KAPITOLA 12: Číselné řady

Označení:

- $\mathbb{R} \cup \{-\infty,\ +\infty\} = \overline{\mathbb{R}}$
- $\mathbb{C} \cup \{\infty\} = \overline{\mathbb{C}}$ – rozšířená komplexní rovina (∞ – nevlastní hodnota, číslo, bod)

$$U_\varepsilon(a) = \{x \in \mathbb{C} \mid |x-a| < \varepsilon\} \text{ pro } a \in \mathbb{C},\ \varepsilon > 0$$
$$U_K(\infty) = \{x \in \mathbb{C} \mid |x| > K\} \text{ pro } K \geq 0$$

definujeme pro $a \in \mathbb{C}$:

$a \pm \infty = \infty,\ a \cdot \infty = \infty$ (jen pro $a \neq 0$), $\frac{a}{\infty} = 0,\ \infty \cdot \infty = \infty$

nedefinujeme:

$0 \cdot \infty,\ \frac{\infty}{\infty},\ \infty \pm \infty$

Posloupnosti komplexních čísel

$(a_n)_{n=1}^\infty = (\alpha_n + \mathrm{j}\,\beta_n)_{n=1}^\infty = (\alpha_n)_{n=1}^\infty + \mathrm{j}\,(\beta_n)_{n=1}^\infty, \quad \alpha_n,\ \beta_n \in \mathbb{R}$

definice limity jako v reálném případě

Platí:

- $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0 \ \Leftrightarrow\ \lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{(\operatorname{Re} a_n)^2 + (\operatorname{Im} a_n)^2} = 0$
- $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \in \mathbb{C} \ \Leftrightarrow\ \left(\lim\limits_{n\to\infty} \operatorname{Re} a_n = \operatorname{Re} a \ \wedge\ \lim\limits_{n\to\infty} \operatorname{Im} a_n = \operatorname{Im} a\right)$
- $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty \ \Leftrightarrow\ \lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = +\infty$
  – k tomu stačí, když platí $\lim\limits_{n\to\infty} |\operatorname{Re} a_n| = +\infty$ nebo $\lim\limits_{n\to\infty} |\operatorname{Im} a_n| = +\infty$ (není to ovšem nutné – viz posloupnost $(a_n)_{n=1}^\infty = (1,\ 2\mathrm{j},\ 3,\ 4\mathrm{j},\ \ldots)$, pro kterou ani jedna z uvedených dvou limit neexistuje)

12.1 Úvod

$(a_n)_{n=1}^\infty$ – posloupnost reálných nebo komplexních čísel

$\sum\limits_{n=1}^\infty a_n$ – (nekonečná) řada reálných nebo komplexních čísel, a_n – n-tý člen řady

obecněji: $\sum\limits_{n=N_0}^\infty a_n\,;\ \sum\limits_{\substack{n=1\\P(n)}}^\infty a_n$, kde $P(n)$ je nějaký výrok (např. „3 nedělí n“) ; …

Definice :

Nechť $N \in \mathbb{N}$. Pak N-tý **částečný součet** řady $\sum\limits_{n=1}^\infty a_n$ definujeme předpisem:

$$s_N = \sum_{n=1}^N a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_N.$$

Existuje-li $s = \lim\limits_{N\to\infty} s_N$, nazýváme s **součtem řady** $s = \sum\limits_{n=1}^\infty a_n$. Píšeme $s = \sum\limits_{n=1}^\infty a_n$.

Řekneme, že řada **konverguje** (**diverguje** | **osciluje**), jestliže posloupnost částečných součtů $(s_N)_{N=1}^\infty$ má limitu vlastní (nevlastní | nemá limitu).

Poznámka : Změna konečně mnoha členů řady nemá vliv na to, zda řada konverguje, diverguje či osciluje.

Příklad 12.1: $\sum\limits_{n=1}^\infty n$ diverguje $\left[s_N = \frac{N(N+1)}{2}\right]$; $\sum\limits_{n=1}^\infty (-1)^n$ osciluje $\left[(s_N)_{N=1}^\infty = (-1,0,-1,0,-1,0,\ldots)\right]$; $\sum\limits_{n=1}^\infty (-1)^n n$ osciluje v $\mathbb{R}$, ale diverguje v $\mathbb{C}$ $\left[(s_N)_{N=1}^\infty = (-1,1,-2,2,-3,3,\ldots)\right]$

Příklad 12.2: **Geometrická řada** s kvocientem q: $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, kde $a_0,\ q \in \mathbb{R}$, $a_{n+1} = q \cdot a_n$, tj. $a_n = a_0 \cdot q^n$

