

KAPITOLA 1: Reálná čísla

(Význam logických a množinových symbolů je připomenut při jejich prvním použití v úvodní kapitole.)

1.1. Číselné množiny

<u>Přirozená čísla</u>	...	$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$
<u>nula</u>	...	$0, \quad \mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \dots\} = \mathbb{N} \cup \{0\}$
<u>Celá čísla</u>	...	$\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, 3, \dots\}$
<u>Racionální čísla</u>	...	$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \mid p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0 \right\}$

Věta 1.1: Číslo $\sqrt{2}$ není racionální.

Důkaz: Provedeme **sporem** (tj. budeme předpokládat, že tvrzení neplatí, a ukážeme, že to vede ke sporu; nebude proto možné, aby tvrzení neplatilo).

Nechť tedy tvrzení neplatí, tj. $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$, kde p, q jsou **nesoudělná** celá čísla (v takovémto tvaru lze zřejmě zapsat každé racionální číslo). Pak ovšem $2 = (\sqrt{2})^2 = \left(\frac{p}{q}\right)^2 = \frac{p^2}{q^2}$, tj. $2q^2 = p^2$. Tedy p^2 je sudé číslo, což ale znamená, že i p je sudé číslo. Kdyby totiž p bylo liché, pak by pro vhodné celé číslo k platilo $p = 2k + 1$. To by ale znamenalo, že p^2 je liché číslo, protože $(2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$. Jenže my víme, že p^2 je sudé. Proto p nemůže být liché a musí být sudé. Protože p je sudé, existuje celé číslo l takové, že $p = 2l$. Z rovnosti $2q^2 = p^2$ pak ale dostáváme, že $2q^2 = (2l)^2 = 4l^2$, tj. $q^2 = 2l^2$. Jenže to znamená, že q^2 je sudé, a tedy i q je sudé. A to je ve sporu s předpokladem, že p a q jsou čísla nesoudělná. Proto číslo $\sqrt{2}$ nelze zapsat jako podíl dvou nesoudělných celých čísel, takže to není číslo racionální.

Poznámka: Desetinný rozvoj každého racionálního čísla je periodický a každé číslo s periodickým desetinným rozvojem je racionální.

Příklad 1.1: Vyjádřete číslo $b = 0, \overline{9}$ jako podíl dvou celých čísel.

Řešení: Protože je délka periody 1, vynásobíme číslo a číslem 10^1 a odečteme b :

$$\begin{array}{rcl} 10^1 b & = & 10b = 9, \overline{9} \\ -b & = & -0, \overline{9} \\ \hline 9b & = & 9 \end{array}$$

$$\text{Tedy } 0, \overline{9} = \frac{9}{9} = 1 !$$

Podobným způsobem lze najít vyjádření ve tvaru podílu dvou celých čísel i pro ostatní čísla s periodickým desetinným rozvojem, jen číslo násobíme číslem 10^k , kde k je délka jeho periody.

Reálná čísla ... \mathbb{R} – lze je vyjádřit desetinným rozvojem (konečným nebo nekonečným);
periodu 9 neuvažujeme (kvůli jednoznačnosti vyjádření - viz Příklad 1.1)

Iracionální čísla ... $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

1.2. Reálná čísla

Intervaly ($a, b \in \mathbb{R}$)

- $\langle a, b \rangle = \{ x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b \}$... **uzavřený** (také : $[a, b]$)
- $(a, b) = \{ x \in \mathbb{R} \mid a < x < b \}$... **otevřený** (někdy také : $] a, b [$)
- $\langle a, b \rangle = \{ x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b \}$... **polouzavřený**
- $(a, b] = \{ x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b \}$... **polouzavřený**

Absolutní hodnota čísla $a \in \mathbb{R}$

- $|a| = a$ pro $a \geq 0$
- $|a| = -a$ pro $a \leq 0$

Platí pro všechna $a, b, c \in \mathbb{R}$:

$$\text{a) } |a| = |-a|, \quad |a \cdot b| = |a| \cdot |b|, \quad \left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|} \quad \text{pro } b \neq 0$$

$$\text{!!! b) } |a + b| \leq |a| + |b| \quad \dots \quad \text{trojúhelníková nerovnost}$$

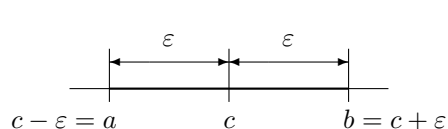
$$\text{c) } |c - a| \geq |c| - |a| \quad (\text{v b) stačí vzít } b = c - a)$$

