KAPITOLA 4: Derivace funkce

4.1 Úvod

Motivační příklady: okamžitá rychlost, směrnice tečny

Definice:

Řekneme, že funkce f má **v bodě** x_0 **derivaci** [**derivaci zleva** | **derivaci zprava**] rovnu číslu a, jestliže existuje

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = a$$

$$\left[\ \lim_{x\to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = a \quad \Big| \quad \lim_{x\to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = a\ \right].$$

Píšeme $f'(x_0) = a \quad \big(\, f'_-(x_0) = a \ \mid\ f'_+(x_0) = a\, \big)$.

Další značení: $\quad f'(x_0) = \dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x_0) = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x_0)$

$a \in \mathbb{R}$ ... vlastní derivace, $\quad a = \pm\infty$ ... nevlastní derivace

f má derivaci na intervalu $\langle a, b)$ ... existuje $f'(x_0)$ pro každé $x_0 \in (a, b)$ a existuje $f'_+(a)$
(analogicky pro intervaly (a, b), $(a, b\rangle$, $\langle a, b\rangle$)

Poznámka: $f'(x_0)$ existuje a je rovna a právě tehdy, když existují $f'_-(x_0)$, $f'_+(x_0)$ a obě jsou rovny a.

Poznámka: Z Věty 3.14 o limitě složené funkce je $f'(x_0) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$. Index 0 u x zde většinou vynecháváme a píšeme

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}\,.$$

Poznámka: Derivace jako funkce je definována tam, kde existuje **vlastní** derivace. Zřejmě vždy platí $D(f') \subset D(f)$.

Příklad 4.1: Určete derivace funkcí $f(x) = c \in \mathbb{R}$, $f(x) = x$, $f(x) = \mathrm{e}^x$, $f(x) = \cos x$ a $f(x) = \sin(x)$ pomocí definice.

Řešení: Např. pro funkci $f(x) = \sin x$ máme

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \frac{\sin x - \sin x_0}{x-x_0} = \frac{2\sin\frac{x-x_0}{2}\cdot\cos\frac{x+x_0}{2}}{x-x_0} = \frac{\sin\frac{x-x_0}{2}}{\frac{x-x_0}{2}}\cdot\cos\frac{x+x_0}{2} \overset{x\to x_0}{\longrightarrow} 1\cdot\cos\frac{x_0+x_0}{2} = \cos x_0$$

nebo

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{\sin(x+h)-\sin x}{h} = \frac{(\sin x\cos h + \cos x \sin h) - \sin x}{h} = \frac{\cos h - 1}{h}\cdot\sin x + \frac{\sin h}{h}\cdot\cos x =$$

$$= \frac{(\cos h-1)(\cos h+1)}{h(\cos h+1)}\cdot\sin x + \frac{\sin h}{h}\cdot\cos x = -\frac{\sin h}{h}\cdot\frac{\sin h}{(\cos h+1)}\cdot\sin x + \frac{\sin h}{h}\cdot\cos x \overset{x\to x_0}{\longrightarrow} -1\cdot\frac{0}{2}\cdot\sin x + 1\cdot\cos x = \cos x.$$

Tečna a normála

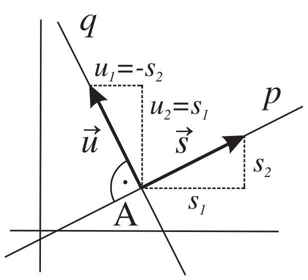
přímka v rovině:

$\vec{s} = (s_1, s_2)$ ... směrový vektor

$A = [a_1, a_2] \in p$

pro $s_1 \neq 0$: $\quad p:\ y = a_2 + \dfrac{s_2}{s_1}(x - a_1)$

$k_p = \dfrac{s_2}{s_1}$ ... směrnice přímky p



kolmá přímka:

$q \perp p$ ... směrový vektor
$\vec{u} = (u_1, u_2) = (-s_2, s_1)$

pro $s_2 \neq 0$:

$k_q = \dfrac{u_2}{u_1} = \dfrac{s_1}{-s_2} = -\dfrac{1}{k_p}$

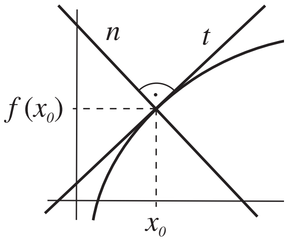
<u>tečna</u> t a **<u>normála</u>** n grafu funkce f v bodě $[x_0, f(x_0)]$ (někdy: „v bodě x_0“) jsou kolmé přímky procházející bodem $[x_0, f(x_0)]$ takové, že

- <u>pro $f'(x_0) \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$</u>

  <u>$t:$</u> $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$

  <u>$n:$</u> $y = f(x_0) - \dfrac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$

  tj. $k_t = f'(x_0), \quad k_n = -\dfrac{1}{f'(x_0)}$

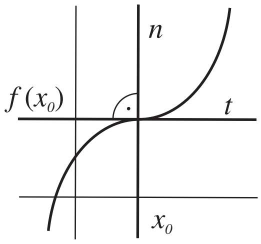


- <u>pro $f'(x_0) = 0$</u>

  <u>$t:$</u> $y = f(x_0)$

  <u>$n:$</u> $x = x_0$

  tj. $k_t = 0$

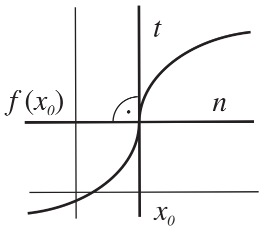


- <u>pro $f'(x_0) = \pm\infty$</u>

  <u>$t:$</u> $x = x_0$

  <u>$n:$</u> $y = f(x_0)$

  tj. $k_n = 0$



Příklad 4.2: Najděte tečnu a normálu grafu funkce $f(x) = x^2$ v bodě $[3, ?]$ (v bodě 3).

Řešení: Máme $x_0 = 3$, $f(3) = 9$ (tj. $A = [3, 9]$), $D(f) = \mathbb{R}$. Spočítáme $f'(3) = \lim_{x\to 3} \frac{x^2-9}{x-3} = \lim_{x\to 3} (x+3) = 6$. Tedy $k_t = f'(3) = 6$, $k_n = -\frac{1}{f'(3)} = -\frac{1}{6}$. Rovnice tečny a normály odtud jsou $t:\ y = 9 + 6(x-3)$ (neboli $t:\ 6x - y - 9 = 0$) a $n:\ y = 9 - \frac{1}{6}(x-3)$ (neboli $n:\ x + 6y - 57 = 0$).

4.2 <u>Věty o derivacích</u>

Věta 4.1:

Má-li funkce f v bodě x_0 <u>vlastní</u> derivaci, pak je v x_0 spojitá.

Důkaz: Pro $x \neq x_0$ ($x \in D(f)$) máme $f(x) - f(x_0) = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \cdot (x - x_0) \longrightarrow f'(x_0) \cdot 0 = 0$ (součin je definovaný, protože $f'(x_0) \in \mathbb{R}$). Tedy $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$ a funkce f je v bodě x_0 spojitá. $\square$

Příklad 4.3: **a)** Funkce $f(x) = |x|$ je spojitá, $f'(0)$ ale neexistuje (je totiž $f'_+(0) = 1 \neq -1 = f'_-(0)$) - tedy spojitost k existenci derivace nestačí.
b) Funkce $f(x) = \operatorname{sgn} x$ není spojitá v nule, přesto tam má derivaci, ale nevlastní - tedy existence nevlastní derivace spojitost nezaručuje.

Věta 4.2:

Nechť existují <u>vlastní</u> $f'(x_0)$, $g'(x_0)$. Potom

a) $\big(f \pm g\big)'(x_0) = f'(x_0) \pm g'(x_0)$

b) $\big(f \cdot g\big)'(x_0) = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0)$

(speciálně pro $c \in \mathbb{R}$: $\big(c\,f\big)'(x_0) = c\,f'(x_0)$)

c) $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(x_0) = \dfrac{f'(x_0) \cdot g(x_0) - f(x_0) \cdot g'(x_0)}{g^2(x_0)}$, je-li $g(x_0) \neq 0$.

