KAPITOLA 2: Funkce - úvod

reálná funkce (jedné) reálné proměnné ... $f : A \to \mathbb{R}$ ...

... zobrazení množiny $A \subset \mathbb{R}$ do množiny reálných čísel $\mathbb{R}$

funkční hodnota ... $y = f(x)$ (x – argument)

definiční obor ... $D(f)$ $(= A)$;

obor hodnot ... $H(f) = \{ y \in \mathbb{R} \,|\, y = f(x)$ pro nějaké $x \in A \}$

$D(g) = A_1 \subset A_2 = D(f)$, $f(x) = g(x)$ $\forall x \in D(g)$ ...

$$\ldots \quad \left\{ \begin{array}{lll} g & - & \text{zúžení funkce } f \text{ ((z } A_2\text{) na } A_1 \text{)} \\ f & - & \text{rozšíření funkce } g \text{ ((z } A_1\text{) na } A_2 \text{)} \end{array} \right.$$

Příklady:

1) $D(f) = \mathbb{N}$ $\quad\ldots\quad$ posloupnost

2) $f(x) = a\ (\in \mathbb{R})$ $\quad\ldots\quad$ $D(f) = \mathbb{R}$ $\quad\ldots\quad$ konstantní funkce

3) $f(x) = \sin x$ $\quad\ldots\quad$ $D(f) = \mathbb{R}$;

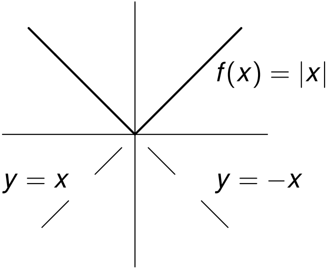
$g(x) = \sin x,\quad x \in \langle -\frac{\pi}{2}\,,\ \frac{\pi}{2}\,\rangle$ $\quad\ldots\quad$ $D(g) = \langle -\frac{\pi}{2}\,,\ \frac{\pi}{2}\,\rangle$

g – zúžení funkce f, $\quad f$ – rozšíření funkce g

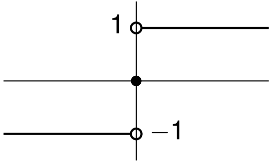
4) $f(x) = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} -1 & \text{pro } x < 0 \\ 0 & \text{pro } x = 0 \\ 1 & \text{pro } x > 0 \end{cases}$ $\quad\ldots\quad$ signum (znaménko) graf funkce f $\quad \ldots \quad \{\,(x, f(x))\,|\, x \in D(f)\}$

Příklady:

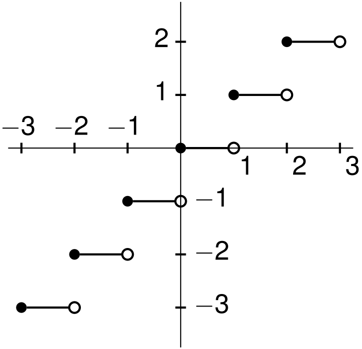
1) $f(x) \;=\; |x| \qquad (x \geq 0: \; f(x) = x; \quad x \leq 0: \; f(x) = -x)$



2) $f(x) = \operatorname{sgn} x$



3) $f(x) = [x]$



Operace s funkcemi

	h	$h(x)$	$D(h)$
součet	$f+g$	$f(x)+g(x)$	$D(f)\cap D(g)$
rozdíl	$f-g$	$f(x)-g(x)$	$D(f)\cap D(g)$
součin	$f\cdot g$	$f(x)\cdot g(x)$	$D(f)\cap D(g)$
podíl	$\frac{f}{g}$	$\frac{f(x)}{g(x)}$	$(D(f)\cap D(g))\setminus\{x \mid g(x)=0\}$
násobek ($a\in\mathbb{R}$)	$a\cdot f$	$a\cdot f(x)$	$D(f)$

složená funkce ... $h = g \circ f$ ... $h(x) = g(f(x))$

f – **vnitřní** funkce, g – **vnější** funkce

(musí platit $H(f) \subset D(g)$, jinak je potřeba zúžit $D(f)$)

Příklady:

