POJMY

legenda: hlavní definice

doplňující definice

příklady

jazyk – určený neprázdnou množinou výrokových proměnných $\mathbb{P}$ (konečná i nekonečná) (prvovýroky), log. symboly, (,)

Var(φ) – množina prvovýroků vyskytujících se v φ

výrok v jazyce $\mathbb{P}$ je prvek množiny $VF_{\mathbb{P}}$ definované následovně: $VF_{\mathbb{P}}$ je nejmenší množina splňující:

- pro každý prvovýrok $p \in \mathbb{P}$ platí $p \in VF_{\mathbb{P}}$
- výrok $\varphi \in VF_{\mathbb{P}}$ je $(\neg\varphi)$ také prvek $VF_{\mathbb{P}}$
- pro každé $\varphi, \psi \in VF_{\mathbb{P}}$ jsou $(\varphi \wedge \psi)$; $(\varphi \vee \psi)$, $(\varphi \rightarrow \psi)$, $(\varphi \leftrightarrow \psi)$ také prvky $VF_{\mathbb{P}}$

Podvýrok (podformule) je podřetězec, který je sám o sobě výrokem

P1

- Model jazyka $\mathbb{P}$ je libovolné pravdivostní ohodnocení $v: \mathbb{P} \rightarrow \{0,1\}$

  Množinu všech modelů jazyka $\mathbb{P}$ značíme $M_{\mathbb{P}}$: $\{v \mid v: \mathbb{P} \rightarrow \{0,1\}\} = \{0,1\}^{\mathbb{P}}$

  modely značíme $\mathcal{A}, v, w, \ldots$

  př.: pro $\mathbb{P} = \{p, q, r\}$ $\quad v = \{(p,1); (q,0); (r,1)\}$

- Pravdivostní funkce výroku φ v konečném jazyce $\mathbb{P}$ je funkce $f_{\varphi,\mathbb{P}}: \{0,1\}^{|\mathbb{P}|} \rightarrow \{0,1\}$ definovaná induktivně:

  - je-li φ i-tý prvovýrok z $\mathbb{P}$: $f_{\varphi,\mathbb{P}}(x_0, \ldots, x_{n-1}) = x_i$
  - je-li $\varphi = (\neg\varphi')$: $f_{\varphi,\mathbb{P}}(x_0, \ldots, x_{n-1}) = f_{\neg}(f_{\varphi',\mathbb{P}}(x_0, \ldots, x_{n-1}))$
  - je-li $(\varphi' \square \varphi'')$, kde $\square \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$:

    $$f_{\varphi,\mathbb{P}}(x_0, \ldots, x_{n-1}) = f_{\square}(f_{\varphi',\mathbb{P}}(x_0, \ldots, x_{n-1}), f_{\varphi'',\mathbb{P}}(x_0, \ldots, x_{n-1}))$$

Strom výroku φ (Tree(φ)) je zakořeněný uspořádaný strom, definovaný induktivně takto:

- Je-li φ prvovýrok p, obsahuje Tree(φ) jediný vrchol, jeho label je p
- Je-li φ tvaru $(\neg\varphi')$, má Tree(φ) kořen s labelem $\neg$, a jeho jediný syn je kořen Tree(φ')
- Je-li φ tvaru $(\varphi' \square \varphi'')$ pro $\square \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$, má Tree($\varphi$) kořen s labelem $\square$ a dva syny

  levý = Tree(φ') a pravý Tree(φ'')

Mějme výrok φ v jazyce $\mathbb{P}$ a model $v \in M_{\mathbb{P}}$. Pokud platí $f_{\varphi,\mathbb{P}}(v) = 1$, potom říkáme, že výrok φ platí v modelu v, v je modelem φ, $v \models \varphi$, $M_{\mathbb{P}}(\varphi)$ – množina všech modelů φ

P2 Sémantické pojmy v logice: Říkáme, že výrok φ (v $\mathbb{P}$) je

- pravdivý / tautologie / platí v logice / $\models \varphi$ - pokud platí v každém modelu $\mathbb{P}$, $M_{\mathbb{P}}(\varphi) = M_{\mathbb{P}}$
- lživý / sporný - pokud nemá žádný model, $M_{\mathbb{P}}(\varphi) = \emptyset$
- nezávislý - pokud platí v nějakém modelu a neplatí v jiném, $\emptyset \subsetneq M_{\mathbb{P}}(\varphi) \subsetneq M_{\mathbb{P}}$
- splnitelný - pokud má nějaký model, není lživý; $M_{\mathbb{P}}(\varphi) \neq \emptyset$

Sémantické pojmy vzhledem k teorii T

- pravdivý / platí v T / důsledek T / $T \models \varphi$ - pokud $M_{\mathbb{P}}(T) \subseteq M_{\mathbb{P}}(\varphi)$
- lživý / sporný v T - pokud $M_{\mathbb{P}}(\varphi) \cap M_{\mathbb{P}}(T) = M_{\mathbb{P}}(T;\varphi) = \emptyset$
- nezávislý v T - pokud $\emptyset \subsetneq M_{\mathbb{P}}(T;\varphi) \subsetneq M_{\mathbb{P}}(T)$
- splnitelný v T / konzistentní s T - pokud $M_{\mathbb{P}}(T;\varphi) \neq \emptyset$; platí v alespoň 1 modelu T

Teorie v jazyce $\mathbb{P}$ je libovolná množina výroků v $\mathbb{P}$, tedy libovolná podmnožina $T \subseteq VF_{\mathbb{P}}$.
Jednotlivým výrokům $\varphi \in T$ říkáme axiomy

Je-li T teorie v jazyce $\mathbb{P}$, potom T platí v modelu v, pokud každý axiom $\varphi \in T$ platí v v.
Pak v je modelem T, $v \models T$; $M_{\mathbb{P}}(T)$ ... množina všech modelů teorie T v jazyce $\mathbb{P}$

P3 Ekvivalence výroků

Výroky φ, ψ (ve stejném jazyce $\mathbb{P}$) jsou logicky ekvivalentní, pokud mají stejné modely.

tj. $\varphi \sim \psi$ právě tehdy když $M_{\mathbb{P}}(\varphi) = M_{\mathbb{P}}(\psi)$

př. pravdivé výroky: $p \vee \neg p$, lživé výroky: $p \wedge \neg p$

ekvivalentní výroky: $p \sim p \vee p$; $p \rightarrow q \sim \neg p \vee q$

- T-ekvivalence

Výroky φ, ψ (ve stejném jazyce $\mathbb{P}$) jsou ekvivalentní v T; T ekvivalentní, pokud platí ve stejných modelech T.

