

KAPITOLA 6: Průběh funkce

6.1 Extrémy a monotonie

Definice:

Řekneme, že funkce f nabývá na množině $M \subset D(f)$ svého globálního maxima (globálního minima) A v bodě x_0 , jestliže $x_0 \in M$, $f(x_0) = A$ a pro každé $x \in M$ platí

$$(1) \qquad f(x) \leq f(x_0) \qquad \left(f(x) \geq f(x_0) \right).$$

(téz: „absolutní maximum a minimum na M “, „největší a nejmenší hodnota na M “)

$$\left. \begin{array}{l} \text{globální maximum} \\ \text{globální minimum} \end{array} \right\} \dots \text{ globální extrémy}$$

Víme: Spojitá funkce na uzavřeném intervalu nabývá svých globálních extrémů (Věta 5.5).

Definice:

Řekneme, že funkce f nabývá v bodě x_0 **lokálního maxima** (**lokálního minima**) $f(x_0)$, jestliže existuje okolí $U(x_0)$ bodu x_0 takové, že pro každé $x \in U(x_0)$ platí

$$(2) \qquad f(x) \leq f(x_0) \qquad \left(f(x) \geq f(x_0) \right).$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{lokální maximum} \\ \text{lokální minimum} \end{array} \right\} \dots \text{ lokální extrémy}$$

ostrá nerovnost v (1), (2) pro $x \neq x_0 \dots$ **ostří extrém**

Věta 6.1:

Jestliže funkce f nabývá lokálního extrému v bodě x_0 a existuje $\overline{f'(x_0)}$, pak $f'(x_0) = 0$.

Poznámka: Z Věty 6.1 vyplývá, že funkce může mít lokální extrém jen v tom bodě, kde má nulovou derivaci nebo kde derivaci nemá.

$f'(x_0) = 0 \dots x_0 \dots$ **stationární bod** funkce (může v něm být extrém, ale nemusí)

Definice:

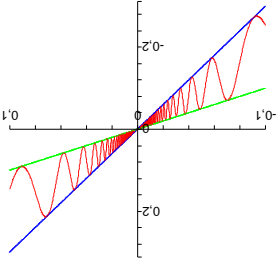
Řekneme, že funkce f je **rostoucí** (**klesající**) v bodě $x_0 \in D(f)$, jestliže existuje okolí $U(x_0) \subset D(f)$ bodu x_0 takové, že pro každé $x \in U(x_0)$ platí

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \text{je-li } x < x_0, \text{ pak } f(x) < f(x_0) & \left(f(x) > f(x_0) \right), \\ \text{b) } \text{je-li } x > x_0, \text{ pak } f(x) > f(x_0) & \left(f(x) < f(x_0) \right). \end{array}$$

(analogický funkce **neklisající** a **nerostoucí** v bodě)

Poznámka: Funkce $f(x) = x \cdot \sin \frac{1}{x} + 2x$ pro $x \neq 0$, $f(0) = 0$, je rostoucí v nule, není ale rostoucí na žádném intervalu obsahujícím nulu. (Na obrázku jsou vyznačeny také grafy funkcí $g(x) = x$ a $h(x) = 3x$, mezi jejichž grafy graf funkce f kmitá.)

Platí: Funkce f je rostoucí na intervalu (a, b) právě tehdy, když je rostoucí v každém bodě tohoto intervalu. (Analogický i pro ostatní typy monotonie.)



Věta 6.2:

Je-li $f'(x_0) > 0$ ($f'(x_0) < 0$), pak je f v x_0 rostoucí (klesající).

Důkaz: Předpokládejme, že derivace $f'(x_0)$ je kladná. Pak $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) > 0$, tedy podle věty 3.4 o zachování znaménka existuje prstencové okolí $P(x_0)$ bodu x_0 takové, že $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0$ pro všechna $x \in P(x_0)$. To znamená, že na $P(x_0)$ pro $x > x_0$ platí $f(x) > f(x_0)$ a pro $x < x_0$ platí $f(x) < f(x_0)$. Funkce f je tak skutečně v x_0 rostoucí. V případě $f'(x_0) < 0$ bychom postupovali analogicky.

