

# KAPITOLA 7: Primitivní funkce

## 7.1 Úvod

### Definice:

Funkce  $F$  je **primitivní funkcí** k funkci  $f$  na intervalu  $I$ , jestliže pro každé  $x \in I$  existuje  $F'(x)$  a platí

$$F'(x) = f(x).$$

### Poznámky:

- 1) Obsahuje-li  $I$  některý z krajních bodů, rozumíme pod  $F'(x)$  v krajním bodě příslušnou jednostrannou derivaci.
- 2)  $F$  je **spojitá** na  $I$ , protože má v každém bodě intervalu  $I$  vlastní derivaci.

### Věta 7.1:

- a) Je-li  $F$  primitivní funkci k funkci  $f$  na intervalu  $I$ , potom pro každé  $c \in \mathbb{R}$  je  $F + c$  také primitivní funkci k funkci  $f$  na intervalu  $I$ .
- b) Jsou-li  $F$  a  $G$  primitivní funkce k funkci  $f$  na intervalu  $I$ , pak existuje  $c \in \mathbb{R}$  takové, že

$$G = F + c \quad (\text{tj. } G(x) = F(x) + c \quad \forall x \in I).$$

**Příklad 7.1:** Ve Větě 7.1, b) je podstatné, že  $I$  je interval.

**neurčitý integrál** funkce  $f$  na intervalu  $I$

...  $\int f(x) dx$   $\left( \int f dx \right)$  ... množina všech  
primitivních funkcí k funkci  $f$  na intervalu  $I$

$\int$  ... integrační znak

$f(x)$  ... integrand

$x$  ... integrační proměnná

**Příklad 7.2:** a) Ukažte, že funkce  $f(x) = \operatorname{sgn} x$  nemá primitivní funkci na žádném intervalu  $(a, b)$  obsahujícím nulu.

**Řešení:** Každá primitivní funkce je spojitá. Ukážeme tedy, že pokud je funkce  $F$  spojitá na  $(a, b)$  a  $F' = f$  na  $(a, b) \setminus \{0\}$ , pak neexistuje  $F'(0)$ , tj.  $F$  není primitivní funkce k funkci  $f(x) = \operatorname{sgn} x$  na  $(a, b)$ . Máme

$$\begin{aligned} F'(x) &= 1 \quad (= \operatorname{sgn} x) \quad \forall x \in (0, b) \\ F'(x) &= -1 \quad (= \operatorname{sgn} x) \quad \forall x \in (a, 0) \end{aligned}$$

Tedy podle Věty 4.5 platí

$$\begin{aligned} F'_+(0) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} F'(x) = 1 \\ F'_-(0) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} F'(x) = -1, \end{aligned}$$

což ovšem znamená, že  $F'(0)$  neexistuje.

## Příklad 7.2: b) Funkce

$$\begin{aligned}f(x) &= 2x \cos \frac{1}{x} + \sin \frac{1}{x} \quad \text{pro } x \neq 0, \\f(0) &= 0\end{aligned}$$

má primitivní funkci na  $\mathbb{R}$ , i když není na  $\mathbb{R}$  spojitá – má nespojitost v nule.

Podle Příkladu 4.8 je primitivní funkcí k funkci  $f$  např. funkce

$$\begin{aligned}F(x) &= x^2 \cos \frac{1}{x} \quad \text{pro } x \neq 0, \\F(0) &= 0.\end{aligned}$$

## Věta 7.2:

Je-li funkce  $f$  spojitá na intervalu  $I$ , pak existuje k funkci  $f$  primitivní funkce na intervalu  $I$ .

### Poznámka:

Primitivní funkce k funkcím

$$e^{-x^2}, \quad \sin(x^2), \quad \cos(x^2), \quad \frac{e^x}{x}, \quad \frac{\sin x}{x}, \quad \frac{\cos x}{x}, \quad \frac{1}{\ln x}$$

nelze vyjádřit pomocí elementárních funkcí v konečném tvaru.

$f(x)$	$F(x)$	$I$
$A$ ( $A \in \mathbb{R}$ )	$Ax$	$\mathbb{R}$
$x^\alpha$	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$	$\mathbb{R}$ pro $\alpha \in \mathbb{N}_0$ $(-\infty, 0), (0, \infty)$ pro $\alpha \in \mathbb{Z}, \alpha < -1$ $(0, \infty)$ pro $\alpha \notin \mathbb{Z}$ *)
$\frac{1}{x}$	$\ln x $	$(-\infty, 0), (0, \infty)$
$e^x$	$e^x$	$\mathbb{R}$
$a^x$ $(a > 0)$ $a \neq 1$	$\frac{a^x}{\ln a}$	$\mathbb{R}$