tj. $\varphi \sim_T \psi$ právě tehdy když $M_{\mathbb{P}}(T;\varphi) = M_{\mathbb{P}}(T,\psi)$

př. $T = \{p \vee q, \neg r\}$: pravdivé výroky v T: $q \vee p$; $\neg p \vee \neg q \vee \neg r$,

lživý v T $\neg p \vee \neg q \vee r$; nezávislé v T, ale i splnitelné $p \leftrightarrow q$, $p \wedge q$

$p \vee q \sim_T q \vee r$ (ale $p \vee q \not\sim q \vee r$)

- Ekvivalence teorií: $T \sim T'$ právě tehdy když $M_{\mathbb{P}}(T) = M_{\mathbb{P}}(T')$ mají stejné množiny modelů literál je buď prvovýrok p nebo negace prvovýroku $\neg p$

klauzule je disjunkce literálů $C = l_1 \vee l_2 \vee \ldots \vee l_n$

elementární konjunkce je konjunkce literálů $E = l_1 \wedge l_2 \wedge \ldots \wedge l_n$, $(n \geq 1)$ jednotková = samotný literál

P4 Sémantické pojmy o teorii: Teorie T v jazyce $\mathbb{P}$ je

- sporná – pokud v ní platí spor ($\perp$), nemá žádný model
- bezesporná (splnitelná) – pokud není sporná / má model
- kompletní – pokud není sporná a každý výrok je v ní pravdivý nebo lživý (žádné nezávislé výroky; má právě jeden model)

př: sporná $T = \{p;\ p \Rightarrow q;\ \neg q\}$, bezesporná, ale není kompletní $T' = \{p \vee q;\ r\}$ $(p \wedge q)$ nezávislý

kompletní $= T' \cup \{\neg p\}$

důsledek teorie T je každý výrok, který v T platí (tj platí v každém modelu T)

$$Csq_{\mathbb{P}}(T) = \{\varphi \in VF_{\mathbb{P}} \mid T \models \varphi\}$$

P5 • Extenze teorie ve VL: Mějme v teorii T v jazyce $\mathbb{P}$

- Extenze teorie T je libovolná teorie T' v jazyce $\mathbb{P}' \supseteq \mathbb{P}$ splňující $Csq_{\mathbb{P}}(T) \subseteq Csq_{\mathbb{P}'}(T')$
- je to jednoduchá extenze, pokud $\mathbb{P} = \mathbb{P}'$ $\Leftrightarrow$ $\mathbb{P}' = \mathbb{P}$ a $M_{\mathbb{P}}(T') \subseteq M_{\mathbb{P}}(T)$
- je to konzervativní extenze, pokud $Csq_{\mathbb{P}}(T) = Csq_{\mathbb{P}}(T') = Csq_{\mathbb{P}'}(T') \cap VF_{\mathbb{P}}$

• Extenze teorie v PL: Mějme teorii T v jazyce L

- Extenze teorie T je libovolná teorie T' v jazyce $L' \supseteq L$ splňující $Csq_L(T) \subseteq Csq_{L'}(T')$
- je to jednoduchá extenze, pokud $L = L'$
- je to konzervativní extenze, pokud $Csq_L(T) = Csq_L(T') = Csq_{L'}(L') \cap Fm_L$, kde Fm_L je množina všech formulí v jazyce L

Sentence pravdivé v T jsou důsledky T; Množina všech: $Csq_L(T) = \{\varphi \mid \varphi$ je sentence a $T \models \varphi\}$

Teorie T' (v L) je ekvivalentní T, pokud T je extenzí T' a T' je extenzí T

Pro T, T' v L platí • T' je extenze T, právě tehdy když $M_L(T') \subseteq M_L(T)$

• T' je ekvivalentní s T, právě tehdy když $M_L(T') = M_L(T)$

P6 • **Tablo z teorie**

Konečné tablo z teorie T je uspořádaný, položkami označkovaný strom zkonstruovaný aplikací konečně mnoha následujících pravidel

- jednoprvkový strom označkovaný libovolnou položkou je tablo z teorie T
- pro libovolnou položku P na libovolné větvi V, můžeme na konec větve V připojit atomické tablo pro položku P

PL [přičemž je-li P typu „svědek", můžeme použít jen pomocný konstantní symbol $c_i \in C$, který na větvi V dosud nevyskytuje (pro P „všichni" můžeme použít lib. L_C-term t_i)]

- na konec libovolné větve můžeme připojit položku $T\alpha$ pro libovolný axiom $\alpha \in T$

Tablo z teorie T je buď konečné nebo i nekonečné (vznikne ve spočetně mnoha krocích)

• **Tablo důkaz** výroku (sentence) φ z teorie T je sporné tablo z teorie T s položkou $F\varphi$ v kořeni

Pokud existuje, je φ (tablo) dokazatelný z T, píšeme $T \vdash \varphi$.

(Definujme také tablo zamítnutí jako sporné tablo s $T\varphi$ v kořeni.

Pokud existuje, je φ (tablo) zamítnutelný z T, tj platí $T \vdash \neg\varphi$)

- Tablo je sporné, pokud je každá jeho větev sporná
- Větev je sporná, pokud obsahuje položky $T\varphi$ a $F\varphi$ pro nějaký výrok φ, jinak je bezesporná
- Tablo je dokončené, pokud je každá jeho větev dokončená
- Větev je dokončená, pokud – je sporná nebo – je každá její položka na této větvi redukovaná a zároveň obsahuje položku $T\alpha$ pro každý axiom $\alpha \in T$
- Položka P je redukovaná na větvi V procházející touto položkou, pokud
  - je tvaru Tp, resp. Fp pro nějakou výr. proměnnou $p \in P$ nebo
  - při konstrukci tabla již došlo k jejímu rozvoji na V, tj vyskytuje se na V jako kořen atomického tabla

