Matematická analýza 3
Ing. Petr Beremlijski, Ph.D.

*Vojtěch Zicha**

16. září 2013 – 16. prosince 2013

Obsah

1 Číselné řady 1
1.1 Základní pojmy 1
1.2 Kritéria absolutní konvergence . . . 2
1.3 Kritéria neabsolutní konvergence . . 4
1.4 Odhad zbytku řady 5
1.5 Přerovnávání řad 5

2 Vektorové funkce 5
2.1 Základní pojmy 5
2.2 Limita a spojitost vektorové funkce . 6
2.3 Diferenciál vektorové funkce 7

3 Křivky a křivkový integrál 7
3.1 Křivky v $\mathbb{R}^m$ 7
3.2 Křivkový integrál 8

1 Číselné řady

Přednáška 1
16. září 2013

1.1 příklad. Achilles běží rychlostí 10m/s, želva běží rychlostí 1m/s. Na startu má želva náskok 1m. Za jak dlouho se setkají a kde?

Úloha vede na součet řady $100 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{10}\right)^n$.

1.2 příklad. Jaká je plocha Sierpinského koberce o hraně 1?

Úloha vede na součet řady $\frac{1}{9} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{8}{9}\right)^{n-1}$.

1.1 *Základní pojmy*

1.3 definice. **Řadou (reálných čísel)** rozumíme výraz $a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots := \sum_{n=1}^{\infty} a_n$, kde pro každé $n \in \mathbb{N}$ je $a_n \in \mathbb{R}$, tj, (a_n) je posloupností reálných čísel. Číslo a_n nazýváme **n-tým členem řady**. Posloupnost $(s_n) := a_1 + \cdots + a_n$ nazýváme **posloupností částečných součtů řady**. Existuje-li $\lim s_n = s \in \mathbb{R}^*$, nazýváme ji **součtem řady** a označíme ji $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Pokud s existuje a platí, že $s \in \mathbb{R}$, pak řekneme, že řada **konverguje**. Pokud $s \in \{+\infty, -\infty\}$ nebo s neexistuje, pak řekneme, že řada **diverguje**.

1.4 tvrzení. *Známe několik příkladů řad:*

- *Aritmetická řada* $1 + 2 + \cdots + n + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} n = \infty$,
- *Geometrická řada* $1 + q + q^2 + \cdots + q^n + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} q^{n=1} = \begin{cases} \frac{1}{1-q} & q \in (1, -1) \\ \nexists & q \notin (1, -1) \end{cases}$,
- *Harmonická řada* $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$,
- *Řada* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1$,
- *Řada* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} = e$ *(Taylorův polynom e^x v bodě 0),*
- *Řada* $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{2n-1} = \frac{\pi}{4}$ *(Taylorův polynom* $\arctan x$ *v bodě 0).*

1.5 věta (nutná podmínka konvergence řady). *Konverguje-li řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, poté $\lim a_n = 0$.*

Důkaz. Z předpokladu platí, že $\lim s_n = s \in \mathbb{R}$ existuje. Poté $\lim a_n = \lim (s_n - s_{n-1}) = \lim s_n - \lim s_{n-1} = s - s = 0$. □

1.6 věta. *Konverguje-li řada $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$, poté konverguje i řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.*

Důkaz. Z předpokladu platí, že $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = s \in \mathbb{R}$. Zavedeme $\forall n \in \mathbb{N} : a_n^+ = \max\{a_n, 0\}, a_n^- = \max\{-a_n, 0\}$. Platí, že $a_n^+ \geq 0$ a $a_n^- \geq 0$. Poté $s_n = a_1 + \cdots + a_n = a_1^+ - a_1^- + \cdots + a_n^+ - a_n^- = s_n^+ - s_n^-$. Dále $\lim s_n = \lim s_n^+ - \lim s_n^-$, tudíž pokud s_n^+ a s_n^- jsou konvergentní, poté i s_n je konvergentní. S využitím věty o limitě neklesající a shora omezené posloupnosti ukažme, že posloupnost s_n^+ je neklesající díky definici a_n^+ a shora omezená $s_n^+ = a_1^+ + \cdots + a_n^+ \leq |a_1| + \cdots + |a_n| \to s \leq s$. Podobně $s_n^- = a_1^- + \cdots + a_n^- \leq |a_1| + \cdots +$

*vojtech.zicha.st@vsb.cz

$|a_n| \to s \leq s$. Proto platí, že s_n^+ a s_n^- jsou konvergentní. $\square$

Přednáška 2
17. září 2013

1.7 definice (absolutní konvergence). Konverguje-li řada $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$, poté řadu $\sum 1 a_n$ nazýváme **absolutně konvergentní řadou**. Konverguje-li řada $\sum 1 a_n$, ale řada $\sum 1 |a_n|$ diverguje, poté řadu $\sum 1 a_n$ nazýváme **neabsolutně konvergentní řadou**.

1.2 *Kritéria absolutní konvergence*

1.8 poznámka. Píšeme-li „$V(n)$ platí pro všechna dost velká $n \in \mathbb{N}$", myslíme „$\exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0, n \in \mathbb{N} : V(n)$".

1.9 věta (srovnávací kritérium). *Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ jsou takové řady, že*

1. *$|a_n| \leq b_n$, pro všechna dost velká $n \in \mathbb{N}$,*
2. *řada $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ je konvergentní,*

poté $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konverguje absolutně.

Důkaz. Díky druhému předpokladu platí, že $s_n^b = \sum_{k=1}^{n} b_k$ je shora omezená. Určeme $s_n^a = \sum_{k=1} n|a_k|$, poté $s_n^a \leq s_n^b + c, c \in \mathbb{R}$ a s_n^a je také shora omezená. Navíc s_n^a je neklesající a tudíž s_n^a je konvergentní. $\square$

1.10 důsledek. *Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ jsou takové řady, že:*

1. *$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty$,*
2. *$0 \leq a_n \leq b_n$ pro všechna dost velká $n \in \mathbb{N}$,*

poté $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = +\infty$.

1.11 příklad. Vyšetřeme řadu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$. Předpokládejme, že řada konverguje a srovnejme ji s řadou $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)}$. Platí, že $\forall n \in \mathbb{N} : n \geq 2 : \frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n(n-1)}$. Musíme ukázat, že $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)}$ konverguje. K tomu využijeme rovnost s konvergentní řadou $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$. Řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ je absolutně konvergentní.