Platí pro $c, x, \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$:

- $|x - c| = \varepsilon \Leftrightarrow x \in \{c - \varepsilon, c + \varepsilon\}$ (tj. vzdálenost x od c je rovna ε)
- $|x - c| < \varepsilon \Leftrightarrow c - \varepsilon < x < c + \varepsilon$ (tj. $x \in (c - \varepsilon, c + \varepsilon)$)
- $|x - c| \leq \varepsilon \Leftrightarrow c - \varepsilon \leq x \leq c + \varepsilon$ (tj. $x \in \langle c - \varepsilon, c + \varepsilon \rangle$)

c – střed intervalu

ε – poloměr intervalu

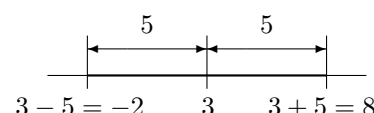


$$c = \frac{a+b}{2} \quad (\text{pak } \varepsilon = c - a = b - c)$$

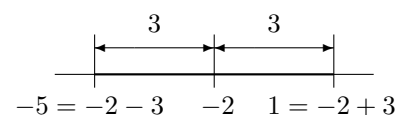
$$\varepsilon = \frac{b-a}{2} \quad (\text{pak } c = a + \varepsilon = b - \varepsilon)$$

např.:

- $|x - 3| < 5 \quad \dots \quad x \in (3 - 5, 3 + 5) = (-2, 8)$



- $x \in \langle -5, 1 \rangle \quad \dots \quad c = \frac{-5+1}{2} = -2, \quad \varepsilon = \frac{1-(-5)}{2} = 3$
 $\dots \quad |x - (-2)| \leq 3, \quad \text{tj.} \quad |x + 2| \leq 3$



Definice:

Okolím bodu $c \in \mathbb{R}$ o poloměru $\varepsilon > 0$ nazýváme množinu

$$U_\varepsilon(c) = \{x \in \mathbb{R} \mid |x - c| < \varepsilon\} \quad [= (c - \varepsilon, c + \varepsilon)].$$

Prstencovým okolím bodu $c \in \mathbb{R}$ o poloměru $\varepsilon > 0$ nazýváme množinu

$$P_\varepsilon(c) = U_\varepsilon(c) \setminus \{c\} \quad [= (c - \varepsilon, c) \cup (c, c + \varepsilon)].$$

Pravým (levým) okolím bodu $c \in \mathbb{R}$ o poloměru $\varepsilon > 0$ nazýváme množinu

$$U_\varepsilon^+(c) = \langle c, c + \varepsilon \rangle \quad (U_\varepsilon^-(c) = (c - \varepsilon, c])$$

Pravým (levým) prstencovým okolím bodu $c \in \mathbb{R}$ o poloměru $\varepsilon > 0$ nazýváme množinu

$$P_\varepsilon^+(c) = (c, c + \varepsilon) \quad (P_\varepsilon^-(c) = (c - \varepsilon, c))$$

Poznámka: Dolní index, udávající poloměr okolí, často vynecháváme.

1.3. Supremum a infimum

Definice:

Řekneme, že $b \in M$ je **největším prvkem** (maximem) množiny $M \subset \mathbb{R}$ (píšeme $b = \max M$), jestliže v M neexistuje prvek větší než b .

Řekneme, že $a \in M$ je **nejmenším prvkem** (minimem) množiny $M \subset \mathbb{R}$ (píšeme $a = \min M$), jestliže v M neexistuje prvek menší než a .

Příklad 1.2: a) $\min\{-2, 3, 8, 25, 57\} = -2, \quad \max\{-2, 3, 8, 25, 57\} = 57;$

b) $\min \mathbb{N} = 1, \quad \max \mathbb{N}$ neexistuje;

c) $\min\{1 - \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\} = 0 \quad (= 1 - \frac{1}{1}), \quad \max\{1 - \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$ neexistuje;

d) $\min\{x \mid 3 < x \leq 6\}$ neexistuje, $\max\{x \mid 3 < x \leq 6\} = 6$.

Příklad 1.3: Celá část čísla $x \in \mathbb{R}$: $[x] = \max\{k \in \mathbb{Z} \mid k \leq x\} \quad (\in \mathbb{Z});$

Definice :

Číslo $K \in \mathbb{R}$ nazýváme **horní mezí** množiny $M \subset \mathbb{R}$, jestliže pro všechna $x \in M$ platí $x \leq K$. Pokud existuje nějaká horní mez množiny $M \subset \mathbb{R}$, říkáme, že množina M je **shora omezená**.

