

Příklad: Funkce f je rostoucí na intervalu (a, b) . Práve teď, když je rozložena v zádém bodě tohoto intervalu,

grafy graf funkce f kmitají.

Poznámka: Funkce $f(x) = x \cdot \sin \frac{1}{x} + 2x$ pro $x \neq 0$, $f(0) = 0$, je rostoucí v nule, neboť rostoucí na zádém intervalu dosahujícímu nulu. (Na obrázku jsou vizuálně výraznější oblasti, kde funkce f je rostoucí.)

(analogicky funkce nelze s jistotou v bodě)

$$\begin{aligned} b) & \quad \text{jelikož } x < x_0, \quad \text{pak } f(x) < f(x_0) \\ a) & \quad \text{jelikož } x > x_0, \quad \text{pak } f(x) > f(x_0) \end{aligned}$$

Rekmenem, že funkce f je rostoucí (klesající) v bodě $x_0 \in D(f)$, jestliže existuje okolo $U(x_0) \subset D(f)$ bodu x_0

Definice:

$f'(x_0) = 0 \quad \dots \quad x_0$ – stacionární bod funkce (místo v něm bývá extrém, ale nemusí)

Poznámka: Z Věty 6.1 vyplývá, že funkce může mít lokální extrém jen v tom bodě, kde má nulovou derivaci nebo kde derivaci nemá.

Jestliže funkce f nabývá lokálního extrému v bodě x_0 a existuje $f'(x_0)$, pak $f'(x_0) = 0$.

Věta 6.1:

ostra nerovnost v (1), (2) pro $x \neq x_0 \quad \dots \quad$ ostrý extrém

$$\left. \begin{array}{c} \text{lokální maximum} \\ \text{lokální minimum} \end{array} \right\} \quad \dots \quad \text{lokální extrém}$$

$$(2) \quad (0x)f \lesssim (x)f \quad (0x)f \gtrless (x)f$$

$U(x_0)$ bodu x_0 takové, že pro každé $x \in U(x_0)$ platí

Rekmenem, že funkce f nabývá v bodě x_0 lokálního maxima (lokálního minima) $f(x_0)$, jestliže existuje okolo $U(x_0)$ bodu x_0 takové, že pro každé $x \in U(x_0)$ platí

Definice:

Výmla: Svojí funkce na uzavřeném intervalu nabývá svých globálních extrémů (Věta 5.5).

$$\left. \begin{array}{c} \text{globální maximum} \\ \text{globální minimum} \end{array} \right\} \quad \dots \quad \text{globální extrém}$$

(tj. „absolutní maximum a minimum na M “, „nevlastní a nejméně hodnotu na M “)

$$(1) \quad (0x)f \lesssim (x)f \quad (0x)f \gtrless (x)f$$

v bodě x_0 , jestliže $x_0 \in M$, $f(x_0) = A$ a pro každé $x \in M$ Platí

Rekmenem, že funkce f nabývá na množině $M \subset D(f)$ svého globálního maxima (globálního minima) A

Definice:

6.1 Extreme a monotone

KAPITOLA 6: Prábeh funkce

Věta 6.2:

Je-li $f'(x_0) > 0$ ($f'(x_0) < 0$), pak je f v x_0 rostoucí (klesající).

Důkaz: Předpokládejme, že derivace $f'(x_0)$ je kladná. Pak $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) > 0$, tedy podle věty 3.4 o zachování znaménka existuje prstencové okolí $P(x_0)$ bodu x_0 takové, že $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0$ pro všechna $x \in P(x_0)$. To znamená, že na $P(x_0)$ pro $x > x_0$ platí $f(x) > f(x_0)$ a pro $x < x_0$ platí $f(x) < f(x_0)$. Funkce f je tak skutečně v x_0 rostoucí. V případě $f'(x_0) < 0$ bychom postupovali analogicky.