1.12 příklad. Vyšetřeme řadu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$. Předpokládejme, že řada diverguje a srovnejme s řadou $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty$. Platí, že $\forall n \in \mathbb{N} : n \geq 1 : \frac{1}{\sqrt{n}} \geq \frac{1}{n}$. Řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = +\infty$ je divergentní.

1.13 věta (d'Alambertovo kritérium). *Mějme takovou řadu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, že:*

1. *pokud platí $\exists q \in \mathbb{R}^*, q < 1 : \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq q$ pro všechna dost velká $n \in \mathbb{N}$, pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je absolutně konvergentní.*
2. *pokud platí $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| > 1$ pro všechna dost velká $n \in \mathbb{N}$, pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je divergentní.*

Důkaz.

1. Z předpokladu platí, adf ad že $|a_{n+1}| \leq q \cdot |a_n|$, tudíž $s = |a_1| + \cdots + |a_{n_0}| + |a_{n_0+1}| + \cdots \leq |a_1| + \cdots + |a_{n_0}| + q\,|a_{n_0}| + q^2\,|a_{n_0}| + \cdots = |a_1| + \cdots + |a_{n_0}| + |a_{n_0}| \cdot \frac{q}{1-q} < +\infty$ a řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je absolutně konvergentní.
2. $\forall n \geq n_0 : |a_{n+1}| > |a_n| > 0 \Rightarrow \lim a_n \neq 0$ a řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je divergentní.

$\square$

1.14 důsledek (limitní d'Alambertovo kritérium). *Mějme $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Pokud $\lim \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$, pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je absolutně konvergentní. Je-li $\lim \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| > 1$, pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je divergentní.*

Důkaz.

1. Využijme d'Alambertovo kritérium 1 s $q \in \left(\lim \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|, 1\right)$.
2. Využjme d'Alambertovo kritérium 2 s podmínkou, že pro všechna dost velká $n \in \mathbb{N}$ platí $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| > 1$.

$\square$

1.15 příklad. Vyšetřeme řadu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$. Využijeme limitní d'Alambertovo kritérium $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim \frac{((n+1)!)^2}{(2n+2)!} \cdot \frac{(2n)!}{(n!)^2} = \lim \frac{n+1}{2(2n+1)} = \frac{1}{4} < 1$. Řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$ je absolutně konvergentní.

1.16 PŘÍKLAD. Vyšetřeme řadu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n}$. Využijeme limitní d'Alambertovo kritérium $\lim a_{n+1}a_n = \lim \frac{2^{n+1}}{n+1} \cdot \frac{n}{2^n} = \lim \frac{2n}{n+1} = 2 > 1$. Řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n} = +\infty$ je divergentní.

1.17 VĚTA (Cauchyho kritérium). *Mějme takovou řadu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, že*

1. *pokud platí $\exists q \in \mathbb{R}^+, q < 1 : \sqrt[n]{|a_n|} \leq q$ pro všechna dost velká $n \in \mathbb{N}$, pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je absolutně konvergentní;*
2. *pokud platí $\sqrt[n]{|a_n|} \geq 1$ pro všechna dost velká $n \in \mathbb{N}$, pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je divergentní.*

Důkaz.
1. Z předpokladu platí, že $|a_n| \leq q^n$, tudíž $s = |a_a| + \cdots + |a_{n_0}| + |a_{n_0+1}| + \cdots \leq |a_1| + \cdots + |a_{n_0-1}| + q^{n_0} + q^{n_0+1} + \cdots = |a_1| + \cdots + q^n \cdots \frac{1}{1-q} \leq \infty$ a řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je absolutně konvergentní.
2. $\forall n \geq n_0 : |a_n| > 1 \Rightarrow \lim a_n \neq 0$ a řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je divergentní.

$\square$

1.18 DŮSLEDEK (limitní Cauchyho kritérium). *Mějme $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ takovou řadu, že:*

1. *pokud $\lim \sqrt[n]{|a_n|} < 1$, pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je absolutně konvergentní.*
2. *pokud $\lim \sqrt[n]{|a_n|} > 1$, pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je divergentní.*

1.19 PŘÍKLAD. Vyšetřeme řadu $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-1}{n^2}\right)^n$. Využijme limitní Cauchyho kritérium: $\lim \sqrt[n]{\left(\frac{n-1}{n^2}\right)^n} = \lim \frac{n-1}{n^2} = 0 < 1$. Řada $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-1}{n^2}\right)^n$ je absolutně konvergentní.

1.20 PŘÍKLAD. Vyšetřeme řadu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^2}$. Využijeme limitní Cauchyho kritérium: $\lim \sqrt[n]{\frac{2^n}{n^2}} = \lim \frac{2}{\left(\sqrt[n]{n}\right)^2} = 2 > 1$. Řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^2}$ je divergentní.

Přednáška 3
23. září 2013

1.21 VĚTA (integrální kritérium). *Nechť f je nezáporná, neroustoucí a spojitá funkce na intervalu $\langle 1, \infty)$. Nechť dále platí, že $\forall n \in \mathbb{N} : |a_n| = f(n)$. Poté řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolutně konverguje právě tehdy, konverguje-li $\int_1^{\infty} f(x)\mathrm{d}x$ (tzn. $\lim_{t\to\infty} \int_1^{\infty} f(x)\mathrm{d}x$ existuje a je konečná).*

Důkaz. Uvědomme si, že existují limity $\lim s_n \in \mathbb{R}^*$ a $\lim_{t\to\infty} \int_1^{\infty} f(x)\mathrm{d}x \in \mathbb{R}^*$. Dokažme $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty \Leftrightarrow \int_1^{\infty} f(x)\mathrm{d}x < \infty$. Z předpokladů $s_n = \sum_{k=1}^{n} |a_k| = \sum_{k=1}^{n} f(k) \geq \int_1^{n+1} f(x)\mathrm{d}x \geq \sum_{k=2}^{n+1} f(k) = \sum_{k=2}^{n+1} |a_k| = s_{n+1} - |a_1|$. Přejdeme-li $n \to \infty$: $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| \geq \int_1^{\infty} f(x)\mathrm{d}x \geq \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| - |a_1|$. $\square$

1.22 PŘÍKLAD. Vyšetřeme řadu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$. Využijme integrální kritérium: $\lim_{t\to\infty} \int_1^t \frac{1}{x}\mathrm{d}x = \lim_{t\to\infty} \ln t = \infty$. Řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ je divergentní.

