KAPITOLA 5: Spojitost a derivace na intervalu

5.3 l'Hospitalovo pravidlo

Věta 5.12 (l'Hospitalovo pravidlo):
Nechť $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ a pro funkce f, g platí:

a) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 0$ nebo $\lim\limits_{x \to x_0} |g(x)| = +\infty$,

b) existuje $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = A \in \mathbb{R}^*$.

Pak existuje $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ a je rovna A.

(Analogicky pro jednostranné limity.)

Poznámka:

Může se stát, že existuje $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$, ale $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ neexistuje.

Příklad 5.2: $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\ln^2 x}{x^{\frac{1}{2}}} = 0\,.$

Příklad 5.3: $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{1}{x} - \operatorname{cotg} x \right) = 0.$

Použití l'Hospitalova pravidla pro limity typu $\left\langle\!\left\langle \mathbf{0} \cdot \infty \right\rangle\!\right\rangle$

Pro $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$ a $\lim\limits_{x \to x_0} |g(x)| = \infty$ použijeme jeden z přepisů

$$\lim_{x \to x_0} f(x) \cdot g(x) = \begin{cases} \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}} = \left\langle\!\left\langle \dfrac{0}{0} \right\rangle\!\right\rangle \\[2ex] \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}} = \left\langle\!\left\langle \dfrac{\pm\infty}{\pm\infty} \right\rangle\!\right\rangle \end{cases}$$

a pak aplikujeme l'Hospitalovo pravidlo.

Příklad 5.4: $\lim\limits_{x \to 0^+} x \cdot \ln^2 x = 0\,.$

5.1 Funkce spojité na intervalu

Věta 5.1 (o nulách spojité funkce):

Je-li f spojitá na uzavřeném intervalu $\langle a, b\rangle$ a $f(a) \cdot f(b) < 0$, pak existuje $c \in (a, b)$ tak, že

$$f(c) = 0\,.$$

Metoda půlení intervalu (bisekce)

— hledání nulových bodů funkce

- **Předpoklady:** f spojitá na $\langle a, b\rangle$, $f(a)\cdot f(b) < 0$.
- **Cíl:** Najít $c \in (a, b)$ takové, že $f(c) = 0$ (nebo alespoň jeho aproximaci).
- **Algoritmus** pro $f(a) < 0$, $f(b) > 0$ (jinak analogicky) : Konstruujeme posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, $(b_n)_{n=1}^{\infty}$, $(c_n)_{n=1}^{\infty}$ následujícím způsobem, dokud není $f(c_n) = 0$ nebo $b_n - a_n < \varepsilon$, kde $\varepsilon > 0$ je požadovaná přesnost:

1) $a_0 = a$, $b_0 = b$

2) pro $n = 0, 1, \ldots$ pokládáme:

$$c_n = \frac{a_n + b_n}{2}$$

$$a_{n+1} = \begin{cases} a_n & \text{pro } f(c_n) > 0 \\ c_n & \text{pro } f(c_n) < 0 \end{cases} \qquad b_{n+1} = \begin{cases} c_n & \text{pro } f(c_n) > 0 \\ b_n & \text{pro } f(c_n) < 0 \end{cases}$$

Příklad 5.1: Najděte s přesností 10^{-3} hodnotu $\sqrt[3]{10}$.

n	$f(c_{n-1})$	a_n	b_n	$b_n - a_n$	$c_n = \frac{a_n+b_n}{2}$
0		2	3	1	2.5
1	+5.625	2	2.5	0.5	2.25
2	+1.390625	2	2.25	0.25	2.125
3	−0.40429688	2.125	2.25	0.125	2.1875
4	+0.46752930	2.125	2.1875	0.0625	2.15625
5	+0.02529907	2.125	2.15625	0.03125	2.140625
6	−0.19106674	2.140625	2.15625	0.015625	2.1484375
7	−0.08327723	2.1484375	2.15625	0.0078125	2.15234375
8	−0.02908760	2.15234375	2.15625	0.00390625	2.15429688
9	−0.00191892	2.15429688	2.15625	0.00195313	2.15527344
10	+0.01168391	2.15429688	2.15527344	0.00097656	2.15478516

Důsledek 5.2 (o mezihodnotě):

Je-li f spojitá na intervalu I, $a, b \in I$, $a < b$ a platí $f(a) \neq f(b)$, pak pro každé z ležící mezi $f(a)$ a $f(b)$ $\big($tj. $z \in (f(a), f(b))$ pro $f(a) < f(b)$ a $z \in (f(b), f(a))$ pro $f(a) > f(b)\big)$, existuje $c \in (a, b)$ tak, že

$$f(c) = z.$$

(Tj. f má Darbouxovu vlastnost.)

