

KAPITOLA 7: Primitivní funkce

7.1 Úvod

Definice:

Funkce F je **primitivní funkcí** k funkci f na intervalu I , jestliže pro každé $x \in I$ existuje $F'(x)$ a platí

$$F'(x) = f(x).$$

Poznámky: 1) Obsahuje-li I některý z krajních bodů, rozumíme pod $F'(x)$ v krajním bodě příslušnou jednostrannou derivaci.

2) F je **spojitá** na I , protože má v každém bodě intervalu I vlastní derivaci.

Věta 7.1:

- a) Je-li F primitivní funkcí k funkci f na intervalu I , potom pro každé $c \in \mathbb{R}$ je $F + c$ také primitivní funkcí k funkci f na intervalu I .
- b) Jsou-li F a G primitivní funkce k funkci f na intervalu I , pak existuje $c \in \mathbb{R}$ takové, že

$$G = F + c \quad (\text{tj. } G(x) = F(x) + c \quad \forall x \in I).$$

Příklad 7.1: Je-li $f \equiv 0$ (tj. $f(x) = 0 \quad \forall x$) a $M = (0, 1) \cup (2, 3)$, pak pro funkce $F(x) = 1$ pro každé $x \in M$ a $G(x) = 2$ pro $x \in (0, 1)$, $G(x) = 7$ pro $x \in (2, 3)$, platí $F'(x) = G'(x) = f(x)$ pro všechna $x \in M$. Přitom pro žádné $c \in \mathbb{R}$ neplatí $G = F + c$. (Ve Větě 7.1, b) je tedy podstatné, že I je interval, a proto také požadujeme v definici, aby I byl interval.)

neurčitý integrál funkce f na intervalu I ... $\int f(x) dx$ (zkráceně též $\int f dx$) ...
... množina všech primitivních funkcí k funkci f na intervalu I

používáme zde tyto názvy: \int ... integrační znak; $f(x)$... integrand; x ... integrační proměnná
(nebude-li hrozit nedorozumění, použijeme někdy pro neurčitý integrál jen stručné označení $\int f$)

Příklad 7.2a): Ukažte, že pokud $0 \in (a, b)$, pak funkce $f(x) = \operatorname{sgn} x$ nemá primitivní funkci na (a, b) .

Řešení: Každá primitivní funkce je spojitá. Ukážeme tedy, že pokud je funkce F spojitá na (a, b) a $F' = f$ na $(a, b) \setminus \{0\}$, pak neexistuje $F'(0)$, tj. F není primitivní funkce k funkci $f(x) = \operatorname{sgn} x$ na (a, b) . Splňuje-li totiž funkce F uvedené předpoklady, pak $F'(x) = 1$ pro všechna $x \in (0, b)$ a $F'(x) = -1$ pro všechna $x \in (a, 0)$. Tedy podle Věty 4.5 platí $F'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} F'(x) = 1$ a $F'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} F'(x) = -1$, což ovšem znamená, že $F'(0)$ neexistuje.

Příklad 7.2b): Funkce $f(x) = 2x \cos \frac{1}{x} + \sin \frac{1}{x}$ pro $x \neq 0$, $f(0) = 0$, má primitivní funkci na \mathbb{R} , přestože není na \mathbb{R} spojitá - má nespojitost v nule. Primitivní funkci je podle Příkladu 4.8 funkce $F(x) = x^2 \cdot \cos \frac{1}{x}$, $x \neq 0$, $F(0) = 0$.

Věta 7.2:

Je-li funkce f spojitá na intervalu I , pak existuje k funkci f primitivní funkce na intervalu I .

Poznámka: I když primitivní funkce existuje ke každé spojitě funkci, ne vždy ji lze vyjádřit pomocí elementárních funkcí v konečném tvaru (tj. pomocí konečného počtu aritmetických operací a operací skládání). Mezi takové primitivní funkce patří primitivní funkce k funkcím e^{-x^2} , $\sin(x^2)$, $\cos(x^2)$, $\frac{e^x}{x}$, $\frac{\sin x}{x}$, $\frac{\cos x}{x}$, $\frac{1}{\ln x}$ (na intervalech, na kterých jsou tyto funkce definované).

Poznámka: Lze ukázat, že pokud funkce f je derivací funkce F na intervalu I , pak f má Darbouxovu vlastnost (vlastnost mezihodnoty – viz Důsledek 5.2). Tedy primitivní funkce existují jen k funkcím s Darbouxovou vlastností.

Tabulkové integrály

$f(x)$	$F(x)$ např.	I
A ($A \in \mathbb{R}$)	Ax	\mathbb{R}
x^α	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$	\mathbb{R} pro $\alpha \in \mathbb{N}_0$ $(-\infty, 0), (0, \infty)$ pro $\alpha \in \mathbb{Z}; \alpha < -1$ $(0, \infty)$ pro $\alpha \notin \mathbb{Z}$ *)
$\frac{1}{x}$	$\ln x $	$(-\infty, 0), (0, \infty)$
e^x	e^x	\mathbb{R}
a^x ($a > 0, a \neq 1$)	$\frac{a^x}{\ln a}$	\mathbb{R}
$\sin x$	$-\cos x$	\mathbb{R}
$\cos x$	$\sin x$	\mathbb{R}
$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\operatorname{tg} x$	$\left(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right); k \in \mathbb{Z}$
$-\frac{1}{\sin^2 x}$	$\operatorname{cotg} x$	$(k\pi, (k+1)\pi); k \in \mathbb{Z}$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x$ $-\arccos x$	$(-1, 1)$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\operatorname{arctg} x$ $-\operatorname{arccotg} x$	\mathbb{R}
$\sinh x$	$\cosh x$	\mathbb{R}
$\cosh x$	$\sinh x$	\mathbb{R}
$\frac{1}{\cosh^2 x}$	$\operatorname{tgh} x$	\mathbb{R}
$\frac{1}{\sinh^2 x}$	$-\operatorname{cotgh} x$	$(-\infty, 0), (0, \infty)$
$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$\operatorname{argsinh} x$	\mathbb{R}
$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$\operatorname{argcosh} x$ $-\operatorname{argcosh}(-x)$	$(1, \infty)$ $(-\infty, -1)$

*) ... pro některé racionální exponenty lze brát též $I = (-\infty, 0)$

7.2 Základní metody hledání primitivní funkce

Značení: Je-li $A, B \subset M$, $c \in M$, pak píšeme

$$\begin{aligned}
 A \pm B &= \{a \pm b \mid a \in A, b \in B\}, \\
 c \pm A &= \{c \pm a \mid a \in A\}, \\
 c \cdot A &= \{c \cdot a \mid a \in A\}.
 \end{aligned}$$

Věta 7.3 (o linearitě):

Nechť F je primitivní funkce k funkci f na intervalu I , G primitivní funkce k funkci g na intervalu I a $\alpha \in \mathbb{R}$. Pak

- a) $F + G$ je primitivní funkcí k $f + g$ na I , tj. $\int (f + g) dx = \int f dx + \int g dx$,
 b) $\alpha \cdot F$ je primitivní funkcí k $\alpha \cdot f$ na I , tj. $\int \alpha \cdot f dx = \alpha \cdot \int f dx$.

Integrace per partes**Věta 7.4 (integrace per partes):**

Nechť mají funkce u, v vlastní derivace na intervalu I a existuje primitivní funkce k funkci $u' \cdot v$ na intervalu I . Pak existuje také primitivní funkce k funkci $u \cdot v'$ na intervalu I a platí

$$\int u \cdot v' dx = u \cdot v - \int u' \cdot v dx.$$

Příklad 7.3: Nalezení $\int \ln x dx$ na intervalu $(0, \infty)$. (Použijeme rovnost $\ln x = 1 \cdot \ln x$. Takovýto přepis integrandu se hodí i při hledání $\int \arctg x dx$, $\int \arcsin x dx$ apod., kde je ovšem potřeba metodu per partes kombinovat s metodou substituce.)

Příklad 7.4: Najděte $I = \int \frac{\ln x}{x} dx$.

Řešení: Na $(0, \infty)$ máme

$$I = \int \frac{\ln x}{x} dx = \int \ln x \cdot \frac{1}{x} dx = \left| \begin{array}{l} u = \ln x \\ u' = \frac{1}{x} \end{array} \right| \begin{array}{l} v' = \frac{1}{x} \\ v = \ln x \end{array} \Bigg| \stackrel{\text{PP}}{=} \ln^2 x - \int \frac{1}{x} \cdot \ln x dx = \ln^2 x - I.$$

Tím jsme dostali pro I rovnici $I = \ln^2 x - I$, odkud na $(0, \infty)$ je $\int \frac{\ln x}{x} dx = I = \frac{\ln^2 x}{2} + c$. (Podobně se hledají např. $\int \cos ax \cdot e^{bx} dx$, $\int \sin ax \cdot e^{bx} dx$ – v těchto případech se jen integrace per partes použije dvakrát.)

Metoda substituce**Věta 7.5 (o substituci):**

- a) Nechť I, J jsou otevřené intervaly, F je primitivní funkce k funkci f na J , $\varphi(I) \subset J$ a φ má vlastní derivaci na I (je tam tedy spojitá). Potom

$$\int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dt = F(\varphi(t)) + c \quad \text{na } I.$$

- b) Pokud je φ navíc prostá na I , $\varphi(I) = J$ a existuje primitivní funkce G k $f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)$ na I , pak

$$\int f(x) dx = G(\varphi^{-1}(x)) + c \quad \text{na } J.$$

(Tvrzení Věty 7.5 lze zapsat také takto: $\int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dt = \int f(x) dx; \quad x = \varphi(t); \quad t \in I.$)

Poznámka: Ve Větě 7.5 je z předpokladů části a) funkce φ spojitá, tedy v části b) lze nahradit předpoklad prostoty funkce φ předpokladem ryzí monotonie funkce φ .