1.23 PŘÍKLAD. Vyšetřeme řadu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$. Využijme integrální kritérium: $\lim_{t\to\infty} \int_1^t \frac{1}{x^2}\mathrm{d}x = \lim_{t\to\infty} \left(-\frac{1}{t} + 1\right) = 1$. řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ je absolutně konvergentní.

1.24 CVIČENÍ. 1. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$, 2. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n}\right)^n$, 3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{3n+2}$, 4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\cos n|}{5^n}$, 5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)}{2^n}$, 6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2}{n^2+3n}$, 7. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$, 8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+\cdots+n}{n^3}$, 9. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2013}{n^2}$, 10. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \cdot n!}{3^n}$, 11. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{n^2+1}$, 12. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{\frac{1}{n}}}{n^2}$, 13. $\sum_{n=1}^{\infty} \arcsin^n \frac{1}{n}$, 14. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^3}$, 15. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+1}{3n-1}\right)^n$, 16. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$, 17. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\cdot 5\cdot 8\cdot \cdots \cdot (3n-1)}{1\cdot 5\cdot 9\cdot \cdots \cdot (4n-3)}$, 18. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5^n}$, 19. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{3^n}$, 20. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)!}{n!\cdot 2^n}$, 21. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$, 22. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\left(3+\frac{1}{n}\right)^n}$, 23. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n-1}{9n+1}\right)^{2n}$, 24. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\sqrt{n}}$.

Důkaz. 1. diverguje (itegrální kritérium), 2. abs. konverguje (limitní Cauchyho kritérium), 3. diverguje (limitní d'Alambertovo kritérium), 4. abs. konverguje (srovnávací kritérium, srovnejme s řadou $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5^n}$ - abs. konverguje podle limitního d'Alambertova kritéria), 5. abs. konverguje (limitní d'Alambertovo kritérium), 6. diverguje (nutná podmínka konvergence), 7. abs. konverguje (limitní d'Alambertovo kritérium), 8. převést na $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{2n^2}$, diverguje (limitní d'Alambertovo kritérium), 9. diverguje (integrální kritérium), 10. diverguje (limitní d'Alambertovo kritérium),

11. diverguje (intergrální kritérium), 12. abs. konverguje (srovnávací kritérium, srovnejme s řadou $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e}{n^2}$ - abs. konverguje podle integračního kritéria, 13. abs. konverguje (limitní Cauchyho kritérium), 14. abs. konverguje (limitní d'Alambertovo kritérium), 15. abs. konverguje (limitní Cauchyho kritérium), 16. abs. konverguje (limitní d'Alambertovo kritérium), 17. abs. konverguje (limitní d'Alambertovo kritérium), 18. abs. konverguje (limitní Cauchyho kritérium), 19. abs. konverguje (limitní d'Alambertovo kritérium), 20. abs. konverguje (limitní d'Alambertovo kritérium), 21. abs. konverguje (limitní Cauchyho kritérium), 22. abs. konverguje (limitní Cauchyho kritérium), 23. abs. konverguje (limitní Cauchyho kritérium), 24. abs. konverguje (integrální kritérium, substituce $x = u^2$). □

1.3 *Kritéria neabsolutní konvergence*

1.25 VĚTA (Leibnizovo kritérium). *Nechť posloupnost (a_n) je taková, že platí:*

1. $\forall n \in \mathbb{N} : a_n \geq 0,$
2. $\forall n \in \mathbb{N} : a_n \geq a_{n+1},$
3. $\lim a_n = 0,$

poté je řada $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot a_n$ je konvergentní.

Důkaz. Označme si posloupnost sudých částečných součtů $s_n^* := s_{2n} = \sum_{k=1}^{2n} (-1)^{k+1} \cdot a_k$. Víme, že $s_{n+1}^* = s_{2n+2} = s_{2n} - a_{2n+1} + a_{2n+2} \geq s_n^*$, neboť $a_{2n+1} \geq a_{2n+2} \Rightarrow 0 \geq a_{2n+2} - a_{2n+1}$. Dále $s_n^* = s_{2n} = a_1 - a_2 + a_3 - \cdots + a_{2n-1} - a_{2n} = a_1 - (a_2 - a_3) - \cdots - (a_{2n-2} - a_{2n-1}) - a_{2n}$. Každá s postupných závorek je nezáporná, a_{2n} je také nezáporné, tudíž $s_n * \leq a_1$. Jedná se o neklesající, shora omezenou posloupnost, tudíž $\lim s_n^* = s \in \mathbb{R}$. Označme si posloupnost lichých částečných součtů $s_n^{**} = s_{2n+1} = \sum_{k=1}^{2n+1} (-1)^{k+1} \cdot a_k$. Víme, že $s_n^{**} = s_n^* + a_{2n+1}$ a $\lim s_n^{**} = \lim s_n^* + \lim a_{2n+1} = s + 0 = s \in \mathbb{R}$. □

1.26 PŘÍKLAD. Vyšetřeme řadu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$. Členy $a_n = \frac{1}{n}$ jsou nezáporné, neroustoucí a $\lim \frac{1}{n} = 0$. Jsou splněny předpoklady Leibnizova kritéria. Řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ je konvergentní.

1.27 PŘÍKLAD. Vyšetřeme řadu $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{n+1}{n}$. Členy $a_n = \frac{n+1}{n}$ jsou nezáporné, nerostoucí, avšak $\lim \frac{n+1}{n} = 1$, tudíž nejsou splněny předpoklady Leibnizova kritéria. Neboť $\nexists \lim (-1)^{n+1} \cdot \frac{n+1}{n}$ (posloupnost lichých a sudých členů má různou limitu), není splněna nutná podmínka konvergence. Řada $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{n+1}{n}$ je divergentní.

1.28 VĚTA (Abelovo kritérium). *Nechť je posloupnost (a_n) monotónní a omezená. Nechť je řada $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergentní. Poté je řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot b_n$ konvergentní.*

1.29 VĚTA (Dirichletovo kritérium). *Nechť je posloupnost (a_n) monotónní a $\lim a_n = 0$. Nechť je posloupnost částečných součtů řady $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ omezená. Poté je řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot b_n$ konvergentní.*

1.30 PŘÍKLAD. Vyšetřeme řadu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$. Využijeme Dirichletovo kritérium: $a_n = \frac{1}{n}$ (posloupnost je monotónní a $\lim \frac{1}{n} = 0$ a $b_n = (-1)^n$ (posloupnost částečných součtů $-1 \leq \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \leq 0$ je omezená). Řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ je konvergentní.