\*) ... pro některé racionální exponenty lze brát též  $I = (-\infty, 0)$

$f(x)$	$F(x)$ např.	$I$
$\sin x$	$-\cos x$	$\mathbb{R}$
$\cos x$	$\sin x$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\operatorname{tg} x$	$\left( -\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi \right); k \in \mathbb{Z}$
$-\frac{1}{\sin^2 x}$	$\operatorname{cotg} x$	$(k\pi, (k+1)\pi); k \in \mathbb{Z}$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x$ $-\arccos x$	$(-1, 1)$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\operatorname{arctg} x$ $-\operatorname{arccotg} x$	$\mathbb{R}$

$f(x)$	$F(x)$ např.	$I$
$\sinh x$	$\cosh x$	$\mathbb{R}$
$\cosh x$	$\sinh x$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{\cosh^2 x}$	$\operatorname{tgh} x$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{\sinh^2 x}$	$-\operatorname{cotgh} x$	$(-\infty, 0), (0, \infty)$
$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$\operatorname{argsinh} x$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$	$\operatorname{argcosh} x$ $-\operatorname{argcosh} (-x)$	$(1, \infty)$ $(-\infty, -1)$

## 7.2 Základní metody hledání primitivní funkce

### Věta 7.3 (o linearitě):

Nechť  $F$  je primitivní funkce k funkci  $f$  na intervalu  $I$ ,  $G$  primitivní funkce ke funkci  $g$  na intervalu  $I$  a  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Pak

- a)  $F + G$  je primitivní funkcí k  $f + g$  na  $I$ , tj.

$$\int (f + g) dx = \int f dx + \int g dx,$$

- b)  $\alpha \cdot F$  je primitivní funkcí k  $\alpha \cdot f$  na  $I$ , tj.

$$\int \alpha \cdot f dx = \alpha \cdot \int f dx.$$

## Integrace per partes

**Věta 7.4 (integrace per partes):**

Nechť mají funkce  $u$ ,  $v$  vlastní derivace na intervalu  $I$  a existuje primitivní funkce k funkci  $u' \cdot v$  na intervalu  $I$ . Pak existuje také primitivní funkce k funkci  $u \cdot v'$  na intervalu  $I$  a platí

$$\int u \cdot v' \, dx = u \cdot v - \int u' \cdot v \, dx.$$

**Příklad 7.3:** Nalezení  $\int \ln x \, dx$  na intervalu  $(0, \infty)$ .

**Příklad 7.4:** Najděte  $I = \int \frac{\ln x}{x} dx$ .

**Řešení:** Na  $(0, \infty)$  máme

$$I = \int \frac{\ln x}{x} dx = \int \ln x \cdot \frac{1}{x} dx = \left| \begin{array}{l} u = \ln x \quad v' = \frac{1}{x} \\ u' = \frac{1}{x} \quad v = \ln x \end{array} \right| \stackrel{\text{PP}}{=} \\ \stackrel{\text{PP}}{=} \ln^2 x - \int \frac{1}{x} \cdot \ln x dx = \ln^2 x - I.$$

Tím jsme dostali pro  $I$  rovnici  $I = \ln^2 x - I$ , odkud na  $(0, \infty)$  je

$$\int \frac{\ln x}{x} dx = I = \frac{\ln^2 x}{2} + c$$

---

Podobně se hledají např.  $\int \cos ax \cdot e^{bx} dx$ ,  $\int \sin ax \cdot e^{bx} dx$  – v těchto případech se jen integrace per partes použije dvakrát.

## Metoda substituce

### Věta 7.5 (o substituci):

- a) Nechť  $I, J$  jsou otevřené intervaly,  $\varphi$  má vlastní derivaci na  $I$  (je tam tedy spojitá),  $\varphi(I) \subset J$  a  $F$  je primitivní funkce k funkci  $f$  na  $J$ . Potom

$$\int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dt = F(\varphi(t)) + c \quad \text{na } I.$$

- b) Pokud je  $\varphi$  navíc prostá na  $I$ ,  $\varphi(I) = J$  a existuje primitivní funkce  $G$  k  $f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)$  na  $I$ , pak

$$\int f(x) dx = G(\varphi^{-1}(x)) + c \quad \text{na } J.$$

Tvrzení Věty 7.5 lze zapsat také takto:

$$\int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dt = \int f(x) dx; \quad x = \varphi(t); \quad t \in I.$$

**Příklad 7.5:** Nalezení  $\int \cos(\ln t) \cdot \frac{1}{t} dt$  na  $(0, \infty)$  pomocí substituce  $x = \varphi(t) = \ln t$ .

**Příklad 7.4\*:** Najděte  $I = \int \frac{\ln x}{x} dx$  metodou substituce.

**Příklad 7.6a):** Vyjádřete  $\int f(x+B) dx$  ( $B \in \mathbb{R}$ ) pomocí primitivní funkce  $F$  k funkci  $f$ .

**Příklad 7.7\*:** Najděte  $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx$  na intervalu  $I \subset D(f') \setminus \{x \mid f(x) = 0\}$ .

