KAPITOLA 4: Derivace funkce

4.1 Úvod

Motivační příklady: okamžitá rychlost, směrnice tečny

Definice:

Řekneme, že funkce f má **v bodě** x_0 **derivaci** [**derivaci zleva** | **derivaci zprava**] rovnu číslu a, jestliže existuje

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = a$$

$$\left[\ \lim_{x\to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = a \quad \Big| \quad \lim_{x\to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = a\ \right].$$

Píšeme $f'(x_0) = a$ $\big(f'_-(x_0) = a \ \mid\ f'_+(x_0) = a \big)$.

Další značení: $f'(x_0) = \dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x_0) = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x_0)$

$a \in \mathbb{R}$ ... vlastní derivace, $a = \pm\infty$ ... nevlastní derivace

f má derivaci na intervalu $\langle a, b)$ ... existuje $f'(x_0)$ pro každé $x_0 \in (a,b)$ a existuje $f'_+(a)$
(analogicky pro intervaly (a,b), $(a,b\rangle$, $\langle a,b\rangle$)

Poznámka: $f'(x_0)$ existuje a je rovna a právě tehdy, když existují $f'_-(x_0)$, $f'_+(x_0)$ a obě jsou rovny a.

Poznámka: Z Věty 3.14 o limitě složené funkce je $f'(x_0) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$. Index 0 u x zde většinou vynecháváme a píšeme

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}.$$

Poznámka: Derivace jako funkce je definována tam, kde existuje **vlastní** derivace. Zřejmě vždy platí $D(f') \subset D(f)$.

Příklad 4.1: Určete derivace funkcí $f(x) = c \in \mathbb{R}$, $f(x) = x$, $f(x) = \mathrm{e}^x$, $f(x) = \cos x$ a $f(x) = \sin(x)$ pomocí definice.

Řešení: Např. pro funkci $f(x) = \sin x$ máme

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \frac{\sin x - \sin x_0}{x-x_0} = \frac{2\sin\frac{x-x_0}{2}\cdot\cos\frac{x+x_0}{2}}{x-x_0} = \frac{\sin\frac{x-x_0}{2}}{\frac{x-x_0}{2}}\cdot\cos\frac{x+x_0}{2} \xrightarrow{x\to x_0} 1\cdot\cos\frac{x_0+x_0}{2} = \cos x_0$$

nebo

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{\sin(x+h)-\sin x}{h} = \frac{(\sin x\cos h + \cos x \sin h)-\sin x}{h} = \frac{\cos h - 1}{h}\cdot\sin x + \frac{\sin h}{h}\cdot\cos x =$$

$$= \frac{(\cos h-1)(\cos h+1)}{h(\cos h+1)}\cdot\sin x + \frac{\sin h}{h}\cdot\cos x = -\frac{\sin h}{h}\cdot\frac{\sin h}{(\cos h+1)}\cdot\sin x + \frac{\sin h}{h}\cdot\cos x \xrightarrow{x\to x_0} -1\cdot\frac{0}{2}\cdot\sin x + 1\cdot\cos x = \cos x.$$

Tečna a normála

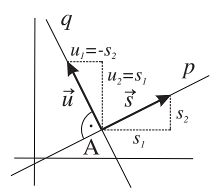
přímka v rovině:

$\vec{s} = (s_1, s_2)$ ... směrový vektor

$A = [a_1, a_2] \in p$

pro $s_1 \neq 0$: $\quad p:\ y = a_2 + \dfrac{s_2}{s_1}(x-a_1)$

$k_p = \dfrac{s_2}{s_1}$ ... směrnice přímky p



kolmá přímka:

$q \perp p$ ... směrový vektor

$\vec{u} = (u_1, u_2) = (-s_2, s_1)$

pro $s_2 \neq 0$:

$k_q = \dfrac{u_2}{u_1} = \dfrac{s_1}{-s_2} = -\dfrac{1}{k_p}$

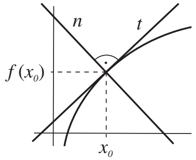
tečna t a **normála** n grafu funkce f v bodě $[x_0, f(x_0)]$ (někdy: „v bodě x_0“) jsou kolmé přímky procházející bodem $[x_0, f(x_0)]$ takové, že

