

# KAPITOLA 1: Reálná čísla

(Význam logických a množinových symbolů je připomenut při jejich prvním použití v úvodní kapitole.)

## 1.1. Číselné množiny

Přirozená čísla ...  $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$

nula ...  $0, \quad \mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \dots\} = \mathbb{N} \cup \{0\}$

Celá čísla ...  $\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, 3, \dots\}$

Racionální čísla ...  $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \mid p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0 \right\}$

**Věta 1.1:** Číslo  $\sqrt{2}$  není racionální.

**Důkaz:** Provedeme **sporem** (tj. budeme předpokládat, že tvrzení neplatí, a ukážeme, že to vede ke sporu; nebude proto možné, aby tvrzení neplatilo).

Nechť tedy tvrzení neplatí, tj.  $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ , kde  $p, q$  jsou **nesoudělná** celá čísla (v takovémto tvaru lze zřejmě zapsat každé racionální číslo). Pak ovšem  $2 = (\sqrt{2})^2 = \left(\frac{p}{q}\right)^2 = \frac{p^2}{q^2}$ , tj.  $2q^2 = p^2$ . Tedy  $p^2$  je sudé číslo, což ale znamená, že i  $p$  je sudé číslo. Kdyby totiž  $p$  bylo liché, pak by pro vhodné celé číslo  $k$  platilo  $p = 2k + 1$ . To by ale znamenalo, že  $p^2$  je liché číslo, protože  $(2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$ . Jenže my víme, že  $p^2$  je sudé. Proto  $p$  nemůže být liché a musí být sudé. Protože  $p$  je sudé, existuje celé číslo  $l$  takové, že  $p = 2l$ . Z rovnosti  $2q^2 = p^2$  pak ale dostáváme, že  $2q^2 = (2l)^2 = 4l^2$ , tj.  $q^2 = 2l^2$ . Jenže to znamená, že  $q^2$  je sudé, a tedy i  $q$  je sudé. A to je ve sporu s předpokladem, že  $p$  a  $q$  jsou čísla nesoudělná. Proto číslo  $\sqrt{2}$  nelze zapsat jako podíl dvou nesoudělných celých čísel, takže to není číslo racionální.

**Poznámka:** Desetinný rozvoj každého racionálního čísla je periodický a každé číslo s periodickým desetinným rozvojem je racionální.

**Příklad 1.1: Vyjádřete číslo  $b = 0,\bar{9}$  jako podíl dvou celých čísel.**

**Řešení:** Protože je délka periody 1, vynásobíme číslo  $a$  číslem  $10^1$  a odečteme  $b$ :

$$\begin{array}{rcl} 10^1 b & = & 10b = 9,\bar{9} \\ & -b & = -0,\bar{9} \\ \hline 9b & = & 9 \end{array}$$

Tedy  $0,\bar{9} = \frac{9}{9} = 1$  !

Podobným způsobem lze najít vyjádření ve tvaru podílu dvou celých čísel i pro ostatní čísla s periodickým desetinným rozvojem, jen číslo násobíme číslem  $10^k$ , kde  $k$  je délka jeho periody.

Reálná čísla ...  $\mathbb{R}$  – lze je vyjádřit desetinným rozvojem (konečným nebo nekonečným);  
periodu 9 neuvažujeme (kvůli jednoznačnosti vyjádření - viz Příklad 1.1 )

Iracionalní čísla ...  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

## 1.2. Reálná čísla

Intervaly  $(a, b \in \mathbb{R})$

- $\langle a, b \rangle = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$  ... **uzavřený** ( také :  $[a, b]$  )
  - $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$  ... **otevřený** ( někdy také :  $]a, b[$  )
  - $\langle a, b \rangle = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$
  - $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$
- } ... **polouzavřené**

Absolutní hodnota čísla  $a \in \mathbb{R}$

$$\bullet \quad |a| = a \quad \text{pro } a \geq 0 \quad \bullet \quad |a| = -a \quad \text{pro } a \leq 0$$

