

Lineární obal a lineární podprostor

Odpřednesenou látku naleznete v kapitolách 1.5 a 1.6 skript
Abstraktní a konkrétní lineární algebra.

Minulá přednáška

- ① Definice lineárního prostoru (nad obecným tělesem).
- ② Lineární kombinace.

Dnešní přednáška

- ① Lineární obal množiny vektorů.
- ② Lineární podprostor lineárního prostoru.

Připomenutí

V lineárním prostoru můžeme zjednodušovat zápisy:

- ① Přeme: $-\vec{x}$ místo $(-1) \cdot \vec{x}$. Jde o **opačný vektor** k vektoru \vec{x} (dokázáno minule).
- ② Přeme: $\vec{x}_1 + \vec{x}_2 + \cdots + \vec{x}_{n-1} + \vec{x}_n$ místo $(\dots (\vec{x}_1 + \vec{x}_2) + \cdots + \vec{x}_{n-1}) + \vec{x}_n$. Důvod: **asociativita sčítání vektorů**.

Lineární kombinace seznamu $(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n)$ s koeficienty a_1, \dots, a_n

z tělesa \mathbb{F} je vektor $\sum_{i=1}^n a_i \cdot \vec{x}_i$.

Lineární kombinace prázdného seznamu () je nulový vektor.

Konečné a nekonečné množiny

Připomenutí:^a množina přirozených čísel $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$.

- ➊ Množina M je **konečná**, když má přesně n prvků, kde n je nějaké přirozené číslo.

To znamená: M je konečná, když bud'

$M = \emptyset$ (množina M má 0 prvků, značení: $\text{card}(M) = 0$),

nebo

$M = \{x_1, \dots, x_n\}$, kde $n \geq 1$ je přirozené číslo (v tom případě má množina M n prvků, značení: $\text{card}(M) = n$).

- ➋ Množina M je **nekonečná**, když není konečná.

Například \mathbb{N} , \mathbb{Q} , \mathbb{R} , \mathbb{C} jsou nekonečné množiny. Množina $\mathbb{R}[x]$ je nekonečná.

^aDůležité: v přednáškách z lineární algebry nula je přirozené číslo.

Definice (lineární obal množiny vektorů)

Ať M je jakákoli množina vektorů lineárního prostoru L . **Lineární obal množiny vektorů** M je množina $\text{span}(M)$, definovaná takto:

$$\vec{x} \in \text{span}(M) \quad \text{právě tehdy, když}^a \quad \vec{x} = \sum_{i=1}^n a_i \cdot \vec{x}_i$$

pro nějaké $n \geq 0$, nějaká $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{F}$ a nějaká $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n \in M$.

^aPozor: prázdná lineární kombinace je rovna vektoru \vec{o} .

Ujasnění si definice $\text{span}(M)$

$\vec{x} \in \text{span}(M)$ právě tehdy, když **existuje** nějaký seznam S vektorů z množiny M tak, že \vec{x} je roven nějaké lineární kombinaci seznamu S .

To jest: $\text{span}(M)$ je množina všech možných lineárních kombinací, které lze z M utvořit.



Příklady (viz minulé přednášky)

① Pro $\longrightarrow \mathbf{a}_1$

v \mathbb{R}^2 je $\text{span}(\{\mathbf{a}_1\})$ přímka procházející počátkem se směrem (\mathbf{a}_1) .

② Pro



v \mathbb{R}^3 je $\text{span}(\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2\})$ rovina procházející počátkem se směrem $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)$.

Pozor: pro



v \mathbb{R}^3 , lineární obal $\text{span}(\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2\})$ **není rovina!** Jde opět o přímku. Jak poznat o co jde? Uvidíme příště.^a

^aToto téma se zove lineární závislost a lineární nezávislost.



Uzávěrové vlastnosti lineárního obalu

- ① Je-li $M \subseteq N$, potom $\text{span}(M) \subseteq \text{span}(N)$.
- ② Pro vš. M platí: $M \subseteq \text{span}(M)$.
- ③ Pro vš. M platí: $\text{span}(\text{span}(M)) \subseteq \text{span}(M)$.

Důkaz.

Přednáška.



Vysvětlení uzávěrových vlastností (slogan)

Lineárními kombinacemi tvoříme „rovné kusy“ lineárního prostoru (viz minulou přednášku).

Množina $\text{span}(M)$ je tedy „zabalení“ množiny M tak, aby výsledkem byl „co nejmenší rovný kus“, který obsahuje M .

Definice (lineární podprostor)

Ať W je podmnožina lineárního prostoru L . Řekneme, že W je **lineární podprostor^a** lineárního prostoru L , když platí $\text{span}(W) \subseteq W$.

^aPokud W je lineárním podprostorem prostoru L , říkáme také, že L je lineárním **nadprostorem** prostoru W .

Slogan pro lineární podprostor

Podprostor je „dobrá“ podmnožina prostoru. Žádnou lineární kombinací nelze z lineárního podprostoru „utéct“.

Tvrzení

- ① $\text{span}(M)$ je vždy lineární podprostor. Jde o nejmenší podprostor, který obsahuje množinu M .
- ② Množina M je lineární podprostor právě tehdy, když $\text{span}(M) = M$.

Důkaz.

Přednáška.



Tvrzení

Ať L je lineární prostor. Podmnožina $W \subseteq L$ je lineárním podprostorem prostoru L právě tehdy, když platí:

- ① $\vec{0}$ je prvkem W (**uzavřenosť W na nulový vektor**).
- ② $\vec{x} + \vec{y}$ je prvkem W , pro každé $\vec{x}, \vec{y} \in W$ (**uzavřenosť W na součet vektorů**).
- ③ $a \cdot \vec{x}$ je prvkem W , pro každé $a \in \mathbb{F}$ a každé $\vec{x} \in W$ (**uzavřenosť W na skalárni násobek**).