- pro $f'(x_0) \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

  $t:$ $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$

  $n:$ $y = f(x_0) - \dfrac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$

  tj. $k_t = f'(x_0)$, $k_n = -\dfrac{1}{f'(x_0)}$

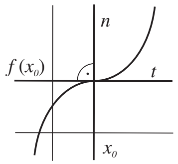


- pro $f'(x_0) = 0$

  $t:$ $y = f(x_0)$

  $n:$ $x = x_0$

  tj. $k_t = 0$

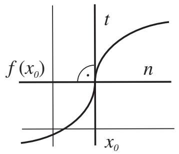


- pro $f'(x_0) = \pm\infty$

  $t:$ $x = x_0$

  $n:$ $y = f(x_0)$

  tj. $k_n = 0$



Příklad 4.2: Najděte tečnu a normálu grafu funkce $f(x) = x^2$ v bodě $[3, ?]$ (v bodě 3).

Řešení: Máme $x_0 = 3$, $f(3) = 9$ (tj. $A = [3, 9]$), $D(f) = \mathbb{R}$. Spočítáme $f'(3) = \lim_{x\to 3} \frac{x^2-9}{x-3} = \lim_{x\to 3} (x + 3) = 6$. Tedy $k_t = f'(3) = 6$, $k_n = -\frac{1}{f'(3)} = -\frac{1}{6}$. Rovnice tečny a normály odtud jsou $t:$ $y = 9 + 6(x - 3)$ (neboli $t:$ $6x - y - 9 = 0$) a $n:$ $y = 9 - \frac{1}{6}(x - 3)$ (neboli $n:$ $x + 6y - 57 = 0$).

4.2 Věty o derivacích

Věta 4.1:

Má-li funkce f v bodě x_0 vlastní derivaci, pak je v x_0 spojitá.

Důkaz: Pro $x \neq x_0$ ($x \in D(f)$) máme $f(x) - f(x_0) = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \cdot (x - x_0) \longrightarrow f'(x_0) \cdot 0 = 0$ (součin je definovaný, protože $f'(x_0) \in \mathbb{R}$). Tedy $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$ a funkce f je v bodě x_0 spojitá. $\square$

Příklad 4.3: **a)** Funkce $f(x) = |x|$ je spojitá, $f'(0)$ ale neexistuje (je totiž $f'_+(0) = 1 \neq -1 = f'_-(0)$) - tedy spojitost k existenci derivace nestačí.

b) Funkce $f(x) = \operatorname{sgn} x$ není spojitá v nule, přesto tam má derivaci, ale nevlastní - tedy existence nevlastní derivace spojitost nezaručuje.

Věta 4.2:

Nechť existují vlastní $f'(x_0)$, $g'(x_0)$. Potom

a) $\big(f \pm g\big)'(x_0) = f'(x_0) \pm g'(x_0)$

b) $\big(f \cdot g\big)'(x_0) = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0)$

(speciálně pro $c \in \mathbb{R}$: $\big(c\, f\big)'(x_0) = c\, f'(x_0)$)

c) $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(x_0) = \dfrac{f'(x_0) \cdot g(x_0) - f(x_0) \cdot g'(x_0)}{g^2(x_0)}$, je-li $g(x_0) \neq 0$.

(speciálně pro $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$: $\big(\frac{f}{c}\big)'(x_0) = \frac{f'(x_0)}{c}$)

Značení:

$$\begin{aligned} f^{(1)}(x_0) &= f'(x_0) &&= \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x_0)\\ f^{(2)}(x_0) &= f''(x_0) &&= \frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2}(x_0)\\ &\vdots\\ f^{(6)}(x_0) &= f^{VI}(x_0) &&= \frac{\mathrm{d}^6 f}{\mathrm{d}x^6}(x_0)\\ &\vdots\\ f^{(n)}(x_0) & &&= \frac{\mathrm{d}^n f}{\mathrm{d}x^n}(x_0) \end{aligned}$$

Příklad 4.9: Pro $f(x) = \ln x$, $x > 0$, máme
$f'(x) = 1/x = x^{-1}$, $f''(x) = (-1)\,x^{-2}$, $f'''(x) = (-1)(-2)\,x^{-3}$, $\dots$, $f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}\,(n-1)!\,x^{-n}$.

