KAPITOLA 4: Derivace funkce

4.1 Úvod

Definice:

Řekneme, že funkce f má **v bodě** x_0 **derivaci** [**derivaci zleva** | **derivaci zprava**] rovnu číslu a, jestliže existuje

$$\boxed{\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = a}$$

$$\left[\lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = a \quad \middle| \quad \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = a \right].$$

Píšeme $f'(x_0) = a$ [$f'_-(x_0) = a$ | $f'_+(x_0) = a$].

Další značení: $\quad f'(x_0) = \dfrac{\mathrm{d} f}{\mathrm{d} x}(x_0) = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d} x} f(x_0)$

$a \in \mathbb{R}$ ... **vlastní** derivace

$a = \pm\infty$ ... **nevlastní** derivace

f má **derivaci na intervalu** $\langle a, b)$ ...
existuje $f'(x_0)$ pro každé $x_0 \in (a, b)$ a existuje $f'_+(a)$

(analogicky pro intervaly (a, b), $(a, b\rangle$, $\langle a, b\rangle$)

Poznámky:

- $f'(x_0)$ existuje a je rovna a právě tehdy, když existují $f'_-(x_0)$, $f'_+(x_0)$ a obě jsou rovny a.

- Z Věty 3.14 o limitě složené funkce je

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} .$$

  Index 0 u x zde většinou vynecháváme a píšeme

$$\boxed{f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} .}$$

- Derivace jako funkce je definována tam, kde existuje **vlastní** derivace. Zřejmě vždy platí $D(f') \subset D(f)$.

Příklad 4.1: Určete pomocí definice derivace funkcí $f(x) = c \in \mathbb{R}$, $f(x) = x$, $f(x) = e^x$, $f(x) = \cos x$ a $f(x) = \sin(x)$.

Tečna a normála

přímka v rovině

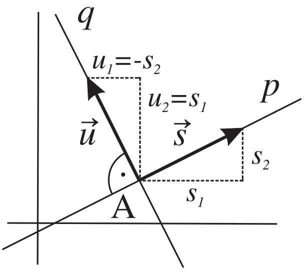
$\vec{s} = (s_1, s_2)$ ... směrový vektor

$A = [a_1, a_2] \in p$

pro $\underline{s_1 \neq 0}$:

$$p: \quad y = a_2 + \frac{s_2}{s_1}(x - a_1)$$

$k_p = \dfrac{s_2}{s_1}$ ... směrnice přímky p



kolmá přímka $q \perp p$

$\vec{u} = (u_1, u_2) = (-s_2, s_1)$ ... směrový vektor

pro $\underline{s_2 \neq 0}$:

$$k_q = \frac{u_2}{u_1} = \frac{s_1}{-s_2} = -\frac{1}{k_p}$$

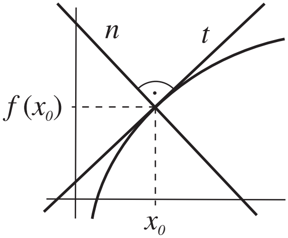
tečna t a **normála** n grafu funkce f v bodě $[x_0, f(x_0)]$ (někdy: „ v bodě x_0 “) jsou kolmé přímky procházející bodem $[\, x_0\, ,\, f(x_0)\,]$ takové, že

- <u>pro $f'(x_0) \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$</u>

  <u>t :</u> $\quad y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$

  <u>n :</u> $\quad y = f(x_0) - \dfrac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$

  tj. $\quad k_t = f'(x_0), \quad k_n = -\dfrac{1}{f'(x_0)}$

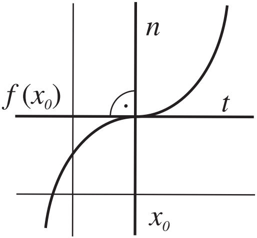


- <u>pro $f'(x_0) = 0$</u>

  $\underline{t\,:}\qquad y = f(x_0)$

  $\underline{n\,:}\qquad x = x_0$

  tj. $\qquad k_t = 0$

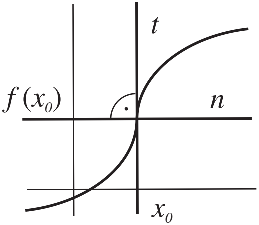


- <u>pro $f'(x_0) = \pm\infty$</u>

  $\underline{t\,:}\qquad x = x_0$

  $\underline{n\,:}\qquad y = f(x_0)$

  tj. $\qquad k_n = 0$



Příklad 4.2a: Najděte tečnu a normálu grafu funkce $f(x) = x^2$ v bodě $[3, ?]$ (v bodě 3).

