KAPITOLA 11: Posloupnosti

Na posloupnosti jsme již v našem výkladu několikrát narazili. Vycházeli jsme při tom z toho, že posloupnost je speciálním případem funkce – funkcí definovanou na množině přirozených čísel. V této kapitole si shrneme, co již o posloupnostech víme, uvedeme si, jak by se některé pojmy spojené s funkcemi daly zavést speciálně pro posloupnosti (aniž by se tím měnil jejich význam) a přidáme některé další vlastnosti posloupností.

11.1 Úvod

posloupnost reálných čísel ... reálná funkce definovaná na množině přirozených čísel

$n-$**tý člen posloupnosti** ... funkční hodnota v bodě $n \in \mathbb{N}$

Analogicky lze definovat i posloupnost komplexních čísel.

Značení: členy posloupnosti ... $a_n,\ b_n$ apod.

posloupnost ... $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(a_1, a_2, a_3, \dots)$ (často také: $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ apod.)

Obecněji: Množinu $\mathbb{N}$ nahradíme množinou $\mathbb{N}_0$ nebo $\{k, k+1, k+2, \dots\}$, $k \in \mathbb{N}$ $(k \in \mathbb{Z})$ apod.

Platí: Na omezenost či neomezenost posloupnosti nemá vliv změna konečně mnoha jejích členů.

Platí: Posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je rostoucí právě tehdy, když pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$a_{n+1} > a_n \qquad \text{neboli} \qquad a_{n+1} - a_n > 0.$$

(Protože zde máme „právě tehdy, když“, je možné roustoucí posloupnosti definovat jako posloupnosti s touto vlastností.)

Analogicky pro další typy monotonie.

Poznámka: Uvažujme posloupnost $a_n = 8(n-1)(n-2)(n-3) + 7n$. Není těžké ověřit, že rozdíl dvou po sobě jdoucích členů této posloupnosti lze vyjádřit ve tvaru $a_{n+1} - a_n = 24(n - \frac{3}{2})^2 + 1$, a je tedy vždy kladný. Posloupnost je tudíž rostoucí. Podívejme se nyní na funkci $f(x) = 8(x-1)(x-2)(x-3) + 7x$. Stejně jako u posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ dostaneme pro tuto funkci, že pro každé $x \in D(f) = \mathbb{R}$ platí $f(x+1) - f(x) = 24(x - \frac{3}{2})^2 + 1$. Zvětší-li se tedy argument funkce o jedničku, zvětší se i její funkční hodnota. To ale ještě nezaručuje, že je funkce f rostoucí. Aby rostoucí byla, musela by se funkční hodnota zvětšit při jakémkoliv zvětšení argumentu. A to zde neplatí. Máme totiž např. $\frac{11}{5} > 2$ a zároveň $f(\frac{11}{5}) = 14 - \frac{17}{125} < 14 = f(2)$. Při zkoumání monotonie funkce tedy nestačí porovnat její hodnoty v bodech x a $x+1$.

Speciální případy posloupností

- **konstantní** posloupnost

  $a_n = A \in \mathbb{R}$ pro každé $n \in \mathbb{N}$

  nerostoucí a neklesající, omezená

- **aritmetická** posloupnost

  $a_1 \in \mathbb{R}$, $d \in \mathbb{R}$ ($d-$ **diference**)

  $a_{n+1} = a_n + d$ pro $n \in \mathbb{N}$, tj. $a_n = a_1 + (n-1)\cdot d$ pro $n \in \mathbb{N}$

  (rekurentní zadání) (zadání vzorcem pro n-tý člen)

  pro $d > 0$ rostoucí, zdola omezená, shora neomezená,

  pro $d < 0$ klesající, shora omezená, zdola neomezená

Platí: $$a_1 + a_2 + \ldots + a_n = s_n = \frac{(a_1 + a_n)\cdot n}{2} = \frac{(2a_1 + (n-1)\cdot d)\cdot n}{2}$$ (důkaz např. indukcí)