Poznámka: Má-li funkce f v bodě x_0 nezápornou derivaci, tj. je-li $f'(x_0) \geq 0$, nemusí být nutně v x_0 neklesající. Např. pro $f(x) = x^2$ máme $f'(x) = 2x$, tedy $f'(0) = 0 \geq 0$, a přitom funkce f v nule neklesající není – má tam lokální minimum. Platí ale naopak, že pokud je funkce v x_0 neklesající a existuje $f'(x_0)$, pak $f'(x_0) \geq 0$. Kdyby totiž byla $f'(x_0) < 0$, byla by podle věty 6.2 funkce f v bodě x_0 klesající.

Věta 6.3:

Nechť f je spojitá na intervalu I a má v každém jeho vnitřním bodě derivaci. Potom

- f je na I neklesající (nerostoucí) právě tehdy, když na vnitřku I je $f' \geq 0$ ($f' \leq 0$),
- je-li na vnitřku I $f' > 0$ ($f' < 0$), pak f je na I rostoucí (klesající).
- je-li na vnitřku I derivace funkce f spojitá a ve všech bodech nenulová, pak je f na I ryze monotonní.

Platí: a) Je-li f rostoucí na (a, b) a spojitá zprava v a (zleva v b), pak je rostoucí na $\langle a, b \rangle$ (na (a, b)).

- Je-li f rostoucí na (a, b) a na $\langle b, c \rangle$, pak je rostoucí na (a, c) .

(Analogicky i pro ostatní typy monotonie.)

Ověřování lokálních extrémů**A) Pomocí monotonie na okolí (a znaménka derivace):**

Je-li f spojitá v x_0 a existuje-li $\delta > 0$ tak, že

f na $P_\delta^-(x_0) = (x_0 - \delta, x_0)$	f na $P_\delta^+(x_0) = (x_0, x_0 + \delta)$		v x_0
roste	klesá	} pak	je ostré lokální maximum
klesá	roste		je ostré lokální minimum
neklesá	neroste		je lokální maximum
neroste	neklesá		je lokální minimum
roste	roste		není extrém (f v x_0 roste)
klesá	klesá		není extrém (f v x_0 klesá)

Poznámka: Monotonii většinou ověřujeme pomocí znaménka derivace.

B) Pomocí 2. derivace:

Je-li $f'(x_0) = 0$ a $f''(x_0) > 0$ ($f''(x_0) < 0$), pak f má v x_0 lokální minimum (lokální maximum).

Hledání globálních extrémů spojité funkce**A) na intervalu $I = \langle a, b \rangle$:**

- Najdeme v I body, kde může být globální extrém (tj. „body podezřelé z extrému“):

- body a , b
- stacionární body ($f'(x) = 0$)
- body, kde f nemá derivaci.

- Spočítáme funkční hodnoty v bodech z a) a vybereme z nich největší / nejmenší.

B) na intervalu, který není uzavřený (např. pro (a, b) – jinak analogicky):

Postupujeme jako v A), pouze $f(a)$ nahradíme $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \alpha$ s tím, že je-li ve všech ostatních vyšetřovaných bodech funkční hodnota větší (menší) než α , pak f na (a, b) globálního minima (maxima) nenabývá a $\alpha = \inf\{f(x) \mid x \in (a, b)\}$ ($\alpha = \sup\{f(x) \mid x \in (a, b)\}$).
(Pokud $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ neexistuje, je situace složitější a nebudeme ji tu obecně řešit.)

6.2 Funkce konvenní a konkávni

Definice:

Řekneme, že funkce f je **konvenní** (**ryze konvenní**) [**konkávni** (**ryze konkávni**)] na intervalu I , jestliže pro každé tři body $t, x, z \in I, t < x < z$, a čísla

$$k_{t,z} = \frac{f(z) - f(t)}{z - t}$$

platí

$$\begin{aligned} f(x) &\leq f(t) + k_{t,z} \cdot (x - t) & f(x) &\geq f(t) + k_{t,z} \cdot (x - t) \\ \left(f(x) &\leq f(t) + k_{t,z} \cdot (x - t) \right) & \left(f(x) &\geq f(t) + k_{t,z} \cdot (x - t) \right) \end{aligned}$$

Platí: Má-li funkce f derivaci na intervalu I a pro každé $x_0, x \in I, x \neq x_0$, platí

$$f(x) > f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \quad \left(f(x) < f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \right),$$

pak f je na I ryze konvenní (ryze konkávni). (Analogicky pro konvenní a konkávni funkce.)