Důsledek 5.3:

Je-li f spojitá na intervalu I, pak nabývá všech hodnot mezi $m = \inf\{f(x) | x \in I\}$ a $M = \sup\{f(x) | x \in I\}$.

Důsledek 5.4:

Je-li f spojitá na intervalu I, pak $f(I) = \{f(x) | x \in I\}$ je buď jednobodová množina nebo interval.

Věta 5.5 (Weierstrassova):

Je-li f spojitá na uzavřeném intervalu $\langle a, b\rangle$, pak

a) f je omezená na $\langle a, b\rangle$,

b) existují $\alpha, \beta \in \langle a, b\rangle$ tak, že $f(\alpha) \leq f(x) \leq f(\beta)$ pro každé $x \in \langle a, b\rangle$. (Tj. f nabývá na $\langle a, b\rangle$ svého minima a maxima.)

Věta 5.6:
Je-li f spojitá na intervalu I, pak f je prostá na I právě tehdy, když je na I ryze monotonní.

Věta 5.7:
Je-li f spojitá a prostá na intervalu I, pak f_{-1} je spojitá na $f(I)$.

5.2 Věta o střední hodnotě

Věta 5.8 (Rolleova):

Nechť f je spojitá na $\langle a, b\rangle$, v každém $x \in (a, b)$ existuje $f'(x)$ $(\in \overline{\mathbb{R}})$ a $f(a) = f(b)$. Pak existuje $c \in (a, b)$ tak, že

$$f'(c) = 0.$$

Věta 5.9 (Lagrangeova o střední hodnotě ; o přírůstku funkce):

Nechť f je spojitá na $\langle a, b \rangle$ a v každém $x \in (a, b)$ existuje $f'(x)$ $(\in \overline{\mathbb{R}})$. Pak existuje $c \in (a, b)$ tak, že

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Důsledek 5.10:

Nechť f je spojitá na $\langle a, b \rangle$ a pro každé $x \in (a, b)$ platí $f'(x) = 0$. Pak f je konstantní na $\langle a, b \rangle$.

5.4 Taylorův polynom

Předpokládejme, že funkce f má n-tou derivaci v bodě x_0. Hledáme polynom

$$T_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \ldots + a_n(x - x_0)^n$$

tak, aby pro $k = 0, \ldots, n$ platilo

$$T_n^{(k)}(x_0) = f^{(k)}(x_0)$$

Snadno zjistíme, že

$$T_n^{(k)}(x_0) = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot k \cdot a_k = k!\, a_k,$$

Tedy pro $k = 0, 1, \ldots, n$ musí být

$$k!\, a_k = f^{(k)}(x_0), \qquad \text{tj.} \qquad a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}.$$

Odtud

$$\underline{T_n(x)} = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k =$$

$$= f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1}(x - x_0)^1 + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{2 \cdot 3}(x - x_0)^3 \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n.$$

$\underline{T_n}$ ... **Taylorův polynom řádu** n (stupně $\leq n$) **funkce** f **v bodě** x_0

Věta 5.13 (**Taylorova; pro** $x_0 = 0$: **Maclaurinova**):
Nechť funkce f má vlastní derivaci řádu $n+1$ na nějakém okolí $U(x_0)$ bodu x_0 a nechť $x \in U(x_0)$. Pak existuje mezi body x_0 a x bod ξ (tj. $\xi \in (x, x_0)$ pro $x < x_0$, $\xi \in (x_0, x)$ pro $x > x_0$) takový, že

$$f(x) = T_n(x) + R_n(x),$$

kde

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}.$$

$R_n(x)$ ... **zbytek řádu** n
vyjádření v různých tvarech
ve **Větě 5.13**: **Lagrangeův tvar zbytku**.

Poznámka :

Jestliže je $f^{(n+1)}$ na nějakém $U(x_0)$ omezená, tj. existuje-li $K \in \mathbb{R}$ tak, že na $U(x_0)$ platí $|f^{(n+1)}| \leq K$, pak pro všechna $x \in U(x_0)$ máme

$$|R_n(x)| = \left| \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} \right| \leq \frac{K}{(n+1)!}|x-x_0|^{n+1}.$$

To ale znamená, že

$$\left| \frac{R_n(x)}{(x-x_0)^n} \right| \leq \frac{K}{(n+1)!}|x-x_0| \overset{x\to x_0}{\longrightarrow} 0,$$

a tedy

$$\lim_{x\to x_0} \frac{R_n(x)}{(x-x_0)^n} = 0.$$

Tj. pro $x \to x_0$ se $R_n(x)$ blíží k nule rychleji než $(x-x_0)^n$.