Řešení: Máme $x_0 = 3$, $f(3) = 9$ (tj. $A = [3, 9]$), $D(f) = \mathbb{R}$.
Spočítáme $f'(3)$:

$$f'(3) = \lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3} = \lim_{x \to 3} (x + 3) = 6\,.$$

Tedy

$$k_t = f'(3) = 6, \qquad k_n = -\frac{1}{f'(3)} = -\frac{1}{6}\,.$$

Rovnice tečny a normály odtud jsou

$$t: \quad y = 9 + 6(x - 3) \qquad \text{(neboli} \quad t: \quad 6x - y - 9 = 0)$$

a

$$n: \quad y = 9 - \frac{1}{6}(x - 3) \qquad \text{(neboli} \quad n: \quad x + 6y - 57 = 0).$$

Příklad 4.2b: Najděte tečnu t grafu funkce $f(x) = \frac{1}{x}$, která prochází bodem $[-3, 1]$.

Řešení: Máme $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Protože $f(-3) = -\frac{1}{3} \neq 1$, neleží bod $[-3, 1]$ na grafu funkce f. Označme $[x_T, y_T]$ bod dotyku tečny t ($y_T = f(x_T) = \frac{1}{x_T}$). Máme $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$.
Tečna t má tak rovnici

$$t: \quad y = \frac{1}{x_T} - \frac{1}{x_T^2}(x - x_T).$$

Protože má na tečně t ležet bod $[x, y] = [-3, 1]$, musí platit

$$1 = \frac{1}{x_T} - \frac{1}{x_T^2}(-3 - x_T)$$

Tato podmínka na x_T je ekvivalentní kvadratické rovnici

$$x_T^2 - 2x_T - 3 = 0,$$

která má dvě řešení $x_{T1} = -1$ a $x_{T2} = 3$.

Hledané tečny mají rovnice

$$t_1: \quad y = \frac{1}{-1} - \frac{1}{(-1)^2}(x+1) \qquad \text{tj.} \qquad t_1: \quad y = -x - 2$$

$$t_2: \quad y = \frac{1}{3} - \frac{1}{(3)^2}(x-3) \qquad \text{tj.} \qquad t_2: \quad y = -\frac{1}{9}x + \frac{2}{3}.$$

4.2 Věty o derivacích

Věta 4.1:
Má-li funkce f v bodě x_0 **vlastní** derivaci, pak je v x_0 **spojitá**.

Příklad 4.3:

a) Funkce $f(x) = |x|$ je spojitá, $f'(0)$ ale neexistuje - tedy spojitost k existenci derivace nestačí.

b) Funkce $f(x) = \operatorname{sgn} x$ není spojitá v nule, přesto tam má derivaci, ale nevlastní - tedy existence nevlastní derivace spojitost nezaručuje.

Věta 4.2:

Nechť existují **vlastní** $f'(x_0)$, $g'(x_0)$. Potom

a) $(f \pm g)'(x_0) = f'(x_0) \pm g'(x_0)$

b) $(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0)$

(speciálně pro $c \in \mathbb{R}$: $(c\,f)'(x_0) = c\,f'(x_0)$)

c) $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(x_0) = \dfrac{f'(x_0) \cdot g(x_0) - f(x_0) \cdot g'(x_0)}{g^2(x_0)}$,

je-li $g(x_0) \neq 0$.

