

## Abstraktní skalární součin

Odpřednesenou látku naleznete v kapitolách 12.1 a 12.2 skript  
*Abstraktní a konkrétní lineární algebra*.

## Velmi důležitá poznámka

Vektor byl definován (viz témata 01A a 01B) jako **prvek lineárního prostoru**.

Pro obecný vektor **nelze mluvit** o jeho délce, **nelze mluvit** o úhlu mezi dvěma vektory, atd.

K tomu, abychom o délkách, úhlech, atd., mluvit mohli, je třeba **přidat k axiomům lineárního prostoru axiomy další**. Této dodatečné struktury budeme říkat **skalární součin**.

Jde o úvodní kurs.<sup>a</sup> Proto **se omezíme na lineární prostory nad  $\mathbb{R}$** .

---

<sup>a</sup>Obecněji lze studovat lineární prostor nad  $\mathbb{F}$ , vybavený jistou bilineární/sesquilineární formou.

## Dnešní přednáška

- 1 V této přednášce (a ve **všech** přednáškách týkajících se skalárního součinu) se zaměříme na lineární prostory nad  $\mathbb{R}$ .<sup>a</sup>
- 2 Skalární součin zavedeme **axiomaticky**. Odvodíme geometrický význam skalárního součinu.<sup>b</sup>

Axiomatické zavedení skalárního součinu nám umožní převést známé významy z  $\mathbb{R}^n$  (kolmost, délka vektoru, atd) do obecných lineárních prostorů se skalárním součinem.

---

<sup>a</sup>Velmi málo řekneme i o lineárních prostorech nad  $\mathbb{C}$ . Důvod: fyzika a kvantové počítání.

<sup>b</sup>**Slogan**: skalární součin je míra „odchylky“ dvou vektorů.

## Příští přednáška

- 1 Popis obecných skalárních součinů v prostorech  $\mathbb{R}^n$ .

## Definice (reálný skalární součin)

Ať  $L$  je lineární prostor nad  $\mathbb{R}$ . Funkci  $\langle - | - \rangle : L \times L \rightarrow \mathbb{R}$  říkáme **skalární součin**,<sup>a</sup> pokud platí následující, pro libovolné vektory  $\vec{x}, \vec{y}$ :

- ❶ **Komutativita**:  $\langle \vec{x} | \vec{y} \rangle = \langle \vec{y} | \vec{x} \rangle$ .
- ❷ **Linearita ve druhé souřadnici**: zobrazení  $\langle \vec{x} | - \rangle : L \rightarrow \mathbb{R}$  je lineární.
- ❸ **Positivní definitnost**:  $\langle \vec{x} | \vec{x} \rangle \geq 0$ ,  $\langle \vec{x} | \vec{x} \rangle = 0$  iff  $\vec{x} = \vec{o}$ .

---

<sup>a</sup>Naše značení pro skalární součin je obvyklé ve fyzice (tzv **bra-ket notation** nebo **Diracova notace**) a má jisté výhody. Značení  $\vec{x} \cdot \vec{y}$  pro skalární součin **nebudeme používat**! Důvod: přetížení značky  $\cdot$  pro součin.

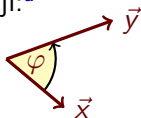
## Poznámka (skalární součin pro prostory nad $\mathbb{C}$ )

V případě lineárního prostoru nad  $\mathbb{C}$  mluvíme o skalárním součinu, pokud  $\langle - | - \rangle : L \times L \rightarrow \mathbb{C}$  je pozitivně definitní, lineární ve druhé souřadnici a **místo komutativity** platí rovnost  $\langle \vec{x} | \vec{y} \rangle = \overline{\langle \vec{y} | \vec{x} \rangle}$ .