- Speciálně pro $\underline{a_0 = 1}$ je
$$\sum_{n=0}^{N} a_n = \sum_{n=0}^{N} q^n = s_N = 1 + q + q^2 + \ldots + q^N .$$
Je-li $\underline{q = 1}$, pak zřejmě platí $s_N = N + 1$. Pro $\underline{q \neq 1}$ máme
$$s_{N+1} = 1 + q + q^2 + \ldots + q^N + q^{N+1} = \begin{cases} s_N + q^{N+1} \\ 1 + q \cdot s_N \end{cases}$$
tedy
$$\begin{aligned} s_N + q^{N+1} &= 1 + q \cdot s_N , \\ s_N &= \frac{1 - q^{N+1}}{1 - q} . \end{aligned}$$
To nám dává pro $|q| < 1$
$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$$
a obecněji
$$\sum_{n=N_0}^{\infty} q^n = \sum_{n=N_0}^{\infty} q^{N_0} \cdot q^{n-N_0} \overset{m=n-N_0}{=} \sum_{m=0}^{\infty} q^{N_0} \cdot q^m = q^{N_0} \cdot \frac{1}{1-q} .$$
Pro ostatní kvocienty q z vyjádření s_N dostáváme

  ◇ v $\mathbb{R}$: $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \begin{cases} +\infty & \text{pro } q \geq 1 \\ \text{osciluje} & \text{pro } q \leq -1 \end{cases}$

  ◇ v $\mathbb{C}$: $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \begin{cases} \infty & \text{pro } |q| > 1 \text{ nebo } q = 1 \\ \text{osciluje} & \text{pro } |q| = 1,\ q \neq 1 \end{cases}$

- Pro $\underline{\text{obecné } a_0 \neq 0}$ všechny součty vynásobíme číslem a_0.
Speciálně pro $|q| < 1$ dostáváme
$$\sum_{n=0}^{\infty} a_0\, q^n = a_0 \cdot \frac{1}{1-q} ,$$
a obecněji jako výše
$$\sum_{n=N_0}^{\infty} a_n = \sum_{n=N_0}^{\infty} a_0\, q^n = a_0\, q^{N_0} \cdot \frac{1}{1-q} = a_{N_0} \cdot \frac{1}{1-q} .$$

- Pro $\underline{a_0 = 0}$ je součet řady nulový (všechny členy řady jsou nulové).

Příklad 12.3: $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3}{(-4)^n} = \sum_{n=0}^{\infty} 3\big(-\frac{1}{4}\big)^n = 3 \cdot \frac{1}{1 - \big(-\frac{1}{4}\big)} = \frac{12}{5}$

Příklad 12.4: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1.$ Máme totiž $a_n = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$, takže
$$s_N = \big(\tfrac{1}{1} - \tfrac{1}{2}\big) + \big(\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{3}\big) + \big(\tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4}\big) + \ \ldots\ + \big(\tfrac{1}{N-1} - \tfrac{1}{N}\big) + \big(\tfrac{1}{N} - \tfrac{1}{N+1}\big) = \tfrac{1}{1} - \tfrac{1}{N+1} \overset{N\to\infty}{\longrightarrow} 1 .$$

Věta 12.1 :

Je-li $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n = A \in \overline{\mathbb{R}}\ (\overline{\mathbb{C}})$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n = B \in \overline{\mathbb{R}}\ (\overline{\mathbb{C}})$ a $c \in \mathbb{R}\,(\mathbb{C})$, pak platí
$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = A + B, \quad \sum_{n=1}^{\infty} c \cdot a_n = c \cdot A,$$
pokud je výraz vpravo definován.

Věta 12.2 :

Nechť $(a_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{C}$. Pak řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje právě tehdy, když konvergují obě řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \operatorname{Re} a_n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \operatorname{Im} a_n$. Pokud řady konvergují, pak

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Re} a_n + \mathrm{j} \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Im} a_n .$$

Věta 12.3 (nutná podmínka konvergence) :

Jestliže $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje, pak $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Důkaz: Označme $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ posloupnost částečných součtů dané řady a s její limitu (součet řady). Protože řada konverguje, je $s \in \mathbb{R}$. Pro $n > 1$ je $a_n = s_n - s_{n-1}$, tedy podle věty o aritmetice limit

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} (s_n - s_{n-1}) = \lim_{n\to\infty} s_n - \lim_{n\to\infty} s_{n-1} = s - s = 0.$$

Rozdíl limit je v tomto případě definován, protože jsou obě konečné. □

Příklad 12.5: Řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg} n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)$ nekonvergují. Je totiž $\lim_{n\to\infty} \operatorname{arctg} n = \frac{\pi}{2} \neq 0$ a $\left(\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)\right)_{n=1}^{\infty} = (1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, \ldots)$, tedy limita $\lim_{n\to\infty} \sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)$ neexistuje.

12.2 Řady s nezápornými členy

Věta 12.4 :

Je-li $a_n \geq 0$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, pak existuje součet $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ (a je nezáporný).