(speciálně pro $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$: $\left(\frac{f}{c}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)}{c}$)

Příklad 4.4:

$$(\mathrm{tg}\ x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)' \cos x - \sin x (\cos x)'}{\cos^2 x} =$$

$$= \frac{\cos x \cos x - \sin x(-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} =$$

$$= \frac{1}{\cos^2 x}\,.$$

Platí:

a) $\underline{(f_1 + f_2 + \ldots + f_n)'} = \big(f_1 + (f_2 + \ldots + f_n)\big)'$

$= f_1{}' + \big(f_2 + (f_3 + \ldots + f_n)\big)' = \ldots = \underline{f_1{}' + f_2{}' + \ldots + f_n{}'}$

b) $\underline{(f_1 \cdot f_2 \cdot \ldots \cdot f_n)'} = \big(f_1 \cdot (f_2 \cdot \ldots \cdot f_n)\big)' =$

$= f_1' \cdot (f_2 \cdot \ldots \cdot f_n) + f_1 \cdot \big(f_2 \cdot \ldots \cdot f_n\big)' = f_1' \cdot (f_2 \cdot \ldots \cdot f_n) + f_1 \cdot \big(f_2 \cdot (f_3 \cdot \ldots \cdot f_n)\big)' =$

$= f_1' \cdot (\, f_2 \cdot \ldots \cdot f_n \,) + f_1 \cdot \Big(f_2' \cdot (f_3 \cdot \ldots \cdot f_n) + f_2 \cdot (\, f_3 \cdot \ldots \cdot f_n \,)'\Big) =$

$= f_1' \cdot (\, f_2 \cdot \ldots \cdot f_n \,) + f_1 \cdot \Big(f_2' \cdot (f_3 \cdot \ldots \cdot f_n) + f_2 \cdot (\, f_3 \cdot (f_4 \cdot \ldots \cdot f_n) \,)'\Big) = \quad \ldots$

Příklad 4.5: Ukažte, že pro $n \in \mathbb{N}$ platí $(x^n)' = n\, x^{n-1}$.

Řešení: Provedeme důkaz matematickou indukcí:

- pro $n = 1$ máme: $(x^1)' = x' = 1 = 1.x^0 = 1.x^{1-1}$.
- předpokládejme, že vztah platí pro n, ukážeme, že platí i pro $n + 1$:

$$
\begin{aligned}
(x^{n+1})' &= (x \cdot x^n)' = x' \cdot x^n + x \cdot (x^n)' = \\
&= 1 \cdot x^n + x \cdot (n\, x^{n-1}) = x^n + n\, x^n = (n+1)x^n = \\
&= (n+1)x^{(n+1)-1}
\end{aligned}
$$

Věta 4.3 (o derivaci složené funkce):

Nechť existují **vlastní** $f'(x_0)$ a $g'\big(f(x_0)\big)$. Potom existuje vlastní derivace funkce $g \circ f$ v bodě x_0 a platí

$$(g \circ f)'(x_0) = g'\Big(f(x_0)\Big) \cdot f'(x_0).$$

Platí:

$$\underline{(h \circ g \circ f)'(x_0)} = \Big(h \circ (g \circ f)\Big)'(x_0) =$$

$$= h'\Big((g \circ f)(x_0)\Big) \cdot (g \circ f)'(x_0) = \underline{h'\Big(g(f(x_0))\Big) \cdot g'\big(f(x_0)\big) \cdot f'(x_0)}$$

(analogicky pro funkci vzniklou složením více funkcí)

Věta 4.4 (o derivaci inverzní funkce):

Nechť f je **prostá** a **spojitá** na (a,b), $x_0 \in (a,b)$, $f(x_0) = y_0$.

Jestliže existuje **vlastní** $f'(x_0) \neq 0$, pak existuje také $f'_{-1}(y_0)$

a platí

$$f'_{-1}(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} \quad \left(= \frac{1}{f'(f_{-1}(y_0))} \right).$$

Příklad 4.6: Derivace funkce **a)** $\ln y$, **b)** $\arcsin y$, $y \in (-1,1)$.

