

Algebra matic

Odpřednesenou látku najeznete v kapitolách 2.1, 2.2 a 4 skript *Abstraktní a konkrétní lineární algebra*.

Minulá přednáška

- ① Pojem **lineárního zobrazení** z \mathbb{F}^s do \mathbb{F}^r a jeho maticový zápis (vzhledem ke kanonickým bázím).

Dnešní přednáška

- ① Zavedeme základní **algebraické operace s maticemi**.
- ② V příští přednášce vše zobecníme pro prostory **konečných dimensí**; zavedeme pojem **matice lineárního zobrazení** (vzhledem k pevně zvoleným bázím).

Velmi důležité připomenutí

Vektory z prostoru \mathbb{F}^n píšeme jako sloupce.

Již víme: $\text{Lin}(\mathbb{F}^s, \mathbb{F}^r)$ je lineární prostor nad \mathbb{F} .

Jak se operace v $\text{Lin}(\mathbb{F}^s, \mathbb{F}^r)$ projeví na „manipulaci s tabulkami“?

Použijeme **sloupcový zápis** matic.

Pro $\mathbf{A} = (\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_s)$ a $\mathbf{B} = (\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_s)$ a skalár a z \mathbb{F} je:

- ① $\mathbf{A} + \mathbf{B} : \mathbb{F}^s \longrightarrow \mathbb{F}^r$ matice se sloupcovým zápisem $(\mathbf{a}_1 + \mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{a}_s + \mathbf{b}_s)$. Zápis $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ čteme **součet matic** \mathbf{A} a \mathbf{B} .
- ② $a \cdot \mathbf{A} : \mathbb{F}^s \longrightarrow \mathbb{F}^r$ je matice se sloupcovým zápisem $(a \cdot \mathbf{a}_1, \dots, a \cdot \mathbf{a}_s)$. Zápis $a \cdot \mathbf{A}$ čteme **součin skaláru** a a matice \mathbf{A} .

Nulový vektor^a v lineárním prostoru $\text{Lin}(\mathbb{F}^s, \mathbb{F}^r)$ je matice

$\mathbf{O}_{s,r} = \underbrace{(\mathbf{o}, \dots, \mathbf{o})}_{s\text{-krát}}$, kde \mathbf{o} je nulový vektor v \mathbb{F}^r .

^aŘíkáme také: **nulová matice**.

Příklad: výpočty v $\text{Lin}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$

① Příklad součtu:

$$\begin{pmatrix} 5 & 3 & 6 \\ -1 & 0 & 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 5 & -2 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 8 & 4 \\ 0 & 4 & 10 \end{pmatrix}$$

② Příklad skalárního násobku:

$$(-2) \cdot \begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 2 & 6 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -2 & -4 \\ -4 & -12 & -8 \end{pmatrix}$$

③ Nulový vektor v $\text{v Lin}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$ je:

$$\mathbf{0}_{3,2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Poznámky k součtu matic a ke skalárnímu násobku matic

Sčítání matic a skalární násobení skalárem jsou operace v lineárním prostoru $\text{Lin}(\mathbb{F}^s, \mathbb{F}^r)$. Přirozená čísla s a r jsou **pevná**. Proto:

- ① Sčítat můžeme pouze matice **stejných** rozměrů. Pro matice různých rozměrů **není sčítání definováno**.

Sloupcový zápis součtu

$$(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_s) + (\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_s) = (\mathbf{a}_1 + \mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{a}_s + \mathbf{b}_s)$$

dává okamžitě „položkový návod“: chcete-li sečíst dvě matice stejných rozměrů, sečtěte položky na odpovídajících posicích.

- ② Sloupcový zápis skalárního násobku

$$a \cdot (\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_s) = (a \cdot \mathbf{a}_1, \dots, a \cdot \mathbf{a}_s)$$

dává okamžitě „položkový návod“: chcete-li matici vynásobit skalárem, vynásobte tímto skalárem každou položku matice.