PL
  - je typu „všichni" a všechny její výskyty na V jsou na větvi V redukované
- Výskyt položky P typu „všichni" na V je i-tý, pokud má na V právě $i-1$ předků označených touto položkou, i-tý výskyt je redukovaný na V, pokud
  - položka P má $(i+1)$-ní výskyt na V, a zároveň – na V se vyskytuje položka $T\varphi(x/t_i)$ (je-li $P = T(\forall x)\varphi(x)$) resp. $F\varphi(x/t_i)$ (je-li $P = F(\exists x)\varphi(x)$), kde t_i *

* t_i je i-tý konst. term

Položka – labely na vrcholech ($T\varphi$ / $F\varphi$)

Strom je neprázdná množina T s částečným uspořádáním $<_T$, které má jediný min. prvek (kořen) a ve kterém je množina předků libovolného vrcholu dobře uspořádaná

Větev stromu T je maximální lineárně uspořádaná podmnožina T

Uspořádaný strom je strom T spolu s lineárním uspořádáním $<_L$ množiny synů každého vrcholu. Uspořádání synů budeme říkat pravolevé zatímco uspořádání $<_T$ je stromové

Systematické tablo. Mějme položku R a (kon/nekonečnou) teorii $T = \{\alpha_1, \dots \alpha_n\}$.
Systematické tablo z T pro položku R je tablo $\mathcal{T} = \bigcup_{i \geq 0} \mathcal{T}_i$, kde $\mathcal{T}_0$ je jednoprvkové tablo s položkou R, a pro každé $i \geq 0$:

- Nechť P je nejlevější položka v co nejmenší úrovni, která není redukovaná na nějaké bezesporné větvi procházející P. Definujeme nejprve tablo $\mathcal{T}_i'$ jako tablo vzniklé z $\mathcal{T}_i$ připojením atomického tabla pro P na každou bezespornou větev procházející P. ($\mathcal{T}_i' = \mathcal{T}_i$ pokud neexistuje)
- Následně $\mathcal{T}_{i+1}$ je tablo vzniklé z $\mathcal{T}_i'$ připojením $T\alpha_i$ na každou bezespornou větev $\mathcal{T}_i'$. To v případě, že $i \leq |T|$, jinak (je-li T konečná a už jsme použili všechny axiomy) tento krok přeskočíme a definujeme $\mathcal{T}_{i+1} = \mathcal{T}_i'$

P7 • Kanonický model

VL Je-li V bezesporná větev dokončeného tabla, potom kanonický model pro V je model definovaný předpisem (pro $p \in \mathbb{P}$)

$$v(p) = \begin{cases} 1 & \text{pokud se na } V \text{ vyskytuje } Tp \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

PL Mějme teorii T v jazyce $L = \langle \mathcal{F}; \mathcal{R} \rangle$ a nechť V je bezesporná větev nějakého dokončeného tabla z teorie T. Potom kanonický model pro V je L_C-struktura $\mathcal{A} = \langle A; \mathcal{F}^A \cup C^A; \mathcal{R}^A \rangle$ je-li L bez rovnosti, pak:
- Doména A je množina všech konstantních L_C-termů
- pro každý n-ární relační symbol $R \in \mathcal{R}$ a "s_1", …, "s_n" z A: ("s_1", …, "s_n") $\in R^A$ právě tehdy když na větvi V je položka $T\,R(s_1, \dots, s_n)$
- pro každý n-ární funkční symbol $f \in \mathcal{F}$ a "s_1", …, "s_n" z A:

$$f^A(\text{"}s_1\text{"}, \dots, \text{"}s_n\text{"}) = \text{"}f(s_1, \dots, s_n)\text{"},$$ speciálně pro konst. symbol $c^A = \text{"}c\text{"}$.

Funkci f^A tedy interpretujeme jako "vytvoření" nového termu ze symbolu f a vstupních termů

(P8)

- **Kongruence** - Mějme ekvivalenci $\sim$ na množině A, funkci $f: A^n \to A$, a relaci $R \subseteq A^n$.

  Říkáme, že $\sim$ je

  - kongruencí pro funkci f, pokud pro všechna $x_i, y_i \in A$ taková, že $x_i \sim y_i$ $(1 \le i \le n)$ platí $f(x_1, \dots, x_n) \sim f(y_1, \dots, y_n)$
  - kongruencí pro relaci R, pokud pro všechna $x_i, y_i \in A$ taková, že $x_i \sim y_i$ $(1 \le i \le n)$ platí $R(x_1, \dots, x_n)$ právě tehdy když $R(y_1, \dots, y_n)$

  Kongruence struktury $\mathcal{A}$ je ekvivalence $\sim$ na množině A, která je kongruencí pro všechny funkce a relace

- **Faktorstruktura** - Mějme struktura $\mathcal{A}$ a její kongruenci $\sim$. Faktorstruktura (podílová strukt.) $\mathcal{A}$ podle $\sim$ je struktura $\mathcal{A}/\sim$ v témž jazyce, jejíž univerzum $A/\sim$ je množina všech rozkladových tříd A podle $\sim$, a jejíž funkce a relace jsou definované pomocí reprezentantů tj.

  - $f^{\mathcal{A}/\sim}([x_1]_\sim, \dots, [x_n]_\sim) = [f^{\mathcal{A}}(x_1, \dots, x_n)]_\sim$, pro každý ($n$-ární) funkční symbol f
  - $R^{\mathcal{A}/\sim}([x_1]_\sim, \dots, [x_n]_\sim)$, právě když $R^{\mathcal{A}}(x_1, \dots, x_n)$, pro každý ($n$-ární) relační symbol R.

- **Axiomy rovnosti** pro jazyk L s rovností jsou následující

  i) $x = x$ (reflexivita $=^{\mathcal{A}}$)

  ii) $x_1 = y_1 \wedge \dots \wedge x_n = y_n \to f(x_1, \dots, x_n) = f(y_1, \dots, y_n)$ pro každý n-ární funkční symbol f jazyka L

  iii) $x_1 = y_1 \wedge \dots \wedge x_n = y_n \to (R(x_1, \dots, x_n) \to R(y_1, \dots, y_n))$ pro každý n-ární relační symbol R jazyka L včetně rovnosti.