(speciálně pro $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$: $\left(\frac{f}{c}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)}{c}$)

Důkaz: Vztahy pro derivaci součtu a rozdílu plynou okamžitě z definice derivace a věty o aritmetice limity.
Podívejme se na derivaci součinu. Protože má funkce g v bodě x_0 vlastní derivaci, je v něm spojitá, a tedy $g(x) \to g(x_0) \in \mathbb{R}$ pro $x \to x_0$. Nechť $P(x_0) \subset D(f) \cap D(g)$. Pro $x \in P(x_0)$ máme

$$\frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} = \frac{\big(f(x) - f(x_0)\big)\, g(x) + f(x_0)\, \big(g(x) - g(x_0)\big)}{x - x_0} =$$

$$= \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}\, g(x) + f(x_0)\, \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \overset{x \to x_0}{\longrightarrow} f'(x_0)\, g(x_0) + f(x_0)\, g'(x_0).$$

Poslední výraz je přitom definován, protože všechny jeho členy jsou konečná čísla. Tedy derivace funkce $f \cdot g$ v bodě x_0 existuje a platí pro ni uvedený vzorec.
Zbývá nám derivace podílu. Protože má funkce g v x_0 vlastní derivaci, je v x_0 spojitá. Je-li tedy $g(x_0) \neq 0$, pak je podle věty o zachování znaménka funkce g na nějakém prstencovém okolí bodu x_0 nenulová a je tam tak i definován podíl $\frac{f}{g}$. Limitu podílu má tedy smysl počítat. Postupně pro ni dostáváme

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(x_0)}{g(x_0)}}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)g(x_0) - f(x_0)g(x)}{g(x_0)g(x)(x - x_0)} = \lim_{x \to x_0} \frac{\big(f(x) - f(x_0)\big)\, g(x_0) - f(x_0)\, \big(g(x) - g(x_0)\big)}{g(x_0)g(x)(x - x_0)} =$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}\, g(x_0) - f(x_0)\, \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}}{g(x_0)g(x)}.$$

Protože jsou hodnoty $f(x_0)$ a $g(x_0)$ konečné, funkce g je spojitá v x_0 a $g(x_0) \neq 0$, je poslední (a tedy i první) limita rovna $\frac{f'(x_0)\, g(x_0) - f(x_0)\, g'(x_0)}{(g(x_0))^2}$, což jsme chtěli dokázat. $\square$

Příklad 4.4: $(\operatorname{tg} x)' = \left(\dfrac{\sin x}{\cos x}\right)' = \dfrac{(\sin x)' \cos x - \sin x (\cos x)'}{\cos^2 x} = \dfrac{\cos x \cos x - \sin x(-\sin x)}{\cos^2 x} = \dfrac{1}{\cos^2 x}.$

Poznámka: a) $\underline{(f_1 + f_2 + \ldots + f_n)'} = (f_1 + (f_2 + \ldots + f_n))' = f_1' + (f_2 + (f_3 + \ldots + f_n))' = \ldots = \underline{f_1' + f_2' + \ldots + f_n'}$

b) $\underline{(f_1 \cdot f_2 \cdot \ldots \cdot f_n)'} = \big(f_1 \cdot (f_2 \cdot \ldots \cdot f_n)\big)' = f_1' \cdot (f_2 \cdot \ldots \cdot f_n) + f_1 \cdot \big(f_2 \cdot \ldots \cdot f_n\big)' =$

$$= f_1' \cdot (f_2 \cdot \ldots \cdot f_n) + f_1 \cdot \big(f_2 \cdot (f_3 \cdot \ldots \cdot f_n)\big)' = f_1' \cdot \big(f_2 \cdot \ldots \cdot f_n\big) + f_1 \cdot \Big(f_2' \cdot (f_3 \cdot \ldots \cdot f_n) + f_2 \cdot \big(f_3 \cdot \ldots \cdot f_n\big)'\Big) =$$

$$= f_1' \cdot \big(f_2 \cdot \ldots \cdot f_n\big) + f_1 \cdot \Big(f_2' \cdot (f_3 \cdot \ldots \cdot f_n) + f_2 \cdot \big(f_3 \cdot (f_4 \cdot \ldots \cdot f_n)\big)'\Big) = \ldots$$

Příklad 4.5: Ukažte, že pro $n \in \mathbb{N}$ platí $(x^n)' = n\, x^{n-1}$.