- **geometrická** posloupnost

  $a_1 \in \mathbb{R}, \quad q \in \mathbb{R} \quad (q -$ **kvocient** $)$

  $a_{n+1} = a_n \cdot q$ pro $n \in \mathbb{N}$, tj. $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$ pro $n \in \mathbb{N}$ (pokládáme tu $q^0 = 1$ pro každé $q \in \mathbb{R}$)

  pro $q = 1$ nebo $a_1 = 0$ konstantní

  pro $q > 1, \; a_1 > 0$ rostoucí, zdola omezená, shora neomezená,

  pro $q > 1, \; a_1 < 0$ klesající, shora omezená, zdola neomezená,

  pro $0 < q < 1, \; a_1 > 0$ klesající, omezená, pro $0 < q < 1, \; a_1 < 0$ rostoucí, omezená

  pro $-1 \leq q < 0, \; a_1 \neq 0$ není monotonní, je omezená,

  pro $q < -1, \; a \neq 0$ není monotonní, není omezená zdola ani shora

Platí: $a_1 + a_2 + \ldots + a_n \;=\; s_n \;=\; a_1 \cdot \dfrac{1-q^n}{1-q}$ pro $q \neq 1$ (důkaz např. indukcí)

$a_1 + a_2 + \ldots + a_n \;=\; s_n \;=\; n \cdot a_1$ pro $q = 1$ (zřejmé)

11.2. Limita posloupnosti a její vlastnosti

(Srovnejte s Kapitolou 3: Limta funkce.)

Definice :

Číslo $a \in \mathbb{R}$ je (**vlastní**) **limitou** posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, jestliže pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že

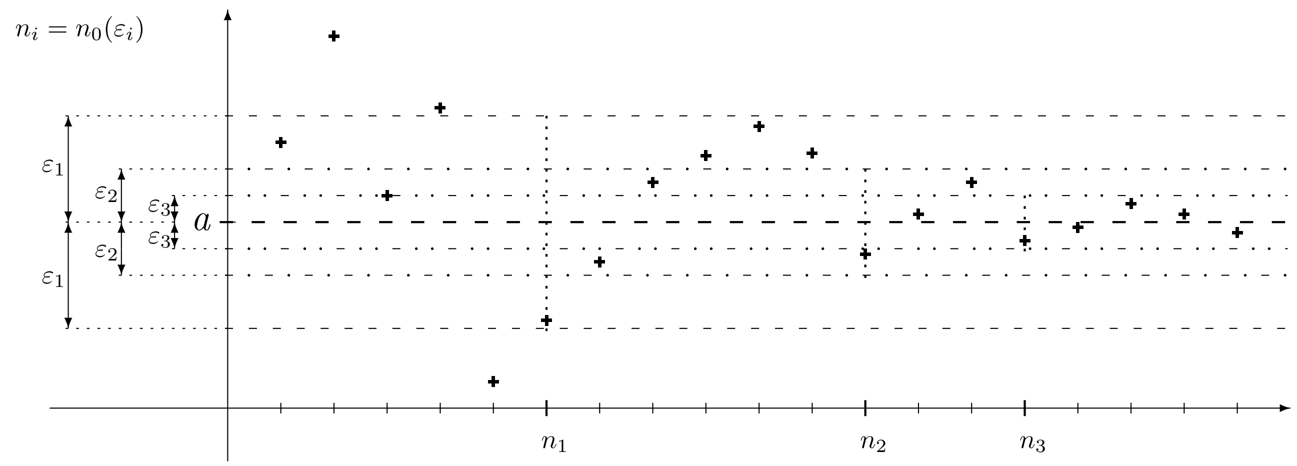
$$|\, a_n - a \,| \;<\; \varepsilon \qquad \text{pro všechna } \; n \in \mathbb{N}, \;\; n \geq n_0.$$

Má-li posloupnost vlastní limitu a, říkáme, že je **konvergentní** a že **konverguje k** a.

Píšeme: $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n, \quad a_n \longrightarrow a$ pro $n \to \infty, \quad a_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} a$.

