

Báze a dimenze

Odpřednesenou látku naleznete v kapitolách 3.1–3.3 a 3.6 skript *Abstraktní a konkrétní lineární algebra*.

Minulé přednášky

- ① Lineární kombinace, lineární závislost/nezávislost.
- ② Lineární obal seznamu/množiny vektorů.

Dnešní přednáška

- ① Báze lineárního (pod)prostoru.

Intuitivní význam: **báze je výběr systému souřadnicových os.**

- ② Dimenze lineárního (pod)prostoru.

Intuitivní význam: **dimenze je počet souřadnicových os.**

Připomenutí

Množina M je **konečná**, pokud bud' $M = \emptyset$ nebo $M = \{x_1, \dots, x_n\}$ pro nějaké přirozené číslo $n \geq 1$. Množina M je **nekonečná**, když není konečná.

Definice (množina generátorů)

Ať W je lineární podprostor prostoru L . Řekneme, že množina G **generuje** W , když platí $\text{span}(G) = W$. (Říkáme také: G je **množina generátorů** podprostoru W .)

Definice (konečně generovaný podprostor)

Řekneme, že lineární podprostor W prostoru L je **konečně generovaný**, když existuje konečná množina jeho generátorů. (To jest, když platí $\text{span}(G) = W$ pro nějakou **konečnou** množinu G .)

Příklady

- ① Pro každý prostor L platí: L je množina generátorů prostoru L .

Množina generátorů L prostoru L obecně není konečná a je vždy lineárně závislá (například: \mathbb{R}^2 je nekonečná lineárně závislá množina generátorů prostoru \mathbb{R}^2).

- ② Jak \emptyset , tak $\{\vec{o}\}$ jsou konečné množiny generátorů triviálního prostoru $\{\vec{o}\}$. Důvody: $\text{span}(\emptyset) = \{\vec{o}\}$ (minulé přednášky) a $\text{span}(\{\vec{o}\}) = \{\vec{o}\}$.

Všimněme si:

- ① \emptyset je lineárně nezávislá množina generátorů prostoru $\{\vec{o}\}$.
- ② $\{\vec{o}\}$ je lineárně závislá množina generátorů prostoru $\{\vec{o}\}$.

- ③ Konečná množina $G = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ generuje „osu prvního a třetího kvadrantu“ prostoru \mathbb{R}^2 . Množina G je lineárně závislá.

Definice (základ)

Lineárně nezávislé množině B , která generuje prostor L , říkáme **báze prostoru L** . Je-li báze B konečná, pak seznamu prvků utvořeného ze všech prvků množiny B říkáme **uspořádaná báze**.

Slogan pro bázi

Báze prostoru je „nejúspornější“ množina generátorů.

Příklady

- ① \emptyset je báze triviálního prostoru $\{\vec{o}\}$.
- ② Každá z množin $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix} \right\}$, $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ tvoří bázi prostoru \mathbb{R}^2 .
- ③ Množina $\{1, x, x^2, x^3, \dots\}$ tvoří bázi prostoru $\mathbb{R}[x]$ všech reálných polynomů.

Příklad (kanonická báze prostoru \mathbb{F}^n , $n \geq 1$)

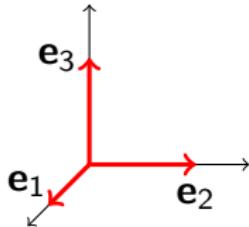
Ať \mathbb{F} je jakékoli těleso. Označme jako $K_n = (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$ následující **seznam** vektorů v \mathbb{F}^n , $n \geq 1$:

\mathbf{e}_i má jedničku na i -té pozici, všude jinde nuly.

Potom K_n je **uspořádaná** báze prostoru \mathbb{F}^n .

Této uspořádané bázi K_n říkáme **kanonická báze prostoru \mathbb{F}^n** .
(Také: **standardní báze**.)

Příklad: kanonická báze K_3 v \mathbb{R}^3 .



