

Diagonalisace matic

Odpřednesenou látku naleznete v kapitolách 10.1, 10.3 a 10.4 skript *Abstraktní a konkrétní lineární algebra*.

Minulá přednáška

- 1 Pojmy vlastní hodnota a vlastní vektor lineárního zobrazení.
- 2 Věta o diagonalisovatelnosti čtvercových matic nad \mathbb{C} .

Dnešní přednáška

- 1 Diagonalisovatelnost matic nad \mathbb{C} a nad \mathbb{R} .
- 2 Dvě aplikace: řešení rekurentních rovnic a funkce matic.^a

^aTyto dvě aplikace nebudou zkoušeny!

Připomenutí důležité vlastnosti tělesa \mathbb{C}

Každý polynom $p(x)$ v $\mathbb{C}[x]$ stupně n má **přesně** n kořenů (počítaných i s násobnostmi).^a

^aTéto vlastnosti tělesa \mathbb{C} se říká **algebraická uzavřenost**.

- 1 Komplexní číslo λ je kořen polynomu $p(x) \in \mathbb{C}[x]$ **násobnosti** k , pokud platí rovnost $p(x) = (x - \lambda)^k \cdot q(x)$ pro $q(x) \in \mathbb{C}[x]$ a $q(\lambda) \neq 0$.
- 2 **Speciálně**: číslo λ má jako kořen $p(x)$ **násobnost nula** právě tehdy, když λ **není kořenem** polynomu $p(x)$.

Důsledek (téma 08A, tvar věty o diagonalisaci pro $\mathbb{F} = \mathbb{C}$)

Pro čtvercovou matici **A** nad \mathbb{C} jsou následující podmínky ekvivalentní:

- 1 Matice **A** diagonalisovatelná.
- 2 Pro každé komplexní číslo λ platí: násobnost λ jako kořene polynomu $\text{char}_{\mathbf{A}}(x)$ je rovna $\dim(\text{eigen}(\lambda, \mathbf{A}))$.

Příklad

Pauliho matice^a jsou následující tři matice nad \mathbb{C} :

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad Y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Všechny tyto matice jsou diagonalisovatelné:

- 1 Matice Z již diagonální je.

^aJde o důležitý příklad v kvantové mechanice a **kvantovém počítání**. Matice X , Y a Z jsou operátory spinu ve směrech os x , y , z a značívají se též σ_x (také: σ_1) σ_y (také: σ_2) σ_z (také: σ_3)

Užitečná početní cvičení: platí rovnosti

- 1 $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma_3^2 = -i \cdot \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 = \mathbf{E}_2$.
- 2 $\{\sigma_j, \sigma_k\} = 2\delta_{jk}\mathbf{E}_2$, kde $\{\sigma_j, \sigma_k\} = \sigma_j \sigma_k + \sigma_k \sigma_j$ je tzv **Poissonova závorka** a δ_{jk} je **Kroneckerův symbol**.
- 3 $[\sigma_j, \sigma_k] = \sum_{l=1}^3 2i\epsilon_{jkl}\sigma_l$, kde $[\sigma_j, \sigma_k] = \sigma_j \sigma_k - \sigma_k \sigma_j$ je tzv **komutátor** a ϵ_{jkl} je **Levi-Civitaův symbol**.

Příklad (pokrač.)

② Diagonalisace matice $X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Platí $\text{char}_X(x) = x^2 - 1 = (x - 1) \cdot (x + 1)$.

Vlastní hodnoty a vlastní vektory matice X jsou: $\lambda_1 = 1$,
 $\mathbf{t}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ a $\lambda_2 = -1$, $\mathbf{t}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Tudíž

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

a operátor X je diagonální v bázi $(\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2)$.

Příklad (pokrač.)

3 Diagonalisace matice $Y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$.

Platí $\text{char}_Y(x) = x^2 - 1 = (x - 1) \cdot (x + 1)$.

Vlastní hodnoty a vlastní vektory matice Y jsou: $\lambda_1 = 1$,
 $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix}$ a $\lambda_2 = -1$, $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}$.

Tudíž

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

a operátor Y je diagonální v bázi $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$.

Jordanův tvar čtvercové matice

Ať \mathbf{A} je matice typu $n \times n$ nad \mathbb{F} taková, že polynom $\text{char}_{\mathbf{A}}(x)$ lze rozložit na součin lineárních faktorů.^a

Potom lze dokázat, že \mathbf{A} je „téměř diagonalisovatelná“. Přesněji: platí $\mathbf{A} \approx \mathbf{J}$, kde

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \mathbf{B}_1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{B}_2 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{B}_3 & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & & & & & \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{B}_p \end{pmatrix}$$

kde $\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, \dots, \mathbf{B}_p$ jsou tzv. Jordanovy segmenty rozměrů $m_1 \times m_1, m_2 \times m_2, \dots, m_p \times m_p$, kde $m_1 + \dots + m_p = n$.

O Jordanově tvaru budeme mluvit na příští přednášce (téma 09A).