Vlastnosti součtu matic a skalárního násobku matic

Protože $\text{Lin}(\mathbb{F}^s, \mathbb{F}^r)$ je lineární prostor nad \mathbb{F} , platí:

- ① $\mathbf{A} + \mathbf{O}_{s,r} = \mathbf{O}_{s,r} + \mathbf{A} = \mathbf{A}$, pro vš. \mathbf{A} z $\text{Lin}(\mathbb{F}^s, \mathbb{F}^r)$.
- ② $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$, pro vš. \mathbf{A}, \mathbf{B} z $\text{Lin}(\mathbb{F}^s, \mathbb{F}^r)$.
- ③ $\mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = (\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C}$, pro vš. $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ z $\text{Lin}(\mathbb{F}^s, \mathbb{F}^r)$.
- ④ Pro každé \mathbf{A} z $\text{Lin}(\mathbb{F}^s, \mathbb{F}^r)$ existuje právě jedno^a \mathbf{B} z $\text{Lin}(\mathbb{F}^s, \mathbb{F}^r)$ tak, že $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{O}_{s,r}$.
- ⑤ $1 \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A}$ pro vš. \mathbf{A} z $\text{Lin}(\mathbb{F}^s, \mathbb{F}^r)$.
- ⑥ $a \cdot (b \cdot \mathbf{A}) = (a \cdot b) \cdot \mathbf{A}$ pro vš. $a, b \in \mathbb{F}$ a vš. \mathbf{A} z $\text{Lin}(\mathbb{F}^s, \mathbb{F}^r)$.
- ⑦ $a \cdot (\mathbf{A} + \mathbf{B}) = a \cdot \mathbf{A} + a \cdot \mathbf{B}$ pro vš. $a \in \mathbb{F}$ a pro vš. \mathbf{A}, \mathbf{B} z $\text{Lin}(\mathbb{F}^s, \mathbb{F}^r)$.
- ⑧ $(a + b) \cdot \mathbf{A} = a \cdot \mathbf{A} + b \cdot \mathbf{A}$ pro vš. $a, b \in \mathbb{F}$ a pro vš. \mathbf{A} z $\text{Lin}(\mathbb{F}^s, \mathbb{F}^r)$.

^aTomuto jednoznačně určenému \mathbf{B} říkáme **opačná** matice k matici \mathbf{A} a značíme ji $-\mathbf{A}$.



Připomenutí značení (téma 04A)

Matici \mathbf{A} se sloupcovým zápisem $\mathbf{A} = (\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_s)$ je lineární zobrazení z \mathbb{F}^s do \mathbb{F}^r , dané předpisem

$$\mathbf{e}_j \mapsto \mathbf{a}_j, \quad j = 1, \dots, s$$

Princip superposice dává

$$\sum_{j=1}^s x_j \cdot \mathbf{e}_j \mapsto \sum_{j=1}^s x_j \cdot \mathbf{a}_j$$

Pro $\mathbf{x} = \sum_{j=1}^s x_j \cdot \mathbf{e}_j$ značíme $\sum_{j=1}^s x_j \cdot \mathbf{a}_j$ jako $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x}$.

Proto

$$\mathbf{A} : \mathbf{x} \mapsto \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}$$

Definice (součin matic)

Pro situaci^a

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{F}^s & \xrightarrow{\mathbf{A}} & \mathbb{F}^p & \xrightarrow{\mathbf{B}} & \mathbb{F}^r \\ \mathbf{e}_j & \longmapsto & \mathbf{a}_j & \longmapsto & \mathbf{B} \cdot \mathbf{a}_j \end{array}$$

je $\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$ matice, ^b ježíž j -tý sloupec je $\mathbf{B} \cdot \mathbf{a}_j$, kde \mathbf{a}_j je j -tý sloupec matice \mathbf{A} . Ve sloupcovém zápisu tedy platí $\mathbf{B} \cdot \mathbf{A} = (\mathbf{B} \cdot \mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{B} \cdot \mathbf{a}_s)$.

Matici $\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$ říkáme **součin matic** \mathbf{B} a \mathbf{A} .

^aDiagram okamžitě dává **rozměrovou zkoušku** pro součin matic $\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$: počet řádků matice \mathbf{A} musí být roven počtu sloupců matice \mathbf{B} . **Jindy součin matic ne definujeme, protože by skládání nedávalo smysl.**

^bPoložkový zápis součinu $\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$: pro $\mathbf{A} = (a_{kj})_{k=1,\dots,p, j=1,\dots,s}$ a $\mathbf{B} = (b_{ik})_{i=1,\dots,r, k=1,\dots,p}$ je $\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$ matice s položkami $(c_{ij})_{i=1,\dots,r, j=1,\dots,s}$, kde

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^p b_{ik} \cdot a_{kj}$$



Příklad (matice složených lineárních transformací v \mathbb{R}^2)

Projekce na osu x : $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, rotace (o úhel α): $\begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$.

Součin matic

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

je matice lineárního zobrazení „**nejprve** otočte o úhel α , **potom** spočtěte projekci na osu x “.