Číslo $L \in \mathbb{R}$ nazýváme **dolní mezí** množiny $M \subset \mathbb{R}$, jestliže pro všechna $x \in M$ platí $x \geq L$. Pokud existuje nějaká dolní mez množiny $M \subset \mathbb{R}$, říkáme, že množina M je **zdola omezená**.

Řekneme, že množina $M \subset \mathbb{R}$ je **omezená**, jestliže je omezená shora i zdola.

Poznámky: 1) Množina $M \subset \mathbb{R}$ je omezená, právě když existuje $S \in \mathbb{R}$ takové, že $|x| \leq S$ pro všechna $x \in M$. Jestliže totiž takové číslo S existuje, pak pro všechna $x \in M$ platí $-S \leq x \leq S$. Naopak, pokud pro všechna $x \in M$ je $L \leq x \leq K$, potom pro ně také platí $|x| \leq \max\{|K|, |L|\}$.

2) Má-li množina $M \subset \mathbb{R}$ nějakou horní mez, pak jich má nekonečně mnoho. Je-li totiž K horní mezí množiny M , pak je horní mezí také každé číslo větší než K . Analogicky pro dolní meze: Je-li L dolní mezí množiny M , pak je dolní mezí také každé číslo menší než L .

Příklad 1.4: a) $\{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x\}$... množina je omezená jen zdola (např. $L = 0$ nebo $L = -1$, $L = -158,6$);

b) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -3\}$... množina je omezená jen shora (např. $K = -3$ nebo $K = 0$, $K = \sqrt{3}$);

c) $\langle -5, 1 \rangle$... množina je omezená shora i zdola, tj. je omezená (např. $S = 5$ nebo $S = 5,01$, $S = 3596$);

d) $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 > 10\}$... množina není omezená ani shora ani zdola (jde o množinu $(-\infty, -\sqrt{10}) \cup (\sqrt{10}, \infty)$).

Definice :

Řekneme, že číslo $b \in \mathbb{R}$ je **supremem** neprázdné množiny $M \subset \mathbb{R}$ (píšeme $b = \sup M$), jestliže je nejmenší horní mez množiny M .

Řekneme, že číslo $a \in \mathbb{R}$ je **infimem** neprázdné množiny $M \subset \mathbb{R}$ (píšeme $a = \inf M$), jestliže je největší dolní mez množiny M .

Poznámka: Pro supremum b množiny M tedy platí:

- Každý prvek množiny M je menší nebo roven b (protože b je horní mez).
- Vezmeme-li jakékoliv číslo c menší než b , pak už to není horní mez (b je nejmenší horní mez). Tedy v M najdeme prvek, který je větší než c .

Analogicky pro infimum a množiny M platí:

- Každý prvek množiny M je větší nebo roven a (protože a je dolní mez).
- Vezmeme-li jakékoliv číslo c větší než a , pak už to není dolní mez (a je největší dolní mez). Tedy v M najdeme prvek, který je menší než c .

Platí: Má-li množina M největší (nejmenší) prvek, pak je tento prvek i supremem (infimem) množiny M .

Věta 1.2 (o supremu a infimu) : Nechť $M \subset \mathbb{R}$ je neprázdna množina. Je-li M shora omezená, pak existuje $\sup M \in \mathbb{R}$. Je-li M zdola omezená, pak existuje $\inf M \in \mathbb{R}$.

1.4. Rozšíření množiny reálných čísel

nevlastní čísla (hodnoty) ... $(+)\infty, -\infty$

$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$... **rozšířená reálná osa**

Uspořádání na $\overline{\mathbb{R}}$ – stejné jako na \mathbb{R} , jen navíc přidáváme

- $-\infty < +\infty$,
- $-\infty < a, \quad a < +\infty$ pro každé $a \in \mathbb{R}$

Neomezené intervaly ($a \in \mathbb{R}$)

- $(-\infty, a) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < a\}$
- $(-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq a\}$
- $(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\}$
- $[a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x\}$

Okolí bodů $+\infty, -\infty$ ($K, L \in \mathbb{R}$)

- $U_K(+\infty) = U_K^-(+\infty) = P_K(+\infty) = P_K^-(+\infty) = (K, +\infty),$
- $U_L(-\infty) = U_L^+(-\infty) = P_L(-\infty) = P_L^+(-\infty) = (-\infty, L)$

Poznámka: Všimněte si, že všechny intervaly i okolí, které uvažujeme, obsahují pouze reálná (tj. konečná) čísla.