1.31 PŘÍKLAD. Vyšetřeme řadu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 \sin n}{(n^2+1)2^n}$. Využijeme Abelovo kritérium: $a_n = \frac{n^2}{n^2+1}$ (posloupnost je monotónní, kladná, shora omezená) a $b_n = \frac{\sin n}{2^n}$ (absolutní konvergenci ukažme srovnací kritériem $\frac{|\sin n|}{s^n} \leq \frac{1}{2^n}, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1$). Řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 \sin n}{(n^2+1)2^n}$ je konvergentní.

1.32 PŘÍKLAD. Vyšetřeme řadu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cdot \sin \frac{n\pi}{4}$. Využijeme Dirichletovo kritérium, $a_n = \frac{1}{n}$ (posloupnost je monotónní a $\lim \frac{1}{n} = 0$) a $b_n = \sin \frac{n\pi}{4}$ (platí $0 \leq \sum_{k=1}^{n} \sin \frac{k\pi}{4} \leq 1 + \sqrt{2}$). Řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cdot \sin \frac{n\pi}{4}$ je konvergentní.

1.33 CVIČENÍ. 1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{3n-2}$, 2. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{n+2}{n+1}$, 3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$, 4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n \ln n}$,

Důkaz. 1. konverguje (Leibnitzovo kritérium), 2. diverguje (nutná podmínka konvergence), 3. abs. konverguje (integrální kritérium), 4. konverguje (Leibnitzovo kritérium), $\square$

1.4 *Odhad zbytku řady*

Přednáška 4
30. září 2013

1.34 DEFINICE (zbytek řady). Mějme řadu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Řadu $a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k$ nazveme **zbytkem řady $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ po n-tém členu**.

Pro konvergentní řady je užitečné odhadnout součet jejího zbytku. Platí, že $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = s_1 \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k = s_2 \in \mathbb{R}$.

1.35 TVRZENÍ. *Součet zbytku řady můžeme odhadnout pomocí několika metod:*

- *pomocí srovnávacího kritéria ($\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} b_k = s$),*
- *pomocí integrální kritéria ($\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k \leq \int_n^{\infty} f(x)\mathrm{d}x$),*
- *pomocí limitního d'Alambertova kritéria - nechť $q = \frac{a_{n+1}}{a_n}$, poté $r_n \leq |a_n| \cdot \frac{q}{1-q}$,*
- *pomocí Leibnizova kritéria ($\sum_{k=n+q}^{\infty} (-1)^{k+1} \cdot a_k \leq a_{2n+1}$, je-li n sudé, $\sum_{k=n+1}^{\infty} (-1)^{k+1} a_k \geq 0$; je-li n liché, $\sum_{k=n+1}^{\infty} (-1)^{k+1} a_k \leq 0$.*

1.36 PŘÍKLAD. Odhadněme součet $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!}$. Podle limitního d'Alambertova kritéria je řada absolutně konvergentní. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \sum_{n=5}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!}$ a využijeme srovnávací kritérium pro odhad zbytku řady $\sum 5 \frac{1}{(n-1)!} \leq \sum_{n=5}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}} = \frac{1}{9}$.

1.37 CVIČENÍ. 1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}, r_{10} = ?$, 2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}, r_n \leq 10^{-3}, n \geq ?$, 3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^{n-1}}, r_n = ?$, 4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{3^n}, |r_n| \leq 10^{-3}, n \geq ?$.

Důkaz. 1. $0 \leq r_{10} \leq \frac{1}{200}$, 2. $n = \geq 7$, 3. $0 \leq r_n \leq \left|\frac{n}{2^{n-1}}\right| \cdot \frac{n+1}{n-1}$, 4. $|r_n| \leq \frac{1}{3^{n+1}} \leq 10^{-3}, n \geq 6$. $\square$

1.5 *Přerovnávání řad*

1.38 DEFINICE. Mějme prosté zobrazení $\varphi : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}$. Řadu $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\varphi(n)}$ nazveme **přerovnáním řady** $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

1.39 VĚTA (komutativita přerovnání řady). *Konverguje-li $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolutně, konverguje absolutně i řada přerovnaná a má stejný součet. Konverguje-li $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ neabsolutně, přerovnaná řada má libovolný součet či přerovnaná řada je divergentní.*

2 Vektorové funkce

2.1 PŘÍKLAD. Mějme hmotný bod v gravitačním poli ($g = 10\mathrm{m/s}^2$). Pohybujeme se pod úhlem $\varphi = \frac{\pi}{4}$. Známe $v_0, t_0, [x, y]$ a hledáme $v, t, [x, y]$. Tento příklad můžeme řešit funkcí $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2; f(t, v) = \left[\frac{\sqrt{2}}{2}vt, \frac{\sqrt{2}}{2}vt - 10t^2\right]$. Pokud $c = [t_0, v_0]$, hledáme $c + h = [t, v]$. Víme, že $f(c+h) \approx f(c) + \mathrm{d}f_c(h) = \left[\frac{\sqrt{2}}{2}v_0t_0, \frac{\sqrt{2}}{2}v_0t_0 - 5t_0^2\right]^T + \left[\frac{\partial f_1(t_0,v_0)}{\partial t}h_1 + \frac{\partial f_1(t_0,v_0)}{\partial v}h_1, \frac{\partial f_2(t_0,v_0)}{\partial t}h_2 + \frac{\partial f_2(t_0,v_0)}{\partial v}h_2\right]^T = \left[\frac{\sqrt{2}}{2}v_0t_0, \frac{\sqrt{2}}{2}v_0t_0 - 5t_0^2\right]^T + \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial t} & \frac{\partial f_1}{\partial v} \\ \frac{\partial f_2}{\partial t} & \frac{\partial f_1}{\partial v} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h1 \\ h2 \end{bmatrix}$.