Řešení: Dokážeme matematickou indukcí:
- pro $n = 1$ máme: $(x^1)' = x' = 1 = 1.x^0 = 1.x^{1-1}$.
- předpokládejme, že vztah platí pro n, ukážeme, že platí i pro $n + 1$:
  $(x^{n+1})' = (x \cdot x^n)' = x' \cdot x^n + x \cdot (x^n)' = 1 \cdot x^n + x \cdot (n\, x^{n-1}) = x^n + n\, x^n = (n+1)x^n = (n+1)x^{(n+1)-1}$

Věta 4.3 (o derivaci složené funkce):

Nechť existují <u>vlastní</u> $f'(x_0)$ a $g'(f(x_0))$. Potom existuje vlastní derivace funkce $g \circ f$ v bodě x_0 a platí

$$\big(g \circ f\big)'(x_0) = g'\big(f(x_0)\big) \cdot f'(x_0).$$

Důkaz: Protože má funkce f derivaci v bodě x_0 a funkce g má derivaci v bodě $f(x_0)$, existují okolí $U(x_0) \subset D(f)$ a $U(f(x_0)) \subset D(g)$. Na $U(f(x_0)$ definujme funkci

$$w(y) = \begin{cases} \dfrac{g(y) - g(f(x_0))}{y - f(x_0)} & \text{pro} \quad y \neq f(x_0) \\[2ex] g'(f(x_0)) & \text{pro} \quad y = f(x_0). \end{cases}$$

Všimněme si, že pro všechna $x \in U(x_0)$ platí

$$\frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0} = w(f(x)) \cdot \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Je-li totiž $f(x) = f(x_0)$, jsou výrazy na obou stranách nulové. Pokud $f(x) \neq f(x_0)$, pak použijeme rozpis

$$\frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0} = \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{f(x) - f(x_0)} \cdot \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Nyní už jen stačí využít toho, že z definice derivace $g'(f(x_0))$ je funkce w v $f(x_0)$ spojitá, a dostaneme

$$(g \circ f)'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} w(f(x)) \cdot \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0).$$

Poznámka: $\underline{(h \circ g \circ f)'(x_0)} = (h \circ (g \circ f))'(x_0) = h'((g \circ f)(x_0)) \cdot (g \circ f)'(x_0) = \underline{h'(g(f(x_0))) \cdot g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)}$
(analogicky pro funkci vzniklou složením více funkcí)

Věta 4.4 (o derivaci inverzní funkce):

Nechť f je <u>prostá</u> a <u>spojitá</u> na (a, b), $x_0 \in (a, b)$, $f(x_0) = y_0$. Jestliže existuje <u>vlastní</u> $f'(x_0) \neq 0$, pak existuje také $f'_{-1}(y_0)$ a platí

$$f'_{-1}(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} \quad \left(= \frac{1}{f'(f_{-1}(y_0))} \right).$$

Důkaz provádět nebudeme, podívejme se ale, jak si můžeme zapamatovat uvedený vzorec. Z definice inverzní funkce je $(f_{-1} \circ f)(x) = x \overset{\text{ozn.}}{=} \mathrm{id}(x)$. Bude-li tedy existovat derivace funkce $f_{-1}(f(x_0))$, musí podle věty o derivaci složené funkce platit $1 = (\mathrm{id})'(x_0) = (f_{-1} \circ f)'(x_0) = f'_{-1}(f(x_0)) \cdot f'(x_0) = f'_{-1}(y_0) \cdot f'(x_0)$. Nyní již stačí získanou rovnost $1 = f'_{-1}(y_0) \cdot f'(x_0)$ vydělit derivací $f'(x_0)$, která je podle předpokladů věty nenulová.

Příklad 4.6: Derivace funkce **a)** $\ln y$, **b)** $\arcsin y$, $y \in (-1, 1)$.

Příklad 4.7: Derivace funkce **a)** $f(x) = a^x$, $a > 0$, $x \in \mathbb{R}$, **b)** $f(x) = x^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $x > 0$.