**Příklad 7.8:** Označme  $I_n = \int \frac{1}{(1+x^2)^n} dx$ . Pak

a) pro  $n = 1$  máme

$$I_1 = \int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctg x + c \quad \text{na } \mathbb{R}.$$

b) v případě  $n = 2$  lze integrál vypočítat pomocí metody per partes a řešením lineární rovnice pro  $I_2$  – dostaneme

$$I_2 = \frac{1}{2} \left( \arctg x + \frac{x}{1+x^2} \right) + c = \frac{1}{2} \left( I_1 + \frac{x}{1+x^2} \right) \quad \text{na } \mathbb{R}.$$

c) pro obecné  $n > 1$  lze podobným postupem jako pro  $n = 2$  odvodit rekurentní vzorec

$$I_n = \frac{1}{2(n-1)} \left( (2(n-1)-1)I_{n-1} - \frac{x}{(1+x^2)^{n-1}} \right) \quad \text{na } \mathbb{R}.$$

**Příklad 7.10:** Najděte  $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$ .

**Řešení:** 1. možnost: Na  $(-1, 1)$  máme

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \left| \begin{array}{l} x = \cos t \dots t \in (0, \pi) \\ (\arccos x = t) \\ dx = -\sin t dt \end{array} \right| =$$
$$= \int \frac{1}{\sqrt{1-\cos^2 t}} (-\sin t) dt = \int \frac{-\sin t}{\sin t} dt =$$
$$= - \int 1 dt = -t + c = -\arccos x + c \quad \text{na } (-1, 1).$$

V substituci jsme využili toho, že funkce  $\cos t$  je prostá na  $(0, \pi)$  a na začátku druhého rádku úprav toho, že  $\sin t > 0$  na  $(0, \pi)$ .

2. možnost: Na  $(-1, 1)$  máme

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \left| \begin{array}{l} x = \sin z \dots z \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \\ (\arcsin x = z) \\ \frac{dx}{dz} = \cos z \end{array} \right| =$$
$$= \int \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 z}} \cos z dz = \int \frac{\cos z}{\cos z} dz =$$
$$= \int 1 dz = z + c = \arcsin x + c \quad \text{na } (-1, 1).$$

V substituci jsme využili toho, že funkce  $\sin z$  je prostá na  $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$  a na začátku druhého řádku úprav toho, že  $\cos z > 0$  na  $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ .

Přestože v první a druhé možnosti vyšly na první pohled různé výsledky, jsou oba tyto výsledky správné. Funkce  $-\arccos x$  a  $\arcsin x$  se totiž liší jen o konstantu ( $\arcsin x = \frac{\pi}{2} - \arccos x$ ).

## 7.3 Integrace racionální funkce

### 7.3.1 Racionální funkce

$P, Q \dots$  polynomy s reálnými koeficienty,  $Q$  nenulový

$R = \frac{P}{Q} \dots$  **racionální funkce**

Z věty o dělení polynomů existují polynomy  $Y$  a  $Z$ , st  $Z < \text{st } Q$ , takové, že

$$P(x) = Y(x) \cdot Q(x) + Z(x) \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

tj.

$$R(x) = \frac{Y(x) \cdot Q(x) + Z(x)}{Q(x)} = \overbrace{Y(x)}^{\text{polynom}} + \underbrace{\frac{Z(x)}{Q(x)}}_{\text{st } Z < \text{st } Q}.$$

( Pro  $\text{st } P < \text{st } Q$  je  $Y$  nulový polynom a  $Z = P$ . )

Dále uvažujeme jen funkce **ryze lomené**, tj. racionální funkce typu

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}, \quad \text{kde st } P < \text{st } Q.$$

Nejjednodušší typy funkcí ryze lomených ...

... **jednoduché** (též **parciální**) zlomky:

$$\frac{A}{(x - \alpha)^k}, \quad A \in \mathbb{R}; \quad \alpha \in \mathbb{R}; \quad k \in \mathbb{N},$$

$$\frac{Bx + C}{(x^2 + px + q)^\ell}, \quad B, C \in \mathbb{R}; \quad p, q \in \mathbb{R}, \quad p^2 - 4q < 0; \quad \ell \in \mathbb{N}.$$

## Věta 7.6:

- 1) Každou **ryze lomenou** funkci lze zapsat právě jedním způsobem jako **součet jednoduchých zlomků**.
- 2) Každou **racionální** funkci lze zapsat právě jedním způsobem jako **součet polynomu a jednoduchých zlomků**.

( Přesněji: „... právě jedním způsobem až na pořadí sčítanců ...” )

Jaké máme očekávat v rozkladu jednoduché zlomky?

Obecně všech typů, kde jmenovatel je dělitelem polynomu  $Q$  (někde ovšem může vyjít nulový čitatel).