(P9)

- **CNF** - conjuctive normal form, výrok je v CNF je-li konjunkcí klauzulí
- **DNF** - disjunctive normal form, výrok je v DNF je-li disjunkcí elem. konjunkcí
- **Hornův tvar** - Výrok je hornovský (v Hornově tvaru), pokud je konjunkcí hornovských klauzulí

  | hornovská klauzule - klauzule obsahující nejvýše jeden pozitivní literál

- **množinová reprezentace** - literál, klauzule = konečná množina literálů, = množina klauzulí

| (částečné) ohodnocení $\mathcal{V}$ je libovolná množina literálů, která je konzistentní (neobsahuje dvojici opač. literálů)

- ohodnocení **splňuje** formuli S ($\mathcal{V} \models S$), pokud $\mathcal{V}$ obsahuje nějaký literál z každé klauzule v S tj. $\mathcal{V} \cap C \neq \emptyset$ pro každou $C \in S$

P10 • Rezoluční pravidlo - Pro klauzule C_1 a C_2 a literál ℓ, t.ž. $\ell \in C_1$ a $\bar{\ell} \in C_2$.
VL Potom rezolventa klauzulí C_1 a C_2 přes literál ℓ je klauzule $C = (C_1 \setminus \{\ell\}) \cup (C_2 \setminus \{\bar{\ell}\})$

PL | Substituce je konečná množina $\sigma = \{x_1/t_1, \dots, x_n/t_n\}$, kde x_i jsou navzájem různé proměnné a t_i jsou termy, přičemž vyžadujeme, aby term t_i nebyl roven proměnné x_i.
Substituce σ • je základní, jsou-li všechny termy t_i konstantní
• je přejmenování proměnných, jsou-li všechny termy t_i navzájem různé proměnné

| Mějme substituce $\sigma = \{x_1/t_1, \dots, x_n/t_n\}$ a $\tau = \{y_1/s_1, \dots, y_n/s_n\}$. Složení substitucí σ a τ je substituce $\sigma\tau = \{x_i/t_i\tau \mid x_i \in X, x_i \neq t_i\tau\} \cup \{y_j/s_j \mid y_j \in Y \setminus X\}$

Mějme konečnou množinu výrazů $S = \{E_1, \dots, E_n\}$. Substituce σ je unifikace pro S, pokud $E_1\sigma = E_2\sigma = \dots E_n\sigma$, neboli $S\sigma$ obsahuje jediný výraz. Pokud existuje, potom říkáme také, že S je unifikovatelná. Unifikace pro S je nejobecnější, pokud pro každou unifikaci τ pro S existuje substituce λ taková, že $\tau = \sigma\lambda$ (může jich být více)

• Mějme klauzule C_1 a C_2 s disjunktními množinami proměnných a nechť jsou tvaru
$C_1 = C_1' \cup \{A_1, \dots, A_n\}$; $C_2 = C_2' \cup \{\neg B_1, \dots, \neg B_m\}$
kde $n, m \geq 1$ a množinu výrazů $S = \{A_1, \dots, A_n, B_1, \dots, B_m\}$ lze unifikovat. Buď σ nejobecnější unifikace S. Rezolventa klauzulí C_1 a C_2 je následující klauzule $C = C_1'\sigma \cup C_2'\sigma$

P11 • Rezoluční důkaz klauzule C z formule S je konečná posloupnost klauzulí $C_0, C_1, \dots C_n = C$ t.ž. pro každé i buď • $(C_i \in S)^{VL}$
$(C_i = C_i\sigma$ pro nějakou klauzuli $C_i \in S$ a přejmenováním proměnných $\sigma)^{PL}$ nebo
• C_i je rezolventou nějakých C_j, C_k kde $i<j, k<i$
Pokud rezoluční důkaz existuje, říkáme, že C je rezolucí dokazatelná z S, píšeme $S \vdash_R C$

• Rezoluční zamítnutí formule S je rezoluční důkaz $\square$ z S, v tom případě je S rezolucí zamítnutelná

| Rezoluční strom klauzule C z formule S je konečný binární strom s vrcholy označenými klauzulemi, kde • v kořeni je C
• v listech jsou klauzule z S
• v každém vnitřním vrcholu je rezolventa klauzulí ze synů tohoto vrcholu

Instance výrazu (termu nebo literálu) E při substituci $\sigma = \{x_1/t_1, \dots, x_n/t_n\}$ je výraz vzniklý z E simultánním nahrazením všech výskytů proměnných x_i termů t_i, označíme jej $E\sigma$.
Je-li S množina výrazů, potom značíme $S\sigma = \{E\sigma \mid E \in S\}$

Rezoluční uzávěr $R(S)$ formule S je definován induktivně jako nejmenší množina klauzulí splňující:

- $C \in R(S)$ pro všechna $C \in S$
- jsou-li $C_1, C_2 \in R(S)$ a je-li C rezolventa C_1, C_2, potom také $C \in R(S)$

Dosazení literálu - Je-li S formule a ℓ literál, potom dosazení ℓ do S vystihne formuli

$$S^{\ell} = \{C \setminus \{\bar{\ell}\} \mid \ell \notin C \in S\}$$

rozdíly

P12 • Lineární důkaz klauzule C z formule S je konečná posloupnost

$$\begin{bmatrix} C_0 \\ B_0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} C_1 \\ B_1 \end{bmatrix}, \dots \begin{bmatrix} C_n \\ B_n \end{bmatrix}; C_{n+1}$$

kde C_i je centrální klauzule, C_0 je počáteční, $C_{n+1} = C$ je koncová,
B_i jsou boční klauzule a platí:

- $(C_0 \in S)^{VL} (C_0$ je varianta klauzule z $S)^{PL}$ pro $i \leq n$ je C_{i+1} rezolventou C_i a B_i
- $(B_0 \in S)^{VL} (B_0$ je varianta klauzule z $S)^{PL}$ pro $i \leq n$ je $B_i \in S$ nebo $B_i = C_j$ pro nějaké $j < i$

lineární zamítnutí S je lineární důkaz $\square$ z S

- LI-důkaz (rezoluce) klauzule C z formule S je lineární důkaz

$$\begin{bmatrix} C_0 \\ B_0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} C_1 \\ B_1 \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} C_n \\ B_n \end{bmatrix}, C$$

ve kterém je každá boční klauzule B_i (axiom z S)^{VL} (variantou klauzule z S)^{PL}
Pokud LI-důkaz existuje, říkáme, že je C LI-dokazatelná z S a píšeme $S \vdash_{LI} C$.
Pokud $S \vdash_{LI} \square$ je S LI-zamítnutelná

Termy jazyka L jsou konečné nápisy definované induktivně:

- každá proměnná a každý konstantní symbol z L je term
- je-li f funkční symbol z L arity n a jsou-li $t_1, \dots, t_n$ termy, potom nápis $f(t_1, \dots, t_n)$ je také term

Term_L = množina všech termů jazyka L

(P13) • Signatura je dvojice $\langle \mathcal{R}; \mathcal{F} \rangle$, kde $\mathcal{R}, \mathcal{F}$ jsou disjunktní množiny symbolů (relační, funkční (včetně konstantních)) spolu s danými aritami (tj. danými funkcí $ar: \mathcal{R} \cup \mathcal{F} \to \mathbb{N}$) a neobsahující symbol „="

(př) • $\langle E \rangle$ signatura grafů • $\langle \leq \rangle$ signatura částečných uspořádání
• $\langle +, -, 0 \rangle$ signatura grup • $\langle +, \cdot, 0, -1 \rangle$ signatura těles

• Struktura v signatuře $\langle \mathcal{R}; \mathcal{F} \rangle$ je trojice $\mathcal{A} = \langle A; \mathcal{R}^{\mathcal{A}}; \mathcal{F}^{\mathcal{A}} \rangle$, kde:
  - A je neprázdná množina (doména, univerzum)
  - $\mathcal{R}^{\mathcal{A}} = \{ R^{\mathcal{A}} / R \in \mathcal{R} \}$ kde $R^{\mathcal{A}} \subseteq A^{ar(R)}$ je interpretace relačního symbolu R
  - $\mathcal{F}^{\mathcal{A}} = \{ f^{\mathcal{A}} / f \in \mathcal{F} \}$ kde $f^{\mathcal{A}}: A^{ar(R)} \to A$ -//- funkčního symbolu f (speciálně pro konstantní symbol $c \in \mathcal{F}$ máme $c^{\mathcal{A}} \in A$)

• Jazyk obsahuje (specifikace signaturou a informací „s rovností", „bez rovnosti")
  - spočetně mnoho proměnných $(x_0, x_1, \dots)$, Var ≡ množina všech proměnných
  - relační, funkční a konstantní symboly ze signatury, a symbol = pro jazyk s rovností
  - univerzální a existenční kvantifikátory $(\forall x), (\exists x)$ pro $\forall x \in$ Var
  - symboly pro logické spojky $\neg, \wedge, \vee, \to, \leftrightarrow$ a závorky (,)

- Jazyk musí obsahovat alespoň 1 relační symbol, jinak nelze vybudovat žádné formule

(P14) • Atomická formule jazyka L je nápis $R(t_1, \dots, t_n)$, kde R je n-ární relační symbol z L (včetně = jde-li o jazyk s rovností) a $t_i \in \text{Term}_L$

atomické formule jsou nejjednodušími formulemi

(př) $(x \cdot x) + (y \cdot y) \leq (x + y)(x + y)$ v jazyce uspořádaných těles

• Formule jazyka L jsou konečné nápisy definované induktivně:
  - každá atomická formule jazyka L je formule
  - jsou-li φ, ψ formule, potom $(\varphi \wedge \psi); (\varphi \vee \psi); (\varphi \to \psi); (\varphi \leftrightarrow \psi)$ jsou také formule
  - je-li φ formule a x proměnná, potom $((\forall x) \varphi)$ a $((\exists x) \varphi)$ jsou také formule

| Podformule je podřetězec, který je sám o sobě formulí

| Strom formule $(\text{Tree}(\varphi))$:= je-li φ atomická formule $= R(t_1, \dots, t_n)$, kořen $= R$ a připojený $\text{Tree}(t_i)$
- není-li φ atomická – strom zkonstruujeme obdobně jako strom výrazu

| Výskyt proměnné x ve formuli φ je list $Tree(\varphi)$ označený x

| Vázaný výskyt – pokud je x součástí nějaké podformule (podstromu) začínajícího $Q(x)$

| Volný výskyt – pokud výskyt x není vázaný, tak je volný

- Formule je otevřená, neobsahuje-li žádný kvantifikátor
- Formule je uzavřená (sentence), pokud nemá žádnou volnou proměnnou

př • $x+y \leq 0$ je otevřená • $(\forall x)(\forall y)(x+y \leq 0)$ je sentence

každá atomická formule je otevřená

P15 • Instance formule vznikne dosazením termu t do φ za volnou proměnnou x

- Term t je substituovatelný za proměnnou x ve formuli φ, pokud po simultánním nahrazení všech volných výskytů x ve φ za t nevznikne ve φ žádný vázaný výskyt proměnné z t. Takto vzniklá formuli říkáme instance φ vzniklá substitucí t za x. Označujeme $\varphi(x/t)$

- Má-li formule φ podformuli tvaru $(Qx)\psi$ a je-li y proměnná, tž
  - y je substituovatelná za x do ψ a • y nemá volný výskyt v ψ

pak nahrazením podformule $(Qx)\psi$ formulí $(Qy)\psi(x/y)$ vznikne varianta formule φ v podformuli $(Qx)\psi$

př $\varphi = (\exists x)(\forall y)(x \leq y)$ • $(\exists u)(\forall v)(u \leq v)$ je varianta φ

• $(\exists x)(\forall x)(x \leq x)$ není varianta φ, x má volný v podformuli $\psi = (x \leq y)$

| Model jazyka L (L-struktura) je libovolná struktura v signatuře jazyka L (M_L = třída všech modelů jazyka L)

př pro $L = \langle \leq \rangle$ modely např. $\langle \mathbb{N}; \leq \rangle, \langle \mathbb{Q}, > \rangle$

| Hodnota termu ve struktuře $\mathcal{A}$ při ohodnocení e, kterou značíme $t^{\mathcal{A}}[e]$, je dána induktivně:

- $x^{\mathcal{A}}[e] = e(x)$ pro proměnnou $x \in Var$
- $c^{\mathcal{A}}[e] = c^{\mathcal{A}}$ pro konstantní symbol $c \in \mathcal{F}$
- je-li $t = f(t_1, \dots, t_n)$ složený term, kde $f \in \mathcal{F}$, potom $t^{\mathcal{A}}[e] = f^{\mathcal{A}}(t_1^{\mathcal{A}}[e], \dots, t_n^{\mathcal{A}}[e])$

| Mějme otevřenou formuli φ ve volných proměnných $x_1, \dots, x_n$. Řekneme, že instance $\varphi(x_1/t_1, \dots, x_n/t_n)$ je základní (ground) instance, jsou-li všechny termy $t_1, \dots, t_n$ konstantní (ground)

