

## Diagonalisace matic

Odpřednesenou látku naleznete v kapitolách 10.1, 10.3  
a 10.4 skript *Abstraktní a konkrétní lineární algebra*.

## Minulá přednáška

- ① Pojmy vlastní hodnota a vlastní vektor lineárního zobrazení.
- ② Věta o diagonalisovatelnosti čtvercových matic nad  $\mathbb{C}$ .

## Dnešní přednáška

- ① Diagonalisovatelnost matic nad  $\mathbb{C}$  a nad  $\mathbb{R}$ .
- ② Dvě aplikace: řešení rekurentních rovnic a funkce matic.<sup>a</sup>

---

<sup>a</sup>Tyto dvě aplikace nebudou zkoušeny!

## Připomenutí důležité vlastnosti tělesa $\mathbb{C}$

Každý polynom  $p(x)$  v  $\mathbb{C}[x]$  stupně  $n$  má přesně  $n$  kořenů (počítaných i s násobnostmi).<sup>a</sup>

<sup>a</sup>Této vlastnosti tělesa  $\mathbb{C}$  se říká algebraická uzavřenosť.

- ① Komplexní číslo  $\lambda$  je kořen polynomu  $p(x) \in \mathbb{C}[x]$  **násobnosti  $k$** , pokud platí rovnost  $p(x) = (x - \lambda)^k \cdot q(x)$  pro  $q(x) \in \mathbb{C}[x]$  a  $q(\lambda) \neq 0$ .
- ② Speciálně: číslo  $\lambda$  má jako kořen  $p(x)$  **násobnost nula** právě tehdy, když  $\lambda$  není kořenem polynomu  $p(x)$ .

## Důsledek (téma 08A, tvar věty o diagonalisaci pro $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ )

Pro čtvercovou matici  $\mathbf{A}$  nad  $\mathbb{C}$  jsou následující podmínky ekvivalentní:

- ① Matice  $\mathbf{A}$  diagonalisovatelná.
- ② Pro každé komplexní číslo  $\lambda$  platí: násobnost  $\lambda$  jako kořene polynomu  $\text{char}_{\mathbf{A}}(x)$  je rovna  $\dim(\text{eigen}(\lambda, \mathbf{A}))$ .

## Příklad

Pauliho matice<sup>a</sup> jsou následující tři matice nad  $\mathbb{C}$ :

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad Y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Všechny tyto matice jsou diagonalisovatelné:

- ① Matice  $Z$  již diagonální je.

---

<sup>a</sup>Jde o důležitý příklad v kvantové mechanice a **kvantovém počítání**. Matice  $X$ ,  $Y$  a  $Z$  jsou operátory spinu ve směrech os  $x$ ,  $y$ ,  $z$  a značívají se též  $\sigma_x$  (také:  $\sigma_1$ )     $\sigma_y$  (také:  $\sigma_2$ )     $\sigma_z$  (také:  $\sigma_3$ )

**Užitečná početní cvičení:** platí rovnosti

①  $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma_3^2 = -i \cdot \sigma_1\sigma_2\sigma_3 = \mathbf{E}_2$ .

②  $\{\sigma_j, \sigma_k\} = 2\delta_{jk}\mathbf{E}_2$ , kde  $\{\sigma_j, \sigma_k\} = \sigma_j\sigma_k + \sigma_k\sigma_j$  je tzv **Poissonova závorka** a  $\delta_{jk}$  je **Kroneckerův symbol**.

③  $[\sigma_j, \sigma_k] = \sum_{l=1}^3 2i\epsilon_{jkl}\sigma_l$ , kde  $[\sigma_j, \sigma_k] = \sigma_j\sigma_k - \sigma_k\sigma_j$  je tzv **komutátor** a  $\epsilon_{jkl}$  je **Levi-Civitův symbol**.



## Příklad (pokrač.)

- ② Diagonalisace matice  $X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ .

Platí  $\text{char}_X(x) = x^2 - 1 = (x - 1) \cdot (x + 1)$ .