Příklad 7.5: Najděte $\int \cos(\ln u) \cdot \frac{1}{u} du$.

Řešení: Máme

$$\int \cos(\ln u) \cdot \frac{1}{u} du = \left| \begin{array}{l} u \in (0, \infty) \\ x = \ln u \dots x \in \mathbb{R} \\ dx = \frac{1}{u} du \end{array} \right| = \int \cos x dx = \sin x + c = \sin(\ln u) + c \quad \text{na } (0, \infty).$$

Příklad 7.6: Nechť F je primitivní funkce k funkci f na intervalu (a, b) . Vyjádřete pomocí F a) $\int f(x+B) dx$,
b) $\int f(Ax+B) dx$ ($A, B \in \mathbb{R}$, $A \neq 0$).

Řešení: a) Máme $x+B \in (a, b)$ pro $x \in (a-B, b-B)$. Tedy

$$\int f(x+B) dx = \left| \begin{array}{l} x \in (a-B, b-B) \\ y = x+B \dots y \in (a, b) \\ dy = dx \end{array} \right| = \int f(y) dy = F(y) + c = F(x+B) + c \quad \text{na } (a-B, b-B).$$

b) Označme $I = \{x | Ax+B \in (a, b)\}$. Pak

$$\begin{aligned} \int f(Ax+B) dx &= \left| \begin{array}{l} x \in I \\ z = Ax+B \dots z \in (a, b) \\ dz = A dx \end{array} \right| = \int \frac{1}{A} f(Ax+B) \cdot A dx = \frac{1}{A} \int f(z) dz = \\ &= \frac{1}{A} F(z) + c = \frac{1}{A} F(Ax+B) + c \quad \text{na } I. \end{aligned}$$

Příklad 7.7: Nalezení $\int \frac{f'(x)}{(f(x))^k} dx$ na intervalu $I \subset D(f') \setminus \{x | f(x) = 0\}$ ($k \in \mathbb{N}$). (Důležité!)

Řešení: a) pro $k=1$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \left| \begin{array}{l} y = f(x) \\ dy = f'(x) dx \end{array} \right| = \int \frac{1}{y} dy = \ln|y| + c = \ln|f(x)| + c \quad \text{na } I.$$

b) pro $k \geq 1$

$$\int \frac{f'(x)}{(f(x))^k} dx = \left| \begin{array}{l} y = f(x) \\ dy = f'(x) dx \end{array} \right| = \int \frac{1}{y^k} dy = \frac{y^{-k+1}}{-k+1} + c = \frac{(f(x))^{-k+1}}{-k+1} + c \quad \text{na } I.$$

Příklad 7.8: Najděte $I_n = \int \frac{1}{(1+x^2)^n} dx$ na \mathbb{R} , pro $n=1, 2$.

(Pro $n > 1$ lze odvodit rekurentní vzorec $I_n = \frac{1}{2(n-1)} \left((2(n-1)-1)I_{n-1} - \frac{x}{(1+x^2)^{n-1}} \right)$.)

Řešení: a) pro $n=1$

$$I_1 = \int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctg x + c \quad \text{na } \mathbb{R}.$$

b) pro $n=2$

$$\begin{aligned} I_2 &= \int \frac{1}{(1+x^2)^2} dx = \int \frac{(1+x^2) - x^2}{(1+x^2)^2} dx = \underbrace{\int \frac{1}{1+x^2} dx}_{\arctg x + c} - \int x \cdot \frac{x}{(1+x^2)^2} dx = \\ &= \left| \begin{array}{ll} u = x & v' = \frac{x}{(1+x^2)^2} = \frac{1}{2} \cdot 2x(1+x^2)^{-2} \\ u' = 1 & v = \frac{1}{2} \frac{(1+x^2)^{-1}}{-1} = -\frac{1}{2} \frac{1}{(1+x^2)} \end{array} \right| = \\ &= \arctg x - \left(-\frac{1}{2} \frac{x}{(1+x^2)} - \int -\frac{1}{2} \frac{1}{1+x^2} dx \right) = \frac{1}{2} \arctg x + \frac{x}{2(1+x^2)} + c, \end{aligned}$$

tj.

$$I_2 = \frac{1}{2} \left(I_1 + \frac{x}{1+x^2} \right) \quad \text{na } \mathbb{R}.$$

Příklad 7.9: Najděte $\int \frac{1}{x^2+5} dx$ na \mathbb{R} .

Řešení:

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x^2+5} dx &= \frac{1}{5} \int \frac{1}{\left(\frac{x}{\sqrt{5}}\right)^2+1} dx = \left| \begin{array}{l} t = \frac{x}{\sqrt{5}} \\ \frac{dt}{dx} = \frac{1}{\sqrt{5}} \end{array} \right| = \frac{1}{\sqrt{5}} \int \frac{1}{\left(\frac{x}{\sqrt{5}}\right)^2+1} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} dx = \frac{1}{\sqrt{5}} \int \frac{1}{t^2+1} dt = \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \operatorname{arctg} t + c = \frac{1}{\sqrt{5}} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{5}} + c \quad \text{na } \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Příklad 7.10: Najděte $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$.**Řešení:** 1. možnost: Na $(-1, 1)$ máme

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx &= \left| \begin{array}{l} x = \cos t \dots t \in (0, \pi) \\ (\arccos x = t) \\ dx = -\sin t dt \end{array} \right| = \int \frac{1}{\sqrt{1-\cos^2 t}} (-\sin t) dt = \\ &= \int \frac{-\sin t}{\sin t} dt = -\int 1 dt = -t + c = -\arccos x + c \quad \text{na } (-1, 1). \end{aligned}$$

(V substituci jsme využili toho, že funkce $\cos t$ je prostá na $(0, \pi)$ a na začátku druhého řádku úprav toho, že $\sin t > 0$ na $(0, \pi)$.)2. možnost: Na $(-1, 1)$ máme

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx &= \left| \begin{array}{l} x = \sin z \dots z \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \\ (\arcsin x = z) \\ dx = \cos z dz \end{array} \right| = \int \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 z}} \cos z dz = \\ &= \int \frac{\cos z}{\cos z} dz = \int 1 dz = z + c = \arcsin x + c \quad \text{na } (-1, 1). \end{aligned}$$

(V substituci jsme využili toho, že funkce $\sin z$ je prostá na $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ a na začátku druhého řádku úprav toho, že $\cos z > 0$ na $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.)Přestože v první a druhé možnosti vyšly na první pohled různé výsledky, jsou oba tyto výsledky správné. Funkce $-\arccos x$ a $\arcsin x$ se totiž liší jen o konstantu ($\arcsin x = \frac{\pi}{2} - \arccos x$).

7.3 Integrace racionální funkce

7.3.1 Racionální funkce

 $P, Q \dots$ polynomy s reálnými koeficienty, Q nenulový $R = \frac{P}{Q} \dots$ racionální funkceZ věty o dělení polynomů (viz předmět LAGA) existují polynomy Y a Z , $\operatorname{st} Z < \operatorname{st} Q$, takové, že

$$P(x) = Y(x) \cdot Q(x) + Z(x) \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

tj.

$$R(x) = \frac{Y(x) \cdot Q(x) + Z(x)}{Q(x)} = \underbrace{\frac{Y(x)}{Q(x)}}_{\text{už umíme integrovat}} + \underbrace{\frac{Z(x)}{Q(x)}}_{\operatorname{st} Z < \operatorname{st} Q}.$$

(Pro $\operatorname{st} P < \operatorname{st} Q$ je Y nulový polynom a $Z = P$.)Dále uvažujeme jen funkce **ryze lomené**, tj. racionální funkce typu

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}, \quad \text{kde } \operatorname{st} P < \operatorname{st} Q.$$

Nejjednodušší typy funkcí ryze lomených ... **jednoduché** (též **parciální**) zlomky:

$$\frac{A}{(x - \alpha)^k}, \quad A \in \mathbb{R}; \quad \alpha \in \mathbb{R}; \quad k \in \mathbb{N},$$

$$\frac{Bx + C}{(x^2 + px + q)^l}, \quad B, C \in \mathbb{R}; \quad p, q \in \mathbb{R}, \quad p^2 - 4q < 0; \quad l \in \mathbb{N}.$$

Věta 7.6:

- 1) Každou ryze lomenou funkci lze zapsat právě jedním způsobem jako součet jednoduchých zlomků.
- 2) Každou racionální funkci lze zapsat právě jedním způsobem jako součet polynomu a jednoduchých zlomků.

(Přesněji: „... právě jedním způsobem až na pořadí sčítanců ...“)

Jak hledat rozklad funkce ryze lomené na součet jednoduchých zlomků najdete ve skriptech [JT-DIP], str. 112-114. Kde to lze, doporučuji použít *zakrývací pravidlo*. Základním vlastnostem polynomů a jejich kořenů je věnována 11. kapitola skript [PO-ÚAZL].

Jaké máme očekávat v rozkladu jednoduché zlomky? Obecně všech typů, kde jmenovatel je dělitelem polynomu Q (někde ovšem může vyjít nulový čitatel).

Příklad 7.11: Rozložte na součet polynomu a jednoduchých zlomků racionální funkci $R(x) = \frac{2x^2 - 7x + 14}{(x - 1)^2(x + 2)}$.