Poznámka: Má-li funkce f v bodě x_0 nezápornou derivaci, tj. je-li $f'(x_0) \geq 0$, nemusí být nutně v x_0 neklesající. Např. pro $f(x) = x^2$ máme $f'(x) = 2x$, tedy $f'(0) = 0 \geq 0$, a přitom funkce f v nule neklesající není – má tam lokální minimum. Platí ale naopak, že pokud je funkce v x_0 neklesající a existuje $f'(x_0)$, pak $f'(x_0) \geq 0$. Kdyby totiž byla $f'(x_0) < 0$, byla by podle věty 6.2 funkce f v bodě x_0 klesající.

Věta 6.3:

Nechť f je spojitá na intervalu I a má v každém jeho vnitřním bodě derivaci. Potom

- f je na I neklesající (nerostoucí) právě tehdy, když na vnitřku I je $f' \geq 0$ ($f' \leq 0$),
- je-li na vnitřku I $f' > 0$ ($f' < 0$), pak f je na I rostoucí (klesající).
- je-li na vnitřku I derivace funkce f spojitá a ve všech bodech nenulová, pak je f na I rye monotonní.

Platí: a) Je-li f rostoucí na (a, b) a spojitá zprava v a (zleva v b), pak je rostoucí na (a, b) (na (a, b)).

b) Je-li f rostoucí na (a, b) a na (b, c) , pak je rostoucí na (a, c) .

(Analogicky i pro ostatní typy monotonie.)

Ověřování lokálních extrémů**A) Pomocí monotonie na okolí (a znaménka derivace):**

Je-li f spojitá v x_0 a existuje-li $\delta > 0$ tak, že

f na $P_\delta^-(x_0) = (x_0 - \delta, x_0)$	f na $P_\delta^+(x_0) = (x_0, x_0 + \delta)$	
rosté	klesá	
klesá	rosté	
neklesá	nerosté	
nerosté	neklesá	
rosté	rosté	
klesá	klesá	

$v x_0$

pak

je ostré lokální maximum
je ostré lokální minimum
je lokální maximum
je lokální minimum
není extrém (f v x_0 rosté)
není extrém (f v x_0 klesá)

Poznámka: Monotonii většinou ověřujeme pomocí znaménka derivace.

B) Pomocí 2. derivace:

Je-li $f'(x_0) = 0$ a $f''(x_0) > 0$ ($f''(x_0) < 0$), pak f má v x_0 lokální minimum (lokální maximum).

Hledání globálních extrémů spojité funkce**A) na intervalu $I = \langle a, b \rangle$:**

a) Najdeme v I body, kde může být globální extrém (tj. „body podezřelé z extrému“):

- body a, b
- stacionární body ($f'(x) = 0$)
- body, kde f nemá derivaci.

b) Spočítáme funkční hodnoty v bodech z a) a vybereme z nich největší / nejmenší.

$$\begin{cases} \text{asymptota} & k \neq 0 \\ \text{vodorovna} & k = 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} (f(x) - (b + kx)) = 0.$$

b) Pokud funkce f má v bodě $x_0 = +\infty$ ($-\infty$) asymptotu $y = kx + b$ ($k, b \in \mathbb{R}$), ještěže

a) Pokud funkce f má v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$ vnitřní asymptotu, ještěže existuje jíž $x \rightarrow x_0$

Definice:

6.3 Asymptoty grafu funkce

c) Je-li $x_0 \in (a, b)$, $f''(x_0) = 0$ a f'' má v x_0 známku, pak f má v x_0 inflexi.

b) Má-li f v $x_0 \in (a, b)$ inflexi a existuje $f''(x_0)$, pak $f''(x_0) = 0$,

| konkavitu|,

a) Je-li na (a, b) $f'' > 0$ ($f'' \leq 0$ | $f'' > 0$ | $f'' \leq 0$), pak je f na (a, b) ryzé konvexní (konvektní) ryzé konkavní

Má-li funkce f druhou derivaci na (a, b) , pak

Veta 6.4:

inflexní třína ... třína v inflexním bodě

ryzé konkavní. (Pokud tedy f má v x_0 inflexi.)