Vlastní hodnoty a vlastní vektory matice  $X$  jsou:  $\lambda_1 = 1$ ,

$$\mathbf{t}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ a } \lambda_2 = -1, \mathbf{t}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Tudíž

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

a operátor  $X$  je diagonální v bázi  $(\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2)$ .

## Příklad (pokrač.)

- ③ Diagonalisace matice  $Y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$ .

Platí  $\text{char}_Y(x) = x^2 - 1 = (x - 1) \cdot (x + 1)$ .

Vlastní hodnoty a vlastní vektory matice  $Y$  jsou:  $\lambda_1 = 1$ ,

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix} \text{ a } \lambda_2 = -1, \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Tudíž

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

a operátor  $Y$  je diagonální v bázi  $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ .

## Jordanův tvar čtvercové matice

Ať  $\mathbf{A}$  je matici typu  $n \times n$  nad  $\mathbb{F}$  taková, že polynom  $\text{char}_{\mathbf{A}}(x)$  lze rozložit na součin lineárních faktorů.<sup>a</sup>

Potom lze dokázat, že  $\mathbf{A}$  je „téměř diagonalisovatelná“. Přesněji: platí  $\mathbf{A} \approx \mathbf{J}$ , kde

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \mathbf{B}_1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathbf{B}_2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{B}_3 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \mathbf{B}_p \end{pmatrix}$$

kde  $\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, \dots, \mathbf{B}_p$  jsou tzv. Jordanovy segmenty rozměrů  $m_1 \times m_1, m_2 \times m_2, \dots, m_p \times m_p$ , kde  $m_1 + \dots + m_p = n$ .

O Jordanově tvaru budeme mluvit na příští přednášce (téma 09A).

<sup>a</sup>To platí například pro libovolnou matici nad  $\mathbb{C}$ .



## Příklad

Ať  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$  je regulární matice nad  $\mathbb{R}$ . Potom platí:

- ①  $\text{char}_{\mathbf{A}}(x) = (a - x)^2 + b^2 = x^2 - 2ax + (a^2 + b^2)$ .  
Diskriminant tohoto výrazu je  $-4b^2$ .

Matice  $\mathbf{A}$  je tedy nad  $\mathbb{R}$  diagonalisovatelná **pouze** v případě  $b = 0$ .

V tomto případě ale  $\mathbf{A}$  už je diagonální:  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$  a musí platit  $a \neq 0$ , protože  $\mathbf{A}$  je regulární.

Matice  $\mathbf{A}$  je tedy maticí změny měřítka (změna je stejná na obou souřadnicových osách).

## Příklad (pokrač.)

- ② V případě  $b \neq 0$  matice  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$  není nad  $\mathbb{R}$  diagonalisovatelná.

Matrice  $\mathbf{A}$  (chápaná jako matice nad  $\mathbb{C}$ ) má vlastní hodnoty

$$\lambda_1 = a + bi \text{ a } \lambda_2 = a - bi, \text{ protože}$$

$$\text{char}_{\mathbf{A}}(x) = x^2 - 2ax + (a^2 + b^2) = (x - (a + ib)) \cdot (x - (a - ib)).$$

Označme  $r = |\lambda_1| = |\lambda_2| = \sqrt{a^2 + b^2}$ . Dále označme jako  $\alpha$

úhel<sup>a</sup> mezi vektory  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  a  $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ .

Potom

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$$

To jest:  $\mathbf{A}$  je rotace o úhel  $\alpha$ , následovaná změnou měřítka.

<sup>a</sup>Úhlu  $\alpha$  se říká **argument** komplexního čísla  $a + bi$ . Platí tedy rovnost  $a + bi = r \cdot (\cos \alpha + i \sin \alpha) = r \cdot e^{i\alpha}$ .



## Tvrzení (klasifikace regulárních transformací roviny)

Ať  $\mathbf{M} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  je regulární a ať nemá 2-násobnou vlastní hodnotu. Pak  $\mathbf{M}$  je podobná buď

- ① matici  $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ , kde  $a \neq b$  jsou z  $\mathbb{R}$  a  $a \cdot b \neq 0$ ,

nebo

- ② matici  $\begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$ , kde  $r > 0$  a  $\alpha \in [0; 2\pi)$ .