Aritmetické operace s nevlastními hodnotami ($a \in \mathbb{R}$)

Definujeme:

- $a + \infty = \infty$ ($= a - (-\infty)$) $a - \infty = -\infty$ ($= a + (-\infty)$)
- $\infty + \infty = \infty$ ($= \infty - (-\infty)$) $-\infty - \infty = -\infty$ ($= -\infty + (-\infty)$)
- $a \cdot \infty = \begin{cases} \infty & \text{pro } a > 0 \\ -\infty & \text{pro } a < 0 \end{cases}$ $a \cdot (-\infty) = \begin{cases} -\infty & \text{pro } a > 0 \\ \infty & \text{pro } a < 0 \end{cases}$
- $\infty \cdot \infty = (-\infty) \cdot (-\infty) = \infty$ $\infty \cdot (-\infty) = -\infty$
- $\frac{\pm\infty}{a} = (\pm\infty) \cdot a^{-1}$ pro $a \neq 0$ $\frac{a}{\pm\infty} = 0$

Nedefinujeme:

- $\infty - \infty, \quad \infty + (-\infty)$
- $(\pm\infty) \cdot 0$
- $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}, \quad \frac{\pm\infty}{0}, \quad \frac{a}{0}$

Definice :

Nechť $M \subset \mathbb{R}$ je neprázdná množina. Je-li M shora neomezená, pak pokládáme $\sup M = +\infty$, je-li M zdola neomezená, pokládáme $\inf M = -\infty$.

Poznámka: Nyní už má supremum a infimum každá neprázdná podmnožina reálných čísel. Kdybychom chtěli definovat supremum i pro prázdnou množinu tak, aby mělo analogické vlastnosti jako v případě množin neprázdných (viz poznámku za definicí suprema a infima omezené množiny), museli bychom položit $\sup \emptyset = -\infty$. Prázdná množina totiž neobsahuje žádný prvek, takže neobsahuje ani žádný prvek, který by byl větší než $-\infty$. Tedy $-\infty$ je horní mezí prázdné množiny. A vzhledem k uspořádání na \mathbb{R} je to horní mez ze všech nejmenší. Infimum prázdné množiny by analogicky muselo být definováno rovností $\inf \emptyset = +\infty$. Prázdná množina by pak byla jedinou podmnožinou reálných čísel, která by měla větší infimum než supremum.

Příklad 1.5: a) pro $M = \{-2, 3, 8, 25, 57\}$ platí $\inf M = \min M = -2$, $\sup M = \max M = 57$;

b) pro $M = \mathbb{N}$ máme $\inf M = \min M = 1$, $\sup M = +\infty$;

c) pro $M = \{1 - \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$ je $\inf M = \min M = 0$, $\sup M = 1$;

d) pro $M = \{x \mid 3 < x \leq 6\}$ platí $\inf M = 3$, $\sup M = \max M = 6$.

(Srovnejte s Příkladem 1.2)

1.5. Dodatky

Věta 1.3: Jsou-li a, b reálná čísla, $a < b$, pak v intervalu (a, b) leží alespoň jedno racionální číslo a alespoň jedno číslo iracionální. Speciálně mezi každými dvěma racionálními čísly leží alespoň jedno číslo iracionální a mezi každými dvěma iracionálními čísly leží alespoň jedno číslo racionální.

Důkaz: Není složitý, ale protože bychom museli probírat hodně různých případů, nebudeme ho tu provádět.

Důsledek 1.4: Jsou-li a, b reálná čísla, $a < b$, pak v intervalu (a, b) leží nekonečně mnoho racionálních čísel a také nekonečně mnoho čísel iracionálních.