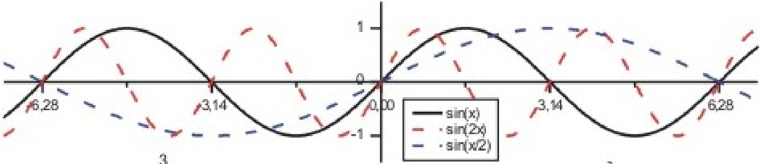
1) $h(x) = \sin(x+3)$

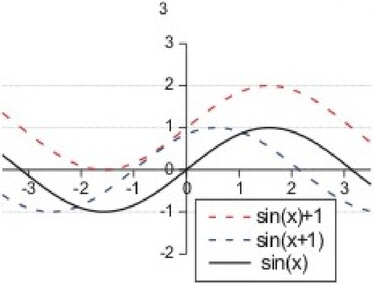
$$h = g \circ f, \quad \text{kde} \quad f(x) = x + 3, \quad g(y) = \sin y$$

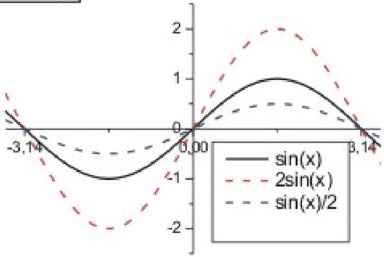
2) $h(x) = \sin^2(5x+3)$

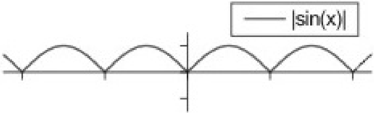
$$h = f_4 \circ (f_3 \circ (f_2 \circ f_1)), \quad \text{kde} \quad f_1(x) = 5x, \quad f_2(y) = y + 3,$$

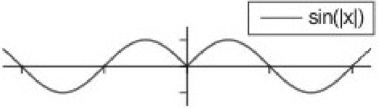
$$f_3(u) = \sin u, \quad f_4(v) = v^2$$


1
0
-1
-6,28
-3,14
0,00
3,14
6,28
sin(x)
sin(2x)
sin(x/2)


3
3
2
1
0
-1
-2
-3
-2
-1
0
1
2
3
sin(x)+1
sin(x+1)
sin(x)


2
1
0
-1
-2
-3,14
0,00
3,14
sin(x)
2sin(x)
sin(x)/2


|sin(x)|


sin(|x|)

2.1 Vlastnosti funkcí

prostá funkce ... $f(x_1) \neq f(x_2)$ pro $x_1 \neq x_2$

(tj. $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$)

Příklady:

1) Funkce x^n, $n \in \mathbb{Z}$, jsou prosté pro n lichá.

2) Funkce $\log x$ je prostá.

Díky tomu můžeme „odlogaritmovávat“ logaritmické rovnice.

3) Funkce $\operatorname{tg} x$ není prostá.

Zúžení funkce $\operatorname{tg} x$ na interval $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ už ale prosté je.

inverzní funkce ... $f_{-1}(x) = y \quad \Leftrightarrow \quad f(y) = x$ ...

... $D(f_{-1}) = H(f)$ (f musí být prostá)

Příklady:

1) Funkce $f(x) = x^3$ má inverzní funkci $f_{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$.

2) Funkce $f(x) = x^2$ inverzní funkci nemá (není prostá).
Funkce $g(x) = \sqrt{x}$ je inverzní funkcí k funkci h, která je zúžením funkce f na interval $\langle 0, \infty)$ (tj. $g = h_{-1}$, kde $h(x) = x^2$, $D(h) = \langle 0, \infty)$).

3) Funkce $\sin x$ není prostá, tedy inverzní funkci nemá.
Její zúžení na interval $\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle$ už ale prosté je, jako funkci k němu inverzní si zavedeme funkci $\arcsin x$.

Definice:

Řekneme, že funkce f je **zdola omezená** na množině $A \subset D(f)$, jestliže existuje $L \in \mathbb{R}$ tak, že pro všechna $x \in A$ platí:

$$L \leq f(x) \; .$$

Řekneme, že funkce f je **shora omezená** na množině $A \subset D(f)$, jestliže existuje $K \in \mathbb{R}$ tak, že pro všechna $x \in A$ platí:

$$f(x) \leq K \; .$$

Řekneme, že funkce f je **omezená** na množině $A \subset D(f)$, jestliže existuje $S \in \mathbb{R}$ tak, že pro všechna $x \in A$ platí:

$$|f(x)| \leq S \, .$$

Funkce je omezená na A, právě když je na A omezená zdola i shora.

Příklad 2.1: Ukažte, že funkce $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$ je omezená.