Věta 4.6 (Leibnizův vzorec) :

Nechť existují <u>vlastní</u> n−té derivace $f^{(n)}$ a $g^{(n)}$ funkcí f, g v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$. Potom

$$(f\cdot g)^{(n)}(x_0) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(x_0)\cdot g^{(n-k)}(x_0).$$

Příklad 4.10: Najděte pomocí Věty 4.6 $(x^2 \sin x)^{(9)}$.

Řešení: Snadno ověříme, že pro derivace funkcí $f(x) = x^2$ a $g(x) = \sin x$ platí: $f^{(0)}(x) = x^2$, $f'(x) = 2x$, $f''(x) = 2$, $f^{(k)}(x) = 0$ pro $k \geq 3$ a $g^{(4l)}(x) = \sin x$, $g^{(4l+1)}(x) = \cos x$, $g^{(4l+2)}(x) = -\sin x$, $g^{(4l+3)}(x) = -\cos x$ $(l \in \mathbb{N}_0)$. Tedy podle Leibnizova vzorce (V4.6) máme:

$$\underline{(x^2\sin x)^{(9)}} = \binom{9}{0}\cdot x^2\cdot \underbrace{\cos x}_{(\sin x)^{(9)}} + \binom{9}{1}\cdot 2x\cdot \underbrace{\sin x}_{(\sin x)^{(8)}} + \binom{9}{2}\cdot 2\cdot \underbrace{(-\cos x)}_{(\sin x)^{(7)}} + \binom{9}{3}\cdot 0\cdot \underbrace{(-\sin x)}_{(\sin x)^{(6)}} + 0 + 0 + \ldots =$$

$$= x^2\cos x + 9\cdot 2\,x\sin x - \frac{9\cdot 8}{2}\cdot 2\cos x = \underline{x^2\cos x + 18x\sin x - 72\cos x}.$$

Důkaz: Vztahy pro derivaci součtu a rozdílu plynou okamžitě z definice derivace a věty o aritmetice limity.
Podívejme se na derivaci součinu. Protože má funkce g v bodě x_0 vlastní derivaci, je v něm spojitá, a tedy $g(x) \to g(x_0) \in \mathbb{R}$ pro $x \to x_0$. Nechť $P(x_0) \subset D(f) \cap D(g)$. Pro $x \in P(x_0)$ máme

$$\frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} = \frac{\big(f(x) - f(x_0)\big)\,g(x) + f(x_0)\,\big(g(x) - g(x_0)\big)}{x - x_0} =$$

$$= \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}\,g(x) + f(x_0)\,\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \xrightarrow{x\to x_0} f'(x_0)\,g(x_0) + f(x_0)\,g'(x_0).$$

Poslední výraz je přitom definován, protože všechny jeho členy jsou konečná čísla. Tedy derivace funkce $f \cdot g$ v bodě x_0 existuje a platí pro ni uvedený vzorec.
Zbývá nám derivace podílu. Protože má funkce g v x_0 vlastní derivaci, je v x_0 spojitá. Je-li tedy $g(x_0) \neq 0$, pak je podle věty o zachování znaménka funkce g na nějakém prstencovém okolí bodu x_0 nenulová a je tam tak i definován podíl $\frac{f}{g}$. Limitu podílu má tedy smysl počítat. Postupně pro ni dostáváme

$$\lim_{x\to x_0} \frac{\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(x_0)}{g(x_0)}}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)g(x_0) - f(x_0)g(x)}{g(x_0)g(x)(x - x_0)} = \lim_{x\to x_0} \frac{\big(f(x) - f(x_0)\big)\,g(x_0) - f(x_0)\,\big(g(x) - g(x_0)\big)}{g(x_0)g(x)(x - x_0)} =$$

$$= \lim_{x\to x_0} \frac{\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\,g(x_0) - f(x_0)\,\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}}{g(x_0)g(x)}.$$