## Příklady skalárních součinů

- ① Skalární součin v prostoru orientovaných úseček:

$\langle \vec{x} \mid \vec{y} \rangle = \|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\| \cdot \cos \varphi$ , kde  $\|\vec{x}\|$  a  $\|\vec{y}\|$  jsou délky úseček  $\vec{x}$  a  $\vec{y}$  a  $\varphi$  je úhel, který svírají:<sup>a</sup>



Tento skalární součin splňuje všechny tři požadované vlastnosti: je komutativní, lineární ve druhé souřadnici a pozitivně definitní.

---

<sup>a</sup>**Důležitá poznámka:** v další části přednášky ukážeme, že pro libovolný skalární součin je možné definovat pojmy **délky**  $\|\vec{x}\|$  vektoru  $\vec{x}$  (také: **normy** vektoru  $\vec{x}$ ) a **úhlu**  $\varphi$  mezi dvěma vektory tak, že platí rovnost

$$\langle \vec{x} \mid \vec{y} \rangle = \|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\| \cdot \cos \varphi.$$

V prostoru s obecným skalárním součinem se tudíž budeme moci „chovat stejně“ jako v klasické geometrii. Bude tak například platit Pythagorova věta, a podobně.

## Příklady skalárních součinů (pokrač.)

② **Standardní** skalární součin v  $\mathbb{R}^n$ :  $\langle \mathbf{x} \mid \mathbf{y} \rangle = \mathbf{x}^T \cdot \mathbf{y} = \sum_{i=1}^n x_i \cdot y_i$ .

③ Standardní skalární součin není jediný skalární součin v  $\mathbb{R}^n$ .

Například<sup>a</sup>  $\left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \right\rangle = x_1 y_1 + x_2 y_1 + x_1 y_2 + 2x_2 y_2$  je skalární součin v  $\mathbb{R}^2$ . (Jde o úmorné, ale užitečné cvičení.)

④ **Standardní** skalární součin v  $\mathbb{C}^n$ :  $\langle \mathbf{x} \mid \mathbf{y} \rangle = \sum_{i=1}^n \overline{x_i} \cdot y_i$ .

**Pozor!** Platí rovnost  $\langle \mathbf{x} \mid \mathbf{y} \rangle = \overline{\langle \mathbf{y} \mid \mathbf{x} \rangle}$ , **nikoli**  $\langle \mathbf{x} \mid \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{y} \mid \mathbf{x} \rangle$ .

---

<sup>a</sup>K tomuto skalárnímu součinu se vrátíme koncem této přednášky. Po příští přednášce budeme schopni (téměř) okamžitě uvidět, že jde o skalární součin. Budeme také schopni popsat **všechny** možné skalární součiny v prostoru  $\mathbb{R}^n$ .

## Tvrzení (nerovnost Cauchy-Schwarz-Bunyakovski)

Platí  $|\langle \vec{x} | \vec{y} \rangle| \leq \sqrt{\langle \vec{x} | \vec{x} \rangle} \cdot \sqrt{\langle \vec{y} | \vec{y} \rangle}$ .

### Důkaz.

Platí  $0 \leq \langle \vec{x} + a\vec{y} | \vec{x} + a\vec{y} \rangle = \underbrace{\langle \vec{x} | \vec{x} \rangle}_C + a \underbrace{2\langle \vec{x} | \vec{y} \rangle}_B + a^2 \underbrace{\langle \vec{y} | \vec{y} \rangle}_A$ , pro

každé  $a \in \mathbb{R}$ .

Tudíž  $B^2 - 4AC \leq 0$ , neboli  $B^2 \leq 4AC$ . Z toho nerovnost

$$|\langle \vec{x} | \vec{y} \rangle| \leq \sqrt{\langle \vec{x} | \vec{x} \rangle} \cdot \sqrt{\langle \vec{y} | \vec{y} \rangle} \text{ plyne okamžitě.}$$

### Jednoduchý, ale důležitý důsledek: úhel mezi vektory

Pro nenulové  $\vec{x}, \vec{y}$  platí  $-1 \leq \frac{\langle \vec{x} | \vec{y} \rangle}{\sqrt{\langle \vec{x} | \vec{x} \rangle} \cdot \sqrt{\langle \vec{y} | \vec{y} \rangle}} \leq 1$ . Úhlu  $\varphi$

$$= \cos \varphi \text{ pro jediné } \varphi \in [0; \pi]$$

říkáme **úhel mezi vektory**  $\vec{x}$  a  $\vec{y}$ .