^aTo platí například pro libovolnou matici nad \mathbb{C} .

Příklad

Ať $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ je regulární matice nad \mathbb{R} . Potom platí:

- ① $\text{char}_{\mathbf{A}}(x) = (a - x)^2 + b^2 = x^2 - 2ax + (a^2 + b^2)$.
Diskriminant tohoto výrazu je $-4b^2$.

Matice \mathbf{A} je tedy nad \mathbb{R} diagonalisovatelná **pouze** v případě $b = 0$.

V tomto případě ale \mathbf{A} už je diagonální: $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$ a
musí platit $a \neq 0$, protože \mathbf{A} je regulární.

Matice \mathbf{A} je tedy maticí změny měřítka (změna je stejná na obou souřadnicových osách).

Příklad (pokrač.)

- ② V případě $b \neq 0$ matice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ není nad \mathbb{R} diagonalisovatelná.

Matice \mathbf{A} (chápaná jako matice nad \mathbb{C}) má vlastní hodnoty $\lambda_1 = a + bi$ a $\lambda_2 = a - bi$, protože $\text{char}_{\mathbf{A}}(x) = x^2 - 2ax + (a^2 + b^2) = (x - (a + ib)) \cdot (x - (a - ib))$.

Označme $r = |\lambda_1| = |\lambda_2| = \sqrt{a^2 + b^2}$. Dále označme jako α úhel^a mezi vektory $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ a $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.

Potom

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$$

To jest: \mathbf{A} je rotace o úhel α , následovaná změnou měřítka.

^aÚhlu α se říká **argument** komplexního čísla $a + bi$. Platí tedy rovnost $a + bi = r \cdot (\cos \alpha + i \sin \alpha) = r \cdot e^{i\alpha}$.

Tvrzení (klasifikace regulárních transformací roviny)

Ať $\mathbf{M} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ je regulární a ať nemá 2-násobnou vlastní hodnotu. Pak \mathbf{M} je podobná buď

❶ matici $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$, kde $a \neq b$ jsou z \mathbb{R} a $a \cdot b \neq 0$,

nebo

❷ matici $\begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$, kde $r > 0$ a $\alpha \in [0; 2\pi)$.

Slogan

Regulární transformace roviny bez 2-násobných vlastních hodnot jsou **pouze** dvou typů:

- ❶ Změny měřítka (změna měřítka je na každé souřadnicové ose **jiná**).
- ❷ Rotace následované změnou měřítka **stejnou** na obou souřadnicových osách.

Důkaz (klasifikace regulárních transformací roviny).

- 1 V případě, kdy \mathbf{M} je diagonalisovatelná nad \mathbb{R} , má \mathbf{M} **dvě různé** reálné vlastní hodnoty a, b . Tudíž $\mathbf{M} \approx \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$, kde $a \cdot b \neq 0$, protože \mathbf{M} je regulární.
- 2 V případě, kdy \mathbf{M} nad \mathbb{R} diagonalisovatelná není, má $\text{char}_{\mathbf{M}}(x)$ **komplexní** kořen $\lambda = a + bi$, kde $b \neq 0$.
Označme jako \mathbf{v} **komplexní** vlastní vektor příslušný vlastní hodnotě λ . Označme jako \mathbf{T} matici se sloupci $\mathbf{t}_1 = \text{Re}(\mathbf{v})$ (vektor reálných částí položek vektoru \mathbf{v}) a $\mathbf{t}_2 = \text{Im}(\mathbf{v})$ (vektor imaginárních částí položek vektoru \mathbf{v}).
Potom platí rovnost $\mathbf{M} = \mathbf{T} \cdot \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \cdot \mathbf{T}^{-1}$.
Nyní stačí použít předchozí příklad. ■

Výpočet mocnin diagonalisovatelné matice

Pro diagonalisovatelnou matici \mathbf{A} typu $n \times n$ nad \mathbb{F} platí:

$$\mathbf{A} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{T}^{-1} \text{ pro nějakou regulární matici } \mathbf{T}.$$

$$\text{Tudíž: } \mathbf{A}^2 = \mathbf{A} \cdot \mathbf{A} = (\mathbf{T} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{T}^{-1}) \cdot (\mathbf{T} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{T}^{-1}) = \mathbf{T} \cdot \mathbf{D}^2 \cdot \mathbf{T}^{-1}.$$

$$\text{Obecně: } \mathbf{A}^k = \mathbf{T} \cdot \mathbf{D}^k \cdot \mathbf{T}^{-1}, \text{ pro všechna přirozená čísla } k \geq 0.$$

Protože mocniny diagonální matice lze počítat velmi rychle, lze rychle počítat i mocniny diagonalisovatelných matic.

Ukážeme dvě aplikace umocňování:

- 1 Řešení lineárních homogenních rekurentních rovnic.
To je důležité při analýze složitosti rekursivních algoritmů.
- 2 Základní myšlenku funkcí matice.
To je důležité ve fyzice, grafice, kvantovém počítání, ...