Řešení: Funkce $R(x)$ je ryze lomená, tedy polynom bude nulový a $R(x)$ bude pouze součtem jednoduchých zlomků. Vzhledem ke tvaru jejího jmenovatele budeme její rozklad hledat ve tvaru

$$\frac{2x^2 - 7x + 14}{(x - 1)^2(x + 2)} = \frac{A}{(x - 1)^2} + \frac{B}{x - 1} + \frac{C}{x + 2}.$$

Rovnost vynásobíme jmenovatelem levé strany $(x - 1)^2(x + 2)$ a pak upravíme novou pravou stranu. Dostaneme

$$\begin{aligned} 2x^2 - 7x + 14 &= A(x + 2) + B(x - 1)(x + 2) + C(x - 1)^2 = A(x + 2) + B(x^2 + x - 2) + C(x^2 - 2x + 1) = \\ &= Ax + 2A + Bx^2 + Bx - 2B + Cx^2 - 2Cx + C = (B + C)x^2 + (A + B - 2C)x + (2A - 2B + C). \end{aligned}$$

Porovnáním koeficientů polynomů u stejných mocnin získáme soustavu lineárních rovnic pro neznámé koeficienty A, B, C

$$\begin{array}{lcl} x^2 : & 2 & = B + C \\ x^1 : & -7 & = A + B - 2C \\ x^0 : & 14 & = 2A - 2B + C \end{array}$$

která má, jak snadno ověříme, řešení $A = 3, B = -2, C = 4$, tedy

$$R(x) = \frac{3}{(x - 1)^2} - \frac{2}{x - 1} + \frac{4}{x + 2}.$$

Poznámka: Počet neznámých v soustavě lineárních rovnic získané porovnáním koeficientů u stejných mocnin je možné snížit pomocí tzv. **zakrývacího pravidla**. Toto pravidlo lze použít k určení koeficientů v čitateli u zlomků, které mají ve jmenovateli nejvyšší mocniny jednotlivých kořenových činitelů. Použití pravidla si ukážeme na Příkladu 7.11 a později také u Příkladu 7.12. V Příkladu 7.11 je ho možné použít k výpočtu koeficientů A a C . Postupujeme tak, že danou ryze lomenou funkci zapíšeme se zcela rozloženým jmenovatelem

$$R(x) = \frac{2x^2 - 7x + 14}{(x - 1)^2(x + 2)}$$

(zde jsme ji tak dostali zapsanou již v zadání), zakryjeme kořenový činitel jmenovatele a odpovídající kořen dosadíme do zbytku:

$$\begin{aligned} x := 1 \quad A &= \frac{2x^2 - 7x + 14}{x + 2} \Big|_{x=1} = \frac{2 - 7 + 14}{1 + 2} = 3, \\ x := -2 \quad C &= \frac{2x^2 - 7x + 14}{(x - 1)^2} \Big|_{x=-2} = \frac{8 + 14 + 14}{(-3)^2} = 4. \end{aligned}$$

Příklad 7.12: Rozložte na součet polynomu a jednoduchých zlomků funkci $R(x) = \frac{x^6 + 2x^4 + 3x^2 + x - 1}{x^5 - x^2}$.

Řešení: Máme $x^5 - x^2 = x^2(x^3 - 1)$, tedy $D(R) = \mathbb{R} \setminus \{0; 1\}$. Nejdříve vyjádříme $R(x)$ jako součet polynomu a funkce ryze lomené. K tomu vydělíme čítec jmenovatelem a dostaneme

$$\frac{(x^6 + 0x^5 + 2x^4 + 0x^3 + 3x^2 + x - 1) : (x^5 - x^2) = x + \frac{2x^4 + x^3 + 3x^2 + x - 1}{x^5 - x^2} = R(x) = x + R_1(x)}{\frac{-x^6}{2x^4 + x^3 + 3x^2 + x - 1}},$$

kde $R_1(x)$ je funkce ryze lomená. Protože $x^5 - x^2 = x^2(x^3 - 1) = x^2(x - 1)(x^2 + x + 1)$, kde polynom $x^2 + x + 1$ už nemá reálné kořeny, bude mít funkce $R_1(x)$ rozklad na součet jednoduchých zlomků ve tvaru

$$(R_1(x) =) \frac{2x^4 + x^3 + 3x^2 + x - 1}{x^2(x - 1)(x^2 + x + 1)} = \frac{A}{x^2} + \frac{B}{x} + \frac{C}{x - 1} + \frac{Dx + E}{x^2 + x + 1}. \quad (1)$$

Vynásobením rovnosti (1) jmenovatelem její levé strany $x^2(x - 1)(x^2 + x + 1)$ a postupnou úpravou nové pravé strany dostaneme

$$\begin{aligned} 2x^4 + x^3 + 3x^2 + x - 1 &= A \underbrace{(x^3 - 1)}_{(x-1)(x^2+x+1)} + B \underbrace{(x^4 - x)}_{x(x-1)(x^2+x+1)} + C \underbrace{(x^4 + x^3 + x^2)}_{x^2(x^2+x+1)} + (Dx + E) \underbrace{(x^3 - x^2)}_{x^2(x-1)} = \\ &= Ax^3 - A + Bx^4 - Bx + Cx^4 + Cx^3 + Cx^2 + Dx^4 - Dx^3 + Ex^3 - Ex^2 = \\ &= (B + C + D)x^4 + (A + C - D + E)x^3 + (C - E)x^2 - Bx - A. \end{aligned}$$

Nyní porovnáme koeficienty vlevo a vpravo u stejných mocnin:

$$\begin{aligned} x^4 : \quad 2 &= B + C + D \\ x^3 : \quad 1 &= A + C - D + E \\ x^2 : \quad 3 &= C - E \\ x^1 : \quad 1 &= -B \\ x^0 : \quad -1 &= -A \end{aligned} \quad (2)$$

Tím jsme získali pro neznámé koeficienty A, B, C, D, E soustavu rovnic, jejímž vyřešením dostaneme

$$A = 1, \quad B = -1, \quad C = 2, \quad D = 1, \quad E = -1.$$

Tedy

$$R(x) = x + \underbrace{\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} + \frac{2}{x-1} + \frac{x-1}{x^2+x+1}}_{R_1(x)}.$$

Pro snížení počtu neznámých v soustavě lineárních rovnic (2) (z pěti na tři) bylo možné vypočítat koeficienty A a C zakrývacím pravidlem:

$$x := 0 \quad A = \frac{2x^4 + x^3 + 3x^2 + x - 1}{(x - 1)(x^2 + x + 1)} \Big|_{x=0} = \frac{0 + 0 + 0 + 0 - 1}{(0 - 1) \cdot (0 + 0 + 1)} = 1,$$

$$x := 1 \quad C = \frac{2x^4 + x^3 + 3x^2 + x - 1}{x^2(x^2 + x + 1)} \Big|_{x=1} = \frac{2 + 1 + 3 + 1 - 1}{1 \cdot (1 + 1 + 1)} = 2.$$

Získané hodnoty jsme mohli dosadit za A a C hned v rovnosti (1) nebo až později po sestavení soustavy rovnic (2).

Příklad 7.13: Určete tvar, v kterém je třeba hledat rozklad na jednoduché zlomky racionální funkce

$$\text{a) } \frac{x^3 + 2x - 4}{(x^2 + 4)^2(x - 1)^3} \quad \left[\frac{Ax + B}{(x^2 + 4)^2} + \frac{Cx + D}{x^2 + 4} + \frac{E}{(x - 1)^3} + \frac{F}{(x - 1)^2} + \frac{G}{x - 1} \right],$$

$$\text{b) } \frac{x^4}{(x^2 + 4x + 5)^2(x^2 + 1)(x + 4)^2} \quad \left[\frac{Ax + B}{(x^2 + 4x + 5)^2} + \frac{Cx + D}{x^2 + 4x + 5} + \frac{Ex + F}{x^2 + 1} + \frac{G}{(x + 4)^2} + \frac{H}{x + 4} \right].$$

7.3.2 Integrace racionální funkce

= integrace polynomu + integrace jednoduchých zlomků

Integrace jednoduchých zlomků

Cílem této části je ukázat obecný postup, jak hledat primitivní funkce k jednoduchým zlomkům. Nejde tu o odvození vzorců, do kterých by se mělo při integraci dosazovat. Doporučuji porovnat obecný postup, který je zde uvedený, s integrací jednotlivých parciálních zlomků v následujícím Příkladu 7.14.

(1) TYP $\boxed{\frac{A}{(x-\alpha)^n}; \quad n \in \mathbb{N} \quad (x \neq \alpha)}$

a) $\underline{n > 1}$

$$\begin{aligned} \int \frac{A}{(x-\alpha)^n} dx &= A \int (x-\alpha)^{-n} dx \quad (\text{Př. 7.6a}) = A \frac{(x-\alpha)^{-n+1}}{-n+1} + c = \\ &= \frac{-A}{n-1} \cdot \frac{1}{(x-\alpha)^{n-1}} + c \quad \text{na } (-\infty, \alpha) \text{ a na } (\alpha, \infty) \end{aligned}$$

b) $\underline{n = 1}$

$$\int \frac{A}{x-\alpha} dx = A \ln|x-\alpha| + c \quad \text{na } (-\infty, \alpha) \text{ a na } (\alpha, \infty)$$

(2) TYP $\boxed{\frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^n}; \quad n \in \mathbb{N}, \quad p^2-4q < 0 \quad (x \in \mathbb{R})}$ (jmenovatel nemá reálné kořeny)

přepíšeme

$$\begin{aligned} \frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^n} &= \frac{\frac{B}{2} \cdot \overbrace{(2x+p)}^{(x^2+px+q)'} }{(x^2+px+q)^n} + \frac{C - \frac{Bp}{2}}{(x^2+px+q)^n} = \\ &= \frac{B}{2} \underbrace{\frac{(2x+p)}{(x^2+px+q)^n}}_{\text{viz (2A)}} + \left(C - \frac{Bp}{2}\right) \underbrace{\frac{1}{(x^2+px+q)^n}}_{\text{viz (2B)}} \end{aligned}$$

(K prvnímu kroku rozkladu: koeficient $\frac{B}{2}$ v prvním zlomku rozkladu jsme vybrali tak, aby v čitateli tohoto zlomku byla obsažena všechna x z čitatele zadané racionální funkce, koeficient $C - \frac{Bp}{2}$ v čitateli druhého zlomku rozkladu odpovídá tomu, že po sečtení čitateľů obou zlomků rozkladu musíme dostat původní čítele. Jak už bylo uvedeno výše: Neučte se tyto koeficienty ani dále uvedené vyjádření integrálů jako vzorečky – podstatné tu je znát princip rozkladu na součet dvou zlomků a postup, jakým lze integrály najít.)