$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Příklad: Fourierova báze pro $n = 4$ (varianta této báze je používána v JPEG)

Pro $w = e^{\frac{2\pi i}{4}} = i$, je **seznam** $(\vec{f}_0, \vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3)$, kde

$$\vec{f}_0 = \begin{pmatrix} w^0 \\ w^0 \\ w^0 \\ w^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{f}_1 = \begin{pmatrix} w^0 \\ w^1 \\ w^2 \\ w^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ -1 \\ -i \end{pmatrix}$$

$$\vec{f}_2 = \begin{pmatrix} w^0 \\ w^2 \\ w^4 \\ w^6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{f}_3 = \begin{pmatrix} w^0 \\ w^3 \\ w^6 \\ w^9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ -1 \\ i \end{pmatrix}$$

uspořádaná báze lineárního prostoru \mathbb{C}^4 nad tělesem \mathbb{C} .

Tvrzení (Existence báze pro konečně generované prostory)

Každý konečně generovaný prostor L má konečnou bázi.

Navíc: všechny možné báze prostoru L mají stejný počet prvků.

Myšlenka důkazu

První tvrzení: víme, že $\text{span}(G) = L$, kde G je konečná. Lze postupovat dvěma způsoby:

- (I) „Přidávat“ do prázdné množiny „důležité“ vektory z G .
- (II) „Ubírat“ z G „zbytečné“ vektory.

Detailey: přednáška.

Druhé tvrzení: Exchange Lemma (viz skripta, Lemma 3.2.10 a cvičení).

Definice (prostor konečné dimenze)

Lineární prostor L má **dimensi** n (značíme: $\dim(L) = n$), když existuje báze B prostoru L , která má n prvků,^a kde n je přirozené číslo.

^aA tudíž, podle předchozího, **všechny** báze prostoru L mají n prvků.

Příklady

- ① Platí: $\dim(\mathbb{R}^n) = n$, $n \geq 0$.
- ② Obecněji: pro **jakékoli** těleso \mathbb{F} platí $\dim(\mathbb{F}^n) = n$, $n \geq 0$.
- ③ Platí: $\dim(\{\vec{o}\}) = 0$.
- ④ Prostor $\mathbb{R}[x]$ všech reálných polynomů **nemá** konečnou dimensi.
- ⑤ Podprostor $\mathbb{R}^{\leq 3}[x]$ (polynomy stupně nejvýše 3) prostoru $\mathbb{R}[x]$ má dimensi 4. Uspořádaná báze je např. $(x^3, x^2, x, 1)$.

Poznámka

Ať L má konečnou dimensi a ať M je konečná podmnožina L .

- ① Je-li M lineárně nezávislá, pak $\text{card}(M) \leq \dim(M)$.
- ② Ať $\text{card}(M) = \dim(L)$. Potom M je lineárně nezávislá právě tehdy, když platí $\text{span}(M) = L$.

Důsledek (klasifikace lineárních podprostorů \mathbb{R}^3)

Lineární podprostory prostoru \mathbb{R}^3 jsou přesně tvaru $\text{span}(M)$, kde M (zaměření podprostoru) je lineárně nezávislá podmnožina \mathbb{R}^3 :

- ① Počátek $\{\vec{0}\}$ (když M má nula prvků).
- ② Přímky procházející počátkem (když M má jeden prvek).
- ③ Roviny procházející počátkem (když M má dva prvky).
- ④ Celé \mathbb{R}^3 (když M má tři prvky).

Zobecnění: klasifikace^a lineárních podprostorů prostoru \mathbb{R}^n (dokonce na lineární podprostory prostoru \mathbb{F}^n).

^aTo je náročnější na představu, ale geometrický význam je podobný jako pro lineární podprostory prostoru \mathbb{R}^3 .

Připomenutí (Téma 02A)

Podprostoru $\text{span}(W_1 \cup W_2)$ říkáme spojení podprostorů W_1 a W_2 .
Značení: $W_1 \vee W_2$.

Věta (rovnost dvou lineárních podprostorů)

Ať W_1, W_2 jsou lineární podprostory prostoru L konečné dimenze.
Potom $W_1 = W_2$ právě tehdy, když platí rovnost
 $\dim(W_1) = \dim(W_2) = \dim(W_1 \vee W_2)$.^a

^aDůkaz: domácí cvičení. Postupujte následovně:

- ① Ať $W_1 = W_2$. Potom $W_1 \vee W_2 = W_1$. Tudíž platí rovnost
 $\dim(W_1) = \dim(W_2) = \dim(W_1 \vee W_2)$.
- ② Ať $\dim(W_1) = \dim(W_2) = \dim(W_1 \vee W_2)$. Protože $W_1 \subseteq W_1 \vee W_2$ a oba podprostory mají stejnou dimensi, platí $W_1 = W_1 \vee W_2$.
Rovnost $W_2 = W_1 \vee W_2$ se dokáže analogicky.
Celkově: $W_1 = W_1 \vee W_2 = W_2$, hotovo.