**Příklad 7.12:** Rozložte na součet polynomu a jednoduchých

zlomků funkci  $R(x) = \frac{x^6 + 2x^4 + 3x^2 + x - 1}{x^5 - x^2}$

**Řešení:**  $x^5 - x^2 = x^2(x^3 - 1)$ , tedy  $D(R) = \mathbb{R} \setminus \{0; 1\}$

- $$\begin{array}{r} (x^6 + 0x^5 + 2x^4 + 0x^3 + 3x^2 + x - 1) : (x^5 - x^2) = \\ \hline -x^6 & + x^3 \\ & 2x^4 + x^3 + 3x^2 + x - 1 \end{array}$$

$$= x + \frac{2x^4 + x^3 + 3x^2 + x - 1}{x^5 - x^2} = R(x) = x + R_1(x)$$

- $x^5 - x^2 = x^2(x^3 - 1) = x^2(x - 1)(x^2 + x + 1)$   
polynom  $x^2 + x + 1$  nemá reálné kořeny

- $R_1(x) = \frac{2x^4 + x^3 + 3x^2 + x - 1}{x^2(x-1)(x^2+x+1)} = \frac{A}{x^2} + \frac{B}{x} + \frac{C}{x-1} + \frac{Dx+E}{x^2+x+1}$

Rovnost vynásobíme výrazem  $x^2(x-1)(x^2+x+1)$ :

$$2x^4 + x^3 + 3x^2 + x - 1 =$$

$$= A \underbrace{(x^3 - 1)}_{(x-1)(x^2+x+1)} + B \underbrace{(x^4 - x)}_{x(x-1)(x^2+x+1)} + C \underbrace{(x^4 + x^3 + x^2)}_{x^2(x^2+x+1)} +$$

$$+ (Dx + E) \underbrace{(x^3 - x^2)}_{x^2(x-1)} =$$

$$= Ax^3 - A + Bx^4 - Bx + Cx^4 + Cx^3 + Cx^2 +$$

$$+ Dx^4 - Dx^3 + Ex^3 - Ex^2 =$$

$$= (B + C + D)x^4 + (A + C - D + E)x^3 + (C - E)x^2 - Bx - A$$

$$2x^4 + x^3 + 3x^2 + x - 1 =$$

$$= (B + C + D)x^4 + (A + C - D + E)x^3 + (C - E)x^2 - Bx - A$$

Porovnáme koeficienty polynomů u stejných mocnin:

$$x^4 : \quad 2 = \quad B + C + D$$

$$x^3 : \quad 1 = \quad A + C - D + E$$

$$x^2 : \quad 3 = \quad C - E$$

$$x^1 : \quad 1 = \quad -B$$

$$x^0 : \quad -1 = \quad -A$$

Vyřešením soustavy rovnic dostaneme:

$$A = 1, \quad B = -1, \quad C = 2, \quad D = 1, \quad E = -1,$$

tedy

$$R(x) = x + \underbrace{\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} + \frac{2}{x-1}}_{R_1(x)} + \frac{x-1}{x^2+x+1}.$$

## Zakrývací pravidlo

Lze ho použít k určení koeficientů v čitateli u zlomků, které mají ve jmenovateli nejvyšší mocniny jednotlivých kořenových činitelů. (Zde tedy k výpočtu koeficientů  $A$  a  $C$ .) Zmenšíme tím počet neznámých v soustavě lineárních rovnic.

Postupujeme tak, že danou ryze lomenou funkci zapíšeme se zcela rozloženým jmenovatelem

$$R_1(x) = \frac{2x^4 + x^3 + 3x^2 + x - 1}{x^2(x - 1)(x^2 + x + 1)},$$

zakryjeme kořenový činitel jmenovatele a odpovídající kořen dosadíme do zbytku:

$$x := 0 \quad A = \frac{2x^4 + x^3 + 3x^2 + x - 1}{(x - 1)(x^2 + x + 1)} \Big|_{x=0} = \frac{0 + 0 + 0 + 0 - 1}{(0 - 1) \cdot (0 + 0 + 1)} = 1,$$

$$x := 1 \quad C = \frac{2x^4 + x^3 + 3x^2 + x - 1}{x^2(x^2 + x + 1)} \Big|_{x=1} = \frac{2 + 1 + 3 + 1 - 1}{1 \cdot (1 + 1 + 1)} = 2.$$

**Příklad 7.13:** Určete tvar, v kterém je třeba hledat rozklad na jednoduché zlomky racionální funkce

a)  $\frac{x^3 + 2x - 4}{(x^2 + 4)^2(x - 1)^3}$

$$\left[ = \frac{Ax + B}{(x^2 + 4)^2} + \frac{Cx + D}{x^2 + 4} + \frac{E}{(x - 1)^3} + \frac{F}{(x - 1)^2} + \frac{G}{x - 1} \right],$$

b)  $\frac{x^4}{(x^2 + 4x + 5)^2(x^2 + 1)(x + 4)^2}$

$$\left[ = \frac{Ax + B}{(x^2 + 4x + 5)^2} + \frac{Cx + D}{x^2 + 4x + 5} + \frac{Ex + F}{x^2 + 1} + \frac{G}{(x + 4)^2} + \frac{H}{x + 4} \right].$$

