Matematická analýza 3

# Číselné řady

## http://upload.wikimedia.org/wikipedia/en/thumb/a/a0/Sierpinski_carpet.png/243px-Sierpinski_carpet.pngMotivační příklady

Figure Sierpinského koberec

* Achilles běží rychlostí , želva běží rychlostí . Na startu má želva náskok . Za jak dlouho se setkají a kde?  
  Úloha vede na součet řady .
* Jaká je plocha Sierpinského koberce (viz Figure 1) o hraně ?  
  Úloha vede na součet řady .

## Základní pojmy

*Definice (řady a základní pojmy):* **Řadou (reálných čísel)** rozumíme výraz , kde pro každé je , tj. je posloupností reálných čísel. Číslo nazýváme **-tým členem řady**. Posloupnost nazýváme **posloupností částečných součtů řady**. Existuje-li , nazýváme ji **součtem řady** a označíme ji . Pokud existuje a platí, že , pak řekneme, že řada **konverguje**. Pokud nebo neexistuje, pak řekneme, že řada **diverguje**.

* Aritmetická řada , řada diverguje.
* Geometrická řada .
* Harmonická řada , řada diverguje.
* Řada , řada je konvergentní.
* Řada (Taylorův polynom v bodě ).
* Řada (Taylorův polynom v bodě ).

*Věta (nutná podmínka konvergence řady):* Konverguje-li řada , poté .

Z předpokladu platí, že existuje. Poté .

*Věta:* Konverguje-li řada , poté konverguje i řada .

Z předpokladu platí . Zavedeme . Platí, že a . Poté . Dále , tudíž pokud a jsou konvergentní, poté i je konvergentní. S využitím věty o limitě neklesající a shora omezené posloupnosti ukažme, že posloupnost je neklesající díky definici a shora omezená . Podobně . Proto platí, že a jsou konvergentní.

*Definice (absolutní konvergence):* Konverguje-li řada , poté řadu nazýváme **absolutně konvergentní řadou**. Konverguje-li řada , ale řada diverguje, poté řadu nazýváme **neabsolutně konvergentní řadou**.

Řada je neabsolutně konvergentní.

## Kritéria absolutní konvergence

*Poznámka:* Píšeme-li „ platí pro všechna dost velká “, myslíme „“.

*Věta (srovnávací kritérium):* Nechť a jsou takové řady, že:

1. , pro všechna dost velká ;
2. řada je konvergentní;

poté konverguje absolutně.

Díky druhému předpokladu platí, že je shora omezená. Určeme , poté a je také shora omezená. Navíc je neklesající a tudíž je konvergentní.

*Důsledek (věta o srovnávacím kritériu):* Nechť a jsou takové řady, že:

1. ;
2. pro všechna dost velká ;

poté .

* Řada .  
  Předpokládejme, že řada konverguje a srovnejme s řadou . Platí, že . Musíme ukázat, že konverguje. K tomu využijeme rovnost s konvergentní řadou .  
  Řada je absolutně konvergentní.
* Řada .  
  Předpokládejme, že řada diverguje a srovnejme s řadou . Platí, že .  
  Řada je divergentní.

*Věta (d’Alambertovo kritérium):* Mějme takovou řadu, že:

1. pokud platí pro všechna dost velká , pak je absolutně konvergentní.
2. pokud platí pro všechna dost velká , pak je divergentní.

Dokažme první tvrzení: z předpokladu platí, že , tudíž a řada je absolutně konvergentní. Dokažme druhé tvrzení: a řada je divergentní.

*Důsledek (limitní d’Alambertovo kritérium):* Mějme . Pokud , pak je absolutně konvergentní. Je-li , pak je divergentní.

Pro první tvrzení využijme d’Alambertovo kritérium 1 s . Pro druhé tvrzení využijme d’Alambertovo kritérium 2 s podmínkou, že pro všechna dost velká platí .

* Řada .  
  Využijme limitní d’Alambertovo kritérium: .  
  Řada je absolutně konvergentní.
* Řada .  
  Využijme limitní d’Alambertovo kritérium: .  
  Řada je divergentní.

*Věta (Cauchyho kritérium):* Mějme takovou řadu, že:

1. pokud platí pro všechna dost velká , pak je absolutně konvergentní.
2. pokud platí pro všechna dost velká , pak je divergentní.

Dokažme první tvrzení: z předpokladu platí, že , tudíž a řada je absolutně konvergentní. Dokažme druhé tvrzení: a řada je divergentní.

*Důsledek (limitní Cauchyho kritérium):* Mějme . Pokud , pak je absolutně konvergentní. Je-li , pak je divergentní.

* Řada .  
  Využijme limitní Cauchyho kritérium: .  
  Řada je absolutně konvergentní.
* Řada .  
  Využijme limitní Cauchyho kritérium: .   
  Řada je divergentní.

*Věta (integrální kritérium):* Nechť je nezáporná, nerostoucí a spojitá funkce v intervale . Nechť dále platí, že . Poté řada absolutně konverguje právě tehdy, konverguje-li (tzn. že existuje a je konečná).

Uvědomme si, že existují limity a . Dokažme . Z předpokladů . Přejdeme-li : .

* Řada .  
  Využijme integrální kritérium: .  
  Řada je divergentní.
* Řada .  
  Využijme integrální kritérium: .  
  Řada je konvergentní.

## Kritéria neabsolutní konvergence

*Věta (Leibnizovo kritérium):* Nechť posloupnost je taková, že platí:

1. ;
2. ;
3. ;

poté řada je konvergentní.