### Slogan

Regulární transformace roviny bez 2-násobných vlastních hodnot jsou **pouze** dvou typů:

- ① Změny měřítka (změna měřítka je na každé souřadnicové ose **jiná**).
- ② Rotace následované změnou měřítka **stejnou** na obou souřadnicových osách.



## Důkaz (klasifikace regulárních transformací roviny).

- ① V případě, kdy  $\mathbf{M}$  je diagonalisovatelná nad  $\mathbb{R}$ , má  $\mathbf{M}$  dvě různé reálné vlastní hodnoty  $a, b$ . Tudíž  $\mathbf{M} \approx \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ , kde  $a \cdot b \neq 0$ , protože  $\mathbf{M}$  je regulární.
- ② V případě, kdy  $\mathbf{M}$  nad  $\mathbb{R}$  diagonalisovatelná není, má  $\text{char}_{\mathbf{M}}(x)$  komplexní kořen  $\lambda = a + bi$ , kde  $b \neq 0$ . Označme jako  $\mathbf{v}$  komplexní vlastní vektor příslušný vlastní hodnotě  $\lambda$ . Označme jako  $\mathbf{T}$  matici se sloupcí  $\mathbf{t}_1 = \text{Re}(\mathbf{v})$  (vektor reálných částí položek vektoru  $\mathbf{v}$ ) a  $\mathbf{t}_2 = \text{Im}(\mathbf{v})$  (vektor imaginárních částí položek vektoru  $\mathbf{v}$ ).

Potom platí rovnost  $\mathbf{M} = \mathbf{T} \cdot \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \cdot \mathbf{T}^{-1}$ .

Nyní stačí použít předchozí příklad. ■

## Výpočet mocnin diagonalisovatelné matice

Pro diagonalisovatelnou matici  $\mathbf{A}$  typu  $n \times n$  nad  $\mathbb{F}$  platí:

$$\mathbf{A} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{T}^{-1} \text{ pro nějakou regulární matici } \mathbf{T}.$$

Tudíž:  $\mathbf{A}^2 = \mathbf{A} \cdot \mathbf{A} = (\mathbf{T} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{T}^{-1}) \cdot (\mathbf{T} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{T}^{-1}) = \mathbf{T} \cdot \mathbf{D}^2 \cdot \mathbf{T}^{-1}$ .

Obecně:  $\mathbf{A}^k = \mathbf{T} \cdot \mathbf{D}^k \cdot \mathbf{T}^{-1}$ , pro všechna přirozená čísla  $k \geq 0$ .

Protože mocniny diagonální matice lze počítat velmi rychle, lze rychle počítat i mocniny diagonalisovatelných matic.

Ukážeme dvě aplikace umocňování:

- ① Řešení lineárních homogenních rekurentních rovnic.  
To je důležité při analýze složitosti rekursivních algoritmů.
- ② Základní myšlenku funkcí matic.  
To je důležité ve fyzice, grafice, kvantovém počítání, ...

## Příklad (Fibonacciho posloupnost)

Hledáme posloupnost čísel  $F(n)$ , splňující **lineární rekurentní rovnici**  $F(n+2) = F(n+1) + F(n)$ , pro všechna př. č.  $n \geq 0$ .

Cíl: chceme **explicitní vzorec** pro  $F(n)$ ,  $n \geq 0$ .

Evidentně: známe-li  $F(0)$  a  $F(1)$ , známe všechna  $F(n)$ .<sup>a</sup>

- ① Vytvoříme **generující matici**  $\mathbf{F} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$  pro kterou platí:

$$\mathbf{F} \cdot \begin{pmatrix} F(0) \\ F(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F(1) \\ F(2) \end{pmatrix}, \text{ obecně } \mathbf{F}^n \cdot \begin{pmatrix} F(0) \\ F(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F(n) \\ F(n+1) \end{pmatrix}.$$

- ② Matice  $\mathbf{F}$  je diagonalisovatelná nad  $\mathbb{R}$ :  $\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ,  $\lambda_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \mathbf{T}^{-1} \cdot \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}, \quad \mathbf{T} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F}^n = \mathbf{T} \cdot \mathbf{D}^n \cdot \mathbf{T}^{-1}$$

<sup>a</sup>Požadavkům  $F(0) = x_0$  a  $F(1) = x_1$  se říká **počáteční podmínka**. Pro klasickou Fibonacciho posloupnost jde o  $F(0) = 1$ ,  $F(1) = 1$ .