### 7.3.2 Integrace racionální funkce

= integrace polynomu

+ integrace jednoduchých zlomků

**Příklad 7.14:** Vypočtěte  $\int \frac{x^6 + 2x^4 + 3x^2 + x - 1}{x^5 - x^2} dx$ .

## 7.4 Některé důležité substituce

polynom  $P(x, y)$  dvou proměnných  $x, y \dots$   
 $\dots$  součet konečného počtu funkcí typu  $c_{m,n} \cdot x^m \cdot y^n$ ,

kde  $m, n \in \mathbb{N}_0, c_{m,n} \in \mathbb{R}$

racionální funkce  $R(x, y)$  dvou proměnných  $x, y \dots$   
 $\dots$  podíl dvou polynomů dvou proměnných  $x, y$ ;

$$R(x, y) = \frac{P(x, y)}{Q(x, y)}, \quad Q(x, y) \neq 0$$

analogicky pro tři a více proměnných

## A) Integrály typu

$$\int R(e^{ax}) dx$$

### Použijeme substituci

$$e^{ax} = t \quad (\text{prostá funkce na } \mathbb{R}, \quad t \in (0, \infty)).$$

Pro  $x \in \mathbb{R}$  pak můžeme psát

$$\int R(e^{ax}) dx = \left| \begin{array}{lcl} e^{ax} & = & t \dots t \in (0, \infty) \\ x & = & \frac{1}{a} \ln t \\ dx & = & \frac{1}{a} \frac{1}{t} dt \end{array} \right| = \int \underbrace{R(t) \cdot \frac{1}{at}}_{\text{racionální funkce}} dt$$

nebo pro  $R(\mathbf{e}^{ax}) = \tilde{R}(\mathbf{e}^{ax}) \cdot \mathbf{e}^{ax}$  také

$$\int \tilde{R}(\mathbf{e}^{ax}) \cdot \mathbf{e}^{ax} dx = \left| \begin{array}{lcl} \mathbf{e}^{ax} & = & t \dots t \in (0, \infty) \\ a \cdot \mathbf{e}^{ax} dx & = & dt \end{array} \right| =$$

$$= \frac{1}{a} \int \tilde{R}(\mathbf{e}^{ax}) \cdot a \cdot \mathbf{e}^{ax} dx = \frac{1}{a} \int \tilde{R}(t) dt .$$

**Příklad 7.15:** Najděte primitivní funkce k funkci

$$f(x) = \frac{e^{4x} - 1}{e^{4x} + e^{2x} + 1}.$$

**Řešení:**  $\int \frac{e^{4x} - 1}{e^{4x} + e^{2x} + 1} dx = \int \frac{(e^{2x})^2 - 1}{(e^{2x})^2 + e^{2x} + 1} dx =$

$$= \left| \begin{array}{l} x \in \mathbb{R}; \quad u \in (0, \infty) \\ e^{2x} = u \\ x = \frac{1}{2} \ln u \quad - \text{ prostá} \\ dx = \frac{1}{2u} du \end{array} \right| = \frac{1}{2} \int \frac{u^2 - 1}{u^2 + u + 1} \cdot \frac{1}{u} du = \dots =$$

$$= \frac{1}{2} \left( -\ln u + \ln \overbrace{(u^2 + u + 1)}^{>0} \right) + c = \dots = -x + \frac{1}{2} \ln(e^{4x} + e^{2x} + 1) + c$$

na  $\mathbb{R}$

**Příklad 7.16:** Najděte primitivní funkce k funkci

$$f(x) = \frac{e^{-6x} - e^{-2x}}{e^{-4x} + 1}.$$

**Řešení:**

$$\begin{aligned} & \int \frac{e^{-6x} - e^{-2x}}{e^{-4x} + 1} dx = \int \frac{(e^{-2x})^2 - 1}{(e^{-2x})^2 + 1} \cdot e^{-2x} dx = \\ &= \left| \begin{array}{l} x \in \mathbb{R}; \quad t \in (0, \infty) \\ \frac{e^{-2x}}{-2 e^{-2x} dx} = \frac{t}{dt} \end{array} \right| = -\frac{1}{2} \int \frac{t^2 - 1}{t^2 + 1} dt = \dots = \\ &= -\frac{1}{2} \left( \int 1 dt - 2 \int \frac{1}{t^2 + 1} dt \right) = -\frac{1}{2} t + \operatorname{arctg} t + c = \\ &= -\frac{1}{2} e^{-2x} + \operatorname{arctg}(e^{-2x}) + c \quad \text{na } \mathbb{R} \end{aligned}$$