Poznámka : Protože je zde $(s_N)_{N=1}^{\infty}$ neklesající (a tedy $\lim_{N\to\infty} s_N$ existuje), stačí k určení hodnoty součtu řady najít limitu jakékoliv podposloupnosti posloupnosti $(s_N)_{N=1}^{\infty}$.

Příklad 12.6: Harmonická řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverguje. Podle předchozí Poznámky totiž stačí ukázat, že limitou částečných součtů, které odpovídají součtu prvních 2^N členů řady, je $+\infty$. Pro tyto částečné součty máme:

$$s_{2^N} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{2^N} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{9} + \ldots + \frac{1}{16}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{2^{N-1}+1} + \ldots + \frac{1}{2^N}\right) =$$

$$> \frac{1}{1} + 1\cdot\frac{1}{2} + 2\cdot\frac{1}{4} + 4\cdot\frac{1}{8} + 8\cdot\frac{1}{16} + \ldots + 2^{N-1}\cdot\frac{1}{2^N} = 1 + \underbrace{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2}}_{N\text{-krát}} = 1 + \frac{N}{2}.$$

Protože menší posloupnost $\left(1 + \frac{N}{2}\right)_{N=1}^{\infty}$ má limitu $+\infty$, má podle Věty 11.11,b) limitu $+\infty$ i posloupnost s většími členy $\left(\tilde{s}_N\right)_{N=1}^{\infty}$, kde $\tilde{s}_N = s_{2^N}$. Součet harmonické řady je tak $+\infty$ a tato řada diverguje.

Věta 12.5 (srovnávací kritérium) :

Nechť $0 \leq a_n \leq b_n$ pro každé $n \geq n_1$. Potom platí:

a) Jestliže konverguje řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$, pak konverguje i řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ (a je-li $n_1 = 1$, pak $0 \leq \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \leq \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$).

b) Jestliže diverguje řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, pak diverguje i řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$.

Příklad 12.7: Pro $\alpha \leq 1$ řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ diverguje, protože pro tato α je $\frac{1}{n^\alpha} \geq \frac{1}{n}$ a harmonická řada diverguje.

Příklad 12.8: Řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konverguje. Podle příkladu 12.4 totiž konverguje řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$ a $\frac{1}{n(n+1)} \geq$ $\geq \frac{1}{n(n+n)} = \frac{1}{2}\,\frac{1}{n^2}$.

Poznámka („limitní verze“ srovnávacího kritéria): Uvažujme řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ s kladnými členy. Předpokládejme, že existuje vlastní limita $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = c$ (zřejmě $c \geq 0$). Pokud je $c \neq 0$, pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje právě tehdy, když konverguje řada $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$. Z definice limity totiž existuje k $\varepsilon = \frac{c}{2} > 0$ index $n_1 \in \mathbb{N}$ takový, že pro každé $n \geq n_1$ je $\frac{1}{2}c = c - \varepsilon < \frac{a_n}{b_n} < c + \varepsilon = \frac{3}{2}c$, a tedy $\frac{1}{2}c\,b_n < a_n < \frac{3}{2}c\,b_n$. Použijeme-li nyní srovnávací kritérium na řady s členy $c_n \overset{\text{ozn.}}{=} \frac{1}{2}c\,b_n$, a_n a $d_n \overset{\text{ozn.}}{=} \frac{3}{2}c\,b_n$, zjistíme, že jestliže konverguje řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, konverguje i řada $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$, a pokud konverguje řada $\sum_{n=1}^{\infty} d_n$, konverguje i řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Řady $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} d_n$ přitom zřejmě konvergují právě tehdy, když konverguje řada $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$. Pokud je $c = 0$, pak nám konvergence řady $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ dává konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Z definice limit totiž k $\varepsilon = 1$ existuje index $n_1 \in \mathbb{N}$ takový, že pro každé $n \geq n_1$ je $\frac{a_n}{b_n} < 0 + \varepsilon = 1$, tedy $a_n < b_n$. Konvergence řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nám na základě limity $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$ o konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ nic neříká.

Příklad 12.8 – dodatek: K důkazu konvergence řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ můžeme použít také výše uvedenou limitní verzi srovnávacího kritéria: Máme $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n^2}\right)/\left(\frac{1}{n(n+1)}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{n(n+1)}{n^2} = 1$ a řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$ konverguje.

Věta 12.6 (podílové kritérium – D'Alembertovo):

Nechť $a_n > 0$ pro všechna $n \geq n_1$. Potom platí:

a) Jestliže existuje $0 < q < 1$ tak, že $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \leq q$ pro všechna $n \geq n_1$, pak $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.
mm

b) Jestliže $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$ pro všechna $n \geq n_1$, pak $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje.