Příklad 4.7: Derivace funkce **a)** a^x, $a > 0$, $x \in \mathbb{R}$,

b) x^α, $\alpha \in \mathbb{R}$, $x > 0$.

Poznámka (logaritmické derivování):

Derivace funkcí typu

$$h(x) = \Big(u(x)\Big)^{v(x)} = \mathrm{e}^{v(x)\cdot\ln(u(x))},$$

kde $u(x) > 0$ pro všechna $x \in D(h)$:

$$\begin{aligned}\underline{h'(x)} &= \mathrm{e}^{v(x)\cdot\ln(u(x))}\cdot\Big(v(x)\cdot\ln\big(u(x)\big)\Big)' = h(x)\cdot\Big(v(x)\cdot\ln\big(u(x)\big)\Big)' \\ &= h(x)\cdot\Big(v'(x)\cdot\ln\big(u(x)\big)+v(x)\cdot\big(\ln\big(u(x)\big)\big)'\Big) \\ &= \underline{h(x)\cdot\Big(v'(x)\cdot\ln\big(u(x)\big)+v(x)\cdot\tfrac{1}{u(x)}\cdot u'(x)\Big).}\end{aligned}$$

Věta 4.5:
Nechť f je **spojitá** na nějakém intervalu $\langle x_0, x_0+\delta)$ a existuje

$$\lim_{x \to x_0+} f'(x) = a.$$

Potom existuje $f'_+(x_0)$ a platí

$$f'_+(x_0) = a\,.$$

(Analogicky pro $f'_-(x_0)$ a $f'(x_0)$.)

Příklad 4.8: Pro funkci $f(x) = x^2 \cdot \cos\dfrac{1}{x}$, $x \neq 0$, $f(0) = 0$, která je spojitá na $\mathbb{R}$, neexistuje $\lim\limits_{x \to 0} f'(x)$, existuje ale $f'(0) = 0$ – tvrzení Věty 4.5 tedy nelze obrátit.

Přehled derivací elementárních funkcí:

$$
\begin{aligned}
(e^x)' &= e^x && x \in \mathbb{R} \\
(\ln|x|)' &= \frac{1}{x} && x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \\
(a^x)' &= a^x \ln a && x \in \mathbb{R} && \text{pro } a > 0 \\
(\log_a |x|)' &= \frac{1}{x \ln a} && x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} && \text{pro } a > 0,\ a \neq 1 \\
(x^\alpha)' &= \alpha\, x^{\alpha-1} && \begin{cases} x \in \mathbb{R} & \text{pro } \alpha \in \mathbb{N}_0 \ ^1 \\ x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} & \text{pro } \alpha \in \mathbb{Z}^- \\ x \in (0,\infty) & \text{pro } \alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z} \ ^2 \end{cases}
\end{aligned}
$$

---

[1] pro $\alpha = x = 0$ pokládáme (ovšem pouze zde): $0 \cdot 0^{0-1} = 0$

[2] pro některé racionální exponenty lze rozšířit na $\mathbb{R}$ nebo $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$
\begin{aligned}
(\sin x)' &= \cos x & & x \in \mathbb{R} \\
(\cos x)' &= -\sin x & & x \in \mathbb{R} \\
(\operatorname{tg} x)' &= \frac{1}{\cos^2 x} & & x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \,\middle|\, k \in \mathbb{Z} \right\} \\
(\operatorname{cotg} x)' &= -\frac{1}{\sin^2 x} & & x \in \mathbb{R} \setminus \{ k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(\sinh x)' &= \cosh x & & x \in \mathbb{R} \\
(\cosh x)' &= \sinh x & & x \in \mathbb{R} \\
(\operatorname{tgh} x)' &= \frac{1}{\cosh^2 x} & & x \in \mathbb{R} \\
(\operatorname{cotgh} x)' &= -\frac{1}{\sinh^2 x} & & x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(\arcsin x)' &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} && x \in (-1,\, 1) \\
(\arccos x)' &= -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} && x \in (-1,\, 1) \\
(\operatorname{arctg} x)' &= \frac{1}{1+x^2} && x \in \mathbb{R} \\
(\operatorname{arccotg} x)' &= -\frac{1}{1+x^2} && x \in \mathbb{R}
\end{aligned}
$$