2.1 *Základní pojmy*

Přednáška 5
7. října 2013

2.2 POZNÁMKA.

- Symbolem $\mathbb{R}^n$ rozumíme metrický a vektorový prostor. Prvky $\mathbb{R}^n$ jsou uspořádané n-tice reálných čísel $x = [x_1, \ldots, x_n]$ a využíváme **euklidovskou metriku** $\rho(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}$.
- Zavádíme **normu** prvku $x : \|x\| = \rho(x, 0) = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$. Víme, že $\rho(x, y) = \|x - y\|$. Zavádíme **okolí bodu x o poloměru** ε: $U(x, \varepsilon) := \{y \in \mathbb{R}^n : \rho(x, y) < \varepsilon\}$ a **prstencové okolí bodu x o poloměru** ε: $P(x, \varepsilon) := U(x, \varepsilon) \setminus \{x\}$.
- Pro **limitu n-rozměrné posloupnosti** a_k platí $\lim a_k = \lim [a_{k1}, \ldots, a_{kn}] = [a_1, \ldots, a_n] = a \in \mathbb{R}^n \Leftrightarrow \lim \rho(a_k, a) = 0 \Leftrightarrow \|a_k - a\| = 0 \Leftrightarrow \forall i \in \{1, \ldots, n\} : \lim a_{ki} = a_i$.

2.3 DEFINICE. **Vektorovou funkcí** z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}^m$ (reálnou m-rozměrovou funkcí n reálných proměnných) nazýváme každé zobrazení $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, tzn. každému $x = [x_1, \ldots, x_n] \in D_f \subset$

$\mathbb{R}^n$ přiřadí právě jednu hodnotu $f(x) = [f_1(x), \ldots, f_m(x)] \in H_f \subset \mathbb{R}^m$. Množinu D_f nazýváme **definiční obor funkce** f, množinu H_f nazýváme **oborem hodnot funkce** f a $f_1, \ldots, f_n$ nazýváme **složky vektorové funkce** f.

2.4 poznámka. Pokud $m = n$, nazýváme funkce f **vektorovým polem**. Je-li $m = 1$, nazýváme funkce **skalárním polem**.

2.5 úmluva. *Je-li $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ dána pouze svým předpisem, chápeme D_f jako množinu všech $x \in \mathbb{R}^n$, pro které má předpis smysl.*

2.6 tvrzení. *Nechť $f = [f_1, \ldots, f_n] : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Poté $D_f = \bigcap_{i=1}^m D_{f_i}$.*

2.7 příklad. Určete D_f pro $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 : f(x,y) = \left[\sqrt{x+y}, x^2+1, \sqrt{y}\right]$. Víme, že $D_f = \left\{[x,y] \in \mathbb{R}^2 : x+y \geq 0\right\} \cap \mathbb{R}^2 \cap \left\{[x,y] \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0\right\} = \left\{[x,y] \in \mathbb{R}^2 : y \geq -x \wedge y \geq 0\right\}$.

2.8 definice. Mějme $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ a $c \in \mathbb{R}$. Funkce $f+g, f-g, c \cdot f$ definujeme takto:

- $(f+g)(x) := f(x) + g(x)$,
- $(f-g)(x) := f(x) - g(x)$,
- $(c \cdot f)(x) := c \cdot f(x)$.

2.9 cvičení. 1. $D_f \quad =?, f(x,y,z) = \left[\ln xy, \frac{1}{\sqrt{2-\sqrt{x}}}\right]$, 2. $D_f \quad =?, f(x,y) = \left[\sqrt{x^2-4} + \sqrt{9-x^2}, \arcsin\frac{x+y}{x}\right]$.

Důkaz. 1. $(x > 0) \wedge (y > 0) \wedge \left(2 > \sqrt{x}\right)$, 2. $((-3 \leq x \leq 2) \wedge (-2x \geq y \geq 0)) \vee ((2 \leq x \leq 3) \wedge (-2x \leq y \leq 0))$. □

2.2 *Limita a spojitost vektorové funkce*

Limita vektorové funkce

Mějme $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, x_0 \in \mathbb{R}^n, a \in \mathbb{R}^*$. Poté platí $x_0 \neq x_n \to x_0 \Rightarrow f(x_n) \to a \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) = a$.

2.10 definice. Řekneme, že funkce $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ **má v bodě** $x_0 \in \mathbb{R}^n$ **limitu** $a \in \mathbb{R}^m$ (píšeme $\lim_{x \to x_0} f(x) = a$), platí-li:
$x_0 \neq x_k \to x_0 \Rightarrow [f_1(x_k), \cdots, f_m(x_k)] \to a = [a_1, \cdots, a_m]$

2.11 poznámka.
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = a \Rightarrow \exists P(x_0) \subset D_f$$

2.12 věta. *Nechť $f(x) = [f_1(x), \ldots, f_n(x)] : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, x_0 \in \mathbb{R}^n, a \in \mathbb{R}^m$. Poté $\lim_{x \to x_0} f(x) = a \Leftrightarrow \forall i \in \{1, \ldots, n\} : \lim_{x \to x_0} f_i(x) = a_i$.*

2.13 cvičení. 1. $f(x) := \left[\frac{x^2-1}{x-1}, \left[\sqrt{x}\right] x\right], \lim_{x \to 1} f(x)$, 2. $f(x) := \left[\frac{|x|}{x}, \frac{1}{|x|}\right], \lim_{x \to 0} f(x)$, 3. $f(x) := \left[\frac{2\left(x^2+y^2\right)^2}{x^2+y^2}, \frac{x^2+y^2}{xy}\right], \lim_{x \to 0} f(x)$.

Důkaz. 1. $[2,1]$, 2. $\nexists$, 3. $\nexists$. □

Spojitost vektorové funkce

Mějme $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, x_0 \in \mathbb{R}^n$. Funkce je spojitá v bodě x_0 právě tehdy, když $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

2.14 definice.
- Řekneme, že funkce $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ je **spojitá v bodě** $x_0 \in \mathbb{R}^n$, platí-li:
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$
- Řekneme, že funkce $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ je **spojitá v bodě** $x_0 \in \mathbb{R}^n$ **vzhledem k** $M \subset \mathbb{R}^n$, platí-li:
$\forall i \in \mathbb{N} : x_{ki} \in M : x_0 \neq x_k \to x_0 \Rightarrow f(x_k) \to f(x_0)$
- Řekneme, že funkce $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ je **spojitá na množině** $M \in \mathbb{R}^n$, platí-li, že pro všechna $x_0 \in M$ je f spojitá v bodě x_0 vzhledem k množině M.
- Řekneme, že funkce $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ je **spojitá**, platí-li, že je spojitá na množině D_f.

2.15 poznámka. Ze spojitosti f v bodě x_0 plyne, že $\exists U(x_0) \subset D_f$.

