Těžké otázky

T1 • Lemma: Shoduje-li se model Teorie T s položkou v kořeni tabla z teorie T, potom se shoduje s nějakou větví.

• Věta o korektnosti tablo metody ve VL:

Je-li výrok φ tablo dokazatelný z teorie T, potom je φ pravdivý v T; tj. $T \vdash \varphi \Rightarrow T \models \varphi$

dk: sporem: Nechť φ v T neplatí = existuje protipříklad, model $v \in M(T)$, ve kterém φ neplatí. φ je dokazatelná z T, pak existuje tablo důkaz φ z T = sporné tablo z T s položkou $F\varphi$ v kořeni. Model v se shoduje s položkou $F\varphi$, podle lemma se shoduje s nějakou větví V. Všechny větve jsou ale sporné, takže V obsahuje $T\psi$ a $F\psi$ (pro ψ) a model v se s těmito položkami shoduje. Máme tedy $v \models \psi$ a zároveň $v \not\models \psi$, což je spor. ∎

T2 • Lemma: Shoduje-li se model $\mathcal{A}$ teorie T s položkou v kořeni tabla z T (v jazyce L), potom lze $\mathcal{A}$ expandovat do jazyka L_C tak, že se shoduje s nějakou větví v tablu.

• Věta o korektnosti tablo metody ve PL

Je-li sentence φ tablo dokazatelná z teorie T, potom je φ pravdivá v T, tj. $T \vdash \varphi \Rightarrow T \models \varphi$.

dk: sporem: Předpoklad $T \not\models \varphi$ tj. existuje $\mathcal{A} \in M(T)$ takový, že $\mathcal{A} \not\models \varphi$. Protože $T \vdash \varphi$, existuje sporné tablo z T s $F\varphi$ v kořeni. Model $\mathcal{A}$ se shoduje s $F\varphi$, tedy podle Lemma, lze expandovat do jazyka L_C tak, že se expanze shoduje s nějakou větví V. Všechny větve jsou ale sporné ∎

T3 lemma: Kanonický model pro bezespornou větev V se shoduje s V.

• Věta o úplnosti tablo metody ve VL

Je-li výrok φ pravdivý v teorii T, potom je tablo dokazatelný z T tj. $T \models \varphi \Rightarrow T \vdash \varphi$

T4 • lemma: Kanonický model pro (bezespornou dokončenou) větev V se shoduje s V.

• Věta o úplnosti tablo metody ve PL

Je-li sentence φ pravdivá v T, pak je tablo dokazatelná z T. tj. $T \models \varphi \rightarrow T \vdash \varphi$

T5 • Věta o konečnosti sporu $\qquad$ $\mathcal{T}$ - systematické tablo

Je-li $\mathcal{T} = \bigcup_{i \geq 0} \mathcal{T}_i$ sporné tablo, potom existuje $n \in \mathbb{N}$, tž $\mathcal{T}_n$ je sporné konečné tablo.

- D1: Pokud při konstrukci tabla nikdy neprodlužujeme sporné větve, např. pro systematické tablo, potom sporné tablo je konečné.
- D2 (konečnost důkazu): Pokud $T \vdash \varphi$, potom existuje i konečný tablo důkaz φ z T.
- D3 (Systematičnost důkazu): Pokud $T \vdash \varphi$, potom systematické tablo je (konečným) tablo důkazem φ z T.

T6 • Věta o úplnosti rezoluce ve VL

Je-li CNF formule S nesplnitelná, je rezolucí zamítnutelná ($\mathcal{U}_j$ $S \vdash_R \square$)

T7 • Věta o úplnosti LI-rezoluce pro Hornovy formule

Je-li Hornova formule T splnitelná, a $T \cup \{G\}$ je nesplnitelná pro cíl G, potom $T \cup \{G\} \vdash_{LI} \square$, a to LI-zamítnutím, které začíná cílem G

T8 | Lifting lemma: Mějme klauzule C_1 a C_2 s disjunktní množinou proměnných. Jsou-li C_1^* a C_2^* základní instance klauzulí C_1 a C_2 a je-li C^* rezolventou C_1 a C_2, potom existuje rezolventa C klauzulí C_1 a C_2 taková, že C^* je základní instance C.

- Věta o úplnosti rezoluce v PL

Je-li CNF formule S nesplnitelná, potom je zamítnutelná rezolucí.

T9 • Skolemova věta

Každá teorie má otevřenou konzervativní extenzi.

- D: Ke každé teorii můžeme pomocí skolemizace najít ekvisplnitelnou otevřenou teorii

T10 | Herbrandův model

- Herbrandova věta Mějme otevřenou teorii T v jazyce L bez rovnosti a s alespoň jedním konstantním symbolem. Potom buď má T Herbrantův model, nebo existuje konečně mnoho základních instancí axiomů T, jejichž konjunkce je nesplnitelná.

T11 • **Löwenheim-Skolemova věta**

Je-li L spočetný jazyk bez rovnosti, potom každá bezesporná L-teorie má spočetně nekonečný model.

| D: Je-li L spočetný jazyk bez rovnosti, potom ke každé L-struktuře existuje elementárně ekvivalentní spočetně nekonečná struktura

• Löwenheim-Skolemova věta s rovností

Je-li L spočetný jazyk s rovností, potom ke každé nekonečné L-struktuře existuje elementárně ekvivalentní spočetně nekonečná struktura.

| D: Je-li L spočetný jazyk s rovností, potom ke každé nekonečné L-struktuře existuje elementárně ekvivalentní spočetně nekonečná struktura

T12 | D: pokud $\mathcal{A} \simeq \mathcal{B}$, potom $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$

• Je-li L jazyk s rovností a $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ konečné L-struktury, potom platí: $\mathcal{A} \simeq \mathcal{B}$ právě když $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$

| D: Pokud má kompletní teorie v jazyce s rovností konečný model, potom jsou všechny její modely izomorfní

T13 • **ω-kategorické** kritérium kompletnosti

Mějme ω-kategorickou teorii T ve spočetném jazyce L. Je-li:

- L bez rovnosti nebo
- L s rovností a T nemá konečné modely

potom je T kompletní.

T14 • **Neaxiomatizovatelnost** konečných modelů

Pokud má teorie libovolně velké konečné modely, potom má i nekonečný model. V tom případě není třída všech jejích konečných modelů axiomatizovatelná.

T15 • **O konečné axiomatizovatelnosti**

Mějme třídu struktur $K \subseteq M_L$ a uvažme také její doplněk $\bar{K} = M_L \setminus K$. Potom K je konečně axiomatizovatelná, právě když K i $\bar{K}$ jsou axiomatizovatelné.

T16 • Pokud je teorie T rekurzivně axiomatizovatelná a má rekurzivně spočetnou kompletaci, potom je T rozhodnutelná.

T17 • Věta o nerozhodnutelnosti predikátové logiky platí

Neexistuje algoritmus, který by pro danou vstupní formuli φ rozhodl, zda je logicky

zda $\models \varphi$, zda φ je tautologie