Řešení: Pro každé $x \in \mathbb{R} = D(f)$ platí např.

$$0 \leq \frac{1}{x^2+1} \leq 1.$$

Funkce je tedy omezená zdola i shora.

Můžeme také použít odhad

$$|\,f(x)\,| \leq 1 \quad \text{pro všechna } x \in \mathbb{R}.$$

Definice:

Řekneme, že funkce f je na množině $A \subset D(f)$

- **neklesající** (**nerostoucí**), jestliže

  $$f(x_1) \leq f(x_2) \qquad (f(x_1) \geq f(x_2)) \qquad \forall x_1, x_2 \in A, \ \ x_1 < x_2,$$

- **rostoucí** (**klesající**), jestliže

  $$f(x_1) < f(x_2) \qquad (f(x_1) > f(x_2)) \qquad \forall x_1, x_2 \in A, \ \ x_1 < x_2,$$

- **monotonní**, pokud je na A neklesající nebo nerostoucí,

- **ryze monotonní**, pokud je na A rostoucí nebo klesající.

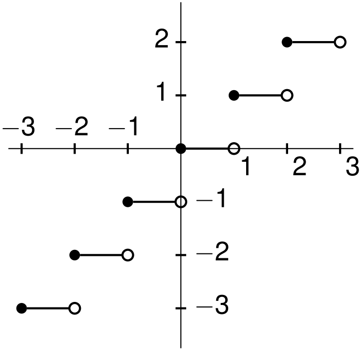
Platí:

Je-li funkce f **ryze monotonní** na $D(f)$, pak je prostá a existuje f_{-1}. Funkce f_{-1} má stejný typ monotonie jako f.

Příklady:

1) $f(x) = [x]$ $\quad \dots \quad$ neklesající na $D(f) = \mathbb{R}$,

rostoucí např. na $\mathbb{Z}$ nebo na $\{\frac{1}{2} + k \mid k \in \mathbb{Z}\}$



2) $f(x) = \dfrac{1}{x}$ $\qquad D(f) = (-\infty, 0) \cup (0, \infty) \quad \ldots$

klesající na $(-\infty, 0)$ a na $(0, \infty)$

není ale klesající na celém $D(f)$

Poznámka:

Budeme-li dále mluvit o intervalech, nebudeme brát v úvahu intervaly jednobodové (tj. intervaly typu $\langle a, a \rangle$).

Definice:

Řekneme, že funkce f je **sudá**, jestliže pro každé $x \in D(f)$ platí

a) $-x \in D(f)$,

b) $f(-x) = f(x)$.

Řekneme, že funkce f je **lichá**, jestliže pro každé $x \in D(f)$ platí

a) $-x \in D(f)$,

b) $f(-x) = -f(x)$.

- „ sudá · sudá = lichá · lichá = sudá ”
- „ sudá · lichá = lichá · sudá = lichá ”

Definice:

Řekneme, že funkce f je **periodická s periodou** $T > 0$, jestliže pro každé $x \in D(f)$ platí

a) $x \pm T \in D(f)$,

b) $f(x+T) = f(x) \ \big(= f(x-T)\big)$.

T je perioda, $k \in \mathbb{N} \quad \Rightarrow \quad k \cdot T$ je perioda

základní perioda ... nejmenší perioda (pokud existuje)

- nemají ji např.: **konstantní** funkce

Dirichletova funkce: $\begin{cases} f(x) = 1 & \text{pro } x \in \mathbb{Q} \\ f(x) = 0 & \text{pro } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$

2.3 Elementární funkce

na cvičení a k samostatnému opakování

- materiály k přednáškám stránky [P2.3] – [P2.10]
- skripta [JT-DIP] strany 30 – 40 (32 – 42 ve starším vydání)

(je potřeba znát dobře grafy !)

1. Mocnina. Funkce x^{α}, a^{x}, $\log_a x$

A) MOCNINNÁ FUNKCE

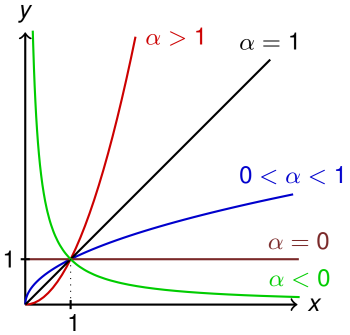
$f(x) = x^{\alpha}$ ... $\alpha \in \mathbb{R}$ – pevné

pro α racionální:

$D(f)$ a $H(f)$ závisí na α,
vždy $(0, \infty) \subset D(f)$,
pro $\alpha \neq 0$ také $(0, \infty) \subset H(f)$

pro α iracionální:

$D(f) = (0, \infty)$, $H(f) = (0, \infty)$



graf zúžení funkce $f(x) = x^{\alpha}$ na interval $\langle 0, \infty)$ resp. $(0, \infty)$

Mocniny s reálnými exponenty

Pro $a > 0$ definujeme: $a^{\alpha} = \lim_{n \to \infty} a^{\alpha_n}$,

kde $(\alpha_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{Q}$ je taková posloupnost, že $\alpha_n \to \alpha$.