2.16 věta. *Nechť $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, x_0 \in M \subset \mathbb{R}^n$. Poté f je spojitá v x_0 (resp. spojitá v x_0 vzhledem k M, spojitá na M, spojitá), platí-li, že $\forall i \in \{1, \ldots, m\} : f_i$ je spojitá v x_0 (resp. spojitá v x_0 vzhledem k M, spojitá na M, spojitá).*

2.3 *Diferenciál vektorové funkce*

Přednáška 6
14. října 2013

Pro $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ platí $f(c+h) = f(x) + \mathrm{d}f(c) + \omega(h), \lim_{\|h\| \to 0} \frac{\omega(h)}{\|h\|} = 9$.

2.17 definice. Nechť $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, c je vnitřním bodem D_f. Jestliže existuje lineární zobrazení (značíme $\mathrm{d}f_c(h)$) takové, že $f(c+h) = f(c) + \mathrm{d}f_c(h) + \omega(h)$ ($h \in \mathbb{R}^n, c+h \in D_f$), kde $\lim_{\|h\|\to 0} \frac{\omega(h)}{\|h\|} = 0$, pak řekneme, že funkce f je **diferencovatelná v** c a zobrazení nazýváme **diferenciálem** f **v bodě** c.

2.18 věta. *Je-li $f = (f_1, \ldots, f_m)$ diferencovatelná v c, pak existují první parciální derivace všech složek f podle všech proměnných a platí $(\mathrm{d}f_c(h))^T = f'(c) \cdot h^T$, kde $f'(c)$ (tzv.* ***Jacobiho matice****) je dána vztahem:*

$$f'(c) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(c) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(c) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(c) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(c) \end{bmatrix}$$

2.19 věta. *Funkce $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ je diferencovatelná v c právě tehdy, platí-li, že $\forall i \in \{1, \ldots, m\}$: f_i je diferencovatelná v c.*

2.20 příklad. Určete Jacobiho matici a diferenciál pro funkci $f : f(x) := [x, x^2]$. Podle vzorce platí:

$$f'(c) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathrm{d}f_c(h) = [h, 0]$$

2.21 poznámka (numerické řešení soustavy nelineárních rovnic - Newtonova metoda). Mějme soustavu rovnic: $f_1([x_1, \ldots, x_n]) = 0, \ldots, f_n([x_1, \ldots, x_n]) = 0$. Toto můžeme převést na vektorové pole $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, F(x) = 0_n$. Pokud platí, že $\det f'\left(x^k\right) \neq 0$, zavádíme iterační metodu $x^{k+1} = x^k - \left(f'\left(x^k\right)\right)^{-1} f\left(x^k\right)$.

2.22 příklad. Řešme soustavu

$$x_1^2 + x_2^2 - 2 = 0$$

$$x_1^3 - 2x_2 + 1 = 0$$

. Definujme vektorové pole $F(x_1, x_2) = [x_1^2 + x_2^2 - 2, x_1^3 - 2x_2 + 1]$ a její Jacobiovu matici: $F'\left(x^k\right) = \begin{bmatrix} 2x_1^k & 2x_2^k \\ 3\left(x_1^{k2}\right) & -2 \end{bmatrix}$.

Poté máme iterační proces $x^{k+1} = x^k - \begin{bmatrix} 2x_1^k & 2x_2^k \\ 3\left(x_1^{k2}\right) & -2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \left(x_1^k\right)^2 + \left(x_2^k\right)^2 - 2 \\ x_1^{k3} - 2x_2^k - 1 \end{bmatrix}$.

2.23 věta. *Nechť funkce $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ a $g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$ jsou takové, že platí $\forall i \in \{1, \ldots, m\} : f_i \in C^1(\mathbb{R}^n)$ a $\forall j \in \{1, \ldots, k\} : g_j \in C^1(\mathbb{R}^m)$. Pak platí, že $\forall c \in \mathbb{R}^n$:*

$$(g \circ f)'(c) = g'(f(c)) \cdot f'(c)$$

3 Křivky a křivkový integrál

3.1 příklad. Mějme křivku k (viz obrázek). Jak vypočítat homtonost k, známe-li „délkovou" hustotu v každém jejím bodě? Nechť je křivka orientovaná zleva doprava. Jakou práci W vykoná vektorové pole podél orientované křivky k, působíli v každém bodě křivky k předepsanou silou $F(x_1, x_2) = [f_1(x_1, x_1), f_2(x_1, x_2)]$?

3.1 *Křivky v* $\mathbb{R}^m$

3.2 definice. **Křivkou v** $\mathbb{R}^m$ rozumíme každou spojitou vektorovou funkci$\varphi : I \to \mathbb{R}^m$, kde $I = D_\varphi \subset \mathbb{R}$ a I je uzavřený interval.

3.3 příklad. Křivku v $\mathbb{R}^2$ jsou například:

- $\varphi(t) = [t, t^2], t \in I = \langle 1, 2 \rangle$
- $\varphi(t) = [1, t], t \in I = \langle -3, 3 \rangle$

3.4 definice. Množinu $\langle \varphi \rangle := \varphi(I) = \{\varphi(t) : t \in I\}$ nazveme **geometrickým obrazem křivky** φ. Je-li $M = \langle \varphi \rangle$, řekneme, že φ je **parametrizací** množiny M.

3.5 definice. Křivku φ nazveme:

1. **jednoduchou**, je-li zobrazení φ prosté,
2. **uzavřenou**, je-li $I = \langle a, b \rangle, a \neq b$, pak $\varphi(a) = \varphi(b)$,
3. **jednoduchou uzavřenou**, je-li $t_1, t_2 \sinh^{-} 1 \in I = \langle a, b \rangle, a \neq b : 0 < |t_1 - t2| < b - a$, pak $\varphi(t_1) \neq \varphi(t_2)$ a φ je uzavřená.

Přednáška 7 21. října 2013

3.6 NOTACE. Nechť $I = \langle a, b\rangle$, pak $\varphi(a)$ nazveme **počátečním bodem křivky** a $\varphi(b)$ **koncovým bodem křivky**.

3.7 DEFINICE. **Křivkou opačně orientovanou** k $\varphi : I \to \mathbb{R}^m$ rozumíme křivku $-\varphi : J \to \mathbb{R}^m$, kde $J := \{t \in \mathbb{R} : -t \in I\}$ a $(-\varphi)(t) := \varphi(-t)$.