Důkaz: Důkaz provedeme pro případ $n_1 = 1$. V ostatních případech bychom postupovali analogicky.

a) Jestliže pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q$, pak $a_{n+1} \leq q\,a_n \leq q^2 a_{n-1} \leq q^3 a_{n-2} \leq \ldots \leq q^n a_1$. Tedy pro všechna $n \in \mathbb{N}$ máme $a_n \leq b_n$, kde $b_n = q^{n-1}a_1$ a $0 < q < 1$. Protože geometrická řada $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konverguje, konverguje podle srovnávacího kritéria (Věta 12.5) i řada $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

b) Jestliže $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$, pak je posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ neklesající a pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $a_n \geq a_1 > 0$. Tedy nemůže být $\lim\limits_{n\to\infty} a = 0$. Není tím splněna nutná podmínka konvergence (Věta 12.3) a řada $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nekonverguje. Protože podle Věty 12.4 má řada s nezápornými členy vždy součet, musí tato řada divergovat. □

Věta 12.7 (limitní podílové kritérium):

Nechť $a_n > 0$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$. Potom platí:

a) Jestliže existuje $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} < 1$, pak $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.

b) Jestliže existuje $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} > 1$, pak $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje.

Důkaz: Označme $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = A$. Protože členy řady jsou kladné, je $A \geq 0$.

a) Je-li $A < 1$, pak z definice limity posloupnosti pro $\varepsilon = \frac{1-A}{2} > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro všechna $n \geq n_0$ platí $|\frac{a_{n+1}}{a_n} - A| < \varepsilon$, tedy též $\frac{a_{n+1}}{a_n} < A + \varepsilon = A + \frac{1-A}{2} = \frac{1+A}{2} < 1$. Řada tedy splňuje předpoklady první části podílového kritéria (Věty 12.6) s $q = \frac{1+A}{2}$, a je tedy podle tohoto kritéria konvergentní.

b) Jestliže je $A > 1$, pak z definice limity existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro všechna $n \geq n_0$ platí $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$. Tedy jsou splněny předpoklady druhé části podílového kritéria a daná řada diverguje. □

Věta 12.8 (odmocninové kritérium – Cauchyovo):

Nechť $a_n \geq 0$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$. Potom platí:

a) Jestliže existuje $0 < q < 1$ tak, že $\sqrt[n]{a_n} \leq q$ pro všechna $n \geq n_1$, pak $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.

b) Jestliže $\sqrt[n]{a_n} \geq 1$ pro nekonečně mnoho n, pak $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje.

Důkaz: a) V tomto případě pro všechna $n \geq n_1$ platí $a_n < q^n$. Protože geometrická řada $\sum_{n=1}^{\infty} q^n$ s kvocientem $0 < q < 1$ konverguje, konverguje podle srovnávacího kritéria (Věta 12.5) i řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

b) Jestliže pro nekonečně mnoho n platí $\sqrt[n]{a_n} \geq 1$, pak také pro nekonečně mnoho n platí $a_n \geq 1$, takže nemůže platit $\lim_{n\to\infty} a = 0$ a podle Věty 12.3 daná řada nekonverguje. Protože ale podle Věty 12.4 existuje její součet, musí být tento součet nekonečný, takže řada diverguje. $\square$

Věta 12.9 (limitní odmocninové kritérium):

Nechť $a_n \geq 0$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$. Potom platí:

a) Jestliže existuje $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} < 1$, pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.

b) Jestliže existuje $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} > 1$, pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje.

Důkaz by probíhal stejně jako u limitního podílového kritéria, pouze s odkazem na odmocninové kriérium (Věta 12.8.) místo odkazu na kritérium podílové. $\square$

Poznámky:

a) V nelimitních kritériích pro konvergenci nestačí $\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$ resp. $\sqrt[n]{a_n} < 1$ pro všechna n (viz např. harmonická řada: $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n}{n+1} < 1$, $\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\frac{1}{n}} < 1$, ale řada diverguje).

b) Limitní kritéria nepomohou, je-li $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$ nebo $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$ (viz např. řady: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ – diverguje, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ – konverguje).

c) U podílového kritéria pro divergenci nestačí: „pro nekonečně mnoho n“ (viz příklad 12.10).

d) Lze-li ukázat, že řada konverguje pomocí podílového kritéria, lze to i pomocí odmocninového. Pro divergenci to ale neplatí (viz např. řadu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{n}$, jejíž divergenci lze ukázat pomocí podílového kritéria, ne však pomocí odmocninového).

Připomenutí – užitečné limity (viz [P11.6]):

- $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$ pro $a > 0$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!} = +\infty$

Příklad 12.9: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$ konverguje podle kritéria podílového ($\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{2} < 1$), podílového limitního ($\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{n+1} \to 0 < 1$), odmocninového limitního ($\sqrt[n]{a_n} \to \left\langle\!\left\langle \frac{1}{\infty} \right\rangle\!\right\rangle = 0 < 1$), srovnávacího (pro $n \geq 2$ je $n! \geq (n-1)n \geq \frac{n}{2}\,n$, tedy $a_n \leq \frac{2}{n^2}$, a přitom řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2}$ konverguje).