**Platí** pro všechna  $a, b, c \in \mathbb{R}$ :

$$\text{a)} \quad |a| = |-a|, \quad |a \cdot b| = |a| \cdot |b|, \quad \left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|} \quad \text{pro } b \neq 0$$

$$\text{!!! b)} \quad |a+b| \leq |a| + |b| \quad \dots \quad \text{trojúhelníková nerovnost}$$

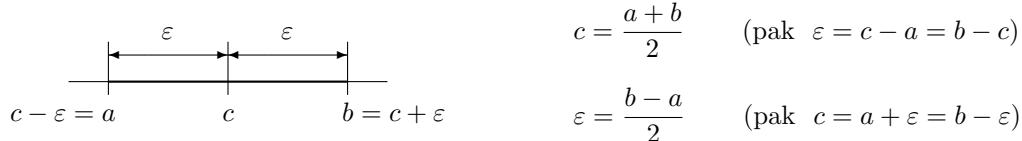
$$\text{c)} \quad |c-a| \geq |c| - |a| \quad \text{(v b) stačí vzít } b = c - a$$

**Platí pro**  $c, x, \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$ :

- $|x - c| = \varepsilon \Leftrightarrow x \in \{c - \varepsilon, c + \varepsilon\}$  (tj. vzdáenosť  $x$  od  $c$  je rovna  $\varepsilon$ )
- $|x - c| < \varepsilon \Leftrightarrow c - \varepsilon < x < c + \varepsilon$  (tj.  $x \in (c - \varepsilon, c + \varepsilon)$ )
- $|x - c| \leq \varepsilon \Leftrightarrow c - \varepsilon \leq x \leq c + \varepsilon$  (tj.  $x \in [c - \varepsilon, c + \varepsilon]$ )

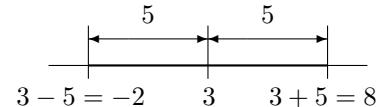
$c$  – stred intervalu

$\varepsilon$  – polomér intervalu

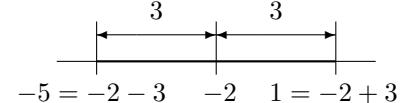


např.:

- $|x - 3| < 5 \dots x \in (3 - 5, 3 + 5) = (-2, 8)$



- $x \in (-5, 1) \dots c = \frac{-5+1}{2} = -2, \varepsilon = \frac{1-(-5)}{2} = 3$   
 $\dots |x - (-2)| \leq 3, \text{ tj. } |x + 2| \leq 3$



**Definice :**

**Okolím bodu**  $c \in \mathbb{R}$  o poloměru  $\varepsilon > 0$  nazýváme množinu

$$U_\varepsilon(c) = \{x \in \mathbb{R} \mid |x - c| < \varepsilon\} \quad [= (c - \varepsilon, c + \varepsilon)].$$

**Prstencovým okolím bodu**  $c \in \mathbb{R}$  o poloměru  $\varepsilon > 0$  nazýváme množinu

$$P_\varepsilon(c) = U_\varepsilon(c) \setminus \{c\} \quad [= (c - \varepsilon, c) \cup (c, c + \varepsilon)].$$

**Pravým (levým) okolím bodu**  $c \in \mathbb{R}$  o poloměru  $\varepsilon > 0$  nazýváme množinu

$$U_\varepsilon^+(c) = (c, c + \varepsilon) \quad (U_\varepsilon^-(c) = (c - \varepsilon, c))$$

**Pravým (levým) prstencovým okolím bodu**  $c \in \mathbb{R}$  o poloměru  $\varepsilon > 0$  nazýváme množinu

$$P_\varepsilon^+(c) = (c, c + \varepsilon) \quad (P_\varepsilon^-(c) = (c - \varepsilon, c))$$

**Poznámka:** Dolní index, udávající polomér okolí, často vynecháváme.

### 1.3. Supremum a infimum

**Definice :**

Řekneme, že  $b \in M$  je **největším prvkem** (maximem) množiny  $M \subset \mathbb{R}$  (píšeme  $b = \max M$ ), jestliže v  $M$  neexistuje prvek větší než  $b$ .