Zápis pomocí kvantifikátorů:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \in \mathbb{R} \qquad \Leftrightarrow \qquad \forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists\, n_0 \in \mathbb{N} \;\; \forall\, n \in \mathbb{N}: \;\; (\, n \geq n_0 \;\Rightarrow\; |\, a_n - a \,| \;<\; \varepsilon \,)$$



Definice :

Řekneme, že posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ má (**nevlastní**) **limitu** $+\infty\; [\,-\infty\,]$, jestliže ke každému $K > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že

$$a_n \;>\; K \quad [\; a_n \;<\; -K \;] \qquad \text{pro všechna } \; n \in \mathbb{N}, \;\; n \geq n_0.$$

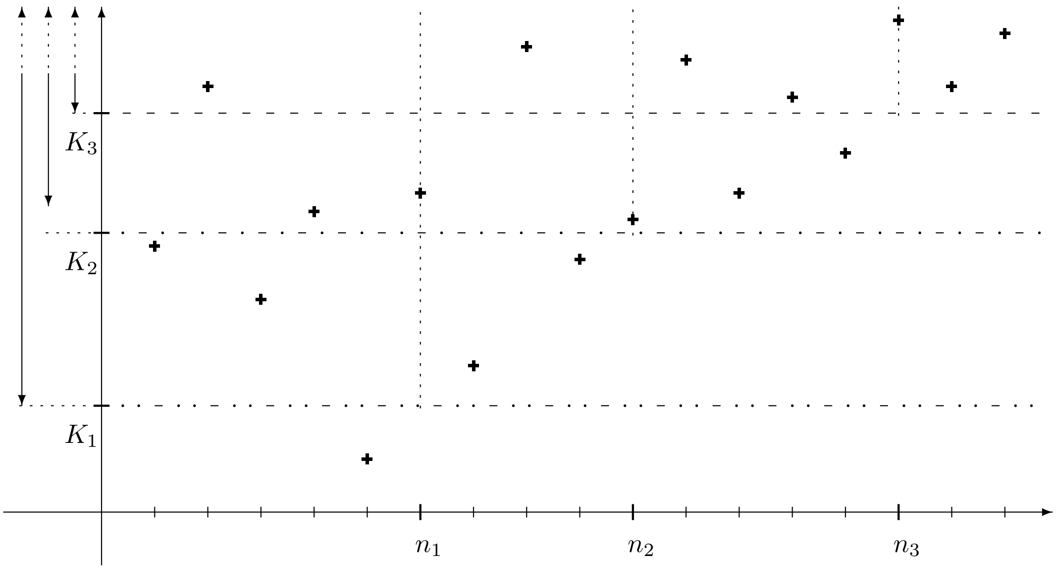
Má-li posloupnost limitu $+\infty\; [\,-\infty\,]$, říkáme, že **diverguje k** $+\infty\; [\,-\infty\,]$.

Zápis pomocí kvantifikátorů:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty \qquad \Leftrightarrow \qquad \forall K>0 \ \exists n_0\in\mathbb{N} \ \forall n\in\mathbb{N}: \ (n\geq n_0 \ \Rightarrow \ a_n > K)$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty \qquad \Leftrightarrow \qquad \forall K>0 \ \exists n_0\in\mathbb{N} \ \forall n\in\mathbb{N}: \ (n\geq n_0 \ \Rightarrow \ a_n < -K)$$

$n_i = n_0(K_i)$



Společná charakterizace posloupností s vlastní nebo nevlastní limitou pomocí okolí:

$\lim_{n\to\infty} a_n = a \in \overline{\mathbb{R}}$, jestliže ke každému okolí $U(a)$ bodu a existuje $n_0\in\mathbb{N}$ takové, že $a_n\in U(a)$ pro všechna $n\in\mathbb{N}$, $n\geq n_0$. Tj.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a\in\overline{\mathbb{R}} \qquad \Leftrightarrow \qquad \forall U(a) \ \exists n_0\in\mathbb{N} \ \forall n\in\mathbb{N}: \ (n\geq n_0 \ \Rightarrow \ a_n\in U(a)).$$

Platí: Změna konečně mnoha členů posloupnosti nemá vliv na existenci a hodnotu její limity.

Příklad 11.1: $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$. Zvolíme-li totiž k danému $\varepsilon>0$ index $n_0 = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right]+1$, pak pro každé $n\in\mathbb{N}$, $n\geq n_0$ platí $\left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{[\frac{1}{\varepsilon}]+1} < \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon}} = \varepsilon$.