(2A)

$$\int \frac{(2x+p)}{(x^2+px+q)^n} dx = \left| \begin{array}{l} x^2+px+q = t \\ (2x+p) dx = dt \end{array} \right| = \int \frac{dt}{t^n} = (\star)$$

pro $\underline{n > 1}$ (viz (1a)):

$$(\star) = -\frac{1}{n-1} \cdot \frac{1}{t^{n-1}} + c = -\frac{1}{n-1} \cdot \frac{1}{(x^2+px+q)^{n-1}} + c \quad \text{na } \mathbb{R}$$

pro $\underline{n = 1}$ (viz (1b)):

$$(\star) = \ln|t| + c = \ln \underbrace{(x^2+px+q)}_{> 0 !} + c \quad \text{na } \mathbb{R}$$

(2B) V dalších úpravách použijeme pro lepší přehlednost označení $D = \frac{p}{2}$, $E = q - \left(\frac{p}{2}\right)^2$

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{(x^2 + px + q)^n} dx &= \int \frac{1}{\left(\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + q - \left(\frac{p}{2}\right)^2\right)^n} dx = \int \frac{1}{((x + D)^2 + E)^n} dx = \\ &= \frac{1}{E^n} \int \frac{1}{\left(\frac{(x + D)^2}{E} + 1\right)^n} dx = \frac{1}{E^n} \int \frac{1}{\left(\left(\frac{x + D}{\sqrt{E}}\right)^2 + 1\right)^n} dx = \left| \begin{array}{l} \frac{x + D}{\sqrt{E}} = t \\ \frac{1}{\sqrt{E}} dx = dt \end{array} \right| = \\ &= \frac{\sqrt{E}}{E^n} \int \frac{1}{\left(\left(\frac{x + D}{\sqrt{E}}\right)^2 + 1\right)^n} \cdot \frac{1}{\sqrt{E}} dx = \frac{\sqrt{E}}{E^n} \int \frac{1}{(t^2 + 1)^n} dt = (***) \end{aligned}$$

pro $n = 1$:

$$(**) = \frac{1}{\sqrt{E}} \operatorname{arctg} t + c = \frac{1}{\sqrt{E}} \operatorname{arctg} \left(\frac{x + D}{\sqrt{E}} \right) + c \quad \text{na } \mathbb{R}$$

pro $n \geq 1$ se použije Příklad 7.8 (primitivní funkci dostaneme opět na celém \mathbb{R})

Příklad 7.14: Najděte primitivní funkce k funkci $g(x) = \frac{x^6 + 2x^4 + 3x^2 + x - 1}{x^5 - x^2}$.

Řešení: Podle Příkladu 7.12 máme

$$\int g(x) dx = \int x dx + \int \frac{1}{x^2} dx - \int \frac{1}{x} dx + \int \frac{2}{x-1} dx + \underbrace{\int \frac{x-1}{x^2+x+1} dx}_{\tilde{I}}$$

První čtyři integrály jsou snadné, poslední je složitější a spočítáme si ho zvlášť. Máme

$$\tilde{I} = \int \frac{x-1}{x^2+x+1} dx = \int \frac{\frac{1}{2}(2x+1) - \frac{3}{2}}{x^2+x+1} dx = \frac{1}{2} \underbrace{\int \frac{2x+1}{x^2+x+1} dx}_{\tilde{I}_1} - \frac{3}{2} \underbrace{\int \frac{1}{x^2+x+1} dx}_{\tilde{I}_2}.$$

Integrál \tilde{I}_1 je typu $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx$ (viz Příklad 7.7), tedy

$$\tilde{I}_1 = \int \frac{2x+1}{x^2+x+1} dx = \ln |\underbrace{x^2+x+1}_{>0 \forall x}| + c = \ln(x^2+x+1) + c.$$

Integrál \tilde{I}_2 spočítáme takto:

$$\begin{aligned} \tilde{I}_2 &= \int \frac{1}{x^2+x+1} dx = \int \frac{1}{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} dx = \int \frac{\frac{4}{3}}{\frac{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2}{\frac{3}{4}} + 1} dx = \int \frac{\frac{4}{3}}{\left(\frac{x + \frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right)^2 + 1} dx = \\ &= \int \frac{\frac{4}{3}}{\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1} dx = \left| \begin{array}{l} \frac{2x+1}{\sqrt{3}} = t \\ \frac{2}{\sqrt{3}} dx = dt \end{array} \right| = \int \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1} \frac{2}{\sqrt{3}} dx = \frac{2}{\sqrt{3}} \int \frac{1}{t^2 + 1} dt = \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} t + c = \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}} \right) + c. \end{aligned}$$

Tím jsme dostali

$$\tilde{I} = \tilde{I}_1 + \tilde{I}_2 = \ln(x^2+x+1) + \operatorname{arctg} \left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}} \right) + c.$$

Nyní už snadno dopočítáme

$$\int g(x) dx = \int x dx + \int \frac{1}{x^2} dx - \int \frac{1}{x} dx + \int \frac{2}{x-1} dx + \tilde{I} =$$

$$= \frac{x^2}{2} - \frac{1}{x} - \ln|x| + 2\ln|x-1| + \ln(x^2+x+1) + \arctg\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + c$$

na $(-\infty, 0)$, na $(0, 1)$ a na $(1, \infty)$.

7.4 Některé důležité substituce

polynom $P(x, y)$ dvou proměnných $x, y \dots$

\dots součet konečného počtu funkcí typu $c_{m,n} \cdot x^m \cdot y^n$, kde $m, n \in \mathbb{N}_0$, $c_{m,n} \in \mathbb{R}$

racionální funkce $R(x, y)$ dvou proměnných $x, y \dots$

\dots podíl dvou polynomů dvou proměnných x, y ; $R(x, y) = \frac{P(x, y)}{Q(x, y)}$, $Q(x, y) \neq 0$

analogicky pro tři a více proměnných

(nebude-li řečeno jinak, budou v dalším písmena R, \tilde{R} atd. označovat racionální funkce)

Poznámka: Dále uvedené substituce lze někdy použít, i když R není racionální funkce (viz např. Příklad 7.17).

A) Substituce pro integrály typu

$$\int R(e^{ax}) dx$$

Použijeme substituci

$$e^{ax} = t \quad (\text{prostá funkce na } \mathbb{R}, \quad t \in (0, \infty)).$$

Pro $x \in \mathbb{R}$ pak můžeme psát

$$\int R(e^{ax}) dx = \left| \begin{array}{l} e^{ax} = t \dots t \in (0, \infty) \\ x = \frac{1}{a} \ln t \\ dx = \frac{1}{a} \frac{1}{t} dt \end{array} \right| = \int \underbrace{R(t) \cdot \frac{1}{at}}_{\text{racionální funkce}} dt$$

nebo pro $R(e^{ax}) = \tilde{R}(e^{ax}) \cdot e^{ax}$ také

$$\int \tilde{R}(e^{ax}) \cdot e^{ax} dx = \left| \begin{array}{l} e^{ax} = t \dots t \in (0, \infty) \\ a e^{ax} dx = dt \end{array} \right| = \frac{1}{a} \int \tilde{R}(e^{ax}) \cdot a e^{ax} dx = \frac{1}{a} \int \tilde{R}(t) dt.$$

Příklad 7.15: Najděte primitivní funkce k funkci $f(x) = \frac{e^{4x} - 1}{e^{4x} + e^{2x} + 1}$.

Řešení:

$$\begin{aligned} \int \frac{e^{4x} - 1}{e^{4x} + e^{2x} + 1} dx &= \int \frac{(e^{2x})^2 - 1}{(e^{2x})^2 + e^{2x} + 1} dx = \left| \begin{array}{l} x \in \mathbb{R}; \quad t \in (0, \infty) \\ e^{2x} = t \\ x = \frac{1}{2} \ln t \quad - \text{prostá} \\ dx = \frac{1}{2t} dt \end{array} \right| = \\ &= \int \frac{t^2 - 1}{t^2 + t + 1} \cdot \frac{1}{2t} dt = \int \left(-\frac{1}{2t} + \frac{\overbrace{2t+1}^{(t^2+t+1)'}}{2(t^2+t+1)} \right) dt \stackrel{1)}{=} \frac{1}{2} (-\ln t + \ln(t^2 + t + 1)) + c = \\ &= \frac{1}{2} (-\ln e^{2x} + \ln(e^{4x} + e^{2x} + 1)) + c = -x + \frac{1}{2} \ln(e^{4x} + e^{2x} + 1) + c \quad \text{na } \mathbb{R} \end{aligned}$$

¹⁾ vynechali jsme u logaritmu absolutní hodnoty, protože argumenty jsou kladné

Příklad 7.16: Najděte primitivní funkce k funkci $f(x) = \frac{e^{-6x} - e^{-2x}}{e^{-4x} + 1}$.