(P16) • Mějme formuli φ v jazyce L, strukturu $\mathcal{A} \in M(L)$ a ohodnocení proměnných $e: \mathrm{Var} \to A$.
Pravdivostní hodnota φ v $\mathcal{A}$ při ohodnocení e, $PH^{\mathcal{A}}(\varphi)[e]$, je definováno induktivně podle struktury formule:

- Pro atomickou formuli $\varphi = R(t_1, \dots, t_n)$ máme

$$PH^{\mathcal{A}}(\varphi)[e] \quad \bullet\ 1 \text{ pokud } (t_1^{\mathcal{A}}[e], \dots, t_n^{\mathcal{A}}[e]) \in R^{\mathcal{A}} \qquad \bullet\ 0 \text{ jinak}$$

Speciálně je-li φ tvaru $t_1 = t_2$, potom $PH^{\mathcal{A}}(\varphi)[e] = 1$ právě tehdy $(t_1^{\mathcal{A}}[e], t_2^{\mathcal{A}}[e]) \in =^{\mathcal{A}}$, kde $=^{\mathcal{A}}$ je identita na $\mathcal{A}$, tj. právě když $t_1^{\mathcal{A}}[e] = t_2^{\mathcal{A}}[e]$ (obě strany $=$ jsou stejný prvek $a \in \mathcal{A}$)

- pro negaci $PH^{\mathcal{A}}(\neg\varphi)[e] = f_{\neg}(PH^{\mathcal{A}}(\varphi)[e]) = 1 - PH^{\mathcal{A}}(\varphi)[e]$
- pro φ, ψ a bin. log. spojky $\square = \{\to, \leftrightarrow, \vee, \wedge\}$: $PH^{\mathcal{A}}(\varphi \square \psi)[e] = f_{\square}(PH^{\mathcal{A}}(\varphi)[e], PH^{\mathcal{A}}(\psi)[e])$
- pro kvantifikátory $(Qx)\varphi$. Značme-li $e: \mathrm{Var} \to \mathcal{A}$ hodnotu pro x na $e(x/a)$, platí $e(x/a)(x) = a$

$$PH^{\mathcal{A}}((\forall x)\varphi)[e] = \min_{a \in \mathcal{A}} (PH^{\mathcal{A}}(\varphi)[e(x/a)])$$

$$PH^{\mathcal{A}}((\exists x)\varphi)[e] = \max_{a \in \mathcal{A}} (PH^{\mathcal{A}}(\varphi)[e(x/a)])$$

vlastnosti: • $\mathcal{A} \models \neg\varphi[e]$ právě když $\mathcal{A} \not\models \varphi[e]$

• $\mathcal{A} \models (\varphi \wedge \psi)[e]$ právě když $\mathcal{A} \models \varphi[e]$ a $\mathcal{A} \models \psi[e]$

• $\mathcal{A} \models (\varphi \to \psi)[e]$ právě když platí: jestliže $\mathcal{A} \models \varphi[e]$ potom $\mathcal{A} \models \psi[e]$

• Platnost ve struktuře. Mějme formuli φ a struktura $\mathcal{A}$ (stejný jazyk): (opak $\mathcal{A} \not\models \varphi[e]$)

- Je-li e ohodnocení a $PH^{\mathcal{A}}(\varphi)[e] = 1$, pak „$\varphi$ platí v $\mathcal{A}$ při ohodnocení e“ $\mathcal{A} \models \varphi[e]$
- Pokud φ platí v $\mathcal{A}$ při každém ohodnocení $e: \mathrm{Var} \to \mathcal{A}$, potom „$\varphi$ je pravdivá (platí) v $\mathcal{A}$“; $\mathcal{A} \models \varphi$
- Pokud $\mathcal{A} \models \neg\varphi$, tj. φ neplatí v $\mathcal{A}$ při žádném ohodnocení (pro každé e $\mathcal{A} \not\models \varphi[e]$), potom φ lživá v $\mathcal{A}$

| generální uzávěr formule $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ (tj. $x_1, \dots, x_n$ jsou všechny volné proměnné formule φ) je sentence $(\forall x_1)(\dots)(\forall x_n)\varphi$. $\mathcal{A} \models \varphi$ právě když $\mathcal{A} \models (\forall x)\varphi$, formule platí ve str. $\Leftrightarrow$ platí její gen. uzávěr

| Platnost v teorii – Teorie T v jazyce L a φ L-formule, pak φ je:

- pravdivá (platí) v T ($T \models \varphi$), pokud $\mathcal{A} \models \varphi$ pro všechna $\mathcal{A} \in M(T)$ (neboli $M(T) \subseteq M(\varphi)$)
- lživá v T pokud $T \models \neg\varphi$ tj. pokud je lživá v každém modelu T ($M(T) \cap M(\varphi) = \emptyset$)
- nezávislá v T, pokud není pravdivá v T ani lživá v T

P17 • Teorie je kompletní, je-li bezesporná a každá sentence je v ní buď pravdivá nebo lživá

Teorie je kompletní, právě tehdy když má právě 1 model až na elementární ekvivalenci

• Struktury A, B (ve stejném jazyce) jsou elementárně ekvivalentní, pokud v nich platí tytéž sentence. $A \equiv B$

! není to isomorfismus

P18 • Mějme strukturu $\mathcal{A} = \langle A, \mathcal{R}^{\mathcal{A}}, \mathcal{F}^{\mathcal{A}} \rangle$ v signatuře $\langle \mathcal{R}; \mathcal{F} \rangle$. Struktura $\mathcal{B} = \langle B, \mathcal{R}^{\mathcal{B}}; \mathcal{F}^{\mathcal{B}} \rangle$ je (indukovaná) podstruktura $\mathcal{A}$, $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$, jestliže

- $\emptyset \neq B \subseteq A$
- $R^{\mathcal{B}} = R^{\mathcal{A}} \cap B^{ar(R)}$ pro každý relační symbol $R \in \mathcal{R}$
- $f^{\mathcal{B}} = f^{\mathcal{A}} \cap (B^{ar(f)} \times B)$ pro každý funkční symbol $f \in \mathcal{F}$ (tj. funkce $f^{\mathcal{B}}$ je restrikce $f^{\mathcal{A}}$ na množinu B, a její výstupy jsou všechny také z B)
- speciálně, pro každý konstantní symbol $c \in \mathcal{F}$ máme $c^{\mathcal{B}} = c^{\mathcal{A}} \in B$.