Poznámka (logaritmické derivování):

Derivace funkcí typu $h(x) = \big(u(x)\big)^{v(x)}$, kde $u(x) > 0$ pro všechna $x \in D(h)$:

Máme $h(x) = \mathrm{e}^{v(x) \cdot \ln(u(x))}$, tedy

$$\begin{aligned} h'(x) &= \mathrm{e}^{v(x)\cdot\ln(u(x))} \cdot \Big(v(x) \cdot \ln\big(u(x)\big)\Big)' = h(x) \cdot \Big(v(x) \cdot \ln\big(u(x)\big)\Big)' \\ &= h(x) \cdot \Big(v'(x) \cdot \ln\big(u(x)\big) + v(x) \cdot \big(\ln\big(u(x)\big)\big)'\Big) = \\ &= h(x) \cdot \Big(v'(x) \cdot \ln\big(u(x)\big) + v(x) \cdot \tfrac{1}{u(x)} \cdot u'(x)\Big) = \\ &= \underline{h(x) \cdot \Big(v'(x) \cdot \ln\big(u(x)\big) + v(x) \cdot \tfrac{1}{u(x)} \cdot u'(x)\Big)}. \end{aligned}$$

Kde se vzal název „logaritmické derivování“? Pro $h(x) = \big(u(x)\big)^{v(x)} = \mathrm{e}^{v(x)\cdot\ln(u(x))}$ je $\ln(h(x)) = v(x) \cdot \ln(u(x))$. Odtud $\big(v(x) \cdot \ln(u(x))\big)' = \big(\ln\big(h(x)\big)\big)' = \dfrac{h'(x)}{h(x)}$. Tedy $h'(x) = h(x) \cdot \big(v(x) \cdot \ln(u(x))\big)' = \ldots$.

Věta 4.5:

Nechť f je <u>spojitá</u> na nějakém intervalu $\langle x_0, x_0 + \delta)$ a existuje $\lim\limits_{x \to x_0+} f'(x) = a$. Potom existuje $f'_+(x_0)$ a platí $f'_+(x_0) = a$. (Analogicky pro $f'_-(x_0)$ a $f'(x_0)$.)

Příklad 4.6, b*): Určení $f'_+(-1)$ pro $f(x) = \arcsin x$ pomocí Věty 4.5.

Příklad 4.8: Pro funkci $f(x) = x^2 \cdot \cos \dfrac{1}{x}$, $x \neq 0$, $f(0) = 0$, která je spojitá na $\mathbb{R}$, neexistuje $\lim\limits_{x \to 0} f'(x)$, existuje ale $f'(0) = 0$ - tvrzení Věty 4.5 tedy nelze obrátit.

Přehled derivací elementárních funkcí:

$$(\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x \qquad x \in \mathbb{R}$$

$$(\ln|x|)' = \frac{1}{x} \qquad x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$$

$$(a^x)' = a^x \ln a\,, \qquad a \in (0,\infty) \text{ pevné} \qquad x \in \mathbb{R}$$

$$(\log_a|x|)' = \frac{1}{x\ln a}\,, \qquad a \in (0,1)\cup(1,\infty) \text{ pevné} \qquad x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$$

$$(x^\alpha)' = \alpha\, x^{\alpha-1}\,, \qquad \alpha \text{ pevné} \qquad \begin{cases} x \in \mathbb{R} & \text{pro } \alpha \in \mathbb{N}_0 \ ^{1} \\ x \in \mathbb{R}\setminus\{0\} & \text{pro } \alpha \in \mathbb{Z}^- \\ x \in (0,\infty) & \text{pro } \alpha \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Z} \ ^{2} \end{cases}$$

$$(\sin x)' = \cos x \qquad x \in \mathbb{R}$$

$$(\cos x)' = -\sin x \qquad x \in \mathbb{R}$$

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x} \qquad x \in \mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi \,|\, k\in\mathbb{Z}\right\}$$

$$(\operatorname{cotg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x} \qquad x \in \mathbb{R}\setminus\{k\pi \,|\, k\in\mathbb{Z}\}$$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad x \in (-1,\,1)$$