4.3 Derivace vyšších řádů

n-tá derivace (derivace řádu n) funkce f ... $f^{(n)}$

definujeme indukcí:

1) $n = 1:$ $f^{(1)}(x_0) = f'(x_0)$

2) $n > 1:$ předpokládejme, že existuje vlastní $f^{(n-1)}$ na nějakém okolí $U(x_0)$ a funkce $f^{(n-1)}$ má v x_0 derivaci - pak pokládáme:

$$\boxed{f^{(n)}(x_0) = \left(f^{(n-1)}\right)'(x_0)}$$

pro $n = 0$ píšeme: $f^{(0)} = f$

Značení:

$$
\begin{aligned}
f^{(1)}(x_0) &= f'(x_0) &&= \frac{\mathrm{d}\, f}{\mathrm{d}\, x}(x_0)\\
f^{(2)}(x_0) &= f''(x_0) &&= \frac{\mathrm{d}^{\,2} f}{\mathrm{d}\, x^2}(x_0)\\
&\ \vdots\\
f^{(6)}(x_0) &= f^{VI}(x_0) &&= \frac{\mathrm{d}^{\,6} f}{\mathrm{d}\, x^6}(x_0)\\
&\ \vdots\\
f^{(n)}(x_0) & &&= \frac{\mathrm{d}^{\,n} f}{\mathrm{d}\, x^n}(x_0)
\end{aligned}
$$

Příklad 4.9: Pro $f(x) = \ln x, \quad x > 0,$ máme

$$
f'(x) = 1/x = x^{-1}, \quad f''(x) = (-1)\, x^{-2},
$$

$$
f'''(x) = (-1)(-2)\, x^{-3}, \quad f^{(4)}(x) = (-1)(-2)(-3)\, x^{-4},
$$

$$
\vdots
$$

$$
f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}\,(n-1)!\; x^{-n}.
$$

Věta 4.6 (Leibnizův vzorec):

Nechť existují **vlastní** n-té derivace $f^{(n)}$ a $g^{(n)}$ funkcí f a g v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$. Potom

$$(f \cdot g)^{(n)}(x_0) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(x_0) \cdot g^{(n-k)}(x_0) .$$

Příklad 4.10: Najděte pomocí **Věty 4.6** $(x^2 \sin x)^{(9)}$.

Řešení: Snadno ověříme, že pro derivace funkcí $f(x) = x^2$ a $g(x) = \sin x$ platí:

$$f^{(0)}(x) = x^2, \quad f'(x) = 2x, \quad f''(x) = 2, \quad f^{(k)}(x) = 0 \quad \text{pro} \quad k \geq 3$$

$$g^{(4l)}(x) = \sin x, \quad g^{(4l+1)}(x) = \cos x, \quad g^{(4l+2)}(x) = -\sin x, \quad g^{(4l+3)}(x) = -\cos x$$

$$(l \in \mathbb{N}_0).$$

Tedy podle **Leibnizova vzorce** (**V4.6**) máme:

$$\underline{(x^2 \sin x)^{(9)}} =$$

$$= \binom{9}{0} x^2 \cdot \underbrace{\cos x}_{(\sin x)^{(9)}} + \binom{9}{1} 2x \cdot \underbrace{\sin x}_{(\sin x)^{(8)}} + \binom{9}{2} 2 \cdot \underbrace{(-\cos x)}_{(\sin x)^{(7)}} + \binom{9}{3} \cdot 0 \cdot \underbrace{(-\sin x)}_{(\sin x)^{(6)}} + 0 + 0 + \ldots =$$

$$= x^2 \cos x + 9 \cdot 2\, x \sin x - \frac{9 \cdot 8}{2} \cdot 2 \cos x = \underline{x^2 \cos x + 18x \sin x - 72 \cos x}.$$