## B) Integrály typu

$$\int \frac{R(\ln x)}{x} dx$$

### Použijeme substituci

$$\ln x = t \quad (\text{prostá funkce na } (0, \infty), \quad t \in \mathbb{R})$$

a pro  $x \in (0, \infty)$  dostaneme

$$\int \frac{R(\ln x)}{x} dx = \left| \begin{array}{lcl} \ln x & = & t \dots t \in \mathbb{R} \\ \frac{1}{x} dx & = & dt \end{array} \right| = \int R(t) dt.$$

**Příklad 7.17:** Najděte primitivní funkce k funkci

$$f(x) = \frac{5 \ln x}{x(\ln^3 x + \ln^2 x - 2)}.$$

**Řešení:**  $x > 0, x \neq e$  (viz rozklad jmenovatele po substituci)

$$\begin{aligned} \int \frac{5 \ln x}{x(\ln^3 x + \ln^2 x - 2)} dx &= \left| \begin{array}{lcl} t & = & \ln x \\ dt & = & \frac{1}{x} dx \end{array} \right| = \\ &= \int \frac{5t}{\underbrace{t^3 + t^2 - 2}_{(t-1)(t^2+2t+2)}} dt = \dots = \int \left( \frac{1}{t-1} + \frac{-t+2}{t^2+2t+2} \right) dt = \\ &= \ln |t-1| + \int \frac{-\frac{1}{2}(2t+2)}{t^2+2t+2} dt + \int \underbrace{\frac{3}{t^2+2t+2}}_{(t+1)^2+1} dt = \\ &= \ln |t-1| - \frac{1}{2} \ln(t^2+2t+2) + 3 \arctg(t+1) + c = \\ &= \ln |\ln x - 1| - \frac{1}{2} \ln(\ln^2 x + 2 \ln x + 2) + 3 \arctg(\ln x + 1) + c \\ &\text{na } (0, e) \text{ a na } (e, \infty) \end{aligned}$$

## C) Integrály typu

$$\int R(\sin x, \cos x) dx$$

### Výběr substituce

- (I) Zkusíme, zda funkce  $R(u, v)$  nemá některou z dále uvedených vlastností:
- a)  $R(-u, v) = -R(u, v)$  ...  $R$  je lichá v první proměnné – sinech  
$$R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$$
- b)  $R(u, -v) = -R(u, v)$  ...  $R$  je lichá v druhé proměnné – kosinech  
$$R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$$
- c)  $R(-u, -v) = R(u, v)$  ...  $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$

## Příklady

1.  $\int \frac{2 \sin x}{\sin^2 x + 1} dx$

$$R(\sin x, \cos x) = \frac{2 \sin x}{\sin^2 x + 1},$$

$$R(-\sin x, \cos x) = \frac{-2 \sin x}{(-\sin x)^2 + 1} = -R(\sin x, \cos x),$$

$$R(\sin x, -\cos x) = \frac{2 \sin x}{\sin^2 x + 1} \neq -R(\sin x, \cos x),$$

$$R(-\sin x, -\cos x) = \frac{-2 \sin x}{(-\sin x)^2 + 1} \neq R(\sin x, \cos x),$$

a)  $R(-u, v) = -R(u, v)$  ( tj.  $R$  je lichá "v sinech" )

$$R(\sin x, \cos x) = \tilde{R}(\sin^2 x, \cos x) \cdot \sin x,$$

Volíme substituci:

$$\boxed{t = \cos x, \quad dt = -\sin x \, dx \quad (\sin^2 x = 1 - t^2).}$$

### Príklad 7.19:

$$\begin{aligned} \int \frac{2 \sin x}{\sin^2 x + 1} dx &= 2 \int \frac{\sin x}{2 - \cos^2 x} dx = \\ &= \left| \begin{array}{l} t = \cos x \in \langle -1, 1 \rangle \\ \frac{dt}{dx} = -\sin x \end{array} \right| = 2 \int \frac{-dt}{2 - t^2} = 2 \int \frac{dt}{t^2 - 2} = \\ &= \dots = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \ln |\cos x - \sqrt{2}| - \ln |\cos x + \sqrt{2}| \right) + c \end{aligned}$$

na  $\mathbb{R}$

2.  $\int \frac{1}{\cos^3 x} dx$

$$R(\sin x, \cos x) = \frac{1}{\cos^3 x},$$

$$R(-\sin x, \cos x) = \frac{1}{\cos^3 x} \neq -R(\sin x, \cos x),$$

$$R(\sin x, -\cos x) = \frac{1}{(-\cos x)^3} = -R(\sin x, \cos x),$$

$$R(-\sin x, -\cos x) = \frac{1}{(-\cos x)^3} \neq R(\sin x, \cos x)$$

b)  $R(u, -v) = -R(u, v)$  (tj.  $R$  je lichá "v kosinech")