Zřejmě vždy $a^{\alpha} > 0$.

Vlastnosti jsou stejné jako u racionálních exponentů:

- $(ab)^r = a^r b^r$; $\left(\frac{a}{b}\right)^r = \frac{a^r}{b^r}$
- $a^{r+s} = a^r a^s$
- $a^{rs} = (a^r)^s$
- $a^{-r} = \frac{1}{a^r}$ $(a,\ b > 0,\quad r,\ s \in \mathbb{R})$

B) EXPONENCIÁLNÍ FUNKCE (o základu a)

$f(x) = a^x$ . . . $a > 0$ – pevné

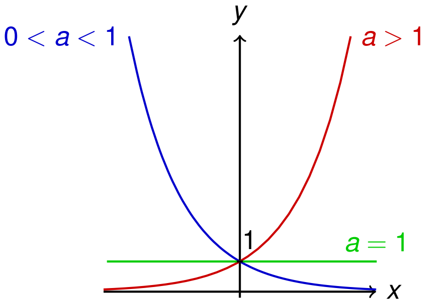
$D(f) = \mathbb{R}$, $H(f) = (0, \infty)$ pro $a \neq 1$, $H(f) = \{1\}$ pro $a = 1$

speciálně

pro $a =$ e (Eulerovo číslo)

značíme $\mathrm{e}^x = \exp(x)$

. . . exponenciální funkce



C) <u>LOGARITMICKÁ FUNKCE</u> (o základu a)

(inverzní funkce k exponenciální funkci)

$\log_a x = y \quad \Leftrightarrow \quad a^y = x \quad \dots \quad a > 0, \quad a \neq 1$ – pevné

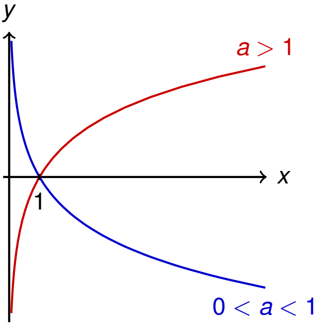
$D(f) = (0, \infty), \qquad H(f) = \mathbb{R}$

speciálně

pro $a = \mathrm{e}$

značíme $\log_{\mathrm{e}} x = \ln x$

... přirozený logaritmus



Vlastnosti logaritmů ($a, b > 0,\ a, b \neq 1;\quad x, y > 0;\quad r \in \mathbb{R}$):

- $\log_a \left(\dfrac{1}{x} \right) = -\log_a x$
- $\log_a(x\, y) = \log_a x + \log_a y$
- $\log_a \left(\dfrac{x}{y} \right) = \log_a x - \log_a y$
- $\log_a x^r = r \log_a x$
- $\log_a x = \dfrac{\log_b x}{\log_b a}$, speciálně: $\log_a x = \dfrac{\ln x}{\ln a}$

Platí:

$a^x = e^{x \ln a}$ pro $a > 0,\ x \in \mathbb{R}$

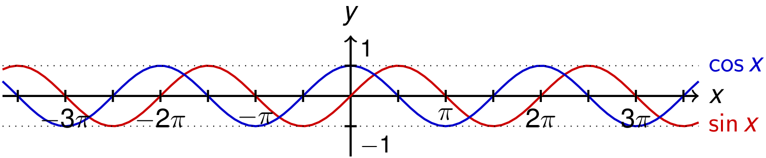
(protože $e^{x \ln a} = e^{\ln a^x}$ a funkce $\ln x$ je inverzní funkce k e^x)

2. Goniometrické a cyklometrické funkce

A) GONIOMETRICKÉ FUNKCE

$\sin x$ . . . $D(f) = \mathbb{R}$, $H(f) = \langle -1, 1 \rangle$, lichá, 2π-periodická