## Definice (norma vektoru)

**Normu vektoru**  $\vec{x}$  definujeme<sup>a</sup> jako  $\|\vec{x}\| = \sqrt{\langle \vec{x} | \vec{x} \rangle}$ .

<sup>a</sup>Nerovnost C-S-B tedy můžeme zapsat jako  $|\langle \vec{x} | \vec{y} \rangle| \leq \|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\|$ .

## Tvrzení (vlastnosti normy)

Platí:

- 1  $\|\vec{x}\| \geq 0$ ,  $\|\vec{x}\| = 0$  iff  $\vec{x} = \vec{0}$ .
- 2  $\|a \cdot \vec{x}\| = |a| \cdot \|\vec{x}\|$ .
- 3 **Trojúhelníková nerovnost:**  $\|\vec{x} + \vec{y}\| \leq \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|$ .

## Důkaz.

Jediná netriviální vlastnost je trojúhelníková nerovnost. Upravujte:  
 $\|\vec{x} + \vec{y}\|^2 = \langle \vec{x} + \vec{y} | \vec{x} + \vec{y} \rangle = \|\vec{x}\|^2 + 2\langle \vec{x} | \vec{y} \rangle + \|\vec{y}\|^2$  a použijte  
nerovnost Cauchy-Schwarz-Bunyakovski:

$$\|\vec{x}\|^2 + 2\langle \vec{x} | \vec{y} \rangle + \|\vec{y}\|^2 \leq \|\vec{x}\|^2 + 2\|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\| + \|\vec{y}\|^2 = (\|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|)^2.$$

Celkově:  $\|\vec{x} + \vec{y}\|^2 \leq (\|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|)^2$ , tedy  $\|\vec{x} + \vec{y}\| \leq \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|$ . ■

## Důsledek

Pro nenulová  $\vec{x}$ ,  $\vec{y}$  platí rovnost  $\langle \vec{x} | \vec{y} \rangle = \|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\| \cdot \cos \varphi$ .

## Poznámka

Předchozí důsledek je **stejná** rovnost, která platí pro „klasický“ skalární součin v prostoru orientovaných úseček!

## Definice (ortogonalita vektorů)

Pokud  $\langle \vec{x} | \vec{y} \rangle = 0$ , mluvíme o **ortogonálních** (také: **navzájem kolmých**) vektorech.

## Několik poznámek o ortogonalitě

- 1 **Neřekli jsme**, že vektory  $\vec{x}$  a  $\vec{y}$  jsou na sebe kolmé, pokud svírají úhel  $\frac{\pi}{2}$ . Taková úvaha platí pouze pro **nenulové** vektory. Chceme ovšem hovořit i o nulovém vektoru, proto jsme definovali kolmost rovností  $\langle \vec{x} | \vec{y} \rangle = 0$ .

## Několik poznámek o ortogonalitě (pokrač.)

- ② **Pozor:** nulový vektor  $\vec{o}$  je kolmý na každý vektor  $\vec{x}$ .

Důvod: z definice skalárního součinu víme, že zobrazení

$$\langle \vec{x} | - \rangle : L \rightarrow \mathbb{R}$$

je lineární. Proto  $\langle \vec{x} | - \rangle$  musí poslat nulový vektor na nulový vektor, neboli musí platit rovnost

$$\langle \vec{x} | \vec{o} \rangle = 0$$

**Obráceně:** jestliže  $\vec{x}$  je kolmý na každý vektor, pak  $\vec{x} = \vec{o}$ .

Důvod: podle předpokladu je  $\langle \vec{x} | \vec{x} \rangle = 0$ . Z definice skalárního součinu plyne, že  $\vec{x} = \vec{o}$ .