Řešení:

$$\begin{aligned} \int \frac{e^{-6x} - e^{-2x}}{e^{-4x} + 1} dx &= \int \frac{(e^{-2x})^2 - 1}{(e^{-2x})^2 + 1} \cdot e^{-2x} dx = \left| \begin{array}{l} x \in \mathbb{R}; \quad t \in (0, \infty) \\ e^{-2x} = t \\ -2e^{-2x} dx = dt \end{array} \right| = -\frac{1}{2} \int \frac{t^2 - 1}{t^2 + 1} dt = \\ &= -\frac{1}{2} \int 1 dt + \int \frac{1}{t^2 + 1} dt = -\frac{1}{2} t + \operatorname{arctg} t + c = -\frac{1}{2} e^{-2x} + \operatorname{arctg}(e^{-2x}) + c \quad \text{na } \mathbb{R} \end{aligned}$$

B) Substituce pro integrály typu

$$\boxed{\int \frac{R(\ln x)}{x} dx}$$

Použijeme substituci

$$\ln x = t \quad (\text{prostá funkce na } (0, \infty), \quad t \in \mathbb{R})$$

a pro $x \in (0, \infty)$ dostaneme

$$\int \frac{R(\ln x)}{x} dx = \left| \begin{array}{l} \ln x = t \dots t \in \mathbb{R} \\ \frac{1}{x} dx = dt \end{array} \right| = \int R(t) dt.$$

Příklad 7.17: Najděte primitivní funkce k funkci $f(x) = \frac{5 \ln x}{x(\ln^3 x + \ln^2 x - 2)}$.

Řešení: $x > 0$, $x \neq e$ (máme totiž: $\ln^3 x + \ln^2 x - 2 = (\ln x - 1)(\ln^2 x + 2 \ln x + 2) = 0 \Leftrightarrow \ln x = 1 \Leftrightarrow x = e$ – viz rozklad jmenovatele po substituci)

$$\begin{aligned} \int \frac{5 \ln x}{x(\ln^3 x + \ln^2 x - 2)} dx &= \left| \begin{array}{l} t = \ln x \\ dt = \frac{1}{x} dx \end{array} \right| = \int \frac{5t}{\underbrace{t^3 + t^2 - 2}_{(t-1)(t^2+2t+2)}} dt = \\ &= \int \left(\frac{1}{t-1} + \frac{-t+2}{t^2+2t+2} \right) dt = \ln |t-1| - \frac{1}{2} \int \frac{2t+2}{t^2+2t+2} dt + \int \frac{3}{\underbrace{t^2+2t+2}_{(t+1)^2+1}} dt = \\ &= \ln |t-1| - \frac{1}{2} \ln(t^2+2t+2) + 3 \operatorname{arctg}(t+1) + c = \\ &= \ln |\ln x - 1| - \frac{1}{2} \ln(\ln^2 x + 2 \ln x + 2) + 3 \operatorname{arctg}(\ln x + 1) + c \\ &\quad \text{na } (0, e) \text{ a na } (e, \infty) \end{aligned}$$

Příklad 7.18: Najděte primitivní funkce k funkci $f(x) = \frac{1}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}$.

Řešení: Toto je případ, kdy R není racionální funkce, přesto lze postupovat podobně jako v předcházejícím příkladu. (Funkce f je zde definována pro ta x , pro která platí $\ln x \in (-1, 1)$, tj. pro $x \in \left(\frac{1}{e}, e\right)$.)

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x\sqrt{1-\ln^2 x}} dx &= \left| \begin{array}{l} \ln x = t \\ \frac{1}{x} dx = dt \end{array} \right| = \int \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt = \\ &= \arcsin t + c = \arcsin(\ln x) + c \quad \text{na } \left(\frac{1}{e}, e\right) \end{aligned}$$

C) Substituce pro integrály typu

$$\int R(\sin x, \cos x) dx$$

Výběr substituce závisí na vlastnostech funkce $R(u, v)$. Speciálně na tom, co se stane, když v předpisu pro funkci $R(u, v)$ u jedné z proměnných, nebo u obou proměnných změním všude znaménko. Není přitom potřeba pracovat s proměnnými u a v . Stačí zkusit, co se stane s hodnotou zlomku, jestliže změním znaménko u všech sinů resp. kosinů resp. sinů a kosinů.

Výběr substituce:

(I) Zkusíme, zda funkce $R(u, v)$ nemá některou z dále uvedených vlastností:

- a) $R(-u, v) = -R(u, v)$ (tj. R je lichá v první proměnné),
- b) $R(u, -v) = -R(u, v)$ (tj. R je lichá v druhé proměnné),
- c) $R(-u, -v) = R(u, v)$.

V těchto případech nás následující úvahy vedou k vhodným substitucím. Vybereme-li však na základě vlastností funkce $R(u, v)$ substituci $t = \operatorname{tg} x$, lze v praxi často funkci $R(\sin x, \cos x)$ připravit k použití této substituce jiným (někdy i výrazně jednodušším) způsobem, než jak je to ukázáno pro obecný případ (viz např. příklady 7.21, 7.22).

- a) $R(-u, v) = -R(u, v)$ (tj. R je lichá v první proměnné)

V tomto případě se bude $\sin x$ (po eventuálním rozšíření zlomku výrazem $\sin x$) vyskytovat ve jmenovateli jen v sudých mocninách a čítec bude možné zapsat jako součin funkce $\sin x$ a funkce, v níž se $\sin x$ vyskytuje opět jen v sudých mocninách. Sudé mocniny sinu tedy bude možné převést na mocniny kosinu a zbylý lichý sinus z čítec použít na derivaci kosinu. To znamená, že lze funkci $R(\sin x, \cos x)$ přepsat ve tvaru

$$R(\sin x, \cos x) = \tilde{R}(\sin^2 x, \cos x) \cdot \sin x,$$

kde \tilde{R} je vhodná racionální funkce dvou proměnných. Vzhledem k předchozím úvahám zde volíme substituci

$$\cos x = t \quad (t \in \langle -1, 1 \rangle, \sin^2 x = 1 - t^2).$$

Na \mathbb{R} tak dostaneme

$$\int \tilde{R}(\sin^2 x, \cos x) \cdot \sin x dx = \left| \begin{array}{ll} \cos x = t \dots t \in \langle -1, 1 \rangle \\ -\sin x dx = dt \\ (\sin^2 x = 1 - t^2) \end{array} \right| = - \int \underbrace{\tilde{R}(1 - t^2, t)}_{\text{racionální funkce proměnné } t} dt.$$

- b) $R(u, -v) = -R(u, v)$ (tj. R je lichá v druhé proměnné)

V tomto případě se bude $\cos x$ (po eventuálním rozšíření zlomku výrazem $\cos x$) vyskytovat ve jmenovateli jen v sudých mocninách a čítec bude možné zapsat jako součin funkce $\cos x$ a funkce, v níž se $\cos x$ vyskytuje opět jen v sudých mocninách. Sudé mocniny kosinu tedy bude možné převést na mocniny sinu a zbylý lichý kosinus z čítec použít na derivaci sinu. Funkci $R(\sin x, \cos x)$ lze tentokrát přepsat ve tvaru

$$R(\sin x, \cos x) = \tilde{R}(\sin x, \cos^2 x) \cdot \cos x,$$

kde \tilde{R} je opět vhodná racionální funkce dvou proměnných. K integraci použijeme substituci

$$\sin x = t \quad (t \in \langle -1, 1 \rangle, \cos^2 x = 1 - t^2),$$

která nám na \mathbb{R} dá

$$\int \tilde{R}(\sin x, \cos^2 x) \cdot \cos x dx = \left| \begin{array}{ll} \sin x = t \dots t \in \langle -1, 1 \rangle \\ \cos x dx = dt \\ (\cos^2 x = 1 - t^2) \end{array} \right| = \int \underbrace{\tilde{R}(t, 1 - t^2)}_{\text{racionální funkce proměnné } t} dt.$$

c) $R(-u, -v) = R(u, v)$

V tomto případě (po eventuálním rozšíření zlomku výrazem $\cos x$, $\cos^2 x$ nebo $\cos^3 x$) bude možné ve jmenovateli vytknout $\cos^2 x$ a v čitateli a zbytku jmenovatele pak zbudou jen sudé mocniny \sin ů a \cos ů, někdy vynásobené součinem $\sin x \cdot \cos x$. Integrand $R(\sin x, \cos x)$ lze tentokrát předpsat ve tvaru

$$R(\sin x, \cos x) = \tilde{R}(\sin^2 x, \cos^2 x, \sin x \cdot \cos x),$$

kde \tilde{R} je vhodná racionální funkce tří proměnných. Při integraci využijeme toho, že $\cos^2 x$ vytknutý ve jmenovateli lze použít na derivaci tangenty a že platí

$$\cos^2 x = \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x + \sin^2 x} = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 x},$$

$$\sin^2 x = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x + \sin^2 x} = \frac{\operatorname{tg}^2 x}{1 + \operatorname{tg}^2 x} \quad \left(\text{nebo } \sin^2 x = 1 - \cos^2 x = 1 - \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 x} = \frac{\operatorname{tg}^2 x}{1 + \operatorname{tg}^2 x} \right),$$

$$\sin x \cdot \cos x = \frac{\sin x \cdot \cos x}{\cos^2 x + \sin^2 x} = \frac{\operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg}^2 x} \quad \left(\text{nebo } \sin x \cdot \cos x = \operatorname{tg} x \cdot \cos^2 x = \frac{\operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg}^2 x} \right).$$

Na intervalech $\left(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$, $k \in \mathbb{Z}$, tak můžeme použít substituci

$$t = \operatorname{tg} x, \quad dt = \frac{1}{\cos^2 x} dx \quad \left(\cos^2 x = \frac{1}{1+t^2}, \quad \sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2}, \quad \sin x \cdot \cos x = \frac{t}{1+t^2} \right).$$

Poznámka: Jak se vypořádat s faktem, že definiční obor funkce $\operatorname{tg} x$ je někdy menší než definiční obor původní integrované funkce, najdete u příkladu 7.22.

Poznámka: Je-li $x \in \left(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$, můžeme v praxi psát stejně jako např. v příkladu 7.21 $x = \arctg t + k\pi$ a $dx = \frac{1}{1+t^2} dt$. Není tedy nutné upravovat funkci R tak, aby bylo možné ve jmenovateli vytknout $\cos^2 x$.