Příklad 12.10: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, kde $a_n = \dfrac{1}{2^n}$ pro n-sudé a $a_n = \dfrac{1}{5^n}$ pro n-liché, konverguje podle odmocninnového kritéria (podílové ale nepomůže, protože $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$ pro všechna lichá n; nelze použít ani limitní odmocninové kritérium, protože $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$ neexistuje; vhodné je ale použití srovnávacího kritéria, protože pro každé n platí $a_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$).

Příklad 12.11: U řad $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^\alpha}$, $\alpha > 0$, podílové ani odmocninové kritérium nepomůže.

Věta 12.10 (integrální kritérium):

Nechť f je nezáporná a nerostoucí funkce na intervalu $\langle N, \infty)$, kde $N \in \mathbb{N}$. Pak řada $\sum_{n=N}^{\infty} f(n)$ konverguje právě tehdy, když konverguje integrál $\int_N^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$.

Důkaz: Důkaz provedeme pro případ $N = 1$. Jinak by se postupovalo analogicky.

Protože je funkce f nerostoucí na intervalu $\langle 1, \infty)$, pro každé $n \in \mathbb{N}$ a $x \in \langle n, n+1\rangle$ platí $f(n) \geq f(x) \geq f(n+1)$. Tedy pro každé $n \in \mathbb{N}$ je

$$f(n) = \int_n^{n+1} f(n)\,\mathrm{d}x \;\geq \int_n^{n+1} f(x)\,\mathrm{d}x \;\geq \int_n^{n+1} f(n+1)\,\mathrm{d}x = f(n+1)$$

(využili jsme toho, že integrál z konstanty je konstanta krát délka intervalu). Pro každé $M \in \mathbb{N}$ tak platí

$$\sum_{n=1}^{M} f(n) \;\geq\; \sum_{n=1}^{M} \int_n^{n+1} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_1^{M+1} f(x)\,\mathrm{d}x \;\geq\; \sum_{n=1}^{M} f(n+1) = \sum_{n=2}^{M+1} f(n).$$

Limitním přechodem pro $M \to \infty$ v nerovnosti vlevo dostáváme $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n) \geq \int_1^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$. Takže pokud konverguje řada, konverguje i integrál. Provedeme-li limitní přechod pro $M \to \infty$ v nerovnosti vpravo, získáme pro součet řady odhad

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) = f(1) + \sum_{n=2}^{\infty} f(n) \;\leq\; f(1) + \int_1^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Je-li tedy integrál konečný, je konečný i součet řady. $\square$

Příklad 12.12: Podle integrálního kritéria řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^{\alpha}}$ konverguje právě tehdy, když $\alpha > 1$ (využití ve srovnávacím kritériu).

Příklad 12.13: Vyšetřete konvergenci řady $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{n \ln n}$.

Řešení: Máme $\frac{1}{n \ln n} = f(n)$ pro funkci $f(x) = \frac{1}{x \ln x}$, která je na intervalu $\langle 2, \infty)$ nezáporná a nerostoucí. Můžeme tedy zkusit použít integrální kritérium. Protože

$$\int_2^{\infty} \frac{1}{x \ln x}\,\mathrm{d}x = \big[\ln|\ln x|\big]_2^{\infty} = \infty - \ln(\ln 2) = \infty,$$

zkoumaná řada podle integrálního kritéria diverguje.

Poznámka: Pokud ve Větě 12.10 s $N = 1$ řada konverguje a její součet je roven A, pak pro chybu $r_k = A - \sum_{n=1}^{k} f(n)$ $\big(= \sum_{n=k+1}^{\infty} f(n)\big)$, které se dopustíme, když místo celé řady sečteme jen jejích prvních k členů, platí

$$\int_{k+1}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x \;\leq\; r_k \;\leq\; \int_k^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Příklad 12.14: Odhadněte chybu součtu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2} = \dfrac{\pi^2}{6}$, jestliže sečteme jen prvních 100 členů. (Součet uvedené řady lze získat pomocí Fourierových řad, které budete mít později.)

Řešení: Máme $\frac{1}{n^2} = f(n)$ pro funkci $f(x) = \frac{1}{x^2}$, která je na intervalu $\langle 1, \infty)$ nezáporná a nerostoucí. K odhadu chyby $r_{100} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} - \sum_{n=1}^{100} \frac{1}{n^2}$, tedy můžeme použít předchozí poznámku. Ta nám dává odhady

$$\begin{aligned} r_{100} &\geq \int_{101}^{\infty} \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = \Big[-\frac{1}{x}\Big]_{101}^{\infty} = \frac{1}{101} = 0{,}\overline{0099} \\ r_{100} &\leq \int_{100}^{\infty} \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = \Big[-\frac{1}{x}\Big]_{100}^{\infty} = \frac{1}{100} = 0{,}01. \end{aligned}$$

Pro hledanou chybu r_{100} tak máme odhad $0{,}\overline{0099} \leq r_{100} \leq 0{,}01$.

