

## Lineární závislost a nezávislost

Odpřednesenou látku naleznete v kapitole 3.1 skript  
*Abstraktní a konkrétní lineární algebra.*

## Minulé přednášky

- ① Lineární kombinace.
- ② Definice lineárního obalu.
- ③ Definice lineárního podprostoru.

## Dnešní přednáška

- ① Lineární závislost/nezávislost seznamu a množiny vektorů v lineárním prostoru.

## Připomenutí

- ① Pro



v  $\mathbb{R}^3$  je  $\text{span}(\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2\})$  rovina procházející počátkem se směrem  $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)$ .

- ② Pro



v  $\mathbb{R}^3$ , lineární obal  $\text{span}(\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2\})$  rovina není.

V množině  $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2\}$  je (například) vektor  $\mathbf{a}_2$  „zbytečný“ vzhledem k tvorbě lineárních kombinací.<sup>a</sup>

Platí totiž  $\text{span}(\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2\}) = \text{span}(\{\mathbf{a}_1\})$ .

---

<sup>a</sup>Za chvíli budeme říkat, že množina  $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2\}$  je lineárně závislá.

## Definice

Lineární kombinace  $a_1 \cdot \vec{x}_1 + \cdots + a_n \cdot \vec{x}_n$  je **triviální**, pokud  $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 0$ .

V opačném případě je lineární kombinace  $a_1 \cdot \vec{x}_1 + \cdots + a_n \cdot \vec{x}_n$  **netriviální**.

## Poznámky

- ① Triviální lineární kombinace je **vždy** rovna nulovému vektoru: rovnost  $0 \cdot \vec{x}_1 + \cdots + 0 \cdot \vec{x}_n = \vec{0}$  platí, protože  $0 \cdot \vec{x} = \vec{0}$ , pro jakýkoli vektor  $\vec{x}$  (dokázáno v tématu 01B).
- ② I netriviální lineární kombinace může být rovna nulovému vektoru: například  $\vec{x} - \vec{x} = \vec{0}$ , pro jakýkoli vektor  $\vec{x}$ .
- ③ Lineární kombinaci, která dává nulový vektor, také říkáme **nulová kombinace**.<sup>a</sup>

---

<sup>a</sup>**Pozor:** triviální kombinace je **vždy** nulová. Nulová kombinace **nemusí** být triviální.

## Slogany pro lineární závislost a lineární nezávislost

Mějme **kolekci<sup>a</sup>** vektorů. Chceme podrobně studovat následující dvě situace:<sup>b</sup>

- ① Při tvorbě lineárních kombinací z naší kolekce je **každý vektor** z naší kolekce **důležitý**. Tomuto jevu budeme říkat **lineární nezávislost**.
- ② Při tvorbě lineárních kombinací z naší kolekce je **některý vektor** z naší kolekce **nedůležitý**. Tomuto jevu budeme říkat **lineární závislost**.

---

<sup>a</sup>Kolekcí vektorů tu rozumíme bud' seznam vektorů nebo množinu vektorů.

<sup>b</sup>Pozor: Přešeme slogan. Nemusíme se tedy trápit nad přesností našeho vyjadřování. Slogany mají pouze pomáhat. Slogany nemohou nahradit přesná znění definic.

## Definice (lineární nezávislost seznamu vektorů)

Řekneme, že seznam  $S$  vektorů je **lineárně nezávislý**, pokud platí jedna z následujících dvou podmínek:

- ① Seznam  $S$  je prázdný.
- ② Seznam  $S$  je tvaru  $(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n)$  a platí:<sup>a</sup> jestliže  $a_1 \cdot \vec{x}_1 + \dots + a_n \cdot \vec{x}_n = \vec{o}$ , pak  $a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0$ .

Řekneme, že seznam  $S$  je **lineárně závislý**, pokud není lineárně nezávislý.

---

<sup>a</sup>Pozor: jde o implikaci (tj., jde o tvrzení ve tvaru **jestliže... , potom...**)

## Příklady

- ① Prázdný seznam () je **vždy** lineárně nezávislý.
- ② Seznam  $(\vec{o})$  je **vždy** lineárně závislý.
- ③ Seznam, ve kterém se opakuje vektor, je **vždy** lineárně závislý.

## Příklad

Nulová lineární kombinace  $x_1 \cdot \mathbf{a}_1 + \dots + x_s \cdot \mathbf{a}_s = \mathbf{0}$  v  $\mathbb{F}^r$ , kde

$$\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{r1} \end{pmatrix}, \dots, \mathbf{a}_s = \begin{pmatrix} a_{1s} \\ a_{2s} \\ \vdots \\ a_{rs} \end{pmatrix}$$

kóduje soustavu  $r$  lineárních rovnic

$$x_1 a_{11} + x_2 a_{12} + \dots + x_s a_{1s} = 0$$

$$x_1 a_{21} + x_2 a_{22} + \dots + x_s a_{2s} = 0$$

⋮

$$x_1 a_{r1} + x_2 a_{r2} + \dots + x_s a_{rs} = 0$$

o  $s$  neznámých nad  $\mathbb{F}$ .