3.8 PŘÍKLAD.

1. $\varphi_1(t) = [t, t+2], \varphi_1 : \langle -2, 1\rangle \to \mathbb{R}^2$
2. $\varphi_2(t) = [-t, 2-t], \varphi_2 : \langle -1, 2\rangle \to \mathbb{R}^2$
3. $\varphi_3(t) = [t-1, t+1], \varphi_3 : \langle -1, 2\rangle \to \mathbb{R}^2$

Platí, že $\langle \varphi_1 \rangle = \langle \varphi_2 \rangle$ a φ_1 je křivkou opačně orientovanou k φ_2. Platí, že $\langle \varphi_1 \rangle = \langle \varphi_2 \rangle = \langle \varphi_3 \rangle$.

3.9 DEFINICE. Křivku $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_2) : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}^m$ nazveme **hladkým obloukem**, platí-li:

1. φ je prosté (tj. φ je jednoduchá křivka),
2. $\varphi \in C^1(\langle a, b\rangle)$,
3. $\forall t \in (a, b) : \varphi'(t) = \left[\varphi_1'(t), \dots, \varphi_m'(t)\right]^T \neq 0, \varphi'_+(a) \neq 0, \varphi'_-(b) \neq 0.$

Křivku $\varphi = \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}^m$ nazveme **po částech hladkou**, existuje-li dělení intervalu $\langle a, b\rangle$:

$$D : a = t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n = b$$

takové, že $\forall i \in \{1, \dots, n\}$: křivka $\varphi|_{\langle t_{i-1}, t_i\rangle}$ je hladkým obloukem.

3.10 POZNÁMKA. Nechť φ je hladký oblouk: $\varphi'(t) = \left[\frac{\partial \varphi_1}{\partial t}(t), \dots, \frac{\partial \varphi_2}{\partial t}(t)\right]^T = \left[\varphi_1'(t), \dots, \varphi_m'(t)\right]^T = \left[\lim_{h\to 0} \frac{\varphi_1(t+h)-\varphi_1(t)}{h}, \dots, \lim_{h\to 0} \frac{\varphi_m(t+h)-\varphi_m(t)}{h}\right]^T = \lim_{h\to 0} \left[\frac{\varphi_1(t+h)-\varphi_1(t)}{h}, \dots, \frac{\varphi_m(t+h)-\varphi_m(t)}{h}\right]^T = \lim_{h\to 0} \frac{\varphi(t+h)-\varphi(t)}{h}$, neboli $\varphi'(t)$ je tečným vektorem geometrického obrazu křivky.

3.2 *Křivkový integrál*

Křivkový integrál 1. druhu

3.11 PŘÍKLAD. Mějme hladký oblouk $\varphi : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}^2$ a funkci délkové hustoty $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, která je kladná a spojitá na množině $\langle \varphi \rangle$. Jaká je hmotnost φ?

Uvažujme dělení D intervalu $\langle a, b\rangle$. Hmotnost $m(\varphi)$ aproximujme číslem $m(\varphi) \approx \sum_{i=1}^n f(t_{i-1}) \cdot \|\varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1})\| \approx \sum_{i=1}^n f(t_{i-1}) \cdot \|\varphi'(t_{i-1})(t_i - t_{i-1})\| = \sum_{i=1}^n f(t_{i-1}) \cdot \|\varphi'(t_{i-1})\| \cdot (t_i - t_{i-1})$. Pro $n \to \infty$ platí, že $m(\varphi) = \int_a^b f(t) \cdot \|\varphi'(t)\| \,\mathrm{d}t$.

3.12 DEFINICE. Nechť $\varphi : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}^m$ je hladký oblouk a $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ je spojitá v $\langle \varphi \rangle$. **Křivkový integrál 1. druhu** funkce f podél křivky φ definujeme rovností:

$$\int_\varphi f(x)\mathrm{d}s := \int_a^b f(\varphi(t)) \cdot \left\|\varphi'(t)\right\| \mathrm{d}t.$$

Je-li φ po částech hladká křivka (existuje dělení $D : a = t_0 < \dots < t_n = b : \psi_i = \varphi|_{\langle t_{i-1}, t_i\rangle}$, kde ψ_i je hladký oblouk), poté křivkový integrál 1. druhu funkce f podél křivky φ definujeme rovností:

$$\int_\varphi f(x)\mathrm{d}s := \sum_{i=1}^n \int_{\psi_i} f(x)\mathrm{d}s.$$

3.13 POZNÁMKA.

1. Z předpokladů definice vyplývá, že $f(\varphi(t)) \cdot \|\varphi'(t)\|$ je spojitá funkce a Reimannův integrál existuje.
2. Hodnota křivkového integrálu 1. druhu nezávisí na dělení D.
3. Vlastnosti křivkového integrálu 1. druhu vyplývají z vlastností Reimannova integrálu.

3.14 PŘÍKLAD. Vypočtěte $\int_\varphi (x^2 + y^2)\,\mathrm{d}s, \varphi : \langle -2, 1\rangle \to \mathbb{R}^2, \varphi(t) = [t, t+2]$. Zjistěme $\|\varphi'(t)\| = \left\|[1, 1]^T\right\| = \sqrt{2}$. Tudíž $\int_\varphi (x^2 + y^2)\,\mathrm{d}s = \int_{-2}^1 \left(t^2 + (t+2)^2\right) \cdot \sqrt{2}\mathrm{d}t = 12\sqrt{2}$.

Přednáška 8 4. listopadu 2013

3.15 VĚTA. *Nechť φ a ψ jsou jednoduché nebo jednoduché uzavřené, po částech hladké křivky v $\mathbb{R}^m$, $\langle \varphi \rangle = \langle \psi \rangle$ a $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ je spojitá v $\mathbb{R}^m$. Pak $\int_\varphi f(x)\mathrm{d}s = \int_\psi f(x)\mathrm{d}s$.*

3.16 POZNÁMKA.

- Hodnota $\int_\varphi f(x)\mathrm{d}s$ je jednoznačně určena funkcí f, křivkou $\langle \varphi \rangle$ a informací, že φ je jednoduchá nebo jednoduchá uzavřená křivka.

- Budeme-li psát $\int_k f(x)\mathrm{d}s$ (kde k je zadaná křivka množinovým zápisem), máme tím na mysli, že $\langle\varphi\rangle = k$ a φ je jednoduchá nebo jednoduchá uzavřená po částech hladká křivka a $\int_k f(x)\mathrm{d}s := \int_\varphi f(x)\mathrm{d}s$.