## Několik poznámek o ortogonalitě (pokrač.)

- ③ Chceme-li pro nějaký vektor  $\vec{x}$  ověřit, že  $\langle \vec{x} | \vec{w} \rangle = 0$  pro každý vektor  $\vec{w}$  ze  $W = \text{span}(M)$ , stačí ověřit, že platí  $\langle \vec{x} | \vec{m} \rangle = 0$  pro všechny vektory  $\vec{m}$  z  $M$ .

Důvod: pro obecný vektor  $\vec{w}$  ze  $\text{span}(M)$  nastane jedna ze dvou situací:

①  $\vec{w} = \vec{0}$ . Pak  $\langle \vec{x} | \vec{w} \rangle = 0$ .

②  $\vec{w} = \sum_{i=1}^n a_i \cdot \vec{m}_i$  pro nějaká  $a_i$  z  $\mathbb{R}$  a nějaká  $\vec{m}_i$  z  $M$ . Pak

$$\langle \vec{x} | \vec{w} \rangle = \langle \vec{x} | \sum_{i=1}^n a_i \cdot \vec{m}_i \rangle = \sum_{i=1}^n a_i \cdot \langle \vec{x} | \vec{m}_i \rangle$$

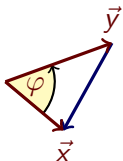
Jestliže tedy je  $\langle \vec{x} | \vec{m}_i \rangle = 0$  pro každé  $i$ , platí  $\langle \vec{x} | \vec{w} \rangle = 0$ .

**Slogan:** ortogonalitu stačí ověřovat pouze pro množinu generátorů podprostoru.

Ortogonalitou se budeme podrobněji zabývat v příštích přednáškách.

## Příklady (geometrie prostoru se skalárním součinem)

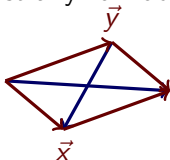
- ❶ **Kosinová věta:** Nenulové vektory  $\vec{x}$  a  $\vec{y}$  určují **trojúhelník**



$$\text{Platí: } \|\vec{x} - \vec{y}\|^2 = \|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2 - \underbrace{2 \cdot \langle \vec{x} | \vec{y} \rangle}_{2 \cdot \|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\| \cdot \cos \varphi}.$$

Případu, kdy  $\langle \vec{x} | \vec{y} \rangle = 0$ , se říká **Pythagorova věta**.

- ❷ **Rovnoběžníková rovnost:** Dva nenulové vektory  $\vec{x}$  a  $\vec{y}$  určují strany rovnoběžníka s úhlopříčkami  $\vec{x} - \vec{y}$  a  $\vec{x} + \vec{y}$ .



$$\text{Platí: } \|\vec{x} - \vec{y}\|^2 + \|\vec{x} + \vec{y}\|^2 = 2(\|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2).$$

Upravujte:

$$\|\vec{x} - \vec{y}\|^2 + \|\vec{x} + \vec{y}\|^2 = \langle \vec{x} - \vec{y} | \vec{x} - \vec{y} \rangle + \langle \vec{x} + \vec{y} | \vec{x} + \vec{y} \rangle = \dots$$

## Poznámky (vztah skalárního součinu, normy a metriky)

Skalární součin indukuje normu a ta indukuje **metriku** (také: **distanci**) na množině  $L$ . Jde o funkci  $d : L \times L \rightarrow \mathbb{R}$ , která splňuje:

- ❶  $d(\vec{x}, \vec{y}) \geq 0$ , rovnost nastává právě tehdy, když  $\vec{x} = \vec{y}$ .
- ❷  $d(\vec{x}, \vec{y}) = d(\vec{y}, \vec{x})$ .
- ❸  $d(\vec{x}, \vec{y}) \leq d(\vec{x}, \vec{z}) + d(\vec{z}, \vec{y})$ .