Příklad 5.5*: Najděte Taylorův polynom 3. řádu v bodě $x_0 = \frac{\pi}{2}$ funkce

$$g(x) = e^{-x} \sin x - 5 \ .$$

Řešení: Postupně dostáváme

$$g(x) = g^{(0)}(x) = e^{-x} \sin x - 5 \qquad g\left(\tfrac{\pi}{2}\right) = e^{-\frac{\pi}{2}} - 5$$

$$g'(x) = -e^{-x} \sin x + e^{-x} \cos x = e^{-x}(-\sin x + \cos x)$$

$$g'\left(\tfrac{\pi}{2}\right) = -e^{-\frac{\pi}{2}}$$

$$g''(x) = -e^{-x}(-\sin x + \cos x) + e^{-x}(-\cos x - \sin x) = e^{-x}(-2\cos x)$$

$$g''\left(\tfrac{\pi}{2}\right) = 0$$

$$g'''(x) = -e^{-x}(-2\cos x) + e^{-x}(2\sin x) = e^{-x}(2\cos x + 2\sin x)$$

$$g'''\left(\tfrac{\pi}{2}\right) = 2\,e^{-\frac{\pi}{2}}$$

Odtud

$$T_3(x) = \frac{e^{-\frac{\pi}{2}} - 5}{0!}\left(x - \tfrac{\pi}{2}\right)^0 + \frac{-e^{-\frac{\pi}{2}}}{1!}\left(x - \tfrac{\pi}{2}\right)^1 + \frac{0}{2!}\left(x - \tfrac{\pi}{2}\right)^2 +$$

$$+ \frac{2\,e^{-\frac{\pi}{2}}}{3!}\left(x - \tfrac{\pi}{2}\right)^3 =$$

$$= e^{-\frac{\pi}{2}} - 5 - e^{-\frac{\pi}{2}}\left(x - \tfrac{\pi}{2}\right) + \frac{e^{-\frac{\pi}{2}}}{3}\left(x - \tfrac{\pi}{2}\right)^3 \ .$$

Příklad 5.6*:

Najděte Taylorův polynom 3. řádu funkce $f(x) = \ln\left(\frac{x}{2}\right) + 3$ v bodě $x_0 = 2$ a odhadněte velikost zbytku $R_3(x)$ pro $x = \frac{3}{2}$ a $x = \frac{5}{2}$.

Řešení:

k	0	1	2	3	4
$f^{(k)}(x)$	$\ln x - \ln 2 + 3$	$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$\frac{2}{x^3}$	$-\frac{6}{x^4}$
$f^{(k)}(2)$	3	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	

$$T_3(x) = \frac{3}{0!} + \frac{\frac{1}{2}}{1!}(x-2) + \frac{-\frac{1}{4}}{2!}(x-2)^2 + \frac{\frac{1}{4}}{3!}(x-2)^3 =$$

$$= 3 + \frac{1}{2}(x-2) - \frac{1}{8}(x-2)^2 + \frac{1}{24}(x-2)^3.$$

Odhad zbytku

Pro vhodné ξ mezi x a $x_0 = 2$ máme

$$|R_3(x)| = \left| \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!} (x-2)^4 \right| = \left| \frac{-\frac{6}{\xi^4}}{4!} (x-2)^4 \right| = \frac{1}{4} \frac{|x-2|^4}{\xi^4} .$$

Pokud nyní místo ξ napíšeme nejmenší číslo, které leží mezi x a $x_0 = 2$ (tj. 2 pro $x = \frac{5}{2}$ a $\frac{3}{2}$ pro $x = \frac{3}{2}$), jmenovatele zmenšíme a celý zlomek tím zvětšíme.

Horní odhady chyb

x	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{2}$
$\lvert R_3(x)\rvert = \frac{1}{4} \frac{\lvert x-2\rvert^4}{\xi^4}$	$\leq \frac{1}{4} \cdot \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^4}{\left(\frac{3}{2}\right)^4} = \frac{1}{324}$	$\leq \frac{1}{4} \cdot \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^4}{2^4} = \frac{1}{1024}$