Důkaz: Větu 1.3 aplikujeme postupně na intervaly (a, c_n) , kde c_1 je (i)racionální číslo ležící v intervalu (a, b) a pro $n \geq 1$ je c_{n+1} (i)racionální číslo ležící v intervalu (a, c_n) . Protože pro každé n platí $c_{n+1} \in (a, c_n) \subset (a, b)$, leží všechna čísla c_n v intervalu (a, b) , jak jsme požadovali. \square

Věta 1.5 (princip vnořených intervalů):

- a) Necht' $I_n = \langle a_n, b_n \rangle$, $n = 1, 2, \dots$, jsou takové uzavřené intervaly, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí $I_{n+1} \subset I_n$. Pak $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n \neq \emptyset$ (tj. všechny intervaly I_n mají společný alespoň jeden bod).
- b) Jestliže navíc ke každému $\varepsilon > 0$ existuje interval I_k takový, že $b_k - a_k < \varepsilon$ (a tedy i $b_m - a_m < \varepsilon$ pro všechna $m > k$), pak $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$ obsahuje jediný bod.

Poznámka: Ve Větě 1.5 je podstatné, že intervaly I_n jsou uzavřené. Např. pro intervaly $I_n = (0, \frac{1}{n})$ platí $I_{n+1} \subset I_n$, žádný společný bod ale tyto intervaly nemají.

Důkaz Věty 1.5: a) Každé a_n je dolní mezí množiny $B = \{b_1, b_2, \dots\}$, tedy pro každé n je $a_n \leq \inf B \leq b_n$. To znamená, že $\inf B \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n$.

b) Dokážeme sporem: Předpokládejme, že existují čísla $x < y$ v $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n$. Pak pro každé $n \in \mathbb{N}$ musí platit $a_n < x < y < b_n$, a tedy také $b_n - a_n > y - x > 0$. To je ovšem ve sporu s předpokladem věty, že ke každému $\varepsilon > 0$ existuje interval I_k takový, že $b_k - a_k < \varepsilon$. Pro $\varepsilon < y - x$ takové I_k nenajdeme. \square

Vzájemná poloha bodu a množiny

- Bod $a \in \mathbb{R}$ je **vnitřním bodem** množiny $M \subset \mathbb{R}$, jestliže existuje jeho okolí, které celé leží v množině M . Zřejmě pak $a \in M$. Množinu všech vnitřních bodů množiny M nazýváme **vnitřek** množiny M a značíme M° .
- Bod $a \in \mathbb{R}$ je **hraničním bodem** množiny $M \subset \mathbb{R}$, jestliže každé jeho okolí má neprázdný průnik jak s množinou M , tak i s jejím doplňkem $\mathbb{R} \setminus M$, tj. každé okolí bodu a obsahuje alespoň jeden bod, který v M leží, a alespoň jeden bod, který v M neleží. Samotný bod a nemusí v M ležet. Množinu všech hraničních bodů množiny M nazýváme **hranice** množiny M (a značíme ∂M).
- Bod $a \in \mathbb{R}$ je bodem **uzávěru** množiny $M \subset \mathbb{R}$, jestliže v každém jeho okolí leží alespoň jeden bod množiny M . Uzávěr množiny M značíme \overline{M} . Zřejmě platí $\overline{M} = M^\circ \cup \partial M$.
- Bod $a \in \mathbb{R}$ je **hromadným bodem** množiny $M \subset \mathbb{R}$, jestliže v každém jeho okolí leží nekonečně mnoho bodů množiny M . To nastává právě tehdy, když v každém prstencovém okolí bodu a leží alespoň jeden bod množiny M . Samotný bod a nemusí v M ležet.

Někdy se hodí povolit, aby a bylo $+\infty$ nebo $-\infty$, tj. $a \in \overline{\mathbb{R}}$. To uděláme při definici limity posloupnosti.

- Bod $a \in \mathbb{R}$ je **izolovaným bodem** množiny $M \subset \mathbb{R}$, jestliže $a \in M$ a existuje jeho prstencové okolí, v kterém neleží žádný bod množiny M .

Příklady: 1) Je-li I omezený interval (libovolného typu) s krajními body $a < b$, $c > b$ a $M = I \cup \{c\}$, pak vnitřními body množiny M jsou právě všechny body otevřeného intervalu (a, b) a hraničními body jsou body a, b a c (tj. $M^\circ = (a, b)$, $\overline{M} = \langle a, b \rangle \cup \{c\}$). Hromadnými body množiny M jsou všechny body uzavřeného intervalu $\langle a, b \rangle$. Množina M má jediný izolovaný bod c . (Nakreslete si obrázek.)

2) Množina \mathbb{N} všech přirozených čísel nemá žádný vnitřní bod, všechny její body jsou izolované. Je tvořena samými hraničními body, jejím jediným hromadným bodem v \mathbb{R} je $+\infty$, v \mathbb{R} žádný hromadný bod nemá.