Stačí definovat  $d(\vec{x}, \vec{y}) = \|\vec{x} - \vec{y}\|$ .

O prostoru  $L$  s metrikou  $d$  mluvíme jako o **metrickém lineárním prostoru**.

Pro lineární prostory platí:<sup>a</sup> skalární součin  $\rightsquigarrow$  norma  $\rightsquigarrow$  metrika.

---

<sup>a</sup>Obrácené implikace **neplatí**. Například  $d(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{když } x \neq y, \\ 0, & \text{když } x = y, \end{cases}$  je metrika na  $\mathbb{R}$ , která nevznikla z žádné normy na  $\mathbb{R}$  (tj.  $\|x\| = d(0, x)$  **není norma**). Norma  $\left\| \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right\| = |x_1| + |x_2|$  na  $\mathbb{R}^2$  nevznikla z žádného skalárního součinu na  $\mathbb{R}^2$ , protože **nesplňuje rovnoběžníkovou rovnost**.

## Poznámka

Prostory se skalárním součinem se chovají tak, jak jsme zvyklí z klasické geometrie. Klasická geometrie nemusí být vždy vhodná.

## Příklad (Minkowského časoprostor)

Na  $\mathbb{R}^4$  definujte<sup>a</sup>  $\left\langle \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} t' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \right\rangle = tt' - xx' - yy' - zz'$ . Protože  $\left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = -1$ , **nejde** o pozitivně definitní „skalární součin“.

Tento „skalární součin“ je velmi důležitý v **teorii relativity**. Příslušnému pojmu „vzdálenosti“ vektorů  $\mathbf{x}$  a  $\mathbf{y}$  v  $\mathbb{R}^4$  se říká **metrika Minkowského**<sup>b</sup> **časoprostoru**.<sup>c</sup>

<sup>a</sup>Existuje i druhá „znaménková konvence“ daná vzorečkem  $-tt' + xx' + yy' + zz'$ . Volba znaménkové konvence nemá fyzikální význam.

<sup>b</sup>Hermann Minkowski (1864–1909) byl vynikajícím německým matematikem.

<sup>c</sup>V tomto časoprostoru je rychlost světla  $c$  rovna 1.

## Příklad (Lorentzova<sup>a</sup> transformace)

<sup>a</sup>Hendrik Antoon Lorentz (1853–1928) byl významný holandský fyzik.

Pohyb podsvětelnou rychlostí  $v$  ve směru osy  $x$  v Minkowského časoprostoru je lineární zobrazení  $\mathbf{L} : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ , pro které platí

$$\begin{aligned} t' &= \gamma \cdot (t - vx) \\ x' &= \gamma \cdot (x - vt) \\ y' &= y \\ z' &= z \end{aligned} \quad \text{kde } 0 \leq v < c = 1 \text{ a } \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2}}.$$

Vzhledem ke kanonické bázi  $\mathbb{R}^4$  má zobrazení  $\mathbf{L}$  matici

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} \gamma & -v \cdot \gamma & 0 & 0 \\ -v \cdot \gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh \varphi & -\sinh \varphi & 0 & 0 \\ -\sinh \varphi & \cosh \varphi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

kde  $\varphi = \ln(\gamma(1 + v))$ . Pohyb ve směru osy  $x$  podsvětelnou rychlostí  $v$  v Minkowského časoprostoru lze tedy interpretovat jako **rotaci** (v rovině dané osami  $t$  a  $x$ ) o úhel  $\varphi$  v **hyperbolické geometrii**.