Příklad (Fibonacciho posloupnost)

Hledáme posloupnost čísel $F(n)$, splňující **lineární rekurentní rovnici** $F(n+2) = F(n+1) + F(n)$, pro všechna př. č. $n \geq 0$.

Cíl: chceme **explicitní vzorec** pro $F(n)$, $n \geq 0$.

Evidentně: známe-li $F(0)$ a $F(1)$, známe všechna $F(n)$.^a

- ① Vytvoříme **generující matici** $\mathbf{F} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ pro kterou platí:

$$\mathbf{F} \cdot \begin{pmatrix} F(0) \\ F(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F(1) \\ F(2) \end{pmatrix}, \text{ obecně } \mathbf{F}^n \cdot \begin{pmatrix} F(0) \\ F(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F(n) \\ F(n+1) \end{pmatrix}.$$

- ② Matice \mathbf{F} je diagonalisovatelná nad \mathbb{R} : $\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $\lambda_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \mathbf{T}^{-1} \cdot \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}, \quad \mathbf{T} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F}^n = \mathbf{T} \cdot \mathbf{D}^n \cdot \mathbf{T}^{-1}$$

^aPožadavkům $F(0) = x_0$ a $F(1) = x_1$ se říká **počáteční podmínka**. Pro klasickou Fibonacciho posloupnost jde o $F(0) = 1$, $F(1) = 1$.

Příklad (Fibonacciho posloupnost, pokrač.)

$$\begin{aligned} \textcircled{3} \quad \begin{pmatrix} F(n) \\ F(n+1) \end{pmatrix} &= \mathbf{T} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 \\ 0 & \lambda_2^n \end{pmatrix} \cdot \mathbf{T}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} F(0) \\ F(1) \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 \\ 0 & \lambda_2^n \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_2 & -1 \\ -\lambda_1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} F(0) \\ F(1) \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 \\ 0 & \lambda_2^n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_2 & -1 \\ -\lambda_1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} F(0) \\ F(1) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\text{Takže: } F(n) = \frac{\lambda_1^n \cdot \lambda_2 - \lambda_2^n \cdot \lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} \cdot F(0) + \frac{-\lambda_1^n + \lambda_2^n}{\lambda_2 - \lambda_1} \cdot F(1)$$

V klasickém případě (tj když $F(0) = F(1) = 1$), je

$$\begin{aligned} F(n) &= \frac{\lambda_1^n \cdot \lambda_2 - \lambda_2^n \cdot \lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} + \frac{-\lambda_1^n + \lambda_2^n}{\lambda_2 - \lambda_1} = \\ &= \lambda_1^n \cdot \frac{\lambda_2 - 1}{\lambda_2 - \lambda_1} + \lambda_2^n \cdot \frac{1 - \lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} \end{aligned}$$

Poznámky (lineární homogenní rekurence k -tého řádu)

Obdobným způsobem lze řešit jakoukoli **homogenní lineární rekurentní rovnici k -tého řádu**: hledáme posloupnost $X(n)$ prvků \mathbb{F} , které splňují

$$X(n+k) = a_1X(n+k-1) + a_2X(n+k-2) + \dots + a_kX(n)$$

pro všechna přirozená čísla $n \geq 0$, kde a_1, \dots, a_k jsou v \mathbb{F} .

Jediné, co potřebujeme, je diagonalisovatelnost generující matice.

- 1 Řešení rekurentních rovnic hraje zásadní úlohu při **analýze složitosti rekursivních algoritmů**.
- 2 Podobné postupy fungují i pro **lineární homogenní diferenciální rovnice k -tého řádu**. Viz Dodatek O **skript**.

Příklad (exponenciála matice)

Víme, že funkce e^x má Taylorův rozvoj $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$.

Pro čtvercovou diagonalisovatelnou matici $\mathbf{X} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{T}^{-1}$ definujeme

$$\exp(\mathbf{X}) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\mathbf{X}^n}{n!} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\mathbf{T} \cdot \mathbf{D}^n \cdot \mathbf{T}^{-1}}{n!} = \mathbf{T} \cdot \underbrace{\left(\sum_{i=0}^{\infty} \frac{\mathbf{D}^n}{n!} \right)}_{=e^{\mathbf{D}}} \cdot \mathbf{T}^{-1}$$

Konvergenci této řady musíme chápat ve smyslu normy.^a

Lze ukázat, že matice $\exp(\mathbf{D})$ je diagonální, a že platí $\exp(\mathbf{D}) = (\delta_{ij} \cdot e^{d_{ij}})$.

^aTo je velmi technický pojem, nebudeme o něm mluvit. Více například v knize Roger A. Horn, Charles J. Johnson, *Matrix analysis*, Cambridge University Press, 2012, nebo v přednášce [A0B01PAN](#) (Pokročilá analýza), nebo v kapitole 13.2 [skript](#). Analogicky exponenciála lze postupovat pro obecnou funkci $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ (případně $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$), která má Taylorův rozvoj.