12.3 Řady s obecnými členy

Věta 12.11:

Jestliže pro řadu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ platí $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \neq 0$, pak tato řada diverguje.

Důkaz: Jestliže je $\lim\limits_{n\to\infty} a_n > 0$, existuje podle věty o zachování znaménka (Věta 11.3) index $n_1 \in \mathbb{N}$ takový, že pro všechna $n \geq n_1$ je $a_n > 0$. Posloupnost $\left(s_N\right)_{N=n_1}^{\infty}$, kde $s_N = a_1 + a_2 + \ldots + a_N$, je tedy rostoucí a má tak podle Věty 11.5 limitu. Stejnou limitu má i celá posloupnost částečných součtů řady $\left(s_N\right)_{N=1}^{\infty}$. Protože tu není splněna nutná podmínka konvergence, musí být tato limita nekonečná. Tedy v tomto případě řada diverguje k $+\infty$. Pokud by byla $\lim\limits_{n\to\infty} a_n < 0$, analogicky bychom ukázali, že řada diverguje k $-\infty$. $\square$

Platí: Řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje právě tehdy, když pro každé $\varepsilon > 0$ existuje n_0 takové, že $\left|\sum\limits_{n=N+1}^{M} a_n\right| = |s_M - s_N| < \varepsilon$, kdykoliv $n_0 \leq N < M$ (tj. řada splňuje tzv. Bolzano-Cauchyovu podmínku (B.C.P.) pro konvergenci řad)

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n| < +\infty$ ... $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ **konverguje absolutně**

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n| = +\infty$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje ... $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ **konverguje neabsolutně** (**relativně**)

Poznámka: Konverguje-li reálná řada neabsolutně, pak „součet" jejích kladných členů je $+\infty$, záporných $-\infty$. Tj. označíme-li $a_n^+ = \max\{a_n, 0\}$, $a_n^- = \max\{-a_n, 0\}$ (všimněte si, že $a_n = a_n^+ - a_n^-$, $|a_n| = a_n^+ + a_n^-$), pak $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^+ = $ $= \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^- = +\infty$.

Příklad 12.14: Řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(-\dfrac{1}{2}\right)^n$ konverguje absolutně.

Poznámka: Absolutní konvergenci řad lze zkoumat pomocí kritérií z odstavce **12.2**.

Věta 12.12:

Konverguje-li řada absolutně, pak konverguje.

(Obrácené tvrzení neplatí.)

Důkaz: Ukážeme, že když konverguje řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$, pak řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ splňuje Bolzano-Cauchyovu podmínku pro konvergenci řad, a tedy také konverguje. Mějme dáno $\varepsilon > 0$. Protože řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konverguje, splňuje B.C.P. pro řady, a tedy pro naše dané ε existuje $n_1 \in \mathbb{N}$ takové, že $\left|\sum\limits_{n=N+1}^{M} |a_n|\right| < \varepsilon$, kdykoliv $n_1 \leq N < M$. Vezměme nyní libovolnou dvojici indexů M a N, pro které platí $n_1 \leq N < M$. Pak $\left|\sum\limits_{n=N+1}^{M} a_n\right| \leq \left|\sum\limits_{n=N+1}^{M} |a_n|\right| < \varepsilon$. Řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ splňuje tedy také B.C.P. pro řady – k danému $\varepsilon > 0$ můžeme vzít stejné n_0 jako v případě řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$.

Věta 12.13 (Leibnizovo kritérium):

Nechť $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ je nerostoucí posloupnost nezáporných čísel. Pak řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} b_n = b_1 - b_2 + b_3 - b_4 + \ldots$ (tzv. **alternující řada**) konverguje právě tehdy, když $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$.

Důkaz: 1) Předpokládejme nejdříve, že řada konverguje. Pak z nutné podmínky konvergence (Věta 12.3) musí platit $\lim\limits_{n\to\infty} (-1)^{n+1} b_n = 0$. Z vlastností limit posloupností (Věta 11.9a) odtud dostáváme $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \lim\limits_{n\to\infty} |(-1)^{n+1} b_n| = 0$.
2) Nechť nyní platí $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$. Položme $a_n = (-1)^{n+1} b_n$. Protože $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ je nerostoucí posloupnost nezáporných čísel, je pro každé $k \in \mathbb{N}$

$$a_{2k} + a_{2k+1} = (-1)^{2k+1} b_{2k} + (-1)^{2k+2} b_{2k+1} = -b_{2k} + b_{2k+1} \leq 0.$$