Příklad 11.2: $\lim_{n\to\infty} n^p = +\infty$ pro $p>0$. Pro dané $K>0$ zde položíme $n_0 = \left[K^{1/p}\right]+1$ a pro $n\in\mathbb{N}$, $n\geq n_0$ dostaneme $n^p \geq \left(\left[K^{1/p}\right]+1\right)^p > \left(K^{1/p}\right)^p = K$.

Věta 11.1 (jednoznačnost limity):

Každá posloupnost má nejvýše jednu limitu.

Definice:

Nechť $(a_n)_{n=1}^\infty$ je posloupnost reálných čísel a $(k_n)_{n=1}^\infty$ je rostoucí posloupnost přirozených čísel. Pak posloupnost $(b_n)_{n=1}^\infty$, kde $b_n = a_{k_n}$ pro $n\in\mathbb{N}$, nazýváme **vybranou poslopností** z posloupnosti $(a_n)_{n=1}^\infty$ (**podposloupností** posloupnosti $(a_n)_{n=1}^\infty$).

Věta 11.2:

Posloupnost má limitu a právě tehdy, když každá z ní vybraná posloupnost má limitu a.

Příklad 11.3: Posloupnost $(a_n)_{n=1}^\infty$, kde $a_n = (-1)^n$, nemá limitu. Pro její podposloupnosti $\left(a_{2n-1}\right)_{n=1}^\infty$ a $\left(a_{2n}\right)_{n=1}^\infty$ totiž platí $\lim_{n\to\infty} a_{2n-1} = \lim_{n\to\infty} -1 = -1 \neq \lim_{n\to\infty} a_{2n} = \lim_{n\to\infty} 1 = 1$.

Věta 11.3 (o zachování znaménka):

Je-li $\lim\limits_{n\to\infty} a_n > 0$ $[\lim\limits_{n\to\infty} a_n < 0]$, pak existuje $n_1\in\mathbb{N}$ tak, že $a_n>0$ $[a_n<0]$ pro každé $n\geq n_1$.

Věta 11.4:

Každá konvergentní posloupnost je omezená.

> Všimněte si, že toto tvrzení je silnější než tvrzení Věty 3.5. Říká totiž, že množina všech členů konvergentní posloupnosti je omezená, zatímco z Věty 3.5 bychom to věděli jen pro množinu členů posloupnosti nějakým indexem počínaje.

Důkaz: Označme naši posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ a její limitu a. Z definice limity existuje pro $\varepsilon = 1$ počáteční index n_0 takový, že pro $n \geq n_0$ platí $|a_n - a| < 1$, tedy $a - 1 < a_n < a + 1$. Pro $n_0 = 1$ jsme hotovi, pro $n_0 > 1$ označíme $m = \min\{a_1, \ldots, a_{n_0-1}\}$ a $M = \max\{a_1, \ldots, a_{n_0-1}\}$. Protože pro každé $n \in \mathbb{N}$ je $\min\{a-1, m\} \leq a_n \leq \max\{a+1, M\}$, je posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ omezená. $\square$

Věta 11.5:

Každá monotonní posloupnost má limitu.

Věta 11.6 (o aritmetice limit):

Je-li $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$, pak

- $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \pm b_n) = a \pm b$,
- $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = a \cdot b$,
- $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{a}{b}$, je-li $b_n \neq 0$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$,

kdykoliv je výraz na pravé straně definován.

Důsledek 11.7:

Nechť $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ neexistuje. Pak platí:

a) Jestliže existuje vlastní $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$, pak neexistují $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \pm b_n)$.

b) Jestliže existuje vlastní $\lim\limits_{n\to\infty} b_n \neq 0$, pak neexistují $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n)$, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n}$.

Příklad 11.4: $\lim_{n\to\infty} \left((-1)^n + \frac{1}{n}\right)$ neexistuje

Věta 11.8:

a) Jestliže $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ a $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ je omezená, pak $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = 0$.

b) Jestliže $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = \infty$ a $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ je omezená, pak $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{b_n}{a_n} = 0$.

Věta 11.9:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ právě tehdy, když $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = 0$.

b) Jestliže $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \in \mathbb{R}^*$, pak $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = |a|$ (pokládáme $|\pm\infty| = \infty$).