$$R(\sin x, \cos x) = \tilde{R}(\sin x, \cos^2 x) \cdot \cos x,$$

Volíme substituci:

$$\boxed{t = \sin x, \quad dt = \cos x \, dx \quad (\cos^2 x = 1 - t^2).}$$

## Príklad 7.20:

Musí platit  $\cos x \neq 0$ , tj.  $x \in (-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

$$\int \frac{dx}{\cos^3 x} = \int \frac{\cos x}{(1 - \sin^2 x)^2} dx = \left| \begin{array}{lcl} t & = & \sin x \in (-1, 1) \\ dt & = & \cos x dx \end{array} \right| =$$

$$= \int \frac{dt}{(1 - t^2)^2} = \frac{1}{4} \int \left( \frac{1}{(t-1)^2} + \frac{1}{(t+1)^2} + \frac{1}{t+1} - \frac{1}{t-1} \right) dt =$$

$$= \dots = \frac{1}{4} \left( -\frac{1}{\sin x - 1} - \frac{1}{\sin x + 1} + \ln |\sin x + 1| - \ln |\sin x - 1| \right) + c$$

na  $(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$ ;  $k \in \mathbb{Z}$

3.  $\int \frac{1}{\cos^4 x} dx$

$$R(\sin x, \cos x) = \frac{1}{\cos^4 x},$$

$$R(-\sin x, \cos x) = \frac{1}{\cos^4 x} \neq -R(\sin x, \cos x),$$

$$R(\sin x, -\cos x) = \frac{1}{(-\cos x)^4} \neq -R(\sin x, \cos x),$$

$$R(-\sin x, -\cos x) = \frac{1}{(-\cos x)^4} = R(\sin x, \cos x)$$

c)  $R(-u, -v) = R(u, v)$

$$R(\sin x, \cos x) = \tilde{R}(\sin^2 x, \cos^2 x, \sin x \cdot \cos x),$$

Volíme substituci:

$$t = \operatorname{tg} x, \quad dt = \frac{1}{\cos^2 x} dx$$

Využijeme přitom toho, že

$$\cos^2 x = \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x + \sin^2 x} = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 x} = \frac{1}{1 + t^2},$$

$$\sin^2 x = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x + \sin^2 x} = \frac{\operatorname{tg}^2 x}{1 + \operatorname{tg}^2 x} = \frac{t^2}{1 + t^2},$$

$$\sin x \cdot \cos x = \operatorname{tg} x \cdot \cos^2 x = \frac{\operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg}^2 x} = \frac{t}{1 + t^2}$$

### Příklad 7.21: 1. způsob řešení

Musí platit  $\cos x \neq 0$ , tj.  $x \in (-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi) = I_k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\cos^4 x} dx &= \int \frac{1}{\cos^2 x} \cdot \frac{1}{\cos^2 x} dx = \left| \frac{\operatorname{tg} x}{\cos^2 x} dx = \frac{t}{dt} \right| = \\ &= \int \frac{1}{\frac{1}{1+t^2}} dt = \int (1+t^2) dt = \\ &= t + \frac{t^3}{3} + c = \operatorname{tg} x + \frac{\operatorname{tg}^3 x}{3} + c \\ \text{na } &(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi); \quad k \in \mathbb{Z}\end{aligned}$$

## Poznámky:

- Je-li  $x \in (-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$ , můžeme psát

$$x = \operatorname{arctg} t + k\pi,$$

$$\mathrm{d}x = \frac{1}{1+t^2} \mathrm{d}t$$

Není tedy nutné upravovat funkci  $R$  tak, aby bylo možné ve jmenovateli vytknout  $\cos^2 x$ .

- Někdy je zde vhodnější substituce  $t = \operatorname{cotg} x$ .

## Příklad 7.21: 2. způsob řešení

Musí platit  $\cos x \neq 0$ , tj.  $x \in (-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi) = I_k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\cos^4 x} dx &= \left| \begin{array}{lcl} \operatorname{tg} x &=& t \\ x &=& \operatorname{arctg} t + k\pi & - \text{ prostá} \\ dx &=& \frac{1}{t^2+1} dt \end{array} \right| = \\ &= \int \frac{1}{\left(\frac{1}{1+t^2}\right)^2} \cdot \frac{1}{t^2+1} dt = \int (1+t^2) dt = \\ &= t + \frac{t^3}{3} + c = \operatorname{tg} x + \frac{\operatorname{tg}^3 x}{3} + c\end{aligned}$$

na  $(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$ ;  $k \in \mathbb{Z}$

$$4. \int \frac{1}{(3 \sin x - 2 \cos x)^2} dx$$

$$R(\sin x, \cos x) = \frac{1}{(3 \sin x - 2 \cos x)^2},$$

$$R(-\sin x, \cos x) = \frac{1}{(3(-\sin x) - 2 \cos x)^2} \neq -R(\sin x, \cos x),$$