Tedy pro liché částečné součty řady platí

$$s_1 = b_1 \geq s_1 + (-b_2 + b_3) = s_3 \geq s_3 + (-b_4 + b_5) = s_5 \geq s_5 + (-b_6 + b_7) = s_7 \geq \ldots .$$

Podposloupnost lichých částečných součtů je tak nerostoucí a má, jako každá monotonní posloupnost, limitu. Označme tuto limitu s. Potřebujeme ukázat, že s je limitou celé poslounosti částečných součtů. Pro sudé částečné součty platí $s_{2N} = s_{2N-1} - b_{2N}$, takže $\lim\limits_{N\to\infty} s_{2N} = \lim\limits_{N\to\infty} (s_{2N-1} - b_{2N}) = s - 0 = s$. Jelikož podposloupnosti lichých a sudých částečných součtů řady obsahují všechny částečné součty řady, je s limitou celé posloupnosti částečných součtů dané řady. Tato řada tedy součet má a je jím s. Zbývá ukázat, že $s \in \mathbb{R}$. Protože posloupnost lichých částečných součtů je nerostoucí, je $s_1 \geq s$. Z monotonie posloupnosti $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ je $a_{2k-1} + a_{2k} = b_{2k-1} - b_{2k} \geq 0$, takže všechny sudé částečné součty jsou nutně nezáporné. Tedy i jejich limita s je nezáporná. Dostali jsme tak pro s nerovnosti $0 \leq s \leq s_1$, z kterých už plyne, že $s \in \mathbb{R}$ a řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} b_n$ konverguje. $\square$

Příklad 12.15: Řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{4} + \ldots$ konverguje neabsolutně.

Poznámky :

a) Je-li $f : \mathbb{N} \overset{\text{na}}{\to} \mathbb{N}$ prosté zobrazení, pak řadu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{f(n)}$ nazýváme **přerovnáním řady** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$. Platí:

1) Jestliže řada konverguje absolutně, pak konverguje absolutně i každé její přerovnání a má stejný součet.

2) Jestliže reálná řada konverguje neabsolutně, pak každé reálné číslo je součtem některého přerovnání této řady. Totéž platí pro $\pm\infty$. Řadu lze přerovnat v tomto případě i tak, že nová řada bude oscilovat.

b) **Cauchyovým součinem** řad $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$ nazýváme řadu $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n$, kde $c_0 = a_0 b_0$, $c_1 = a_0 b_1 + a_1 b_0$, $\ldots$, $c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \ldots + a_n b_0 = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$ (srovnejte s výpočtem koeficientů při násobení dvou polynomů).

Platí: Jestliže řady $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$ konvergují a alespoň jedna z nich konverguje absolutně, pak konverguje i jejich Cauchyův součin $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n$ a platí $\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n\right)\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n\right) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n$. Konvergují-li absolutně obě řady, pak konverguje absolutně i jejich Cauchyův součin.

12.4 Příklady

Příklad 12.16: Zjistěte, pro jaká $x \in \mathbb{R}$ konverguje řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{5}{x+2}\right)^n$ a pro tato x řadu sečtěte.

Řešení: Jde o geometrickou řadu s kvocientem $q = \dfrac{5}{x+2}$, která podle Příkladu 12.2 konverguje právě tehdy, když $\left|\dfrac{5}{x+2}\right| < 1$. Toto nastává, právě když $5 < |x+2|$, tj. pro $x > -2+5 = 3$ a pro $x < -2-5 = -7$. Uvedená řada tak konverguje pro $x \in (-\infty, -7) \cup (3, \infty)$. Ze vzorce pro součet geometrické řady pro tato x dostáváme

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{5}{x+2}\right)^n = \frac{5}{x+2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{5}{x+2}} = \frac{5}{x+2} \cdot \frac{x+2}{x-3} = \frac{5}{x-3}.$$

Příklad 12.17: Vyšetřete konvergenci řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{3^{2n}(n-1)^n}{(4n+7)^n}$.

Řešení: Máme $a_n = \dfrac{9^n(n-1)^n}{(4n+7)^n} \geq 0$ a

$$\sqrt[n]{a_n} = \frac{9(n-1)}{(4n+7)} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{9}{4} > 1.$$

Tedy podle limitního odmocninového kritéria řada diverguje. Divergenci můžeme dostat také pomocí prostého odmocninového kritéria, protože pro $n \geq 4$ je $\sqrt[n]{a_n} \geq 1$.

Příklad 12.18: Vyšetřete konvergenci řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(\arcsin 1)^n}{n^2}$.

