 \leq \sum_{n=5}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} \leq \frac{1}{9}$.
  Tudíž $\frac{76}{105} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} \leq \frac{76}{105} + \frac{1}{9}$.

Přerovnávání řad

Definice: Mějme prosté zobrazení φ: $\mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}$. Řadu $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\varphi(n)}$ nazveme **přerovnáním řady** $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Věta (komutativita přerovnání řady): Konverguje-li $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolutně, konverguje absolutně i řada přerovnaná a má stejný součet. Konverguje-li $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ neabsolutně, přerovnaná řada má libovolný součet či přerovnaná řada byla divergentní.

Vektorové funkce

Motivační příklady

- Mějme hmotný bod v gravitačním poli ($g = 10ms^{-2}$). Pohybujeme se pod úhlem $\varphi = \frac{\pi}{4}$. Známe $v_0, t_0, (x, y)$ a hledáme $v, t, (x, y)$. Tento příklad můžeme řešit funkcí $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : f(t, v) = \left[\frac{\sqrt{2}}{2}vt, \frac{\sqrt{2}}{2}vt - 10t^2\right]^T$. Pokud $c = [t_0, v_0]$, hledáme $c + h = [t, v]$. Víme, že $f(c+h) \approx f(c) + df_c(h) = \left[\frac{\sqrt{2}}{2}v_0t_0, \frac{\sqrt{2}}{2}v_0t_0 - 5t_0^2\right]^T +$
  $\left[{f_1}'_t\left(t_0, v_0\right)h_1 + {f_1}'_v\left(t_0, v_0\right)h_1, {f_2}'_t\left(t_0, v_0\right)h_2 + {f_2}'_v\left(t_0, v_0\right)h_2\right]^T = \left[\frac{\sqrt{2}}{2}v_0t_0, \frac{\sqrt{2}}{2}v_0t_0 - 5t_0^2\right]^T + \begin{bmatrix} {f_1}'_t & {f_1}'_v \\ {f_2}'_t & {f_2}'_v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix}$.

Základní pojmy

- Symbolem $\mathbb{R}^n$ rozumíme metrický a vektorový prostor. Prvky $\mathbb{R}^n$ jsou uspořádané n-tice reálných čísel $x=[x_1,\ldots,x_n]$, **euklidovská metrika** $\rho(x,y) \coloneqq \sqrt{\left(x_1-y_1\right)^2+\ldots+\left(x_n-y_n\right)^2}$
- Zavádíme **normu** prvku x:$\|x\|=\rho(x,0)=\sqrt{x_1^2+\ldots x_n^2}$. Víme, že $\rho(x,y)=\|x-y\|$. Zavádíme **okolí bodu $\mathbf{x}$ o poloměru** ε: $U(x,\varepsilon) \coloneqq \{y \in \mathbb{R}^n : \rho(x,y)<\varepsilon\}$ a **prstencové okolí bodu $\mathbf{x}$ o poloměru** ε: $P(x,\varepsilon)=U(x,\varepsilon) \setminus \{x\}$.
- Pro **limitu $\mathbf{n}$-rozměrné posloupnosti** a_k platí $\lim a_k=\lim\left[a_{k_1},a_{k_2},\ldots,a_{k_n}\right]=\left[a_1,a_2,\ldots,a_n\right]=a \in \mathbb{R}^n \Leftrightarrow \lim \rho\left(a_k,a\right)=0 \Leftrightarrow \|a_k-a\|=0 \Leftrightarrow \forall i \in\{1,\ldots,n\}: \lim a_{k_i}=a_i$.

Definice: **Vektorovou funkcí** z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}^m$ (reálnou m-rozměrnou funkcí n reálných proměnných) nazýváme každé zobrazení $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, tzn. každému $x=[x_1,\ldots,x_n] \in D_f \subset \mathbb{R}^n$ přiřadí právě jednu hodnotu $f(x)=[f_1(x),\ldots,f_m(x)] \in H_f \subset \mathbb{R}^m$. Množinu D_f nazýváme **definiční obor funkce** f, množinu H_f nazýváme **oborem hodnot funkce** f a $f_1,..,f_m$ nazýváme **složky vektorové funkce** $f:\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$.

- Pokud $m=n$, nazýváme funkci f **vektorovým polem**. Je-li $m=1$, nazýváme funkce f **skalárním polem**.

Úmluva: Je-li $f:\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ dána pouze svým předpisem, chápeme D_f jako množinu všech $x \in \mathbb{R}^n$, pro které má předpis smysl.