$\cos x$ . . . $D(f) = \mathbb{R}$, $H(f) = \langle -1, 1 \rangle$, sudá, 2π-periodická



$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

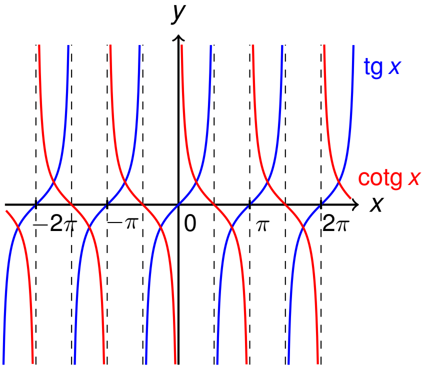
$D(f) = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}}(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$,

lichá, π-periodická

$$\operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$$

$D(f) = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}}(k\pi, (k+1)\pi)$,

lichá, π-periodická



Vybrané vlastnosti funkcí $\sin x$ **a** $\cos x$ **:**

- $\sin x = \cos\,(x - \frac{\pi}{2})$ $\qquad$ $\cos x = \sin\,(x + \frac{\pi}{2})$
- $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$
- $\sin 2x = 2 \sin x \, \cos x$ $\qquad$ $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$
- $\sin^2 x = \frac{1}{2}\,(1 - \cos 2x)$ $\qquad$ $\cos^2 x = \frac{1}{2}\,(1 + \cos 2x)$

- $$\sin(x \pm y) = \sin x \, \cos y \pm \cos x \, \sin y$$
  $$\cos(x \pm y) = \cos x \, \cos y \mp \sin x \, \sin y$$

- $$\sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \, \cos \frac{x-y}{2}$$
  $$\sin x - \sin y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \, \sin \frac{x-y}{2}$$
  $$\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \, \cos \frac{x-y}{2}$$
  $$\cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x+y}{2} \, \sin \frac{x-y}{2}$$

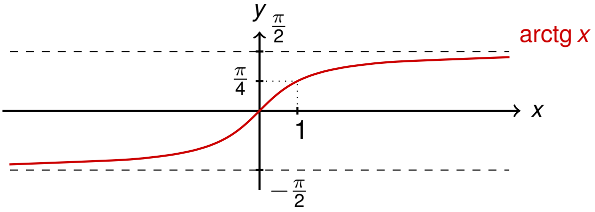
Základní hodnoty goniometrických funkcí

	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\operatorname{tg} x$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\times$	-1	0	1	$\times$	-1
$\operatorname{cotg} x$	$\times$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	-1	$\times$	1	0	-1

CYKLOMETRICKÉ FUNKCE

(inverzní ke goniometrickým zúženým na vhodný interval)

f	$D(f)$	$H(f)$	f_{-1}	$D(f_{-1})$	$H(f_{-1})$
$\sin x$	$\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle$	$\langle -1, 1 \rangle$	$\arcsin x$	$\langle -1, 1 \rangle$	$\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle$
$\cos x$	$\langle 0, \pi \rangle$	$\langle -1, 1 \rangle$	$\arccos x$	$\langle -1, 1 \rangle$	$\langle 0, \pi \rangle$
$\mathrm{tg}\, x$	$(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$	$\mathbb{R}$	$\mathrm{arctg}\, x$	$\mathbb{R}$	$(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$
$\mathrm{cotg}\, x$	$(0, \pi)$	$\mathbb{R}$	$\mathrm{arccotg}\, x$	$\mathbb{R}$	$(0, \pi)$



Poznámka: Cyklometrické funkce nejsou inverzními funkcemi ke goniometrickým funkcím jako takovým, ale jen k jejich zúžením na určitý interval. Máme

$$\arcsin(\sin 0) = \arcsin 0 = 0,$$

ale

$$\arcsin(\sin(\pi)) = \arcsin 0 = 0 \neq \pi,$$

$$\arcsin\left(\sin\left(\frac{3}{2}\pi\right)\right) = \arcsin(-1) = -\frac{\pi}{2} \neq \frac{3}{2}\pi.$$

Pro funkci arctg platí:

$$x \in (-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi),\ k \in \mathbb{Z} \quad \Longrightarrow \quad x = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x) + k\pi.$$