Protože jsou hodnoty $f(x_0)$ a $g(x_0)$ konečné, funkce g je spojitá v x_0 a $g(x_0) \neq 0$, je poslední (a tedy i první) limita rovna $\frac{f'(x_0)\,g(x_0) - f(x_0)\,g'(x_0)}{(g(x_0))^2}$, což jsme chtěli dokázat. □

Příklad 4.4: $(\operatorname{tg} x)' = \left(\dfrac{\sin x}{\cos x}\right)' = \dfrac{(\sin x)'\cos x - \sin x(\cos x)'}{\cos^2 x} = \dfrac{\cos x\cos x - \sin x(-\sin x)}{\cos^2 x} = \dfrac{1}{\cos^2 x}$.

Poznámka: a) $\underline{(f_1 + f_2 + \ldots + f_n)'} = (f_1 + (f_2 + \ldots + f_n))' = f_1' + (f_2 + (f_3 + \ldots + f_n))' = \ldots = \underline{f_1' + f_2' + \ldots + f_n'}$

b) $\underline{(f_1\cdot f_2\cdot \ldots \cdot f_n)'} = \big(f_1\cdot (f_2\cdot \ldots\cdot f_n)\big)' = f_1'\cdot (f_2\cdot \ldots \cdot f_n) + f_1\cdot \big(f_2\cdot\ldots\cdot f_n\big)' =$

$= f_1'\cdot (f_2\cdot \ldots \cdot f_n) + f_1\cdot \big(f_2\cdot(f_3\cdot\ldots\cdot f_n)\big)' = f_1'\cdot \big(f_2\cdot \ldots \cdot f_n\big) + f_1\cdot \Big(f_2'\cdot (f_3\cdot \ldots \cdot f_n) + f_2\cdot \big(f_3\cdot \ldots \cdot f_n\big)'\Big) =$

$= f_1'\cdot \big(f_2\cdot \ldots \cdot f_n\big) + f_1\cdot \Big(f_2'\cdot (f_3\cdot \ldots \cdot f_n) + f_2\cdot \big(f_3\cdot (f_4\cdot \ldots \cdot f_n)\big)'\Big) = \ldots$

Příklad 4.5: Ukažte, že pro $n \in \mathbb{N}$ platí $(x^n)' = n\,x^{n-1}$.

Řešení: Dokážeme matematickou indukcí:
- pro $n = 1$ máme: $(x^1)' = x' = 1 = 1.x^0 = 1.x^{1-1}$.
- předpokládejme, že vztah platí pro n, ukážeme, že platí i pro $n+1$:
  $(x^{n+1})' = (x\cdot x^n)' = x'\cdot x^n + x\cdot (x^n)' = 1\cdot x^n + x\cdot (n\,x^{n-1}) = x^n + n\,x^n = (n+1)x^n = (n+1)x^{(n+1)-1}$

Věta 4.3 (o derivaci složené funkce) :

Nechť existují <u>vlastní</u> $f'(x_0)$ a $g'(f(x_0))$. Potom existuje vlastní derivace funkce $g \circ f$ v bodě x_0 a platí

$$\big(g\circ f\big)'(x_0) = g'\big(f(x_0)\big)\cdot f'(x_0).$$

Důkaz: Protože má funkce f derivaci v bodě x_0 a funkce g má derivaci v bodě $f(x_0)$, existují okolí $U(x_0) \subset D(f)$ a $U(f(x_0)) \subset D(g)$. Na $U(f(x_0))$ definujme funkci

$$w(y) = \begin{cases} \dfrac{g(y) - g(f(x_0))}{y - f(x_0)} & \text{pro } y \neq f(x_0)\\ g'(f(x_0)) & \text{pro } y = f(x_0). \end{cases}$$

Všimněme si, že pro všechna $x \in U(x_0)$ platí

$$\frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0} = w(f(x))\cdot \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Je-li totiž $f(x)=f(x_0)$, jsou výrazy na obou stranách nulové. Pokud $f(x)\neq f(x_0)$, pak použijeme rozpis

$$\frac{g(f(x))-g(f(x_0))}{x-x_0}=\frac{g(f(x))-g(f(x_0))}{f(x)-f(x_0)}\cdot\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