Poznámka: Někdy je zde vhodnější substitute $t = \cotg x$.

Poznámka: V některých případech lze použít všechny tři uvedené substitute. (Dá se dokonce celkem snadno ukázat, že pokud je možné použít dvě z těchto substitucí, lze použít i třetí.) Záleží ovšem na konkrétním příkladu, která ze substitucí se nejnáze provede a která nás dovede k nejjednodušší integraci racionální funkce.

(II) Pokud funkce R nemá ani jednu z vlastností popsaných v (I) použijeme k substituci funkci $\operatorname{tg} \frac{x}{2}$, prostou na intervalech $((2k-1)\pi, (2k+1)\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$. Pro $x \in ((2k-1)\pi, (2k+1)\pi)$ je přitom $\frac{x}{2} \in \left(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$, takže $\frac{x}{2} = \arctg t + k\pi$ a $x = 2 \arctg t + 2k\pi$. Substitute tedy bude vypadat takto

$$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t, \quad dx = \frac{2}{1+t^2},$$

$$\cos x = \cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2} = \frac{\cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2}} = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = \frac{1 - t^2}{1 + t^2},$$

$$\sin x = 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} = \frac{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2}} = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = \frac{2t}{1 + t^2}.$$

Jak je vidět, tato substitute převede integraci jakékoliv funkce typu $R(\sin x, \cos x)$ na integraci racionální funkce. Její velkou nevýhodou je však to, že po ní dostáváme racionální funkce s vyšším stupněm polynomu ve jmenovateli než u jiných substitucí. Přitom integrace racionálních funkcí v vysokém stupněm polynomu ve jmenovateli je pracná, často i neproveditelná běžným způsobem, protože nemusíme umět najít rozklad jmenovatele. Proto volíme tuto substituci, jen když nemáme jinou možnost.

Příklady na výběr substituce pro integrály typu $\int R(\sin x, \cos x) dx$

1. $\int \frac{2 \sin x}{\sin^2 x + 1} dx$ (viz příklad 7.19)

$$\begin{aligned} R(u, v) &= \frac{2u}{u^2 + 1}, & \text{neboli} & & R(\sin x, \cos x) &= \frac{2 \sin x}{\sin^2 x + 1} \\ R(-u, v) &= \frac{-2u}{(-u)^2 + 1} = -R(u, v), & & & R(-\sin x, \cos x) &= \frac{2(-\sin x)}{(-\sin x)^2 + 1} = -R(\sin x, \cos x) \\ R(u, -v) &= \frac{2u}{u^2 + 1} \neq -R(u, v), & & & R(\sin x, -\cos x) &= \frac{2 \sin x}{\sin^2 x + 1} \neq -R(\sin x, \cos x) \\ R(-u, -v) &= \frac{-2u}{(-u)^2 + 1} \neq R(u, v), & & & R(-\sin x, -\cos x) &= \frac{2(-\sin x)}{(-\sin x)^2 + 1} \neq R(\sin x, \cos x) \end{aligned}$$

z jednodušších substitucí lze tedy použít pouze substituci $t = \cos x$

$$\left(\frac{2 \sin x}{\sin^2 x + 1} = \frac{2}{\sin^2 x + 1} \cdot \sin x, \text{ tedy jde o integrál typu } \int \tilde{R}(\sin^2 x, \cos x) \cdot \sin x dx \right)$$

2. $\int \frac{1}{\cos^3 x} dx$ (viz příklad 7.20)

$$\begin{aligned} R(u, v) &= \frac{1}{v^3}, & \text{neboli} & & R(\sin x, \cos x) &= \frac{1}{\cos^3 x} \\ R(-u, v) &= \frac{1}{v^3} \neq -R(u, v), & & & R(-\sin x, \cos x) &= \frac{1}{\cos^3 x} \neq -R(\sin x, \cos x) \\ R(u, -v) &= \frac{1}{(-v)^3} = -R(u, v), & & & R(\sin x, -\cos x) &= \frac{1}{(-\cos x)^3} = -R(\sin x, \cos x) \\ R(-u, -v) &= \frac{1}{(-v)^3} \neq R(u, v) & & & R(-\sin x, -\cos x) &= \frac{1}{(-\cos x)^3} \neq R(\sin x, \cos x) \end{aligned}$$

z jednodušších substitucí lze tedy použít pouze substituci $t = \sin x$

$$\left(\frac{1}{\cos^3 x} = \frac{\cos x}{\cos^4 x} = \frac{1}{(\cos^2 x)^2} \cdot \cos x, \text{ tedy jde o integrál typu } \int \tilde{R}(\cos^2 x, \sin x) \cdot \cos x dx \right)$$

3. $\int \frac{1}{\cos^4 x} dx$ (viz příklad 7.21)

$$\begin{aligned} R(u, v) &= \frac{1}{v^4}, & \text{neboli} & & R(\sin x, \cos x) &= \frac{1}{\cos^4 x} \\ R(-u, v) &= \frac{1}{v^4} \neq -R(u, v), & & & R(-\sin x, \cos x) &= \frac{1}{\cos^4 x} \neq -R(\sin x, \cos x) \\ R(u, -v) &= \frac{1}{(-v)^4} \neq -R(u, v), & & & R(\sin x, -\cos x) &= \frac{1}{(-\cos x)^4} \neq -R(\sin x, \cos x) \\ R(-u, -v) &= \frac{1}{(-v)^4} = R(u, v) & & & R(-\sin x, -\cos x) &= \frac{1}{(-\cos x)^4} = R(\sin x, \cos x) \end{aligned}$$

z jednodušších substitucí lze tedy použít pouze substituci $t = \tan x$

$$\left(\frac{1}{\cos^4 x} = \frac{1}{(\cos^2 x)^2}, \text{ tedy jde o integrál typu } \int \tilde{R}(\cos^2 x, \sin^2 x, \sin x \cdot \cos x) dx \right)$$

4. $\int \frac{1}{(3 \sin x - 2 \cos x)^2} dx$

$$\begin{aligned} R(u, v) &= \frac{1}{(3u - 2v)^2}, & \text{neboli} & & R(\sin x, \cos x) &= \frac{1}{(3 \sin x - 2 \cos x)^2} \\ R(-u, v) &= \frac{1}{(3(-u) - 2v)^2} \neq -R(u, v), & & & R(-\sin x, \cos x) &= \frac{1}{(3(-\sin x) - 2 \cos x)^2} \neq -R(\sin x, \cos x) \\ R(u, -v) &= \frac{1}{(3u - 2(-v))^2} \neq -R(u, v), & & & R(\sin x, -\cos x) &= \frac{1}{(3 \sin x - 2(-\cos x))^2} \neq -R(\sin x, \cos x) \\ R(-u, -v) &= \frac{1}{(3(-u) - 2(-v))^2} = R(u, v), & & & R(-\sin x, -\cos x) &= \frac{1}{(3(-\sin x) - 2(-\cos x))^2} = R(\sin x, \cos x) \end{aligned}$$

z jednodušších substitucí lze tedy použít pouze substituci $t = \tan x$

$$\left(\frac{1}{(3 \sin x - 2 \cos x)^2} = \frac{1}{9 \sin^2 x - 12 \sin x \cos x + 4 \cos^2 x}, \right.$$

$$\left. \text{tedy jde o integrál typu } \int \tilde{R}(\cos^2 x, \sin^2 x, \sin x \cdot \cos x) dx \right)$$

5. $\int \frac{\cos x}{\sin x - \cos x} dx$ (viz příklad 7.22)

$$\begin{array}{ll} R(u, v) = \frac{v}{u - v}, & \text{neboli} \quad R(\sin x, \cos x) = \frac{\cos x}{\sin x - \cos x} \\ R(-u, v) = \frac{v}{-u - v} \neq -R(u, v), & R(-\sin x, \cos x) = \frac{\cos x}{-\sin x - \cos x} \neq -R(\sin x, \cos x) \\ R(u, -v) = \frac{-v}{u - (-v)} \neq -R(u, v), & R(\sin x, -\cos x) = \frac{-\cos x}{\sin x - (-\cos x)} \neq -R(\sin x, \cos x) \\ R(-u, -v) = \frac{-v}{-u - (-v)} = R(u, v), & R(-\sin x, -\cos x) = \frac{-\cos x}{-\sin x - (-\cos x)} = R(\sin x, \cos x) \end{array}$$

z jednodušších substitucí lze tedy použít pouze substituci $t = \operatorname{tg} x$

$$\left(\frac{\cos x}{\sin x - \cos x} = \frac{\cos^2 x}{\sin x \cos x - \cos^2 x}, \quad \text{tedy jde o integrál typu } \int \tilde{R}(\cos^2 x, \sin^2 x, \sin x \cdot \cos x) dx \right)$$

6. $\int \frac{\sin x \cos x}{\sin x + \cos x} dx$

$$\begin{array}{ll} R(u, v) = \frac{uv}{u + v}, & \text{neboli} \quad R(\sin x, \cos x) = \frac{\sin x \cos x}{\sin x + \cos x} \\ R(-u, v) = \frac{(-u)v}{-u + v} \neq -R(u, v), & R(-\sin x, \cos x) = \frac{(-\sin x) \cos x}{-\sin x + \cos x} \neq -R(\sin x, \cos x) \\ R(u, -v) = \frac{u(-v)}{u + (-v)} \neq -R(u, v), & R(\sin x, -\cos x) = \frac{\sin x (-\cos x)}{\sin x + (-\cos x)} \neq -R(\sin x, \cos x) \\ R(-u, -v) = \frac{(-u)(-v)}{-u + (-v)} \neq R(u, v), & R(-\sin x, -\cos x) = \frac{(-\sin x)(-\cos x)}{-\sin x + (-\cos x)} \neq R(\sin x, \cos x) \end{array}$$

lze tedy použít pouze substituci $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$

Příklad 7.19: Najděte primitivní funkce k funkci $f(x) = \frac{2 \sin x}{\sin^2 x + 1}$.