3.17 Příklad. Vypočtěme $\int_k x^2 \cdot y^2 \mathrm{d}s$, kde $k \subset \mathbb{R}^2$ je obvod čtverce s vrcholy $[0,0]$, $[1,0]$, $[1,1]$ a $[0,1]$. Hledáme $\varphi : I \to \mathbb{R}$. Tudíž $\varphi(t) := \begin{cases} [t,0], & t \in \langle 0,1\rangle, \\ [1,t-1], & t \in \langle 1,2\rangle, \\ [3-t,1], & t \in \langle 2,3\rangle, \\ [0,4-t], & t \in \langle 3,4\rangle, \end{cases}$ Platí, že $\int_k x^2 \cdot y^2 \mathrm{d}s = \int_0^1 0\mathrm{d}t + \int_1^2 (t-1)^2 \mathrm{d}t + \int_2^3 (3-t)^2 \mathrm{d}t + \int_3^4 0\mathrm{d}t = \frac{2}{3}$.

Aplikace křivkového integrálu 1. druhu

3.18 Definice (Délka křivky). Nechť φ je po částech hladká křivka. **Délku křivky** definujeme jako číslo $l(\varphi) := \int_\varphi \mathrm{d}s$.

3.19 Příklad. Určeme délku křivky $\varphi : \langle 0, 2\pi\rangle \to \mathbb{R}^3 : \varphi(t) = [\cos(t), \sin(t), t]$ (jeden závit šroubovice).
Platí, že $l(\varphi) = \int_\varphi \mathrm{d}s = \int_0^{2\pi} \sqrt{2}\mathrm{d}t = 2\sqrt{2}\pi$.

3.20 Definice (Obsah válcové plochy). Obsah plochy $\tau := \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3 : [x,y] \in \langle\varphi\rangle \vee 0 \leq z \leq f(x,y)\}$, kde $\varphi : I \to \mathbb{R}^2$ je jednoduchá nebo jednoduchá uzavřená po částech hladká křivka a $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ je spojitá a nezáporná v $\langle\varphi\rangle$ definujeme jako číslo $\sigma\tau := \int_\varphi f(x,y)\mathrm{d}s$.

3.21 Definice (Fyzikální vlastnosti křivky). Nechť $k = \langle phi\rangle$, φ je jednoduchá nebo jednoduchá uzavřená po částech hladká křivka v $\mathbb{R}^2$ nebo $\mathbb{R}^3$, hustota h je spojitá a nezáporná v $\langle\varphi\rangle$.

- **Hmotnost křivky** k definujeme jako číslo $m(k) := \int_\varphi h(x)\mathrm{d}s$.
- **Statické momenty** křivky k vzhledem k souřadnicovým osám (resp. rovinám) definujeme jako $S_x(k) := \int_\varphi y \cdot h(x,y)\mathrm{d}s$, $S_y(k) := \int_\varphi x \cdot h(x,y)\mathrm{d}s$, resp. $S_{xy}(k) := \int_\varphi z \cdot h(x,y,z)\mathrm{d}s$, $S_{xz}(k) := \int_\varphi y \cdot h(x,y,z)\mathrm{d}s$, $S_{yz}(k) := \int_\varphi x \cdot h(x,y,z)\mathrm{d}s$.
- **Těžiště křivky** k definujeme jako bod $T(k) := \left[\frac{S_y(k)}{m(k)}, \frac{S_x(k)}{m(k)}\right]$, resp. $T(k) := \left[\frac{S_{yz}(k)}{m(k)}, \frac{S_{xz}(k)}{m(k)}, \frac{S_{xy}(k)}{m(k)}\right]$.

Greenova věta

3.22 Definice. Nechť množina $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ je otevřená (tzn. $\forall x \in \Omega : U(x) \subset \Omega$) a souvislá (tzn. $\forall \alpha, \beta \in \Omega \exists \varphi : \langle a,b\rangle \to \Omega : \varphi(a) = \alpha \wedge \varphi(b) = \beta$. Pak Ω nazveme **oblastí**.

3.23 Věta (Jordanova). *Nechť φ je jednoduchá uzavřená křivka v bbR^2. Pak existují oblasti $\Omega_1, \Omega_2 \subset \mathbb{R}^2$ takové, že:*

- $\Omega_1 \cup \Omega_2 = \mathbb{R}^2 \setminus \langle\varphi\rangle$,
- $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$,
- $\partial\Omega_1 = \partial\Omega_2 = \langle\varphi\rangle$,
- *Ω_1 je omezená a Ω_2 je neomezená.*

*Oblast $\Omega_1 = \mathrm{int}\varphi$ se nazývá **vnitřek křivky** φ a oblast $\Omega_2 = \mathrm{ext}\varphi$ se nazývá **vnějšek křivky** φ.*

3.24 Definice. Nechť $\varphi : \langle a,b\rangle \to \mathbb{R}^2$ je jednoduchá uzavřená po částech hladká křivka a $t \in \langle a,b\rangle$ je takové, že existuje nenulový tečný vektor $\varphi'(t) \in \mathbb{R}^2$. Nenulový vektor $n(t) \in \mathbb{R}^2$ nazveme **vnějším normálovým vektorem křivky** φ, platí-li $\langle n(t), \varphi'(t)\rangle = 0$ a $\exists \delta > 0 \forall h \in (0,\delta) : \varphi + h \cdot n(t) \in \mathrm{ext}\varphi$.

O křivce φ řekneme, že je **kladně orientovaná** jestliže uspořádaná dvojice $[n(t), \varphi'(t)]$ je orientovaná stejně jako uspořádaná dvojice $[e_1, e_2]$ (tzn. $\begin{vmatrix} n_1(t) & n_2(t) \\ \varphi_1'(t) & \varphi_2'(t) \end{vmatrix} > 0$). V opačném případě hovoříme o **záporně orientované** křivce φ.

3.25 Věta (Greenova). *Nechť φ je jednoduchá uzavřená kladně orientovaná po částech hladká křivka v $\mathbb{R}^2$. Nechť $f = [f_1, f_2] : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ a funkce $f_1, f_2, \frac{\partial f_2}{\partial x}, \frac{\partial f_1}{\partial y}$ jsou spojité v $\Omega = \mathrm{int}\varphi \cup \langle\varphi\rangle$. Poté*

$$\iint\limits_\Omega \frac{\partial f_2(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial f_1(x,y)}{\partial y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int\limits_{(\varphi)} f(x,y)\,\mathrm{d}s$$