$f''(x_0)$ existuje $\delta > 0$ takové, že f je na jednom z intervalů $(x_0 - \delta, x_0)$ a $(x_0, x_0 + \delta)$ ryzé konvexní a na druhém

je konkavní. (Funkce f je inflexním bodem grafu funkce f , ještěže f je spojita v x_0 , existuje

Definice:

pak f je na I ryzé konvexní (ryzé konkavní). (Analogicky pro konkavní a konkavní funkci.)

$$f'(x) < f'(0x - x) \quad f'(0x - x) < f'(0x) \quad f'(0x) < f'(x) \quad f'(x) < f'(0x - x) + (0x - x)f' + (0x)(0x)f'$$

Příklad: Má-li funkce f derivaci na intervalu I a pro každé $x_0, x \in I, x \neq x_0$, platí

$$\begin{aligned} & \left[\begin{array}{ll} (t-x)f < (x)f & (t-x)f \geq (x)f \\ (t-x)f > (x)f & (t-x)f \leq (x)f \end{array} \right] \\ & \text{platí} \end{aligned}$$

$$\frac{t-z}{(t)-(z)f} = k_{t,z}$$

každý třídy $t, x, z \in I, t < x < z$, a též

Platí funkce f je konkavní (ryzé konkavní) [konkavní (ryzé konkavní)] na intervalu I , ještěže pro

Definice:

6.2 Funkce konvexní a konkavní

$$\begin{aligned} & \text{(Pokud } \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) \text{ neexistuje, je situace složitější a nebudeme ji tu obecně řešit.)} \\ & a = \inf\{f(x) \mid x \in (a, b)\} \quad (a = \inf\{f(x) \mid x \in (a, b)\}). \end{aligned}$$

bodček funkciu hodnotu v_{\min} (menší) než a , pak f na (a, b) globálně minima (maxima) nemá vlastnosti

Postupujeme jako v A), pouze $f(a)$ nahradíme $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = a$ s tím, že je-li ve všechn ostacích výstřednostech

B) na intervalu, který není uzavřený (např. pro $(a, b) -$ jinak analogicky):

Věta 6.5:

a) Je-li $k, q \in \mathbb{R}$, pak přímka $y = kx + q$ je asymptotou funkce f v $+\infty$ právě tehdy, když

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad & \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = k, \\ \text{(ii)} \quad & \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - kx) = q. \end{aligned}$$

b) Přímka $y = q$ je vodorovnou asymptotou funkce f v $+\infty$ právě tehdy, když $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = q$.
(Analogicky pro asymptoty v $-\infty$.)

6.4 Shrnutí**Obecný postup při vyšetřování průběhu funkce f :**

Zjistíme

- 1) • $D(f), H(f)$, průsečky s osami, „znaménko“
• je f sudá | lichá | periodická?
• intervaly spojitosti, limity v bodech nespojitosti a v hraničních bodech $D(f)$
(vycházíme z předpisu pro $f(x)$)
- 2) • intervaly monotonie
• lokální a globální extrémy
• chování tečen v blízkosti bodů nespojitosti
(vycházíme převážně z předpisu pro $f'(x)$)
- 3) • intervaly konvexity a konkávity, inflexní body
(většinou pomocí f'' , někdy lze i z f')
• tečny v inflexních bodech
- 4) • asymptoty

6.5 Příklady

Příklad 6.1: Najděte lokální extrémy funkce $f(x) = (x+2|x|) - x^3$ a vyšetřete monotonii této funkce.
(Graf funkce f je na následující stránce.)

Příklad 6.2: Najděte největší a nejmenší hodnotu funkce f z Příkladu 6.1 na intervalu a) $\left(-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$, b) $\left(-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$.

Řešení: Víme, že f' neexistuje v $x_0 = 0$ a f má jeden stacionární bod $x_1 = 1$ (viz řešení příkladu 7.2 na přednášce). Body x_0, x_1 leží v obou intervalech. Pro hledání globálních extrémů přidáme k těmto bodům ještě krajní body intervalů. Dále budeme řešit varianty a) a b) každou zvlášť.

a) Porovnáváme hodnoty:

$$f(0) = 0, \quad f(1) = 2, \quad f\left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{39}{8}, \quad f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{9}{8}.$$