Důsledek (důležitý pro Frobeniovu větu, téma 06A)

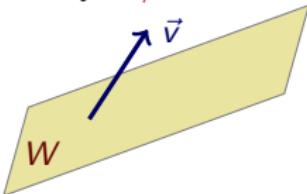
Ať W je lineární podprostor prostoru L konečné dimenze. Pro vektor \vec{v} jsou následující podmínky ekvivalentní:^a

- ① $\vec{v} \in W$
- ② $\dim(W) = \dim(W \vee \text{span}(\vec{v}))$

^aDůkaz: domácí cvičení. Postupujte následovně:

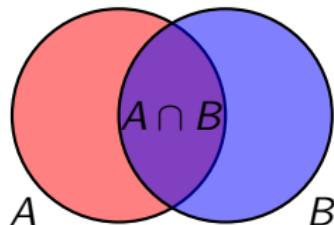
- ① Dokažte: $\vec{v} \in W$ iff $\text{span}(\vec{v}) \subseteq W$ iff $W = W \vee \text{span}(\vec{v})$.
- ② Použijte větu z předchozí stránky: $W = W \vee \text{span}(\vec{v})$ iff $\dim(W) = \dim(W \vee \text{span}(\vec{v})) = \dim(\underbrace{W \vee (W \vee \text{span}(\vec{v}))}_{=W \vee \text{span}(\vec{v})})$.

Měl by pomocí obrázek situace, kdy $\vec{v} \notin W$:



Připomenutí (princip inkluse a exkluse)

Ať A a B jsou konečné množiny.



Označíme-li počet prvků množin A , B , $A \cap B$ a $A \cup B$ jako $\text{card}(A)$, $\text{card}(B)$, $\text{card}(A \cap B)$ a $\text{card}(A \cup B)$, potom platí rovnost

$$\text{card}(A \cup B) + \text{card}(A \cap B) = \text{card}(A) + \text{card}(B)$$

Věta (o dimensi spojení a průniku)

Ať je L lineární prostor konečné dimenze. Potom, pro libovolné lineární podprostupy W_1, W_2 , platí rovnost

$$\dim(W_1 \vee W_2) + \dim(W_1 \cap W_2) = \dim(W_1) + \dim(W_2).$$

Důkaz.

Přednáška.



Slogan pro větu o dimensi spojení a průniku

Jde o „princip inkluse a exkluse“ pro lineární prostory konečné dimenze. Dimenze hraje roli počtu prvků.^a

^aZnovu upozorňujeme: slogan je reklamní heslo, nikoli skutečnost.

Věta (za předpokladu (AC))

Každý lineární prostor L má bázi.

Důkaz.

Náročný: nebudeme dokazovat. 

Poznámka

Předpoklad (AC). Zkratka (AC) znamená **Axiom of Choice**, česky: axiom výběru.

Jedná se o tvrzení: kartézský součin libovolného systému neprázdných množin je neprázdná množina.^a

Tvrzení (AC) je nezávislé na základních axiomech teorie množin. Srovnejte s axiomem o rovnoběžkách z geometrie.

^aVe **skriptech** je použita ekvivalentní formulace (AC), tzv. **Zornovo Lemma**.

Pozor: stejný prostor nad různými tělesy má různé vlastnosti

- ① Množina \mathbb{C} všech komplexních čísel je
 - ① lineární prostor dimenze 1 nad tělesem \mathbb{C} ,
 - ② lineární prostor dimenze 2 nad tělesem \mathbb{R} .
- ② Množina \mathbb{R} všech reálných čísel je
 - ① lineární prostor dimenze 1 nad tělesem \mathbb{R} ,
 - ② lineární prostor nekonečné dimenze nad tělesem \mathbb{Q} .^a

^aNepovinné: takzvaná Hamelova báze reálných čísel, viz Příklad 3.6.5 skript.

Důsledek: měli bychom vždy psát, nad jakým tělesem o lineárním prostoru mluvíme!