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad x \in (-1,\,1)$$

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2} \qquad x \in \mathbb{R}$$

$$(\operatorname{arccotg} x)' = -\frac{1}{1+x^2} \qquad x \in \mathbb{R}$$

$$(\sinh x)' = \cosh x \qquad x \in \mathbb{R}$$

$$(\cosh x)' = \sinh x \qquad x \in \mathbb{R}$$

$$(\operatorname{tgh} x)' = \frac{1}{\cosh^2 x} \qquad x \in \mathbb{R}$$

$$(\operatorname{cotgh} x)' = -\frac{1}{\sinh^2 x} \qquad x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$$

4.3 Derivace vyšších řádů

n-tá derivace (derivace řádu n) funkce f ... $f^{(n)}$ ... definujeme indukcí:

1) $n = 1:$ $\quad f^{(1)}(x_0) = f'(x_0)$

2) $n > 1:$ $\quad$ předpokládejme, že existuje vlastní $f^{(n-1)}$ na nějakém okolí $U(x_0)$ a funkce $f^{(n-1)}$ má v x_0 derivaci - pak pokládáme: $\quad f^{(n)}(x_0) = \left(f^{(n-1)}\right)'(x_0)$

pro $n = 0$ píšeme: $f^{(0)} = f$

---

[1] pro $\alpha = x = 0$ pokládáme (ovšem pouze zde): $0 \cdot 0^{0-1} = 0$

[2] pro některé racionální exponenty lze rozšířit na $\mathbb{R}$ nebo $\mathbb{R}\setminus\{0\}$

Značení:

$$\begin{aligned}
f^{(1)}(x_0) &= f'(x_0) &&= \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x_0)\\
f^{(2)}(x_0) &= f''(x_0) &&= \frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2}(x_0)\\
&\vdots\\
f^{(6)}(x_0) &= f^{VI}(x_0) &&= \frac{\mathrm{d}^6 f}{\mathrm{d}x^6}(x_0)\\
&\vdots\\
f^{(n)}(x_0) & &&= \frac{\mathrm{d}^n f}{\mathrm{d}x^n}(x_0)
\end{aligned}$$

Příklad 4.9: Pro $f(x) = \ln x$, $x > 0$, máme

$$f'(x) = 1/x = x^{-1}, \quad f''(x) = (-1)\,x^{-2}, \quad f'''(x) = (-1)(-2)\,x^{-3}, \quad \ldots, \quad f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}\,(n-1)!\;x^{-n}.$$

Věta 4.6 (**Leibnizův vzorec**):

Nechť existují <u>vlastní</u> n−té derivace $f^{(n)}$ a $g^{(n)}$ funkcí f, g v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$. Potom

$$\big(f \cdot g\big)^{(n)}(x_0) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(x_0) \cdot g^{(n-k)}(x_0).$$

Příklad 4.10: Najděte pomocí Věty 4.6 $(x^2 \sin x)^{(9)}$.

Řešení: Snadno ověříme, že pro derivace funkcí $f(x) = x^2$ a $g(x) = \sin x$ platí: $f^{(0)}(x) = x^2$, $f'(x) = 2x$, $f''(x) = 2$, $f^{(k)}(x) = 0$ pro $k \geq 3$ a $g^{(4l)}(x) = \sin x$, $g^{(4l+1)}(x) = \cos x$, $g^{(4l+2)}(x) = -\sin x$, $g^{(4l+3)}(x) = -\cos x$ $(l \in \mathbb{N}_0)$. Tedy podle Leibnizova vzorce (V4.6) máme:

$$\underline{(x^2 \sin x)^{(9)}} = \binom{9}{0} \cdot x^2 \cdot \underbrace{\cos x}_{(\sin x)^{(9)}} + \binom{9}{1} \cdot 2x \cdot \underbrace{\sin x}_{(\sin x)^{(8)}} + \binom{9}{2} \cdot 2 \cdot \underbrace{(-\cos x)}_{(\sin x)^{(7)}} + \binom{9}{3} \cdot 0 \cdot \underbrace{(-\sin x)}_{(\sin x)^{(6)}} + 0 + 0 + \ldots =$$

$$= x^2 \cos x + 9 \cdot 2\; x\, \sin x - \frac{9 \cdot 8}{2} \cdot 2 \cos x = \underline{x^2 \cos x + 18x \sin x - 72 \cos x}.$$