Definice:

Řekneme, že bod $[x_0, f(x_0)]$ ($x_0 \in D(f)$) je **inflexním bodem grafu** funkce f , jestliže f je spojitá v x_0 , existuje $f'(x_0)$ a existuje $\delta > 0$ takové, že f je na jednom z intervalů $(x_0 - \delta, x_0)$ a $(x_0, x_0 + \delta)$ ryze konvenní a na druhém ryze konkávni. (Řkáme též, že f má v x_0 **inflexi**.)

inflexni tečna ... tečna v inflexním bodě

Věta 6.4:

Má-li funkce f druhou derivaci na (a, b) , pak

a) je-li na (a, b) $f'' \geq 0$ | $f'' \leq 0$ | $f'' > 0$ | $f'' < 0$, pak je f na (a, b) ryze konvenní (konvenní | ryze konkávni)
b) má-li f v $x_0 \in (a, b)$ inflexi a existuje-li $f''(x_0)$, pak $f''(x_0) = 0$,

c) je-li $x_0 \in (a, b)$, $f''(x_0) = 0$ a f'' není v x_0 znaménko, pak f má v x_0 inflexi.

6.3 Asymptoty grafu funkce

Definice:

a) Řekneme, že funkce f má v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$ **svislou asymptotu**, jestliže alespoň jedna jednostranná limita v x_0 existuje a je nevládní. Rovnice této asymptoty je $x = x_0$.

b) Řekneme, že funkce f má v bodě $x_0 = +\infty$ ($-\infty$) **asymptotu** $y = kx + q$ ($k, q \in \mathbb{R}$), jestliže

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - (kx + q)) = 0.$$

$$k = 0 \quad \dots \quad \text{vodorovná} \\ k \neq 0 \quad \dots \quad \text{šikmá} \quad \left. \vphantom{\begin{matrix} k = 0 \\ k \neq 0 \end{matrix}} \right\} \text{asymptota}$$

Věta 6.5:

a) Je-li $k, q \in \mathbb{R}$, pak přímka $y = kx + q$ je asymptotou funkce f v $+\infty$ právě tehdy, když

- (i) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = k$,
(ii) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - kx) = q$.

b) Přímka $y = q$ je vodorovnou asymptotou funkce f v $+\infty$ právě tehdy, když $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = q$.

(Analogicky pro asymptoty v $-\infty$.)

6.4 Shrnutí**Obecný postup při vyšetřování průběhu funkce f :**

Zjišťujeme

- 1)
 - $D(f)$, $H(f)$, průsečíky s osami, „znaménko“
 - je f sudá | lichá | periodická?
 - intervaly spojitosti, limity v bodech nespojitosti a v hraničních bodech $D(f)$

(vycházíme z předpisu pro $f(x)$)

- 2)
 - intervaly monotonie
 - lokální a globální extrémy
 - chování tečen v blízkosti bodů nespojitosti

(vycházíme převážně z předpisu pro $f'(x)$)

- 3)
 - intervaly konvexity a konkávitý, inflexní body

(většinou pomocí f'' , někdy lze i z f')

- tečny v inflexních bodech

- 4)
 - asymptoty

6.5 Příklady

Příklad 6.1: Najděte lokální extrémy funkce $f(x) = (x + 2|x|) - x^3$ a vyšetřete monotonii této funkce. (Graf funkce f je na následující stránce.)

Příklad 6.2: Najděte největší a nejmenší hodnotu funkce f z Příkladu 6.1 na intervalu a) $\langle -\frac{3}{2}, \frac{3}{2} \rangle$, b) $(-\frac{3}{2}, \frac{3}{2})$.

Řešení: Víme, že f' neexistuje v $x_0 = 0$ a f má jeden stacionární bod $x_1 = 1$ (viz řešení příkladu 7.2 na přednášce). Body x_0, x_1 leží v obou intervalech. Pro hledání globálních extrémů přidáme k těmto bodům ještě krajní body intervalů. Dále budeme řešit varianty a) a b) každou zvlášť.

a) Porovnáváme hodnoty:

$$f(0) = 0, \quad f(1) = 2, \quad f\left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{39}{8}, \quad f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{9}{8}.$$