$$R(\sin x, -\cos x) = \frac{1}{(3 \sin x - 2(-\cos x))^2} \neq -R(\sin x, \cos x),$$

$$R(-\sin x, -\cos x) = \frac{1}{(3(-\sin x) - 2(-\cos x))^2} = R(\sin x, \cos x),$$

lze použít substituci  $t = \operatorname{tg} x$

6.  $\int \frac{\sin x \cos x}{\sin x + \cos x} dx$

$$R(\sin x, \cos x) = \frac{\sin x \cos x}{\sin x + \cos x},$$

$$R(-\sin x, \cos x) = \frac{(-\sin x) \cos x}{-\sin x + \cos x} \neq -R(\sin x, \cos x),$$

$$R(\sin x, -\cos x) = \frac{\sin x (-\cos x)}{\sin x + (-\cos x)} \neq -R(\sin x, \cos x),$$

$$R(-\sin x, -\cos x) = \frac{(-\sin x)(-\cos x)}{-\sin x + (-\cos x)} \neq R(\sin x, \cos x),$$

nelze použít žádnou z předchozích substitucí

(II) Pokud funkce  $R$  nemá ani jednu z vlastností popsaných v (I)  
použijeme substituci

$$\boxed{\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t} \quad (\text{prostá funkce na } ((2k-1)\pi, (2k+1)\pi), k \in \mathbb{Z})$$

a dostaneme

$$\cos x = \frac{\cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2}} = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}$$

$$\sin x = \frac{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2}} = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = \frac{2t}{1 + t^2}$$

**Příklad 7.23\*:** Najděte primitivní funkce k funkci

$$f(x) = \frac{\sqrt{2}}{\cos x + 3} \quad \text{na intervalu } (-\pi, \pi).$$

**Řešení:** Na interval  $(-\pi, \pi) = I$  máme

$$\int \frac{\sqrt{2}}{\cos x + 3} dx = \left| \begin{array}{lcl} \operatorname{tg} \frac{x}{2} & = & t & - \text{prostá na } I \\ x & = & 2 \operatorname{arctg} t \\ \frac{dx}{dx} & = & \frac{2}{1+t^2} dt \end{array} \right| =$$

$$= \int \frac{\sqrt{2}}{\frac{1-t^2}{1+t^2} + 3} \cdot \frac{2}{1+t^2} dt = \sqrt{2} \int \frac{1}{2+t^2} dt$$

$$= \operatorname{arctg} \frac{t}{\sqrt{2}} + c = \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg} \frac{x}{2}}{\sqrt{2}} + c.$$

### C\*) Integrály typu

$$\int \sin^m x \cdot \cos^n x \, dx$$

m - liché nebo n - liché

... použijeme substituce uvedené v C(I)a) a C(I)b)

m - sudé a n - sudé

... přejdeme k dvojnásobnému argumentu:

$$\cos^2 x = \frac{1}{2} (1 + \cos 2x)$$

$$\sin^2 x = \frac{1}{2} (1 - \cos 2x)$$

**Příklad 7.24:** Najděte primitivní funkce k funkci  $f(x) = \sin^4 x$ .

## D) Substituce pro integrály typu

$$\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) dx, \quad n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}, \quad ad \neq bc$$

Použijeme substituci

$$y = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}.$$

Speciálně v případě, kdy  $c = 0, d = 1$ , tj. pro integrály typu

$$\int R\left(x, \sqrt[n]{ax+b}\right) dx, \quad n \in \mathbb{N} \setminus \{1\},$$

použijeme substituci

$$y = \sqrt[n]{ax+b}.$$

**Příklad 7.25:** Najděte primitivní funkce k funkci

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-1} + \sqrt[3]{x-1}}.$$

**Řešení:** Zřejmě  $D(f) = (1, \infty)$ .

$$\int \frac{1}{\sqrt{x-1} + \sqrt[3]{x-1}} dx = \left| \begin{array}{lcl} \sqrt[6]{x-1} & = & t \\ x & = & t^6 + 1 \\ dx & = & 6t^5 dt \end{array} \quad \begin{array}{l} x \in (1, \infty); \quad t \in (0, \infty) \\ - \text{prostá na } (0, \infty) \end{array} \right| =$$
$$= \int \frac{6t^5}{t^3 + t^2} dt = 6 \int \frac{t^3}{t+1} dt = 6 \int \left( t^2 - t + 1 - \frac{1}{t+1} \right) dt = \dots =$$
$$= 2\sqrt{x-1} - 3\sqrt[3]{x-1} + 6\sqrt[6]{x-1} - 6 \ln(\sqrt[6]{x-1} + 1) + C \quad \text{na } (1, \infty)$$