

Báze a dimense

Odpřednesenou látku naleznete v kapitolách 3.1–3.3 a 3.6 skript *Abstraktní a konkrétní lineární algebra*.

Minulé přednášky

- 1 Lineární kombinace, lineární závislost/nezávislost.
- 2 Lineární obal seznamu/množiny vektorů.

Dnešní přednáška

- 1 Báze lineárního (pod)prostoru.

Intuitivní význam: **báze je výběr systému souřadnicových os.**

- 2 Dimenze lineárního (pod)prostoru.

Intuitivní význam: **dimenze je počet souřadnicových os.**

Připomenutí

Množina M je **konečná**, pokud buď $M = \emptyset$ nebo $M = \{x_1, \dots, x_n\}$ pro nějaké přirozené číslo $n \geq 1$. Množina M je **nekonečná**, když není konečná.

Definice (množina generátorů)

Ať W je lineární podprostor prostoru L . Řekneme, že množina G **generuje** W , když platí $\text{span}(G) = W$. (Říkáme také: G je **množina generátorů** podprostoru W .)

Definice (konečně generovaný podprostor)

Řekneme, že lineární podprostor W prostoru L je **konečně generovaný**, když existuje konečná množina jeho generátorů. (To jest, když platí $\text{span}(G) = W$ pro nějakou **konečnou** množinu G .)

Příklady

- 1 Pro **každý** prostor L platí: L je množina generátorů prostoru L .

Množina generátorů L prostoru L obecně není konečná a je **vždy lineárně závislá** (například: \mathbb{R}^2 je **nekonečná lineárně závislá** množina generátorů prostoru \mathbb{R}^2).

- 2 Jak \emptyset , tak $\{\vec{o}\}$ jsou **konečné** množiny generátorů triviálního prostoru $\{\vec{o}\}$. Důvody: $\text{span}(\emptyset) = \{\vec{o}\}$ (minulé přednášky) a $\text{span}(\{\vec{o}\}) = \{\vec{o}\}$.

Všimněme si:

- 1 \emptyset je **lineárně nezávislá množina generátorů** prostoru $\{\vec{o}\}$.
- 2 $\{\vec{o}\}$ je **lineárně závislá množina generátorů** prostoru $\{\vec{o}\}$.
- 3 **Konečná** množina $G = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ generuje „osu prvního a třetího kvadrantu“ prostoru \mathbb{R}^2 . Množina G je **lineárně závislá**.

Definice (báze)

Lineárně nezávislé množině B , která generuje prostor L , říkáme **báze prostoru L** . Je-li báze B konečná, pak seznamu prvků utvořeného ze všech prvků množiny B říkáme **uspořádaná báze**.

Slogan pro bázi

Báze prostoru je „nejúspornější“ množina generátorů.

Příklady

- ❶ \emptyset je báze triviálního prostoru $\{\vec{0}\}$.
- ❷ Každá z množin $\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}\right\}$, $\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$ tvoří bázi prostoru \mathbb{R}^2 .
- ❸ Množina $\{1, x, x^2, x^3, \dots\}$ tvoří bázi prostoru $\mathbb{R}[x]$ všech reálných polynomů.

Příklad (kanonická báze prostoru \mathbb{F}^n , $n \geq 1$)

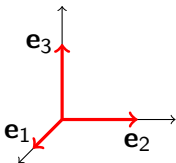
Ať \mathbb{F} je **jakékoli** těleso. Označme jako $K_n = (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$ následující **seznam** vektorů v \mathbb{F}^n , $n \geq 1$:

\mathbf{e}_i má jedničku na i -té posici, všude jinde nuly.

Potom K_n je **uspořádaná** báze prostoru \mathbb{F}^n .

Této uspořádané bázi K_n říkáme **kanonická báze prostoru \mathbb{F}^n** .
(Také: **standardní báze**.)

Příklad: kanonická báze K_3 v \mathbb{R}^3 .



$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Příklad: Fourierova báze pro $n = 4$ (varianta této báze je používána v JPEG)

Pro $w = e^{\frac{2\pi i}{4}} = i$, je **seznam** $(\vec{f}_0, \vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3)$, kde

$$\begin{aligned}\vec{f}_0 &= \begin{pmatrix} w^0 \\ w^0 \\ w^0 \\ w^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, & \vec{f}_1 &= \begin{pmatrix} w^0 \\ w^1 \\ w^2 \\ w^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ -1 \\ -i \end{pmatrix} \\ \vec{f}_2 &= \begin{pmatrix} w^0 \\ w^2 \\ w^4 \\ w^6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, & \vec{f}_3 &= \begin{pmatrix} w^0 \\ w^3 \\ w^6 \\ w^9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ -1 \\ i \end{pmatrix}\end{aligned}$$

uspořádaná báze lineárního prostoru \mathbb{C}^4 nad tělesem \mathbb{C} .

Tvrzení (Existence báze pro konečně generované prostory)

Každý konečně generovaný prostor L má konečnou bázi.
Navíc: všechny možné báze prostoru L mají stejný počet prvků.

Myšlenka důkazu

První tvrzení: víme, že $\text{span}(G) = L$, kde G je konečná. Lze postupovat dvěma způsoby:

- (I) „Přidávat“ do prázdné množiny „důležité“ vektory z G .
- (II) „Ubírat“ z G „zbytečné“ vektory.

Detaily: přednáška.

Druhé tvrzení: **Exchange Lemma** (viz **skripta**, Lemma 3.2.10 a cvičení).



Definice (prostor konečné dimenze)

Lineární prostor L má **dimensi** n (značíme: $\dim(L) = n$), když existuje báze B prostoru L , která má n prvků,^a kde n je přirozené číslo.