Řešení:

$$\begin{aligned} \int \frac{2 \sin x}{\sin^2 x + 1} dx &= 2 \int \frac{\sin x}{2 - \cos^2 x} dx = \left| \begin{array}{l} t = \cos x \in \langle -1, 1 \rangle \\ dt = -\sin x dx \end{array} \right| = \\ &= 2 \int \frac{-dt}{2 - t^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \left(\frac{1}{t - \sqrt{2}} - \frac{1}{t + \sqrt{2}} \right) dt = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\underbrace{\ln |t - \sqrt{2}|}_{\sqrt{2} - t} - \underbrace{\ln |t + \sqrt{2}|}_{\sqrt{2} + t} \right) + c = \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \frac{\sqrt{2} - \cos x}{\sqrt{2} + \cos x} + c \quad \text{na } \mathbb{R} \end{aligned}$$

Příklad 7.20: Najděte primitivní funkce k funkci $f(x) = \frac{1}{\cos^3 x}$.

Řešení: Musí platit $\cos x \neq 0$, tj. $x \in (-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$.

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\cos^3 x} &= \int \frac{\cos x}{(1 - \sin^2 x)^2} dx = \left| \begin{array}{l} t = \sin x \in (-1, 1) \\ dt = \cos x dx \end{array} \right| = \\ &= \int \frac{dt}{(1 - t^2)^2} = \frac{1}{4} \int \left(\frac{1}{(t - 1)^2} + \frac{1}{(t + 1)^2} + \frac{1}{t + 1} - \frac{1}{t - 1} \right) dt = \\ &= \frac{1}{4} \left(-\frac{1}{t - 1} - \frac{1}{t + 1} + \ln \underbrace{|t + 1|}_{t + 1} - \ln \underbrace{|t - 1|}_{1 - t} \right) + c = \\ &= \frac{1}{4} \left(\frac{2t}{1 - t^2} + \ln \frac{t + 1}{1 - t} \right) + c = \frac{1}{4} \left(\frac{2 \sin x}{\cos^2 x} + \ln \frac{1 + \sin x}{1 - \sin x} \right) + c \end{aligned}$$

na $(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$; $k \in \mathbb{Z}$

Příklad 7.21: Najděte primitivní funkce k funkci $f(x) = \frac{1}{\cos^4 x}$.

Řešení: Musí platit $\cos x \neq 0$, tj. $x \in (-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi) = I_k$, $k \in \mathbb{Z}$.

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\cos^4 x} dx &= \left| \begin{array}{l} \operatorname{tg} x = t \\ x = \operatorname{arctg} t + k\pi \quad - \text{prostá} \\ dx = \frac{1}{1+t^2} dt \end{array} \right| = \int \frac{1}{\left(\frac{1}{1+t^2}\right)^2} \cdot \frac{1}{t^2+1} dt = \\ &= \int (1+t^2) dt = t + \frac{t^3}{3} + c = \operatorname{tg} x + \frac{\operatorname{tg}^3 x}{3} + c \quad \text{na } (-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi); k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Nebo jinak

$$\int \frac{1}{\cos^4 x} dx = \left| \begin{array}{l} \operatorname{tg} x = t \\ \frac{1}{\cos x} dx = dt \\ \cos^2 x = \frac{1}{1+t^2} \end{array} \right| = \int \frac{1}{\cos^2 x} \cdot \frac{1}{\cos^2 x} dx = \int (1+t^2) dt = \dots$$

Příklad 7.22: Najděte primitivní funkce k funkci $f(x) = \frac{\cos x}{\sin x - \cos x}$.

Řešení: Máme $x \in (-\frac{3\pi}{4} + k\pi, \frac{\pi}{4} + k\pi)$; $k \in \mathbb{Z}$. Protože však použijeme substituci $t = \operatorname{tg} x$, musíme nejdříve vyloučit $x = -\frac{\pi}{2} + k\pi$, tedy budeme mít $x \in (-\frac{3\pi}{4} + k\pi, -\frac{\pi}{2} + k\pi) = I_k$ nebo $x \in (-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{4} + k\pi) = J_k$:

$$\begin{aligned} \int \frac{\cos x}{\sin x - \cos x} dx &= \int \frac{1}{\operatorname{tg} x - 1} dx = \\ &= \left| \begin{array}{l} x \in I_k, t \in (1, \infty) \quad \text{nebo} \quad x \in J_k, t \in (-\infty, 1) \\ \operatorname{tg} x = t \\ x = \begin{cases} \operatorname{arctg} t + k\pi - \pi & \text{pro } x \in I_k \\ \operatorname{arctg} t + k\pi & \text{pro } x \in J_k \end{cases} \quad - \text{prostá} \\ dx = \frac{1}{t^2+1} dt \end{array} \right| = \int \frac{1}{t-1} \cdot \frac{1}{t^2+1} dt = \\ &= \int \left(\frac{1}{2} \frac{1}{t-1} - \frac{1}{2} \frac{t+1}{t^2+1} \right) dt = \int \left(\frac{1}{2} \frac{1}{t-1} - \frac{1}{4} \frac{2t}{t^2+1} - \frac{1}{2} \frac{1}{t^2+1} \right) dt = \\ &= \frac{1}{2} \ln|t-1| - \frac{1}{4} \ln(t^2+1) - \frac{1}{2} \operatorname{arctg} t + c = \frac{1}{2} \ln|\operatorname{tg} x - 1| - \frac{1}{4} \ln(\operatorname{tg}^2 x + 1) - \frac{1}{2} x + \frac{k\pi}{2} + c =^1) \\ &= \frac{1}{4} \ln \frac{(\operatorname{tg} x - 1)^2}{\operatorname{tg}^2 x + 1} - \frac{1}{2} x + c =^2) \frac{1}{4} \ln(1 - \sin 2x) - \frac{1}{2} x + c \end{aligned}$$

V předposlední rovnosti ¹⁾ jsme využili toho, že $\frac{k\pi}{2} + c$ může být jakákoliv reálná konstanta a zápis s „ $+c$ “ je jen symbolický. V poslední rovnosti ²⁾ jsme použili přepis

$$\frac{(\operatorname{tg} x - 1)^2}{\operatorname{tg}^2 x + 1} = \frac{(\sin x - \cos x)^2}{\sin^2 x + \cos^2 x} = (\sin x - \cos x)^2 = \sin^2 x - 2 \sin x \cos x + \cos^2 x = 1 - \sin 2x.$$

Funkce $F(x) = \frac{1}{4} \ln(1 - \sin 2x) - \frac{1}{2} x$ je spojitá na $(-\frac{3\pi}{4} + k\pi, \frac{\pi}{4} + k\pi)$ a na I_k a J_k je její derivací funkce f , která je spojitá v $-\frac{\pi}{2} + k\pi$. Tedy z věty 4.5 je $F'(-\frac{\pi}{2} + k\pi) = f(-\frac{\pi}{2} + k\pi)$ a F je primitivní funkcí k f na celém intervalu $(-\frac{3\pi}{4} + k\pi, \frac{\pi}{4} + k\pi)$.

Příklad 7.23: Najděte primitivní funkce k funkci $f(x) = \frac{\sqrt{2}}{\cos x + 3}$.

Řešení: Na intervalech $((2k-1)\pi, (2k+1)\pi) = I_k$ máme

$$\begin{aligned} \int \frac{\sqrt{2}}{\cos x + 3} dx &= \left| \begin{array}{l} \operatorname{tg} \frac{x}{2} = t \quad - \text{prostá na } I_k \\ x = 2 \operatorname{arctg} t + 2k\pi \\ dx = \frac{2}{1+t^2} dt \end{array} \right| = \int \frac{\sqrt{2}}{\frac{1-t^2}{1+t^2} + 3} \cdot \frac{2}{1+t^2} dt = \\ &= \sqrt{2} \int \frac{1}{2+t^2} dt = \frac{\sqrt{2}}{2} \int \frac{1}{1+\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)^2} dt = \operatorname{arctg} \frac{t}{\sqrt{2}} + c = \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg} \frac{x}{2}}{\sqrt{2}} + c = G(x) + c. \end{aligned}$$

Přestože byla integrovaná funkce definovaná a spojitá na \mathbb{R} , je díky použité substituci funkce G primitivní funkcí k funkci f jen na intervalech $((2k-1)\pi, (2k+1)\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$. Primitivní funkci k f na celém \mathbb{R} nemůžeme dostat dodefinováním

funkce G v lichých násobcích π , protože v nich G nemá limity. Máme totiž

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow (2k+1)\pi^-} G(x) &= +\frac{\pi}{2} \\ (\lim_{x \rightarrow (2k-1)\pi^+} G(x) =) \lim_{x \rightarrow (2k+1)\pi^+} G(x) &= -\frac{\pi}{2} \end{aligned} \right\} \text{skok : } -\pi.$$

Můžeme si ale pomoci tím, že na různých intervalech budeme ke G přičítat různé konstanty. Tím dostaneme funkci, která bude opět na každém z výše uvedených intervalů primitivní funkcí k funkci f a která navíc při vhodné volbě konstant bude mít v bodech $(2k+1)\pi$ limity. Těmito limitami ji pak dodefinujeme a dostaneme tak primitivní funkci k f na celém \mathbb{R} . (Primitivní funkci na \mathbb{R} tedy dostaneme „slepením“ vhodných primitivních funkcí na jednotlivých podintervalech.)