Z nich je nejmenší 0 a největší $\frac{39}{8}$, tedy

- f nabývá na $\langle -\frac{3}{2}, \frac{3}{2} \rangle$ v $x_0 = 0$ svého minima $f(0) = 0$,
- f nabývá na $\langle -\frac{3}{2}, \frac{3}{2} \rangle$ v $x_2 = -\frac{3}{2}$ svého maxima $f\left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{39}{8}$.

b) Porovnáváme hodnoty:

$$f(0) = 0, \quad f(1) = 2, \quad \lim_{x \rightarrow -\frac{3}{2}^+} f(x) = \frac{39}{8}, \quad \lim_{x \rightarrow \frac{3}{2}^-} f(x) = \frac{9}{8}.$$

Protože největší z těchto hodnot je $\lim_{x \rightarrow -\frac{3}{2}^+} f(x)$ a bod $-\frac{3}{2}$ v daném intervalu neleží, dostáváme, že

- f nabývá na $(-\frac{3}{2}, \frac{3}{2})$ v $x_0 = 0$ svého minima $f(0) = 0$,
- f na $(-\frac{3}{2}, \frac{3}{2})$ svého minima nenabývá.

Příklad 6.3: Najděte (maximální) intervaly, na kterých je funkce $f(x) = x \ln^2 x$ konvexní, konkávní; najděte inflexní body jejího grafu.

Příklad 6.4: Najděte asymptoty grafu funkce $f(x) = x + |x| + \frac{\sin(10x)}{x^2} + 3$.

Řešení: Zřejmě $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Dále:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(2x + \frac{\sin(10x)}{x^2} + 3\right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(2x + \frac{\sin(10x)}{10x} \cdot \frac{10}{x} + 3\right) = +\infty,$$

tedy graf funkce f má svislou asymptotu v bodě $x_0 = 0$, její rovnice je $\underline{x = 0}$ (lze použít i $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$, která je také nevlastní);

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(2x + \frac{\sin(10x)}{x^2} + 3\right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(2x + \frac{1}{x^2} \cdot \sin(10x) + 3\right) = \langle +\infty + 0 \cdot \text{omez.} + 3 \rangle = +\infty,$$

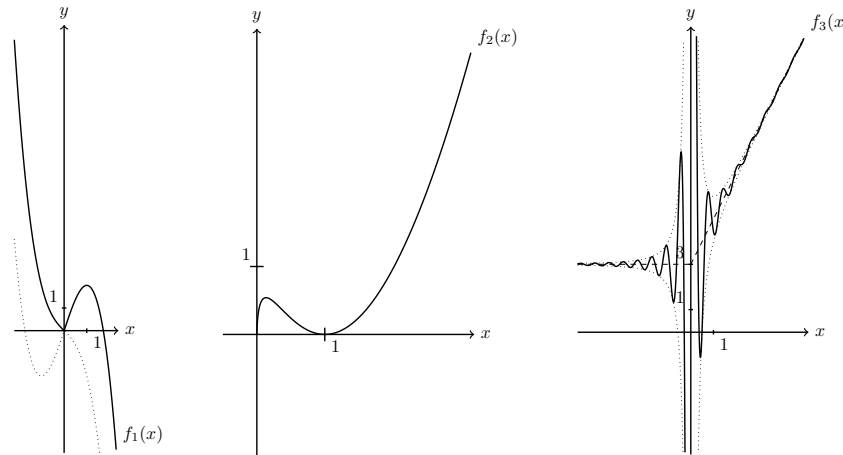
$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(2 + \frac{\sin(10x)}{x^3} + \frac{3}{x}\right) = 2 (=k),$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - 2 \cdot x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{\sin(10x)}{x^2} + 3\right) = 3 (=q),$$

tedy graf funkce f má v $+\infty$ šikmou asymptotu $\underline{y = 2x + 3}$;

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{\sin(10x)}{x^2} + 3\right) = 3,$$

tedy graf funkce f má v $-\infty$ vodorovnou asymptotu $\underline{y = 3}$.



grafy funkcí $f_1(x) = (x + 2|x|) - x^3$, $f_2(x) = x \ln^2 x$ a $f_3(x) = x + |x| + \frac{\sin(10x)}{x^2} + 3$ (komentář na přednášce)

Příklad 6.5: Graf funkce $f(x) = x + \cos x$ nemá asymptoty v $\pm\infty$, protože sice

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty \quad \text{a} \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 1,$$

ale

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - 1 \cdot x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \cos x$$

neexistuje.