Věta 11.10 (o dvou policajtech; o sevření):

Jsou-li $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, $(b_n)_{n=1}^{\infty}$, $(c_n)_{n=1}^{\infty}$ takové posloupnosti, že

a) existuje $n_1 \in \mathbb{N}$ tak, že $a_n \leq b_n \leq c_n$ pro všechna $n \geq n_1$,

b) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = a \in \mathbb{R}$,

pak existuje $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = a$ (tj. limita existuje a je rovna a).

Věta 11.11:

a) Jestliže $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$ a existuje $n_1 \in \mathbb{N}$ tak, že $a_n \leq b_n$ pro všechna $n \geq n_1$, pak $a \leq b$.

(tzv. **limitní přechod v nerovnosti**)

b) Jestliže $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$ $\left(\lim\limits_{n\to\infty} b_n = -\infty\right)$ a existuje $n_1 \in \mathbb{N}$ tak, že $a_n \leq b_n$ pro všechna $n \geq n_1$, pak $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = +\infty$ $\left(\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty\right)$.

Příklad 11.5: Určete $\lim\limits_{n\to\infty} a^n$ pro $a \in \mathbb{R}$.

Řešení: Pro $a > 0$ bychom mohli využít známé limity funkce a^x v nekonečnu a Heineovy věty 3.2. Ukážeme si ale i pro tato a, jak bychom mohli limitu získat jen z vlastností limity posloupnosti, které jsme si tu uvedli.

a) $\underline{a > 1}$

V tomto případě máme $a = 1 + h$, kde $h > 0$, tedy podle binomické věty

$$a^n = (1+h)^n = 1 + \underbrace{\binom{n}{1}}_{=n} \cdot h + \binom{n}{2} \cdot h^2 + \ldots + h^n.$$

Vynecháme-li v součtu všechny sčítance kromě druhého (jde o kladná čísla), dostaneme

$$a^n > nh.$$

Protože $n \to +\infty$, $h \to h > 0$, je $\lim\limits_{n\to\infty} nh = +\infty$, a tedy podle Věty 11.11, b) platí

$$\lim_{n\to\infty} a^n = +\infty.$$

b) $\underline{a = 1}$

Tentokrát jde o konstantní posloupnost (posloupnost samých jedniček), tedy

$$\lim_{n\to\infty} a^n = 1.$$

c) $\underline{0 < a < 1}$

V tomto případě je $\frac{1}{a} = A > 1$, tedy podle a) máme $\lim\limits_{n\to\infty} A^n = +\infty$. Odtud už s využitím Věty 11.6 (části o limitě podílu) okamžitě dostáváme

$$\lim_{n\to\infty} a^n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{A^n} = 0.$$

d) $\underline{a = 0}$

Zde jde opět o konstantní posloupnost (tentokrát posloupnost samých nul), tedy

$$\lim_{n\to\infty} a^n = 0.$$

e) $\underline{-1 < a < 0}$

Nyní zřejmě máme $|a| \in (0,1)$, a tedy podle c) je $\lim_{n\to\infty} |a^n| = \lim_{n\to\infty} |a|^n = 0$. Pomocí Věty 11.9, a) tak dostáváme

$$\lim_{n\to\infty} a^n = 0.$$

f) $\underline{a \leq -1}$

V tomto případě máme

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} a^{2n} = \begin{cases} 1 & \text{pro } a = -1, \\ \infty & \text{pro } a < -1, \end{cases}$$

$$\lim_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty} a^{2n+1} = \begin{cases} -1 & \text{pro } a = -1, \\ -\infty & \text{pro } a < -1. \end{cases}$$

Protože jsme našli dvě posloupnosti $(b_n)_{n=1}^{\infty}$, $(c_n)_{n=1}^{\infty}$ vybrané z posloupnosti $(a^n)_{n=1}^{\infty}$, které mají různé limity, dostáváme z Věty 11.2, že tentokrát

$$\lim_{n\to\infty} a^n \text{ neexistuje.}$$

Shrnutí:

$$\lim_{n\to\infty} a^n = \begin{cases} +\infty & \text{pro} \quad a > 1 \\ 1 & \text{pro} \quad a = 1 \\ 0 & \text{pro} \quad |a| < 1 \\ \text{neexistuje} & \text{pro} \quad a \leq -1 \end{cases}$$