Řekneme, že  $a \in M$  je **nejmenším prvkem** (minimem) množiny  $M \subset \mathbb{R}$  (píšeme  $a = \min M$ ), jestliže v  $M$  neexistuje prvek menší než  $a$ .

**Příklad 1.2:** a)  $\min\{-2, 3, 8, 25, 57\} = -2, \max\{-2, 3, 8, 25, 57\} = 57$ ;

b)  $\min \mathbb{N} = 1, \max \mathbb{N}$  neexistuje;

c)  $\min\{1 - \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\} = 0 \quad (= 1 - \frac{1}{1}), \max\{1 - \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$  neexistuje;

d)  $\min\{x \mid 3 < x \leq 6\}$  neexistuje,  $\max\{x \mid 3 < x \leq 6\} = 6$ .

**Příklad 1.3:** Celá část čísla  $x \in \mathbb{R}$ :  $[x] = \max\{k \in \mathbb{Z} \mid k \leq x\} \quad (\in \mathbb{Z})$ ;

**Definice :**

Číslo  $K \in \mathbb{R}$  nazýváme **horní mezí** množiny  $M \subset \mathbb{R}$ , jestliže pro všechna  $x \in M$  platí  $x \leq K$ . Pokud existuje nějaká horní mez množiny  $M \subset \mathbb{R}$ , říkáme, že množina  $M$  je **shora omezená**.

Číslo  $L \in \mathbb{R}$  nazýváme **dolní mezí** množiny  $M \subset \mathbb{R}$ , jestliže pro všechna  $x \in M$  platí  $x \geq L$ . Pokud existuje nějaká dolní mez množiny  $M \subset \mathbb{R}$ , říkáme, že množina  $M$  je **zdola omezená**.

Řekneme, že množina  $M \subset \mathbb{R}$  je **omezená**, jestliže je omezená shora i zdola.

**Poznámky:** 1) Množina  $M \subset \mathbb{R}$  je omezená, právě když existuje  $S \in \mathbb{R}$  takové, že  $|x| \leq S$  pro všechna  $x \in M$ . Jestliže totiž takové číslo  $S$  existuje, pak pro všechna  $x \in M$  platí  $-S \leq x \leq S$ . Naopak, pokud pro všechna  $x \in M$  je  $L \leq x \leq K$ , potom pro ně také platí  $|x| \leq \max\{|K|, |L|\}$ .

2) Má-li množina  $M \subset \mathbb{R}$  nějakou horní mez, pak jich má nekonečně mnoho. Je-li totiž  $K$  horní mezí množiny  $M$ , pak je horní mezí také každé číslo větší než  $K$ . Analogicky pro dolní meze: Je-li  $L$  dolní mezí množiny  $M$ , pak je dolní mezí také každé číslo menší než  $L$ .

- Příklad 1.4:** a)  $\{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x\}$  ... množina je omezená jen zdola (např.  $L = 0$  nebo  $L = -1, L = -158, 6$ );  
 b)  $\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -3\}$  ... množina je omezená jen shora (např.  $K = -3$  nebo  $K = 0, K = \sqrt{3}$ );  
 c)  $\langle -5, 1 \rangle$  ... množina je omezená shora i zdola, tj. je omezená (např.  $S = 5$  nebo  $S = 5,01, S = 3596$ );  
 d)  $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 > 10\}$  ... množina není omezená ani shora ani zdola (jde o množinu  $(-\infty, -\sqrt{10}) \cup (\sqrt{10}, \infty)$ ).

**Definice :**

Řekneme, že číslo  $b \in \mathbb{R}$  je **supremem** neprázdné množiny  $M \subset \mathbb{R}$  (píšeme  $b = \sup M$ ), jestliže je nejmenší hornímezí množiny  $M$ .

Řekneme, že číslo  $a \in \mathbb{R}$  je **infimumem** neprázdné množiny  $M \subset \mathbb{R}$  (píšeme  $a = \inf M$ ), jestliže je největší dolnímezí množiny  $M$ .