Důkaz.

Přednáška.



Další slogan pro lineární podprostor

Lineární podprostor vždy obsahuje nulový vektor a „vydrží“ operace součtu a skalárního násobku.

Klasifikace lineárních podprostorů prostoru \mathbb{R}^3 nad \mathbb{R} ?

Každá z množin následujících typů

- ① Jednoprvková množina obsahující pouze počátek.

nebo

- ② Každá přímka procházející počátkem.

nebo

- ③ Každá rovina procházející počátkem.

- ④ Celá množina \mathbb{R}^3 .

je lineární podprostor^a prostoru \mathbb{R}^3 .

^aTo, že žádné jiné lineární podprostory prostoru \mathbb{R}^3 neexistují, ukážeme později. Budeme k tomu potřebovat pojem **dimenze**.

Důležité

Ať W je lineární podprostor lineárního prostoru L . Potom množina W sama o sobě je lineárním prostorem, pokud sčítání vektorů ve W a násobení vektoru skalárem ve W definujeme **stejně** jako v prostoru L .

Obrácené tvrzení ale neplatí: například $W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{R} \right\}$ není lineárním podprostorem \mathbb{R}^2 . Ale množina W spolu s operacemi

$$\begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} x' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + x' \\ 1 \end{pmatrix} \quad a \odot \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \cdot x \\ 1 \end{pmatrix}$$

tvoří lineární prostor nad \mathbb{R} .

Příklady

- ① Každý lineární prostor je sám svým podprostorem.
- ② Množina $\{\vec{o}\}$ je vždy lineárním podprostorem.^a
- ③ \mathbb{R}^3 je lineární prostor (operace jsou definovány po složkách).

① $W_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid z = 0 \right\}$ je lineárním podprostorem \mathbb{R}^3 .

② $W_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid z = 1 \right\}$ není lineárním podprostorem \mathbb{R}^3 .

Pozor! Na množině W_2 lze definovat strukturu lineárního prostoru (cvičení).

^aTomuto podprostoru říkáme triviální podprostor.

Příklady (pokrač.)

- ④ Pro každé $n \geq 0$ je $\mathbb{F}^{\leq n}[x]$ lineární podprostor lineárního prostoru $\mathbb{F}[x]$.
- ⑤ Označme jako $\mathbb{R}^{\leq 3}[x]$ množinu všech reálných polynomů stupně maximálně 3 a jako $\mathbb{R}^{\leq 136}[x]$ množinu všech reálných polynomů stupně maximálně 136.
Potom $\mathbb{R}^{\leq 3}[x]$ je lineární podprostor lineárního prostoru $\mathbb{R}^{\leq 136}[x]$.

Obecněji: Ať \mathbb{F} je těleso. Označme jako $\mathbb{F}^{\leq n}[x]$ množinu všech polynomů nad \mathbb{F} stupně maximálně n , $n \geq 0$.

Jakmile $n \leq m$, je $\mathbb{F}^{\leq n}[x]$ lineární podprostor lineárního prostoru $\mathbb{F}^{\leq m}[x]$.

Co je průnik a sjednocení systému množin skutečně?

Ať U je množina a ať $A_i \subseteq U$, $i \in I$, je systém podmnožin množiny U . Potom:

- ① Průnik $\bigcap_{i \in I} A_i$ je opět podmnožina množiny U a má následující vlastnost:

$\bigcap_{i \in I} A_i$ je největší podmnožina množiny U , která je podmnožinou každé z množin A_i .

- ② Sjednocení $\bigcup_{i \in I} A_i$ je opět podmnožina množiny U a má následující vlastnost:

$\bigcup_{i \in I} A_i$ je nejmenší podmnožina množiny U , která je nadmnožinou každé z množin A_i .

Lze analogická tvrzení dokázat pro lineární podprostory?

Průnik a sjednocení systému lineárních podprostorů

Ať L je lineární prostor.

- ① Průnik libovolného systému $\{W_i \mid i \in I\}$ podprostorů prostoru L je lineárním podprostorem prostoru L .
- ② Sjednocení systému $\{W_i \mid i \in I\}$ lineárních podprostorů prostoru L obecně lineárním podprostorem prostoru L není.

Důkaz.

Přednáška.



Definice (spojení systému lineárních podprostorů)

Ať $\{W_i \mid i \in I\}$ je systém lineárních podprostorů prostoru L .

Lineárnímu podprostoru $\text{span}(\bigcup_{i \in I} W_i)$ prostoru L říkáme **spojení** podprostorů W_i , $i \in I$, a značíme jej^a

$$\bigvee_{i \in I} W_i$$

^aV případě systému dvou lineárních podprostorů W_1 , W_2 , používáme i značení $W_1 \vee W_2$.



Co je průnik a spojení systému lineárních podprostorů skutečně?

Ať L je lineární prostor a ať $W_i \subseteq U$, $i \in I$, je systém lineárních podprostorů prostoru L . Potom:

- ① Průnik $\bigcap_{i \in I} W_i$ je opět lineární podprostor prostoru L a má následující vlastnost:

$\bigcap_{i \in I} W_i$ je největší lineární podprostor prostoru L , který je lineárním podprostorem každého z podprostorů W_i .

- ② Spojení $\bigvee_{i \in I} W_i$ je opět lineární podprostor prostoru L a má následující vlastnost:

$\bigvee_{i \in I} W_i$ je nejmenší lineární podprostor prostoru L , který je lineárním nadprostorem každého z podprostorů W_i .