Příklad 11.6: $$\lim_{n\to\infty} \frac{5^{n-1} - 5(-3)^n}{3^n - 5^{n+2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{5} \cdot 5^n - 5(-3)^n}{3^n - 25 \cdot 5^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{5} - 5\left(-\frac{3}{5}\right)^n}{\left(\frac{3}{5}\right)^n - 25} = \frac{\frac{1}{5} - 5 \cdot 0}{0 - 25} = -\frac{1}{125}$$

Některé užitečné limity

- $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$ pro $a > 0$

  $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!} = +\infty$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e}$ (Eulerovo číslo) viz skripta [JT-DIP] příklad 2.36
- $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = \begin{cases} +\infty & \text{pro} \quad a > 1 \\ 1 & \text{pro} \quad a = 1 \\ 0 & \text{pro} \quad |a| < 1 \\ \text{neexistuje} & \text{pro} \quad a \le -1 \end{cases}$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^k}{a^n} = \begin{cases} 0 & \text{pro} \ k \in \mathbb{R}, \quad a > 1 \\ +\infty & \text{pro} \ k \in \mathbb{R}, \quad a \in (\,0, 1\,) \end{cases}$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a^n}{n!} = 0$ pro $a \in \mathbb{R}$

Příklad 11.8: $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{3n+2}{3n+1}\right)^{6n+5} = \lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{3n+1}\right)^{6n+5} = \lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{3n+1}\right)^{2(3n+1)+3} =$

$= \lim\limits_{n\to\infty} \left(\left(1 + \frac{1}{3n+1}\right)^{3n+1}\right)^2 \cdot \left(1 + \frac{1}{3n+1}\right)^3 = \mathrm{e}^2 \cdot 1^3 = \mathrm{e}^2,$ kde jsme využili toho, že posloupnost se členy $\left(1 + \frac{1}{3n+1}\right)^{3n+1}$ je vybranou posloupností z posloupnosti $\left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right)_{n=1}^{\infty}$, a tedy má stejnou limitu.

Dodatky

Věta 11.12 (Bolzano-Weierstrass):
Z každé **omezené** posloupnosti reálných čísel lze vybrat konvergentní podposloupnost.

Věta 11.13:
Z každé **neomezené** posloupnosti reálných čísel lze vybrat podposloupnost, která má nevlastní limitu.

Důkaz: Mějme např. posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, která není omezená shora. Hledáme rostoucí posloupnost indexů $(k_n)_{n=1}^{\infty}$ takovou, že pro posloupnost $(b_n)_{n=1}^{\infty} = (a_{k_n})_{n=1}^{\infty}$ platí $\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$. Položme $k_1 = 1$. Označme k_2 nejmenší index takový, že $a_{k_2} > a_{k_1} + 1$. Protože posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ není omezená shora, takový index existuje. Ze stejného důvodu bude existovat i nejmenší index k_3 takový, že $a_{k_3} > a_{k_2} + 1$. Protože k_2 byl nejmenší index, pro který $a_{k_2} > a_{k_1} + 1$, a $a_{k_3} > a_{k_2} + 1 > a_{k_1} + 2$, je nutně $k_3 > k_2$. Opakováním této úvahy dojdeme k rostoucí posloupnosti indexů $(k_n)_{n=1}^{\infty}$ takové, že pro $b_n = a_{k_n}$ platí $\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$, neboť $b_n > b_{n-1} + 1 > b_{n-2} + 2 > \ldots > b_1 + (n-1)$. Kdyby nebyla posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ omezená zdola, postupovali bychom obdobně, jen bychom došli k podposloupnosti, která má limitu $-\infty$.

Věta 11.14 (Bolzano-Cauchyova podmínka):
Posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ konverguje právě tehdy, když platí

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \ \forall n, m \in \mathbb{N}: \ (\, n, m \ge n_0 \ \Rightarrow \ |a_n - a_m| < \varepsilon \,).$$

(Použijeme-li tuto podmínku, můžeme ukázat, že posloupnost má limitu, i když nevíme, jaká by hodnota limity měla být.)