Primitivní funkcí k funkci f na \mathbb{R} je tedy například funkce

$$F(x) = \begin{cases} \arctg \frac{\operatorname{tg} \frac{x}{2}}{\sqrt{2}} + k\pi, & x \in ((2k-1)\pi, (2k+1)\pi), k \in \mathbb{Z} \\ -\frac{\pi}{2} + k\pi, & x = (2k-1)\pi. \end{cases}$$

e) Typ

$$\int \sin^m x \cdot \cos^n x \, dx$$

m - liché nebo n - liché ... použijeme substituce uvedené v a) a b)

m - sudé a n - sudé ... přejdeme k dvojnásobnému argumentu:

$$\begin{aligned} \cos^2 x &= \frac{1}{2}(1 + \cos 2x) \\ \sin^2 x &= \frac{1}{2}(1 - \cos 2x) \end{aligned}$$

(Tyto vztahy lze získat např. vyjádřením $\cos^2 x$ a $\sin^2 x$ z následujících rovností:

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = \begin{cases} \cos^2 x - (1 - \cos^2 x) = 2\cos^2 x - 1, \\ (1 - \sin^2 x) - \sin^2 x = 1 - 2\sin^2 x. \end{cases}$$

Příklad 7.24: Najděte primitivní funkce k funkci $f(x) = \sin^4 x$.

Řešení:

$$\begin{aligned} \int \sin^4 x \, dx &= \int \left(\frac{1}{2}(1 - \cos 2x) \right)^2 dx = \frac{1}{4} \int (1 - 2\cos 2x + \cos^2 2x) dx = \\ &= \frac{1}{4} \int \left(1 - 2\cos 2x + \frac{1}{2}(1 + \cos 4x) \right) dx = \frac{1}{4} \left(x - \sin 2x + \frac{1}{2}x + \frac{1}{8}\sin 4x \right) + c = \\ &= \frac{3x}{8} - \frac{\sin 2x}{4} + \frac{\sin 4x}{32} + c \quad \text{na } \mathbb{R} \end{aligned}$$

D) Substituce pro integrály typu

$$\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) dx, \quad n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}, \quad ad \neq bc$$

Použijeme substituci

$$y = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}.$$

Příklad 7.25: Najděte primitivní funkce k funkci $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-1} + \sqrt[3]{x-1}}$.

Řešení: Zřejmě $D(f) = (1, \infty)$.

$$\int \frac{1}{\sqrt{x-1} + \sqrt[3]{x-1}} dx = \left| \begin{array}{l} x \in (1, \infty); \quad t \in (0, \infty) \\ \sqrt[6]{x-1} = t \\ x = t^6 + 1 \quad - \text{prostá na } (0, \infty) \\ dx = 6t^5 dt \end{array} \right| =$$

$$\begin{aligned}
&= \int \frac{6t^5}{t^3 + t^2} dt = 6 \int \frac{t^3}{t+1} dt = 6 \int (t^2 - t + 1 - \frac{1}{t+1}) dt = 2t^3 - 3t^2 + 6t - 6 \ln|t+1| + c = \\
&= 2\sqrt{x-1} - 3\sqrt[3]{x-1} + 6\sqrt[6]{x-1} - 6 \ln(\sqrt[6]{x-1} + 1) + c \quad \text{na } (1, \infty)
\end{aligned}$$

Příklad 7.26: Najděte primitivní funkce k funkci $f(x) = \sqrt{\frac{x-1}{2-x}}$.

Řešení: Musí platit $(x-1)/(2-x) > 0$, tj. $x \in (1, 2)$.

$$\begin{aligned}
\int \sqrt{\frac{x-1}{2-x}} dx &= \left| \begin{array}{l} \sqrt{\frac{x-1}{2-x}} = t \in (0, \infty) \\ x = \frac{2t^2+1}{t^2+1} = 2 - \frac{1}{t^2+1} \text{ - prostá na } (0, \infty) \\ dx = \frac{2t}{(t^2+1)^2} dt \end{array} \right| = \\
&= \int t \cdot \frac{2t}{(t^2+1)^2} dt \stackrel{1)}{=} \arctg t - \frac{t}{t^2+1} + c = \arctg \sqrt{\frac{x-1}{2-x}} - \sqrt{(x-1)(2-x)} + c \quad \text{na } (1, 2)
\end{aligned}$$

¹⁾ použili jsme výpočet z Příkladu 7.8

E) Substituce pro integrály typu

$$\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx \quad a \neq 0, b^2 \neq 4ac$$

(jen stručně; jiné možné substituce viz skriptu)

- doplněním na úplný čtverec a vhodnou lineární substitucí převedeme $\sqrt{ax^2 + bx + c}$ na tvar

$$d \cdot \sqrt{\pm y^2 \pm 1} \quad (\text{případ } \sqrt{-y^2 - 1} \text{ je nezájímavý - } y \in \emptyset, \text{ tj. } x \in \emptyset)$$

např.:

$$\begin{aligned}
\sqrt{-x^2 + 4x + 5} &= \sqrt{-(x^2 - 4x - 5)} = \sqrt{-((x-2)^2 - 9)} = \\
&= \sqrt{9 - (x-2)^2} = 3 \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{x-2}{3}\right)^2} = d \cdot \sqrt{1 - y^2}, \\
d &= 3, \quad y = \frac{x-2}{3}
\end{aligned}$$

následné substituce:

a) pro $d \cdot \sqrt{y^2 + 1}$

(odpovídá případu $a > 0, b^2 - 4ac < 0$)

$$y = \sinh t \quad y \in \mathbb{R}$$

$$\sqrt{y^2 + 1} = \cosh t \quad t \in \mathbb{R}$$

b) pro $d \cdot \sqrt{y^2 - 1}$

(odpovídá případu $a > 0, b^2 - 4ac > 0$)

$$\begin{cases} y = \cosh t & y > 1 \\ y = -\cosh t & y < -1 \end{cases}$$

$$\sqrt{y^2 - 1} = \sinh t \quad t > 0$$

c) pro $d \cdot \sqrt{1 - y^2}$

(odpovídá případu $a < 0, b^2 - 4ac > 0$)

$$\begin{array}{lll} y = \cos t & y \in (-1, 1) & \text{nebo} & y = \sin t & y \in (-1, 1) \\ \sqrt{1 - y^2} = \sin t & t \in (0, \pi) & & \sqrt{1 - y^2} = \cos t & t \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \end{array}$$

a)+b) dostaneme $R(\sinh t, \cosh t)$ a dále převedeme např. na $R(e^{at})$

c) dostaneme $R(\sin t, \cos t)$

Poznámka: Při výběru z výše uvedených následných substitucí pomůže srovnání možných hodnot y s oborem hodnot funkcí $\sinh t, \pm \cosh t, \cos t, \sin t$.

Příklad 7.27: Najděte primitivní funkce k funkci $f(x) = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

Řešení: viz Příklad 7.10 u věty o substituci (je to typ c).

Příklad 7.28: Najděte primitivní funkce k funkci $f(x) = \frac{\sqrt{x^2+4}}{x}$.

Řešení: Pro $x \in (-\infty, 0)$ a pro $x \in (0, \infty)$ máme

$$\begin{aligned}
 \int \frac{\sqrt{x^2+4}}{x} dx &= \int \frac{\sqrt{\left(\frac{x}{2}\right)^2+1}}{\frac{x}{2}} dx = \left| \begin{array}{l} \frac{x}{2} = y \\ \frac{dx}{2} = dy \end{array} \right| = \\
 &= 2 \int \frac{\sqrt{\left(\frac{x}{2}\right)^2+1}}{\frac{x}{2}} \cdot \frac{1}{2} dx = 2 \int \frac{\sqrt{y^2+1}}{y} dy = \\
 &= \left| \begin{array}{l} y \in (0, \infty), t \in (0, \infty) \quad \text{nebo} \quad y \in (-\infty, 0), t \in (-\infty, 0) \\ y = \sinh t - \text{prostá} \\ dy = \cosh t dt \\ t = \operatorname{argsinh} y = \ln(y + \sqrt{y^2+1}) \end{array} \right| = \int \frac{2 \cosh^2 t}{\sinh t} dt = \\
 &= \int \frac{(e^t + e^{-t})^2}{e^t - e^{-t}} dt = \int \frac{(e^{2t} + 1)^2}{(e^{2t} - 1) e^t} dt = \left| \begin{array}{l} e^t = u \\ e^t dt = du \end{array} \right| = \\
 &= \int \frac{(u^2 + 1)^2}{(u^2 - 1) u^2} du = \int \left(1 + \frac{3u^2 + 1}{(u-1)(u+1)u^2} \right) du = \\
 &= \int \left(1 - \frac{1}{u^2} + \frac{2}{u-1} - \frac{2}{u+1} \right) du = u + \frac{1}{u} + 2 \ln |u-1| - 2 \ln |u+1| + c = \\
 &= \underbrace{\frac{e^t}{2 \cosh t} + \frac{e^{-t}}{2 \sqrt{y^2+1}}}_{2 \cosh t = 2 \sqrt{y^2+1}} + 2 \ln \left| \frac{e^t - 1}{e^t + 1} \right| + c = 2 \sqrt{\left(\frac{x}{2}\right)^2 + 1} + 2 \ln \left| \frac{\frac{x}{2} + \sqrt{\left(\frac{x}{2}\right)^2 + 1} - 1}{\frac{x}{2} + \sqrt{\left(\frac{x}{2}\right)^2 + 1} + 1} \right| + c = \\
 &= \sqrt{x^2+4} + 2 \ln \left| \frac{\sqrt{x^2+4} - 2}{x} \right| + c \quad \text{na } (-\infty, 0) \text{ a na } (0, \infty)
 \end{aligned}$$

(v poslední úpravě jsme zlomek v argumentu logaritmu rozšířili nejdrůve dvěma a pak výrazem $(x + 2 - \sqrt{x^2+4})$).