Řešení: Máme $a_n = \dfrac{(\frac{\pi}{2})^n}{n^2} \geq 0$ a

$$\sqrt[n]{a_n} = \frac{\frac{\pi}{2}}{\sqrt[n]{n^2}} = \frac{\frac{\pi}{2}}{(\sqrt[n]{n})^2} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{\frac{\pi}{2}}{1^2} = \frac{\pi}{2} > 1.$$

Tedy podle limitního odmocninového kritéria řada diverguje. Divergenci můžeme dostat také pomocí limitního podílového kritéria, protože

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(\frac{\pi}{2})^{n+1}}{(n+1)^2} \cdot \frac{n^2}{(\frac{\pi}{2})^n} = \frac{\pi}{2}\,\frac{n^2}{(n+1)^2} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{\pi}{2} \cdot 1 = \frac{\pi}{2} > 1.$$

Příklad 12.19: Vyšetřete konvergenci řady $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(2n)!}$.

Řešení: Máme $a_n = \dfrac{n^n}{(2n)!} > 0$ a

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^{n+1}}{(2n+2)!} \cdot \frac{(2n)!}{n^n} = \frac{(n+1)(n+1)^n}{(2n+2)(2n+1)\,n^n} = \frac{1}{2(2n+1)} \cdot \Big(\frac{n+1}{n}\Big)^n =$$

$$= \frac{1}{2(2n+1)} \cdot \Big(1+\frac{1}{n}\Big)^n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \cdot \mathrm{e} = 0 < 1.$$

Tedy podle limitního podílového kritéria řada konverguje.

Příklad 12.20: Vyšetřete konvergenci řady $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \frac{2n^2-6n+5}{(n^2-3n+2)^2}$.

Řešení: Rozkladem na jednoduché zlomky dostaneme $a_n = \dfrac{1}{(n-1)^2} + \dfrac{1}{(n-2)^2}$. Protože je na intervalu $\langle 3, \infty)$ funkce $f(x) = \dfrac{1}{(x-1)^2} + \dfrac{1}{(x-2)^2}$ nezáporná a nerostoucí a $\displaystyle\int_3^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \Big[-\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x-2}\Big]_3^{\infty} = 0-(-\frac{1}{2}-1) = \frac{3}{2}$, daná řada konverguje. Podílové ani odmocninové kritérium zde nepomohou, protože $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$ (ověřte) a dá se ukázat, že také $\sqrt[n]{a_n} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$.

Příklad 12.21: Vyšetřete konvergenci a absolutní konvergenci řady $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\pi)}{(3n+2)\operatorname{arctg} n}$.

Řešení: Označíme-li a_n členy dané řady, pak $a_n = (-1)^n b_n$, kde $(b_n)_{n=1}^{\infty} = \Big(\dfrac{1}{(3n+2)\operatorname{arctg} n}\Big)_{n=1}^{\infty}$ je nezáporná nerostoucí posloupnost, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} b_n = \Big\langle\!\Big\langle \frac{1}{\infty \cdot \frac{\pi}{2}} \Big\rangle\!\Big\rangle = 0$. Podle Leibnizova kritéria tedy řada $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje. Zkoumejme nyní absolutní konvergenci řady. Máme $|a_n| = \dfrac{1}{(3n+2)\operatorname{arctg} n} \geq \dfrac{1}{(3n+2n)\frac{\pi}{2}} = \dfrac{2}{5\pi n}$. Protože řada $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{5\pi}\,\frac{1}{n}$ diverguje, dostáváme ze srovnávacího kritéria, že i řada $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ diverguje. Daná řada tedy absolutně nekonverguje. Dostali jsme tak, že zkoumaná řada konverguje neabsolutně. (Při zkoumání absolutní konvergence jsme mohli použít také limitní verzi srovnávacího kritéria: $\dfrac{|a_n|}{\frac{1}{n}} = \dfrac{n}{(3n+2)\operatorname{arctg} n} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{2}{\pi} = \dfrac{2}{3\pi} \in (0, \infty)$ a řada $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverguje).

Příklad 12.22: Vyšetřete konvergenci a absolutní konvergenci řady $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(3n-1)(n+2)}{n^2+3}$.

Řešení: Protože $\lim_{n\to\infty} a_n = \langle\!\langle \text{neex.} \cdot 3 \rangle\!\rangle$ neexistuje, není splněna nutná podmínka konvergence, a daná řada proto nekonverguje. Nekonverguje tedy ani absolutně.

Příklad 12.23: Vyšetřete konvergenci a absolutní konvergenci řady $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\sqrt[3]{2n+5}}{n!}$.

Řešení: Protože $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{2n+7}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{\sqrt[3]{2n+5}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[3]{\frac{2n+7}{2n+5}} \cdot \frac{1}{n+1} = 1 \cdot 0 = 0$, daná řada konverguje absolutně, a tedy i konverguje. Mohli jsme také nejdřív pomocí Leibnizova kritéria dokázat prostou konvergenci, a pak až zkoumat konvergenci absolutní. Pro použití Leibnizova kritéria bychom ale nejdřív museli ověřit, že posloupnost $\Big(\dfrac{\sqrt[3]{2n+5}}{n!}\Big)_{n=1}^{\infty}$ je nerostoucí. To je možné, ale nepříjemné.