**Poznámka:** Pro supremum  $b$  množiny  $M$  tedy platí:

- Každý prvek množiny  $M$  je menší nebo roven  $b$  (protože  $b$  je horní mez).
- Vezmeme-li jakékoliv číslo  $c$  menší než  $b$ , pak už to není horní mez ( $b$  je nejmenší horní mez). Tedy v  $M$  najdeme prvek, který je větší než  $c$ .

Analogicky pro infimum  $a$  množiny  $M$  platí:

- Každý prvek množiny  $M$  je větší nebo roven  $a$  (protože  $a$  je dolní mez).
- Vezmeme-li jakékoliv číslo  $c$  větší než  $a$ , pak už to není dolní mez ( $a$  je největší dolní mez). Tedy v  $M$  najdeme prvek, který je menší než  $c$ .

**Platí:** Má-li množina  $M$  největší (nejmenší) prvek, pak je tento prvek i supremem (infimumem) množiny  $M$ .

**Věta 1.2 (o supremu a infimu):** Nechť  $M \subset \mathbb{R}$  je neprázdná množina. Je-li  $M$  shora omezená, pak existuje  $\sup M \in \mathbb{R}$ . Je-li  $M$  zdola omezená, pak existuje  $\inf M \in \mathbb{R}$ .

## 1.4. Rozšíření množiny reálných čísel

**nevlastní čísla** (hodnoty) ...  $(+\infty, -\infty$

$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$  ... **rozšířená reálná osa**

**Uspořádání** na  $\overline{\mathbb{R}}$  – stejně jako na  $\mathbb{R}$ , jen navíc přidáváme

- $-\infty < +\infty$ ,
- $-\infty < a, a < +\infty$  pro každé  $a \in \mathbb{R}$

**Neomezené intervaly** ( $a \in \mathbb{R}$ )

- $(-\infty, a) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < a\}$
- $(-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq a\}$
- $(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\}$
- $[a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x\}$

Okolí bodů  $+\infty, -\infty$  ( $K, L \in \mathbb{R}$ )

- $U_K(+\infty) = U_K^-(+\infty) = P_K(+\infty) = P_K^-(+\infty) = (K, +\infty)$ ,
- $U_L(-\infty) = U_L^+(-\infty) = P_L(-\infty) = P_L^+(-\infty) = (-\infty, L)$

**Poznámka:** Všimněte si, že všechny intervaly i okolí, které uvažujeme, obsahují pouze reálná (tj. konečná) čísla.

Aritmetické operace s nevlastními hodnotami ( $a \in \mathbb{R}$ )

**Definujeme:**

- $a + \infty = \infty (= a - (-\infty))$        $a - \infty = -\infty (= a + (-\infty))$
- $\infty + \infty = \infty (= \infty - (-\infty))$        $-\infty - \infty = -\infty (= -\infty + (-\infty))$
- $a \cdot \infty = \begin{cases} \infty & \text{pro } a > 0 \\ -\infty & \text{pro } a < 0 \end{cases}$        $a \cdot (-\infty) = \begin{cases} -\infty & \text{pro } a > 0 \\ \infty & \text{pro } a < 0 \end{cases}$
- $\infty \cdot \infty = (-\infty) \cdot (-\infty) = \infty$        $\infty \cdot (-\infty) = -\infty$
- $\frac{\pm\infty}{a} = (\pm\infty) \cdot a^{-1}$  pro  $a \neq 0$        $\frac{a}{\pm\infty} = 0$

**Nedefinujeme:**

- $\infty - \infty, \infty + (-\infty)$
- $(\pm\infty) \cdot 0$
- $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}, \frac{\pm\infty}{0}, \frac{a}{0}$

**Definice:**

Nechť  $M \subset \mathbb{R}$  je neprázdná množina. Je-li  $M$  shora neomezená, pak pokládáme  $\sup M = +\infty$ , je-li  $M$  zdola neomezená, pokládáme  $\inf M = -\infty$ .