HYPERBOLICKÉ FUNKCE

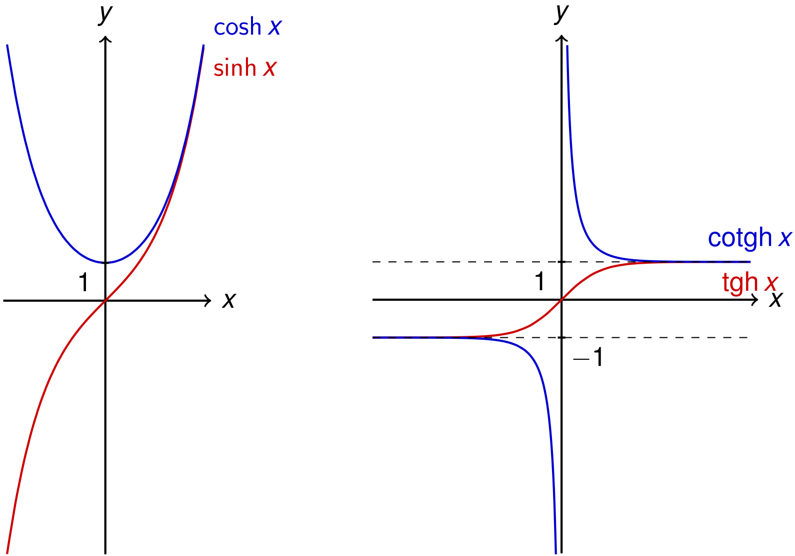
f	$D(f)$	$H(f)$
$\sinh x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
$\cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$	$\mathbb{R}$	$\langle 1, \infty)$
$\operatorname{tgh} x = \dfrac{\sinh x}{\cosh x} = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$	$\mathbb{R}$	$(-1, 1)$
$\operatorname{cotgh} x = \dfrac{\cosh x}{\sinh x} = \dfrac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$	$\mathbb{R} \setminus \{ 0 \}$	$(-\infty, -1) \cup (1 \; \infty)$

- $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$
- $\sinh 2x = 2 \sinh x \cosh x$
- $\cosh 2x = \cosh^2 x + \sinh^2 x$
- $|\sinh x| < \cosh x$

HYPERBOLOMETRICKÉ FUNKCE

(inverzní k hyperbolickým, případně zúženým na vhodný interval)

f	$D(f)$	$H(f)$	f_{-1}	$D(f_{-1})$	$H(f_{-1})$
$\sinh x$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\operatorname{argsinh} x$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
$\cosh x$	$\langle 0, \infty)$	$\langle 1, \infty)$	$\operatorname{argcosh} x$	$\langle 1, \infty)$	$\langle 0, \infty)$
$\operatorname{tgh} x$	$\mathbb{R}$	$(-1,\ 1)$	$\operatorname{argtgh} x$	$(-1,\ 1)$	$\mathbb{R}$
$\operatorname{cotgh} x$	$\mathbb{R} \setminus \{ 0 \}$	$\mathbb{R} \setminus \langle -1,\ 1 \rangle$	$\operatorname{argcotgh} x$	$\mathbb{R} \setminus \langle -1,\ 1 \rangle$	$\mathbb{R} \setminus \{ 0 \}$



grafy hyperbolických funkcí

Vyjádření hyperbolometrických funkcí pomocí logaritmů

- $\operatorname{argsinh} x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}\,), \qquad x \in \mathbb{R}$
- $\operatorname{argcosh} x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}\,), \qquad x \in \langle 1, \infty)$
- $\operatorname{argtgh} x = \dfrac{1}{2} \ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right), \qquad x \in (-1, 1)$

(viz Příklad 2.2)

- $\operatorname{argcotgh} x = \dfrac{1}{2} \ln\left(\dfrac{1+x}{x-1}\right), \qquad x \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$

Příklad 2.2: Pro $|x| < 1$ vyjádřete $\operatorname{argtgh} x$ pomocí logaritmické funkce.

Řešení: Označíme $y = \operatorname{argtgh} x$. Pak

$$x = \operatorname{tgh} y = \frac{e^y - e^{-y}}{e^y + e^{-y}} \,.$$

Po rozšíření zlomku výrazem e^y postupně dostáváme

$$x = \frac{e^{2y} - 1}{e^{2y} + 1}$$

$$
\begin{aligned}
(e^{2y}+1)x &= e^{2y}-1 \\
(x-1)e^{2y} &= -1-x \\
e^{2y} &= \frac{-1-x}{x-1} \\
e^{2y} &= \frac{1+x}{1-x} \\
2y &= \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right).
\end{aligned}
$$

Tedy

$$
\operatorname{argtgh} x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right).
$$