Seznam  $(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_s)$  je lineárně nezávislý právě tehdy, když tato soustava má pouze **triviální** řešení  $x_1 = x_2 = \dots = x_s = 0$ .



## Definice (lineární nezávislost množiny vektorů)

Ať  $M$  je množina vektorů v lineárním prostoru  $L$ . Řekneme, že  $M$  je **lineárně nezávislá**, pokud platí jedna z následujících dvou podmínek:

- ① Množina  $M$  je prázdná.
- ② Množina  $M$  je neprázdná a navíc platí: <sup>a</sup> jestliže  $n > 0$  je přirozené číslo,  $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n$  jsou vektory z  $M$  a  $a_1, \dots, a_n$  jsou skaláry z  $\mathbb{F}$  a platí  $a_1 \cdot \vec{x}_1 + \dots + a_n \cdot \vec{x}_n = \vec{o}$ , potom  $a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0$ .

Řekneme, že množina  $M$  je **lineárně závislá**, pokud není lineárně nezávislá.

---

<sup>a</sup>Pozor: jde o implikaci (tj., jde o tvrzení ve tvaru **jestliže... , potom...**)

## Příklady

- ①  $\{\vec{o}\}$  je lineárně závislá množina v jakémkoli lineárním prostoru  $L$ .

Obecněji: at'  $\vec{o} \in M$ , potom  $M$  je lineárně závislá množina.

- ② Množina  $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$  je lineárně nezávislá množina v  $\mathbb{R}^3$ .

Obecněji: definujte pro  $i = 1, \dots, n$ , vektor  $\mathbf{e}_i \in \mathbb{R}^n$  jako  $n$ -tici mající na  $i$ -té posici 1 a všude jinde 0. Potom  $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$  je lineárně nezávislá množina v  $\mathbb{R}^n$ .

- ③ Nekonečná množina  $\{1, x, x^2, x^3, \dots\}$  je lineárně nezávislá množina v prostoru polynomů  $\mathbb{R}[x]$ .

## Příklady (pokrač.)

- ④ Množina  $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -7 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ -9 \end{pmatrix} \right\}$  je lineárně závislá množina v  $\mathbb{R}^3$ .

Důvod:

$$2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -7 \\ 3 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ -9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

## „Bezstarostné“ zmenšení lineárně nezávislé množiny

Ať  $M$  je lineárně nezávislá množina vektorů v lineárním prostoru  $L$ .  
Jakmile  $N \subseteq M$ , je i  $N$  lineárně nezávislá množina vektorů.

### Důkaz.

Přednáška.



### Slogan

Z lineárně nezávislé množiny vektorů můžeme **odebrat** jakékoli vektory a výsledná množina vektorů je opět **lineárně nezávislá**.

## „Bezstarostné“ zvětšení lineárně závislé množiny

Ať  $M$  je lineárně závislá množina vektorů v lineárním prostoru  $L$ . Jakmile  $N$  je množina vektorů z  $L$  a platí  $M \subseteq N$ , je i  $N$  lineárně závislá množina vektorů.

### Důkaz.

Přednáška.



### Slogan

Do lineárně závislé množiny vektorů můžeme přidat nějaké vektory a výsledná množina vektorů je opět lineárně závislá.

## „Opatrné“ zvětšení lineárně nezávislé množiny

Ať  $M$  je lineárně nezávislá množina vektorů z lineárního prostoru  $L$ ,  
ať  $\vec{v} \notin \text{span}(M)$ .

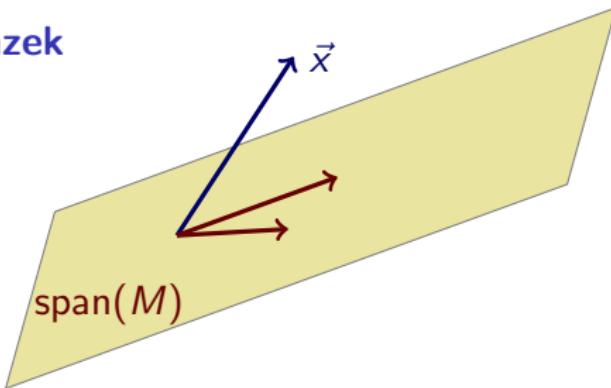
Potom je množina  $M \cup \{\vec{v}\}$  lineárně nezávislá.

### Důkaz.

Přednáška.



### Ilustrační obrázek



## „Opatrné“ zmenšení lineárně závislé množiny

Ať  $M$  je lineárně závislá množina vektorů z lineárního prostoru  $L$ .  
Potom existuje  $\vec{v} \in M$  tak, že  $\text{span}(M \setminus \{\vec{v}\}) = \text{span}(M)$ .

### Důkaz.

Přednáška.



### Ilustrační obrázek