**Poznámka:** Nyní už má suprénum a infimum každá neprázdná podmnožina reálných čísel. Kdybychom chtěli definovat supremum i pro prázdnou množinu tak, aby mělo analogické vlastnosti jako v případě množin neprázdných (viz poznámku za definicí suprema a infima omezené množiny), museli bychom položit  $\sup \emptyset = -\infty$ . Prázdná množina totiž neobsahuje žádný prvek, takže neobsahuje ani žádný prvek, který by byl větší než  $-\infty$ . Tedy  $-\infty$  je horní mezí prázdné množiny. A vzhledem k uspořádání na  $\mathbb{R}$  je to horní mez ze všech nejmenší. Infimum prázdné množiny by analogicky muselo být definováno rovností  $\inf \emptyset = +\infty$ . Prázdná množina by pak byla jedinou podmnožinou reálných čísel, která by měla větší infimum než supremum.

**Příklad 1.5:** a) pro  $M = \{-2, 3, 8, 25, 57\}$  platí  $\inf M = \min M = -2$ ,  $\sup M = \max M = 57$ ;

- b) pro  $M = \mathbb{N}$  máme  $\inf M = \min M = 1$ ,  $\sup M = +\infty$ ;
- c) pro  $M = \{1 - \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$  je  $\inf M = \min M = 0$ ,  $\sup M = 1$ ;
- d) pro  $M = \{x \mid 3 < x \leq 6\}$  platí  $\inf M = 3$ ,  $\sup M = \max M = 6$ .

(Srovnejte s Příkladem 1.2)

## 1.5. Dodatky

**Věta 1.3:** Jsou-li  $a, b$  reálná čísla,  $a < b$ , pak v intervalu  $(a, b)$  leží alespoň jedno racionální číslo a alespoň jedno číslo iracionální. Speciálně mezi každými dvěma racionálními čísly leží alespoň jedno číslo iracionální a mezi každými dvěma iracionálními čísly leží alespoň jedno číslo racionální.

**Důkaz:** Není složitý, ale protože bychom museli probírat hodně různých případů, nebudeme ho tu provádět.

**Důsledek 1.4:** Jsou-li  $a, b$  reálná čísla,  $a < b$ , pak v intervalu  $(a, b)$  leží nekonečně mnoho racionálních čísel a také nekonečně mnoho čísel iracionálních.

**Důkaz:** Větu 1.3 aplikujeme postupně na intervaly  $(a, c_n)$ , kde  $c_1$  je (i)racionální číslo ležící v intervalu  $(a, b)$  a pro  $n \geq 1$  je  $c_{n+1}$  (i)racionální číslo ležící v intervalu  $(a, c_n)$ . Protože pro každé  $n$  platí  $c_{n+1} \in (a, c_n) \subset (a, b)$ , leží všechna čísla  $c_n$  v intervalu  $(a, b)$ , jak jsme požadovali.  $\square$

### Věta 1.5 (princip vnořených intervalů):

- a) Nechť  $I_n = \langle a_n, b_n \rangle$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , jsou takové uzavřené intervaly, že pro všechna  $n \in \mathbb{N}$  platí  $I_{n+1} \subset I_n$ . Pak  $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n \neq \emptyset$  (tj. všechny intervaly  $I_n$  mají společný alespoň jeden bod).
- b) Jestliže navíc ke každému  $\varepsilon > 0$  existuje interval  $I_k$  takový, že  $b_k - a_k < \varepsilon$  (a tedy i  $b_m - a_m < \varepsilon$  pro všechna  $m > k$ ), pak  $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$  obsahuje jediný bod.

**Poznámka:** Ve Větě 1.5 je podstatné, že intervaly  $I_n$  jsou uzavřené. Např. pro intervaly  $I_n = (0, \frac{1}{n})$  platí  $I_{n+1} \subset I_n$ , žádný společný bod ale tyto intervaly nemají.