Nyní už jen stačí využít toho, že z definice derivace $g'(f(x_0))$ je funkce w v $f(x_0)$ spojitá, a dostaneme

$$(g\circ f)'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{g(f(x))-g(f(x_0))}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0} w(f(x))\cdot\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=g'(f(x_0))\cdot f'(x_0).$$

Poznámka: $\underline{(h\circ g\circ f)'(x_0)}=(h\circ(g\circ f))'(x_0)=h'((g\circ f)(x_0))\cdot(g\circ f)'(x_0)=\underline{h'(g(f(x_0)))\cdot g'(f(x_0))\cdot f'(x_0)}$
(analogicky pro funkci vzniklou složením více funkcí)

Věta 4.4 (o derivaci inverzní funkce):

Nechť f je prostá a spojitá na (a,b), $x_0\in(a,b)$, $f(x_0)=y_0$. Jestliže existuje vlastní $f'(x_0)\neq 0$, pak existuje také $f'_{-1}(y_0)$ a platí

$$f'_{-1}(y_0)=\frac{1}{f'(x_0)}\quad\left(=\frac{1}{f'(f_{-1}(y_0))}\right).$$

Důkaz provádět nebudeme, podívejme se ale, jak si můžeme zapamatovat uvedený vzorec. Z definice inverzní funkce je $(f_{-1}\circ f)(x)=x\overset{\text{ozn.}}{=}\mathrm{id}(x)$. Bude-li tedy existovat derivace funkce $f_{-1}(f(x_0))$, musí podle věty o derivaci složené funkce platit $1=(\mathrm{id})'(x_0)=(f_{-1}\circ f)'(x_0)=f'_{-1}(f(x_0))\cdot f'(x_0)=f'_{-1}(y_0)\cdot f'(x_0)$. Nyní již stačí získanou rovnost $1=f'_{-1}(y_0)\cdot f'(x_0)$ vydělit derivací $f'(x_0)$, která je podle předpokladů věty nenulová.

Příklad 4.6: Derivace funkce **a)** $\ln y$, **b)** $\arcsin y$, $y\in(-1,1)$.

Příklad 4.7: Derivace funkce **a)** $f(x)=a^x$, $a>0$, $x\in\mathbb{R}$, **b)** $f(x)=x^\alpha$, $\alpha\in\mathbb{R}$, $x>0$.

Poznámka (logaritmické derivování):

Derivace funkcí typu $h(x)=\Big(u(x)\Big)^{v(x)}$, kde $u(x)>0$ pro všechna $x\in D(h)$:

Máme $h(x)=\mathrm{e}^{v(x)\cdot\ln(u(x))}$, tedy

$$\begin{aligned}h'(x)&=\mathrm{e}^{v(x)\cdot\ln(u(x))}\cdot\Big(v(x)\cdot\ln\big(u(x)\big)\Big)'=h(x)\cdot\Big(v(x)\cdot\ln\big(u(x)\big)\Big)'\\&=h(x)\cdot\Big(v'(x)\cdot\ln\big(u(x)\big)+v(x)\cdot\big(\ln\big(u(x)\big)\big)'\Big)=\\&=h(x)\cdot\Big(v'(x)\cdot\ln\big(u(x)\big)+v(x)\cdot\tfrac{1}{u(x)}\cdot u'(x)\Big)=\\&=\underline{h(x)\cdot\Big(v'(x)\cdot\ln\big(u(x)\big)+v(x)\cdot\tfrac{1}{u(x)}\cdot u'(x)\Big)}.\end{aligned}$$

Kde se vzal název „logaritmické derivování“? Pro $h(x)=\big(u(x)\big)^{v(x)}=\mathrm{e}^{v(x)\cdot\ln(u(x))}$ je $\ln(h(x))=v(x)\cdot\ln(u(x))$. Odtud $\big(v(x)\cdot\ln(u(x))\big)'=\big(\ln\big(h(x)\big)\big)'=\dfrac{h'(x)}{h(x)}$. Tedy $h'(x)=h(x)\cdot\big(v(x)\cdot\ln(u(x))\big)'=\ldots$.