Označme si posloupnost sudých částečných součtů . Víme, že , neboť . Dále . Každá s postupných závorek je nezáporná, je také nezáporné, tudíž . Jedná se o neklesající, shora omezenou posloupnost, tudíž . Označme si posloupnost lichých částečných součtů . Víme, že a .

* Řada .  
  Členy jsou nezáporné, nerostoucí a . Jsou splněny předpoklady Leibnizova kritéria.  
  Řada je konvergentní.
* Řada .  
  Členy jsou nezáporné, nerostoucí, avšak , tudíž nejsou splněny předpoklady Leibnizova kritéria. Neboť neexistuje (posloupnost lichých a sudých členů má různou limitu), není splněna nutná podmínka konvergence.  
  Řada je divergentní.

*Věta (Abelovo-Dirichletovo kritérium):* Nechť posloupnost je monotónní. Platí-li jedna z následujících podmínek:

1. posloupnost je omezená a řada je konvergentní. (Abelovo kritérium.)
2. a posloupnost částečných součtů řady je omezená. (Dirichletovo kritérium.)

Poté řada je konvergentní.

* Řada .  
  Využijme Dirichletovo kritérium: (posloupnost je monotónní a ) a (posloupnost částečných součtů je omezená).  
  Řada je konvergentní.
* Řada .  
  Využijeme Abelovo kritérium: (posloupnost je monotónní, kladná, shora omezená) a (absolutní konvergenci ukažme srovnávacím kritériem: ).  
  Řada je konvergentní.
* Řada .  
  Využijme Dirichletovo kritérium; (posloupnost je monotónní a ) a (platí ).  
  Řada je konvergentní.

## Odhad zbytku řady

Mějme řadu . Řadu nazveme **zbytkem řady po -tém členu**. Pro konvergentní řady je užitečné odhadnout součet jejího zbytku. Platí, že .

Součet zbytku řady můžeme odhadnout pomocí několika metod:

* pomocí srovnávacího kritéria ();
* pomocí integrálního kritéria ();
* pomocí limitního d’Alambertova kritéria – nechť , poté ;
* pomocí Leibnizova kritéria (; je-li sudé, ; je-li liché, ).
* Odhadněte součet .  
  Podle limitního d’Alambertova kritéria je řada absolutně konvergentní. a využijeme srovnávací kritérium pro odhad zbytku řady .  
  Tudíž .
* Odhadněte součet .  
  Podle integrálního kritéria je řada absolutně konvergentní. . Využijeme integrální kritérium pro odhad zbytku řady: .  
  Tudíž .
* Odhadněte součet .  
  Podle Leibnizova kritéria je řada konvergentní. . Využijeme Leibnizovo kritérium pro odhad zbytku řady: .  
  Tudíž .

## Přerovnávání řad

*Definice:* Mějme prosté zobrazení . Řadu nazveme **přerovnáním řady** .

*Věta (komutativita přerovnání řady):* Konverguje-li absolutně, konverguje absolutně i řada přerovnaná a má stejný součet. Konverguje-li neabsolutně, přerovnaná řada má libovolný součet či přerovnaná řada byla divergentní.

# Vektorové funkce

## Motivační příklady

* Mějme hmotný bod v gravitačním poli (). Pohybujeme se pod úhlem . Známe a hledáme . Tento příklad můžeme řešit funkcí . Pokud , hledáme . Víme, že .

## Základní pojmy

* Symbolem rozumíme metrický a vektorový prostor. Prvky jsou uspořádané -tice reálných čísel , **euklidovská metrika**
* Zavádíme **normu** prvku :. Víme, že . Zavádíme **okolí bodu o poloměru** : a **prstencové okolí bodu o poloměru** : .
* Pro **limitu -rozměrné posloupnosti** platí .

*Definice:* **Vektorovou funkcí** z do (reálnou -rozměrnou funkcí reálných proměnných) nazýváme každé zobrazení , tzn. každému přiřadí právě jednu hodnotu . Množinu nazýváme **definiční obor funkce** , množinu nazýváme **oborem hodnot funkce** a nazýváme **složky vektorové funkce** .

* Pokud , nazýváme funkci **vektorovým polem**. Je-li , nazýváme funkce **skalárním polem**.

*Úmluva:* Je-li dána pouze svým předpisem, chápeme jako množinu všech , pro které má předpis smysl.

* Nechť . Poté .
* Určete pro .  
  Víme, že .

*Definice:* Mějme a . Funkce definujeme takto:

* ;
* ;
* .

## Limita a spojitost vektorové funkce

### Limita vektorové funkce

Mějme . Poté platí .

*Definice:* Řekneme, že funkce **má v bodě limitu** (píšeme ), platí-li:

* .

*Věta:* Nechť . Poté .

### Spojitost vektorové funkce

Mějme . Funkce je spojitá v bodě právě tehdy, když .

*Definice:* Řekneme, že funkce je **spojitá v bodě** , platí-li:

* Ze spojitosti v bodě plyne, že .

Řekneme, že funkce je **spojitá v bodě vzhledem k**, platí-li:

Řekneme, že funkce je **spojitá na množině** , platí-li, že pro všechna je spojitá v bodě vzhledem k množině .

Řekneme, že funkce je **spojitá**, platí-li, že je spojitá na množině .

*Věta:* Nechť . Poté je spojitá v  (spojitá v  vzhledem k , spojitá na , spojitá) právě tehdy, platí-li:

je spojitá v  (spojitá v  vzhledem k , spojitá na , spojitá).

## Diferenciál vektorové funkce

Pro platí . Pro diferenciál vektorové funkce v bodě platí .