## Příklad (rotace a standardní skalární součin)

Připomenutí: rotace o úhel  $\alpha$  je  $\mathbf{R}_\alpha : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , kde<sup>a</sup>

$$\mathbf{R}_\alpha = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$$

Potom platí:

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{R}_\alpha \cdot \mathbf{x} \mid \mathbf{R}_\alpha \cdot \mathbf{y} \rangle &= (\mathbf{R}_\alpha \cdot \mathbf{x})^T \cdot (\mathbf{R}_\alpha \cdot \mathbf{y}) \\ &= \mathbf{x}^T \cdot \mathbf{R}_\alpha^T \cdot \mathbf{R}_\alpha \cdot \mathbf{y} \\ &= \mathbf{x}^T \cdot \mathbf{R}_\alpha^{-1} \cdot \mathbf{R}_\alpha \cdot \mathbf{y} \\ &= \mathbf{x}^T \cdot \mathbf{y} \\ &= \langle \mathbf{x} \mid \mathbf{y} \rangle \end{aligned}$$

Tudíž platí:  $\|\mathbf{x}\| = \|\mathbf{R}_\alpha \cdot \mathbf{x}\|$  a  $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| = \|\mathbf{R}_\alpha \cdot \mathbf{x} - \mathbf{R}_\alpha \cdot \mathbf{y}\|$ .

Ukázali jsme: **rotace zachovává standardní skalární součin, normu a metriku.**

---

<sup>a</sup>Povšimněme si:  $\mathbf{R}_\alpha^T = \mathbf{R}_\alpha^{-1}$ .

## Tvrzení

Pro matici  $\mathbf{A} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  jsou následující podmínky ekvivalentní:

- ①  $\mathbf{A}$  zachovává standardní skalární součin v  $\mathbb{R}^n$ .
- ②  $\mathbf{A}$  je regulární a platí  $\mathbf{A}^T = \mathbf{A}^{-1}$ .

## Důkaz.

Z (1) plyne (2):<sup>a</sup>  $\delta_{ij} = \langle \mathbf{e}_i \mid \mathbf{e}_j \rangle = \langle \mathbf{A} \cdot \mathbf{e}_i \mid \mathbf{A} \cdot \mathbf{e}_j \rangle = \mathbf{e}_i^T \cdot \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{e}_j$ ,  
takže  $\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A} = \mathbf{E}_n$ .

Ze (2) plyne (1):

$$\langle \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} \mid \mathbf{A} \cdot \mathbf{y} \rangle = \mathbf{x}^T \cdot \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{x}^T \cdot \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{x}^T \cdot \mathbf{y} = \langle \mathbf{x} \mid \mathbf{y} \rangle. \quad \blacksquare$$

<sup>a</sup>Připomenutí: pro Kroneckerův symbol  $\delta$  platí  $\delta_{ij} = 0$  pro  $i \neq j$  a  $\delta_{ii} = 1$ .

## Poznámka (základní transformace prostoru $\mathbb{R}^2$ )

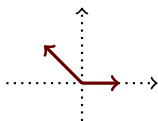
Projekce na osy a změna měřítka **nezachovávají** standardní skalární součin! Rotace skalární součin zachovávají (viz předchozí příklad).  
Reflexe podle os  $x$  a  $y$  standardní skalární součin zachovávají.

## Příklad (netradiční skalární součin v $\mathbb{R}^2$ )

Pro  $\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_1 + x_1 y_2 + 2x_2 y_2$  v  $\mathbb{R}^2$  platí

rovnost  $\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle = 0$ .

To znamená, že náš skalární součin „vidí“ vektory  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$  jako **navzájem kolmé**:



To může být velmi praktické. Jak tedy rozpoznat obecný skalární součin? Všimněme si, že náš součin je zadán jistou **maticí G**:

$$\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \rangle = (x_1 \quad x_2) \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}}_{\mathbf{G}} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = x_1 y_1 + x_2 y_1 + x_1 y_2 + 2x_2 y_2$$

## Co dál?

Budeme chtít pochopit, které matice **G** zadávají skalární součiny v prostoru  $\mathbb{R}^n$ .

Uvidíme, že skalární součiny v  $\mathbb{R}^n$  přesně odpovídají maticím, kterým říkáme **pozitivně definitní**.