Množina $C \subseteq A$ je uzavřená na funkci $f: A^n \to A$, pokud $f(x_1, \ldots, x_n) \in C$ pro všechna $x_i \in C$, platí

pozorování: Množina $\emptyset \neq C \subseteq A$ je univerzem podstruktury struktury $\mathcal{A}$, právě když je C uzavřená na všechny funkce struktury $\mathcal{A}$ (včetně konstant)

-pak říkáme této podstruktuře restrikce $\mathcal{A}$ na množinu C, značíme $A \upharpoonright C$.

př $\underline{\mathbb{Z}} = \langle \mathbb{Z}, +, \cdot, 0 \rangle$ je podstrukturou $\underline{\mathbb{Q}} = \langle \mathbb{Q}, +, \cdot, 0 \rangle$ $\underline{\mathbb{Z}} = \underline{\mathbb{Q}} \upharpoonright \mathbb{Z}$

• Mějme strukturu $\mathcal{A} = \langle A, \mathcal{R}^{\mathcal{A}}; \mathcal{F}^{\mathcal{A}} \rangle$ a neprázdnou podmnožinu $X \subseteq A$. Označme B jako nejmenší podmnožinu A, která obsahuje X a je uzavřená na všechny funkce struktury $\mathcal{A}$. Potom o struktuře $\mathcal{A} \upharpoonright B$ říkáme, že je generovaná množinou X, značíme $A\langle X \rangle$

př pro $\underline{\mathbb{Q}} = \langle \mathbb{Q}, +, \cdot, 0 \rangle$, $\underline{\mathbb{Z}} = \langle \mathbb{Z}, +, \cdot, 0 \rangle$, $\underline{\mathbb{N}} = \langle \mathbb{N}, +, \cdot, 0 \rangle$. Pak $\underline{\mathbb{Q}}\langle \{1\} \rangle = \underline{\mathbb{N}}$, $\underline{\mathbb{Q}}\langle \{-1\} \rangle = \underline{\mathbb{Z}}$

• Mějme jazyky $L \subseteq L'$, L-strukturu $\mathcal{A}$, L'-strukturu $\mathcal{A}'$ na stejné doméně $A = A'$. Jestliže je interpretace každého symbolu [relačního, funkčního, konst.] stejná [-"-] v A i v A' pak říkáme, že A' je expanzí struktury $\mathcal{A}$ do jazyka L' (L'-expanzí) a že struktura $\mathcal{A}$ je reduktem struktury $\mathcal{A}'$ na jazyk L (L-reduktem)

př Grupa celých čísel $\langle \mathbb{Z}; +, -, 0 \rangle$. $\langle \mathbb{Z}, + \rangle$ je jejím reduktem, $\langle \mathbb{Z}, +, -, 0, \cdot, 1 \rangle$ je expanzí

(P19) Definovatelnost ve struktuře

- Mějme formuli $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ a strukturu $\mathcal{A}$ v témž jazyce. Množina definovaná formulí $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ ve struktuře $\mathcal{A}$, značíme $\varphi^{\mathcal{A}}(x_1, \dots, x_n)$ je:

$$\varphi^{\mathcal{A}}(x_1, \dots, x_n) = \{(a_1, \dots, a_n) \in A^n \mid \mathcal{A} \models \varphi\, [e(x_1/a_1, \dots, x_n/a_n)]\}$$

zkrácený zápis $\varphi^{\mathcal{A}}(\bar{x}) = \{\bar{a} \in A^n \mid \mathcal{A} \models \varphi\, [e(\bar{x}/\bar{a})]\}$

př. $\neg(\exists y) E(x,y)$ = množina všech izolovaných vrcholů v G

Zápisem $\varphi(\bar{x}, \bar{y})$ myslíme, že formule φ má volné proměnné $(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_k)$ pro nějaké n, k

- Mějme formy $\varphi(\bar{x}, \bar{y})$, kde $|\bar{x}| = n$, $|\bar{y}| = k$, strukturu $\mathcal{A}$ v témž jazyce a k-tici prvků $\bar{b} \in A^k$. Množina definovaná formulí $\varphi(\bar{x}, \bar{y})$ s parametry $\bar{b}$ ve struktuře $\mathcal{A}$, značíme $\varphi^{\mathcal{A}, \bar{b}}(\bar{x}, \bar{y})$, je: $\varphi^{\mathcal{A}, \bar{b}}(\bar{x}, \bar{y}) = \{\bar{a} \in A^n \mid \mathcal{A} \models \varphi[e(\bar{x}/\bar{a}, \bar{y}/\bar{b})]\}$
- Pro strukturu $\mathcal{A}$ a podmnožinu $B \subseteq \mathcal{A}$ označme $Df^n(\mathcal{A}, B)$ množinu všech množin definovatelných ve struktuře $\mathcal{A}$ s parametry pocházejícími z B

(P20)

- Máme-li L-teorii T a L' teorii T', potom říkáme, že T' je extenzí o definice, pokud vznikla z T postupnou extenzí o definice relačních a funkčních (konst) symbolů.
  - Mějme T a formuli $\psi(x_1, \dots, x_n)$ v jazyce L. Označme L' jako rozšíření L o nový n-ární relační symbol R. Extenze T o definici R formulí ψ je L'-teorie: $T' = T \cup \{R(x_1, \dots, x_n) \leftrightarrow \psi(x_1, \dots, x_n)\}$
    - každý model T lze jednoznačně expandovat na model T'
  - Mějme T a formuli $\psi(x_1, \dots, x_n, y)$ v L. Označme L' jako rozšíření jazyka L o nový n-ární funkční symbol f. Nechť v T platí:
    - axiom existence – $(\exists y)\, \psi(x_1, \dots, x_n, y)$
    - axiom jednoznačnosti – $\psi(x_1, \dots, x_n, y) \wedge \psi(x_1, \dots, x_n, z) \rightarrow y = z$

    potom extenze T o definici f formulí ψ je L'-teorie: $T' = T \cup \{f(x_1, \dots, x_n) = y \leftrightarrow \psi(x_1, \dots, x_n, y)\}$
  - konstantní symbol je speciální případ funkčního symbolu arity 0. – Stejné tvrzení
    - AE: $(\exists y)\psi(y)$
    - AJ: $\psi(y) \wedge \psi(z) \rightarrow y = z$ $\qquad T' = T \cup \{c = y \leftrightarrow \psi(y)\}$

důsledek T' je konzervativní extenze T

Mějme T v L a T' v nějakém rozšíření jazyce L', pak „T a T' jsou ekvisplnitelné" pokud platí T má model ⇔ T' má model