Věta 4.5:

Nechť f je spojitá na nějakém intervalu $\langle x_0,x_0+\delta)$ a existuje $\lim\limits_{x\to x_0+}f'(x)=a$. Potom existuje $f'_+(x_0)$ a platí $f'_+(x_0)=a$. (Analogicky pro $f'_-(x_0)$ a $f'(x_0)$.)

Příklad 4.6, b*): Určení $f'_+(-1)$ pro $f(x)=\arcsin x$ pomocí Věty 4.5.

Příklad 4.8: Pro funkci $f(x)=x^2\cdot\cos\dfrac{1}{x}$, $x\neq 0$, $f(0)=0$, která je spojitá na $\mathbb{R}$, neexistuje $\lim\limits_{x\to 0}f'(x)$, existuje ale $f'(0)=0$ - tvrzení Věty 4.5 tedy nelze obrátit.

Přehled derivací elementárních funkcí:

$(\mathrm{e}^x)'$	$=\mathrm{e}^x$		$x\in\mathbb{R}$
$(\ln\lvert x\rvert)'$	$=\dfrac{1}{x}$		$x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$
$(a^x)'$	$=a^x\ln a$,	$a\in(0,\infty)$ pevné	$x\in\mathbb{R}$
$(\log_a\lvert x\rvert)'$	$=\dfrac{1}{x\ln a}$,	$a\in(0,1)\cup(1,\infty)$ pevné	$x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$
$(x^\alpha)'$	$=\alpha\,x^{\alpha-1}$,	α pevné	$x\in\mathbb{R}$ pro $\alpha\in\mathbb{N}_0$ [1]; $x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ pro $\alpha\in\mathbb{Z}^-$; $x\in(0,\infty)$ pro $\alpha\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$ [2]
$(\sin x)'$	$=\cos x$		$x\in\mathbb{R}$
$(\cos x)'$	$=-\sin x$		$x\in\mathbb{R}$
$(\mathrm{tg}\,x)'$	$=\dfrac{1}{\cos^2 x}$		$x\in\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi\,\middle\vert\,k\in\mathbb{Z}\right\}$
$(\mathrm{cotg}\,x)'$	$=-\dfrac{1}{\sin^2 x}$		$x\in\mathbb{R}\setminus\{k\pi\mid k\in\mathbb{Z}\}$
$(\arcsin x)'$	$=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$		$x\in(-1,1)$
$(\arccos x)'$	$=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$		$x\in(-1,1)$
$(\mathrm{arctg}\,x)'$	$=\dfrac{1}{1+x^2}$		$x\in\mathbb{R}$
$(\mathrm{arccotg}\,x)'$	$=-\dfrac{1}{1+x^2}$		$x\in\mathbb{R}$
$(\sinh x)'$	$=\cosh x$		$x\in\mathbb{R}$
$(\cosh x)'$	$=\sinh x$		$x\in\mathbb{R}$
$(\mathrm{tgh}\,x)'$	$=\dfrac{1}{\cosh^2 x}$		$x\in\mathbb{R}$
$(\mathrm{cotgh}\,x)'$	$=-\dfrac{1}{\sinh^2 x}$		$x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$

4.3 Derivace vyšších řádů

n-tá derivace (derivace řádu n) funkce f ... $f^{(n)}$ ... definujeme indukcí:

1) $n=1$: $f^{(1)}(x_0)=f'(x_0)$

2) $n>1$: předpokládejme, že existuje vlastní $f^{(n-1)}$ na nějakém okolí $U(x_0)$ a funkce $f^{(n-1)}$ má v x_0 derivaci - pak pokládáme: $f^{(n)}(x_0)=\big(f^{(n-1)}\big)'(x_0)$

pro $n=0$ píšeme: $f^{(0)}=f$

[1] pro $\alpha=x=0$ pokládáme (ovšem pouze zde): $0\cdot 0^{0-1}=0$

[2] pro některé racionální exponenty lze rozšířit na $\mathbb{R}$ nebo $\mathbb{R}\setminus\{0\}$