## Příklad (Fibonacciho posloupnost, pokrač.)

$$\begin{aligned}
 ③ \quad & \begin{pmatrix} F(n) \\ F(n+1) \end{pmatrix} = \mathbf{T} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 \\ 0 & \lambda_2^n \end{pmatrix} \cdot \mathbf{T}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} F(0) \\ F(1) \end{pmatrix} = \\
 & \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 \\ 0 & \lambda_2^n \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_2 & -1 \\ -\lambda_1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} F(0) \\ F(1) \end{pmatrix} = \\
 & \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 \\ 0 & \lambda_2^n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_2 & -1 \\ -\lambda_1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} F(0) \\ F(1) \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Takže:  $F(n) = \frac{\lambda_1^n \cdot \lambda_2 - \lambda_2^n \cdot \lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} \cdot F(0) + \frac{-\lambda_1^n + \lambda_2^n}{\lambda_2 - \lambda_1} \cdot F(1)$

V klasickém případě (tj když  $F(0) = F(1) = 1$ ), je

$$\begin{aligned}
 F(n) &= \frac{\lambda_1^n \cdot \lambda_2 - \lambda_2^n \cdot \lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} + \frac{-\lambda_1^n + \lambda_2^n}{\lambda_2 - \lambda_1} = \\
 &= \lambda_1^n \cdot \frac{\lambda_2 - 1}{\lambda_2 - \lambda_1} + \lambda_2^n \cdot \frac{1 - \lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1}
 \end{aligned}$$

## Poznámky (lineární homogenní rekurence $k$ -tého řádu)

Obdobným způsobem lze řešit jakoukoli **homogenní lineární rekurentní rovnici  $k$ -tého řádu**: hledáme posloupnost  $X(n)$  prvků  $\mathbb{F}$ , které splňují

$$X(n+k) = a_1 X(n+k-1) + a_2 X(n+k-2) + \dots + a_k X(n)$$

pro všechna přirozená čísla  $n \geq 0$ , kde  $a_1, \dots, a_k$  jsou v  $\mathbb{F}$ .

Jediné, co potřebujeme, je diagonalisovatelnost generující matice.

- ① Řešení rekurentních rovnic hraje zásadní úlohu při **analýze složitosti rekursivních algoritmů**.
- ② Podobné postupy fungují i pro **lineární homogenní diferenciální rovnice  $k$ -tého řádu**. Viz Dodatek O **skript**.

## Příklad (exponenciála matice)

Víme, že funkce  $e^x$  má Taylorův rozvoj  $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ .

Pro čtvercovou diagonalisovatelnou matici  $\mathbf{X} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{T}^{-1}$  definujeme

$$\exp(\mathbf{X}) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\mathbf{X}^n}{n!} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\mathbf{T} \cdot \mathbf{D}^n \cdot \mathbf{T}^{-1}}{n!} = \mathbf{T} \cdot \underbrace{\left( \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\mathbf{D}^n}{n!} \right)}_{=e^{\mathbf{D}}} \cdot \mathbf{T}^{-1}$$

Konvergenci této řady musíme chápat ve smyslu normy.<sup>a</sup>

Lze ukázat, že matice  $\exp(\mathbf{D})$  je diagonální, a že platí  $\exp(\mathbf{D}) = (\delta_{ij} \cdot e^{d_{ij}})$ .

<sup>a</sup>To je velmi technický pojem, nebudeme o něm mluvit. Více například v knize Roger A. Horn, Charles J. Johnson, *Matrix analysis*, Cambridge University Press, 2012, nebo v přednášce A0B01PAN (Pokročilá analýza), nebo v kapitole 13.2 skript. Analogicky exponenciále lze postupovat pro obecnou funkci  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  (případně  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ), která má Taylorův rozvoj.