Součin matic

$$\begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & 0 \\ \sin \alpha & 0 \end{pmatrix}$$

je matice lineárního zobrazení „**nejprve** spočtěte projekci na osu x , **potom** otočte o úhel α “.

Příklad (reflexe podle osy, která svírá úhel α s osou x)

Jde o složené zobrazení: nejdříve rotace o úhel $-\alpha$, potom reflexe, nakonec rotace o úhel α .

$$\begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos(-\alpha) & -\sin(-\alpha) \\ \sin(-\alpha) & \cos(-\alpha) \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} \cos 2\alpha & \sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & -\cos 2\alpha \end{pmatrix}$$

Poznámka

Analogicky lze vytvořit matice základních lineárních transformací v \mathbb{R}^n , $n \geq 3$. Aplikace: matematická analýza, fyzika, grafika.^a

^aDůležité: projděte si podrobně Příklady 4.1.6 a 4.2.9 skript.

Shrnutí: Vlastnosti operací s maticemi

- ① Pro součin platí asociativní zákon $\mathbf{C} \cdot (\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}) = (\mathbf{C} \cdot \mathbf{B}) \cdot \mathbf{A}$, kdykoli jsou jednotlivé součiny definovány.
- ② Obecně neplatí komutativní zákon $\mathbf{B} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ (i když jsou oba součiny definovány).
- ③ Pro každé n definujeme jednotkovou matici^a $\mathbf{E}_n : \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}^n$ takto: $\mathbf{E}_n = (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$, kde $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ jsou vektory kanonické báze \mathbb{F}^n .

Potom pro každou matici $\mathbf{A} : \mathbb{F}^s \rightarrow \mathbb{F}^r$ platí:

$$\mathbf{E}_r \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{E}_s.$$

^a Matice \mathbf{E}_n je maticí identického lineárního zobrazení $\mathbf{id} : \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}^n$.

Důkaz.

Okamžitě z vlastností lineárních zobrazení.

Příklad (popis řešení soustavy lineárních rovnic v \mathbb{R}^2)

Ať $\mathbf{P}_x : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ je projekce na osu x , ztotožněná s maticí

$$\mathbf{P}_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Víme, že zápis $\mathbf{P}_x \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ (pro pevně zadaný vektor \mathbf{b}) kóduje soustavu lineárních rovnic. Pojd'me ji vyřešit.

- ① Pro vektor $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ nás zajímají všechny vektory $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, které se na \mathbf{b} projekcí \mathbf{P}_x zobrazí.

Protože vektor \mathbf{b} **není** funkční hodnotou matice \mathbf{P}_x , **nemá** soustava $\mathbf{P}_x \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ řešení.

- ② Pro vektor $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ nás zajímají všechny vektory $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, které se na \mathbf{b} projekcí \mathbf{P}_x zobrazí.

Jeden takový vektor \mathbf{x} jistě existuje, například vektor

$$\mathbf{p} = \begin{pmatrix} 3 \\ -7 \end{pmatrix}. \text{ Jak popsat množinu všech řešení?}$$



Popis množiny všech řešení soustavy $\mathbf{P}_x \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$

Řešením soustavy rovnic

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

je množina všech vektorů \mathbf{x} tvaru $\mathbf{p} + \mathbf{x}_h$, kde $\mathbf{p} = \begin{pmatrix} 3 \\ -7 \end{pmatrix}$ a kde vektor \mathbf{x}_h splňuje rovnost $\mathbf{P}_x \cdot \mathbf{x}_h = \mathbf{0}$.

Množinu všech řešení lze tedy napsat ve tvaru

$$\mathbf{p} + \{\mathbf{x}_h \mid \mathbf{P}_x \cdot \mathbf{x}_h = \mathbf{0}\} = \{\mathbf{p} + \mathbf{x}_h \mid \mathbf{P}_x \cdot \mathbf{x}_h = \mathbf{0}\}$$

Jak uvidíme, tento způsob zápisu řešení bude mít mnohé výhody.

Důsledek

Pro lineární zobrazení $\mathbf{f} : L_1 \rightarrow L_2$ musíme studovat chování dvou množin

$$\underbrace{\{\mathbf{f}(\vec{x}) \mid \vec{x} \in L_1\}}_{\text{tzv. obraz } \mathbf{f}} \quad \underbrace{\{\vec{x} \in L_1 \mid \mathbf{f}(\vec{x}) = \mathbf{0}\}}_{\text{tzv. jádro } \mathbf{f}}$$