Z nich je nejmenší 0 a největší $\frac{39}{8}$, tedy

- f nabývá na $\left(-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$ v $x_0 = 0$ svého minima $f(0) = 0$,
- f nabývá na $\left(-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$ v $x_2 = -\frac{3}{2}$ svého maxima $f\left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{39}{8}$.

b) Porovnáváme hodnoty:

$$f(0) = 0, \quad f(1) = 2, \quad \lim_{x \rightarrow -\frac{3}{2}^+} f(x) = \frac{39}{8}, \quad \lim_{x \rightarrow \frac{3}{2}^-} f(x) = \frac{9}{8}.$$

Protože největší z těchto hodnot je $\lim_{x \rightarrow -\frac{3}{2}^+} f(x)$ a bod $-\frac{3}{2}$ v daném intervalu neleží, dostáváme, že

- f nabývá na $\left(-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$ v $x_0 = 0$ svého minima $f(0) = 0$,
- f na $\left(-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$ svého minima nenabývá.

Příklad 6.3: Najděte (maximální) intervaly, na kterých je funkce $f(x) = x \ln^2 x$ konkávní; najděte inflexní body jejího grafu.

Příklad 6.4: Najděte asymptoty grafu funkce $f(x) = x + |x| + \frac{\sin(10x)}{x^2} + 3$.

Řešení: Zřejmě $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Dále:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(2x + \frac{\sin(10x)}{x^2} + 3\right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(2x + \frac{\sin(10x)}{10x} \cdot \frac{10}{x} + 3\right) = +\infty,$$

tedy graf funkce f má svislou asymptotu v bodě $x_0 = 0$, její rovnice je $x = 0$ (lze použít i $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$, která je také nevlasmí);

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(2x + \frac{\sin(10x)}{x^2} + 3\right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(2x + \frac{1}{x^2} \cdot \sin(10x) + 3\right) = \langle +\infty + 0 \cdot \text{omez.} + 3 \rangle = +\infty,$$

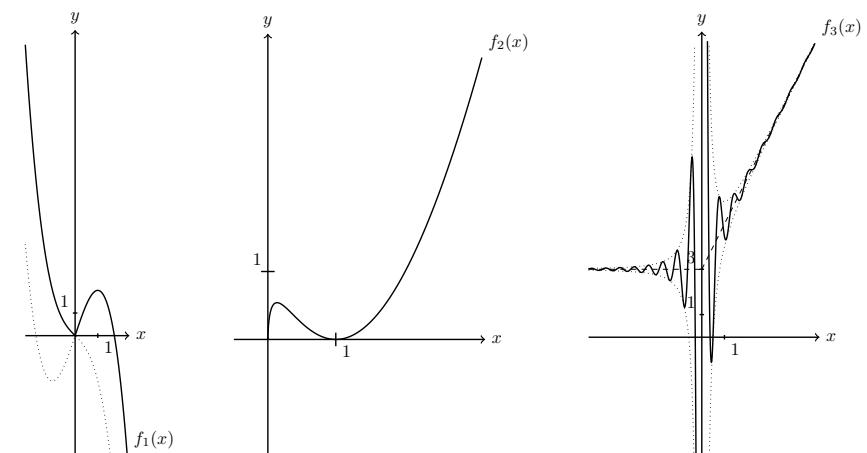
$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(2 + \frac{\sin(10x)}{x^3} + \frac{3}{x}\right) = 2 (= k),$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - 2 \cdot x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{\sin(10x)}{x^2} + 3\right) = 3 (= q),$$

tedy graf funkce f má v $+\infty$ šikmou asymptotu $y = 2x + 3$;

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{\sin(10x)}{x^2} + 3\right) = 3,$$

tedy graf funkce f má v $-\infty$ vodorovnou asymptotu $y = 3$.



grafy funkcí $f_1(x) = (x+2|x|) - x^3$, $f_2(x) = x \ln^2 x$ a $f_3(x) = x + |x| + \frac{\sin(10x)}{x^2} + 3$
(komentář na přednášce)

Příklad 6.5: Graf funkce $f(x) = x + \cos x$ nemá asymptoty v $\pm\infty$, protože sice

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty \quad \text{a} \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 1,$$

ale

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - 1 \cdot x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \cos x$$

neexistuje.