**Důkaz Věty 1.5:** a) Každé  $a_n$  je dolnímezí množiny  $B = \{b_1, b_2, \dots\}$ , tedy pro každé  $n$  je  $a_n \leq \inf B \leq b_n$ . To znamená, že  $\inf B \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n$ .

b) Dokážeme sporem: Předpokládejme, že existují čísla  $x < y$  v  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n$ . Pak pro každé  $n \in \mathbb{N}$  musí platit  $a_n < x < y < b_n$ , a tedy také  $b_n - a_n > y - x > 0$ . To je ovšem ve sporu s předpokladem věty, že ke každému  $\varepsilon > 0$  existuje interval  $I_k$  takový, že  $b_k - a_k < \varepsilon$ . Pro  $\varepsilon < y - x$  takové  $I_k$  nenajdeme.  $\square$

### Vzájemná poloha bodu a množiny

- Bod  $a \in \mathbb{R}$  je **vnitřním bodem** množiny  $M \subset \mathbb{R}$ , jestliže existuje jeho okolí, které celé leží v množině  $M$ . Zřejmě pak  $a \in M$ . Množinu všech vnitřních bodů množiny  $M$  nazýváme **vnitřek** množiny  $M$  a značíme  $M^\circ$ .
- Bod  $a \in \mathbb{R}$  je **hraničním bodem** množiny  $M \subset \mathbb{R}$ , jestliže každé jeho okolí má neprázdný průnik jak s množinou  $M$ , tak i s jejím doplňkem  $\mathbb{R} \setminus M$ , tj. každé okolí bodu  $a$  obsahuje alespoň jeden bod, který v  $M$  leží, a alespoň jeden bod, který v  $M$  neleží. Samotný bod  $a$  nemusí v  $M$  ležet. Množinu všech hraničních bodů množiny  $M$  nazýváme **hranice** množiny  $M$  (a značíme  $\partial M$ ).
- Bod  $a \in \mathbb{R}$  je bodem **uzávěru** množiny  $M \subset \mathbb{R}$ , jestliže v každém jeho okolí leží alespoň jeden bod množiny  $M$ . Uzávěr množiny  $M$  značíme  $\overline{M}$ . Zřejmě platí  $\overline{M} = M^\circ \cup \partial M$ .
- Bod  $a \in \mathbb{R}$  je **hromadným bodem** množiny  $M \subset \mathbb{R}$ , jestliže v každém jeho okolí leží nekonečně mnoho bodů množiny  $M$ . To nastává právě tehdy, když v každém prstencovém okolí bodu  $a$  leží alespoň jeden bod množiny  $M$ . Samotný bod  $a$  nemusí v  $M$  ležet.

Někdy se hodí povolit, aby  $a$  bylo  $+\infty$  nebo  $-\infty$ , tj.  $a \in \overline{\mathbb{R}}$ . To uděláme při definici limity posloupnosti.

- Bod  $a \in \mathbb{R}$  je **izolovaným bodem** množiny  $M \subset \mathbb{R}$ , jestliže  $a \in M$  a existuje jeho prstencové okolí, v kterém neleží žádný bod množiny  $M$ .

**Příklady:** 1) Je-li  $I$  omezený interval (libovolného typu) s krajními body  $a < b, c > b$  a  $M = I \cup \{c\}$ , pak vnitřními body množiny  $M$  jsou právě všechny body otevřeného intervalu  $(a, b)$  a hraničními body jsou body  $a, b$  a  $c$  (tj.  $M^\circ = (a, b)$ ,  $\overline{M} = \langle a, b \rangle \cup \{c\}$ ). Hromadnými body množiny  $M$  jsou všechny body uzavřeného intervalu  $\langle a, b \rangle$ . Množina  $M$  má jediný izolovaný bod  $c$ . (Nakreslete si obrázek.)

2) Množina  $\mathbb{N}$  všech přirozených čísel nemá žádný vnitřní bod, všechny její body jsou izolované. Je tvořena samými hraničními body, jejím jediným hromadným bodem v  $\overline{\mathbb{R}}$  je  $+\infty$ , v  $\mathbb{R}$  žádný hromadný bod nemá.