- Nechť $f=[f_1,\ldots,f_n]:\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$. Poté $D_f=\bigcap_{i=1}^m D_{f_i}$.
- Určete D_f pro $f:\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3: f(x,y)=\left[\sqrt{x+y}, x^2+1, x \cdot \sqrt{y}\right]$.
  Víme, že $D_f=\left\{[x,y] \in \mathbb{R}^2 : x+y \geq 0\right\} \cap \mathbb{R}^2 \cap \left\{[x,y] \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0\right\}=\left\{[x,y] \in \mathbb{R}^2 : y \geq -x \wedge y \geq 0\right\}$.

Definice: Mějme $f,g:\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ a $c\in \mathbb{R}$. Funkce $f+g, f-g, c \cdot f$ definujeme takto:

- $(f+g)(x) \coloneqq f(x)+g(x)$;
- $(f-g)(x) \coloneqq f(x)-g(x)$;
- $(c \cdot f)(x) \coloneqq c \cdot f(x)$.

Limita a spojitost vektorové funkce

Limita vektorové funkce

Mějme $f:\mathbb{R}^n\rightarrow \mathbb{R}$,$x_0 \in \mathbb{R}^n, a \in \mathbb{R}^*$. Poté platí $x_0 \neq x_n \rightarrow x_0 \Rightarrow f\left(x_n\right) \rightarrow a \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)=a$.

Definice: Řekneme, že funkce $f:\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ **má v bodě $\mathbf{x_0} \in \mathbb{R}^n$ limitu** $a \in \mathbb{R}^m$ (píšeme $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)=a$), platí-li:

$$x_0 \neq x_k \rightarrow x_0 \Rightarrow \left[f_1\left(x_k\right),\ldots,f_m\left(x_k\right)\right] \rightarrow a=\left[a_1,\ldots,a_m\right]$$

- $\lim_{x \to x_0} f(x) = a \Rightarrow \exists P(x_0) \subset D_f$.

Věta: Nechť $f(x) = [f_1(x), \dots f_n(x)] : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, x_0 \in \mathbb{R}^n, a \in \mathbb{R}^m$. Poté $\lim_{x \to x_0} f(x) = a \Leftrightarrow \forall i \in \{1, \dots, n\} : \lim_{x \to x_0} f_i(x) = a_i$.

Spojitost vektorové funkce

Mějme $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, x_0 \in \mathbb{R}^n$. Funkce je spojitá v bodě x_0 právě tehdy, když $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Definice: Řekneme, že funkce $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ je **spojitá v bodě $\mathbf{x_0}$** $\in \mathbb{R}^{\mathbf{n}}$, platí-li:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

- Ze spojitosti f v bodě x_0 plyne, že $\exists U(x_0) \subset D_f$.

Řekneme, že funkce $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ je **spojitá v bodě $\mathbf{x_0}$** $\in \mathbb{R}^{\mathbf{n}}$ **vzhledem k $\mathbf{M}$** $\subset \mathbb{R}^{\mathbf{n}}$, platí-li:

$$\forall i \in \mathbb{N} : x_{ki} \in M : x_0 \neq x_k \to x_0 \Rightarrow f(x_k) \to f(x_0)$$

Řekneme, že funkce $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ je **spojitá na množině $\mathbf{M}$** $\subset \mathbb{R}^{\mathbf{n}}$, platí-li, že pro všechna $x_0 \in M$ je f spojitá v bodě x_0 vzhledem k množině M.

Řekneme, že funkce $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ je **spojitá**, platí-li, že je spojitá na množině D_f.

Věta: Nechť $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, x_0 \in M \subset \mathbb{R}^n$. Poté f je spojitá v x_0 (spojitá v x_0 vzhledem k M, spojitá na M, spojitá) právě tehdy, platí-li:

$\forall i \in \{1, .., m\} : f_i$ je spojitá v x_0 (spojitá v x_0 vzhledem k M, spojitá na M, spojitá).

Diferenciál vektorové funkce

Pro $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ platí $f(c+h) = f(x) + df(c) + \omega(h), \lim_{\|h\| \to 0} \frac{\omega(h)}{\|h\|} = 0$. Pro diferenciál vektorové funkce v bodě c platí $df_c(h) = f'(c)h = \begin{bmatrix} f'_{1_{x_1}}(c) & \cdots & f'_{1_{x_n}}(c) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f'_{m_{x_1}}(c) & \cdots & f'_{m_{x_n}}(c) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{bmatrix} = [df_1(c), \dots, df_m(c)]^T$.