1) Převod do PNF (vytýkání Q_x) 2) Nahrazení formulí jejich generálními uzávěry (→ senkence)

3) Odstranění $\exists x$ (nahrazení skolemovými variantami)

4) Odstranění zbývajících univerzálních kvantifikátorů (→ otevřené formule)

P21 • Formule φ je v prenexní normální formě (PNF), je-li tvaru $(Q_1 x_1)\ldots(Q_n x_n)\varphi'$ kde Q_i je ($\forall$ nebo $\exists$) a formule φ' je otevřená. Formuli φ' potom říkáme otevřené jádro φ a $(Q_1 x_1)\ldots(Q_n x_n)$ je kvantifikátorový prefix

Je-li φ formule v PNF a všechny kvantifikátory univerzální, pak φ je univerzální formule

• Mějme L-sentenci φ v PNF, a nechť všechny její vázané proměnné jsou různé. Nechť všechny její vázané proměnné jsou různé. Nechť existenční kvantifikátory z prefixu φ jsou $(\exists y_1)\ldots(\exists y_n)$ a nechť pro všechny i jsou $(\forall x_1)\ldots(\forall x_{n_i})$ právě všechny univerzální kvant. předcházející kvantifikátor $(\exists y_i)$ v prefixu φ.

Označme L' rozšíření L o nové n_i-ární funkční symboly $f_1,\ldots,f_n$, kde symbol f_i je arity n_i pro každé i. Skolemova varianta φ je L'-sentence φ_S vzniklá z φ tak, že pro každé $i=1,\ldots,n$

- odstraníme z prefixu kvantifikátor $(\exists y_i)$
- substitujeme za proměnnou y_i term $f_i(x_1,\ldots,x_{n_i})$

P22 Mějme struktury $\mathcal{A},\mathcal{B}$ jazyka $L=\langle\mathcal{R};\mathcal{F}\rangle$. Izomorfismus struktur $\mathcal{A},\mathcal{B}$ je bijekce $h: A\to B$ splňující následující vlastnosti:

- Pro každý n-ární funkční symbol $f\in\mathcal{F}$ a pro všechna $a_i\in A$ platí:
$$h(f^{\mathcal{A}}(a_1,\ldots,a_n)) = f^{\mathcal{B}}(h(a_1),\ldots,h(a_n)),$$ spec. pro $c\in\mathcal{F}$ konst.: $h(c^{\mathcal{A}})=c^{\mathcal{B}}$
- Pro každý n-ární relační symbol $R\in\mathcal{R}$ a pro všechna $a_i\in A$ platí:
$$R^{\mathcal{A}}(a_1,\ldots,a_n) \text{ právě tehdy když } R^{\mathcal{B}}(h(a_1,\ldots,a_n))$$

Pokud existuje říkáme, že $\mathcal{A},\mathcal{B}$ jsou izomorfní, $\mathcal{A}\simeq\mathcal{B}$ $(\mathcal{A}\simeq_h\mathcal{B})$

Isomorfní spektrum teorie T je počet $I(\varkappa,T)$ modelů T kardinality $\varkappa$ až na isomorfismus pro $\forall\varkappa$

Teorie T je $\varkappa$-kategorická, pokud $I(\varkappa,T)=1$

případ $\varkappa=\omega$ ... teorie s jediným spočetně nekonečným modelem (až na isomorfismus)

ω-kategorizace ≈ zeslabení pojmu kompletnosti

P23 Mějme třídu struktur $K \subseteq M_L$ v nějakém jazyce L, pak říkáme, že K je

- axiomatizovatelná, pokud existuje L-teorie T taková, že $M_L(T) = K$
- konečně axiomatizovatelná, pokud je axiomatizovatelná konečnou teorií
- otevřeně axiomatizovatelná, pokud je axiomatizovatelná otevřenou teorií

O L-teorii T' říkáme, že je konečně/otevřeně axiom., pokud to platí o třídě modelů $K = M_L(T')$

charakteristika tělesa: Říkáme, že těleso $\mathcal{A} = \langle A; +, -, 0, \cdot, 1 \rangle$ je

- charakteristiky p, je-li p nejmenší prvočíslo takové, že $\mathcal{A} \models p1 = 0$, kde $p1$ označuje term $1 + 1 + \dots + 1$ s p jedničkami nebo
- charakteristiky 0, pokud není charakteristiky p pro žádné prvočíslo p

P24 Teorie T je rekurzivně axiomatizovaná, pokud existuje algoritmus, který pro každou vstupní formuli φ doběhne a odpoví, zda $\varphi \in T$

Teorie T má rekurzivně spočetnou kompletaci, pokud (nějaká) množina až na ekvivalenci všech jednoduchých kompletních extenzí T je rekurzivně spočetná, tj. existuje algoritmus, který pro danou vstupní dvojici $(i, j) \in \mathbb{N}$, vypíše na výstup i-tý axiom j-té extenze nebo odpoví, že takový axiom už neexistuje

Třída L-struktur $K \subseteq M_L$ je rekurzivně axiomatizovatelná, pokud existuje rekurzivně axiomatizovatelná L-teorie T taková, že $K = M_L(T)$. Teorie T' je rekurzivně axiomatizovatelná, pokud je rekurzivně axiom. třída jejích modelů, neboli pokud je T' ekvivalentní nějaké rekurzivně axiomatizované teorii

P25 Teorie T je

- rozhodnutelná, pokud existuje algoritmus, který pro každou vstupní formuli φ doběhne a odpoví, zda $T \models \varphi$
- částečně rozhodnutelná, pokud existuje algoritmus, který pro každou vstupní formuli
  - pokud $T \models \varphi$, doběhne a odpoví „ano"
  - pokud $T \not\models \varphi$, buď neodoběhne nebo doběhne a odpoví „ne"