^aA tudíž, podle předchozího, **všechny** báze prostoru L mají n prvků.

Příklady

- ❶ Platí: $\dim(\mathbb{R}^n) = n$, $n \geq 0$.
- ❷ Obecněji: pro **jakékoli** těleso \mathbb{F} platí $\dim(\mathbb{F}^n) = n$, $n \geq 0$.
- ❸ Platí: $\dim(\{\vec{0}\}) = 0$.
- ❹ Prostor $\mathbb{R}[x]$ všech reálných polynomů **nemá** konečnou dimenzi.
- ❺ Podprostor $\mathbb{R}^{\leq 3}[x]$ (polynomy stupně nejvýše 3) prostoru $\mathbb{R}[x]$ má dimenzi 4. Uspořádaná báze je např. $(x^3, x^2, x, 1)$.

Poznámka

Ať L má konečnou dimenzi a ať M je konečná podmnožina L .

- 1 Je-li M lineárně nezávislá, pak $\text{card}(M) \leq \dim(M)$.
- 2 Ať $\text{card}(M) = \dim(L)$. Potom M je lineárně nezávislá právě tehdy, když platí $\text{span}(M) = L$.

Důsledek (klasifikace lineárních podprostorů \mathbb{R}^3)

Lineární podprostory prostoru \mathbb{R}^3 jsou **přesně tvaru** $\text{span}(M)$, kde M (**zaměření podprostoru**) je lineárně nezávislá podmnožina \mathbb{R}^3 :

- 1 Počátek $\{\vec{0}\}$ (když M má **nula** prvků).
- 2 Přímký procházející počátkem (když M má **jeden** prvek).
- 3 Roviny procházející počátkem (když M má **dva** prvky).
- 4 Celé \mathbb{R}^3 (když M má **tři** prvky).

Zobecnění: klasifikace^a lineárních podprostorů prostoru \mathbb{R}^n (dokonce na lineární podprostory prostoru \mathbb{F}^n).

^aTo je náročnější na představu, ale geometrický význam je podobný jako pro lineární podprostory prostoru \mathbb{R}^3 .

Připomenutí (Téma 02A)

Podprostoru $\text{span}(W_1 \cup W_2)$ říkáme **spojení podprostorů** W_1 a W_2 .
Značení: $W_1 \vee W_2$.

Věta (rovnost dvou lineárních podprostorů)

Ať W_1, W_2 jsou lineární podprostory prostoru L konečné dimenze.
Potom $W_1 = W_2$ právě tehdy, když platí rovnost
 $\dim(W_1) = \dim(W_2) = \dim(W_1 \vee W_2)$.^a

^aDůkaz: domácí cvičení. Postupujte následovně:

- 1 Ať $W_1 = W_2$. Potom $W_1 \vee W_2 = W_1$. Tudíž platí rovnost
 $\dim(W_1) = \dim(W_2) = \dim(W_1 \vee W_2)$.
- 2 Ať $\dim(W_1) = \dim(W_2) = \dim(W_1 \vee W_2)$. Protože $W_1 \subseteq W_1 \vee W_2$ a oba podprostory mají stejnou dimenzi, platí $W_1 = W_1 \vee W_2$.
Rovnost $W_2 = W_1 \vee W_2$ se dokáže analogicky.
Celkově: $W_1 = W_1 \vee W_2 = W_2$, hotovo.

Důsledek (důležitý pro Frobeniovu větu, téma 06A)

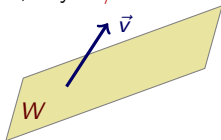
Ať W je lineární podprostor prostoru L konečné dimenze. Pro vektor \vec{v} jsou následující podmínky ekvivalentní:^a

- 1 $\vec{v} \in W$
- 2 $\dim(W) = \dim(W \vee \text{span}(\vec{v}))$

^aDůkaz: domácí cvičení. Postupujte následovně:

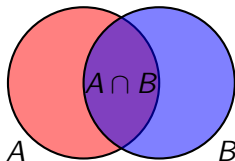
- 1 Dokažte: $\vec{v} \in W$ iff $\text{span}(\vec{v}) \subseteq W$ iff $W = W \vee \text{span}(\vec{v})$.
- 2 Použijte větu z předchozí stránky: $W = W \vee \text{span}(\vec{v})$ iff $\dim(W) = \dim(W \vee \text{span}(\vec{v})) = \dim(\underbrace{W \vee (W \vee \text{span}(\vec{v}))}_{= W \vee \text{span}(\vec{v})})$.

Měl by pomoci obrázek situace, kdy $\vec{v} \notin W$:



Připomenutí (princip inkluze a exkluze)

Ať A a B jsou **konečné** množiny.



Označíme-li počet prvků množin A , B , $A \cap B$ a $A \cup B$ jako $\text{card}(A)$, $\text{card}(B)$, $\text{card}(A \cap B)$ a $\text{card}(A \cup B)$, potom platí rovnost

$$\text{card}(A \cup B) + \text{card}(A \cap B) = \text{card}(A) + \text{card}(B)$$

Věta (o dimensi spojení a průniku)

Ať je L lineární prostor konečné dimense. Potom, pro libovolné lineární podprostory W_1, W_2 , platí rovnost $\dim(W_1 \vee W_2) + \dim(W_1 \cap W_2) = \dim(W_1) + \dim(W_2)$.

Důkaz.

Přednáška. 

Slogan pro větu o dimensi spojení a průniku

Jde o „princip inkluze a exkluze“ pro lineární prostory konečné dimense. Dimense hraje roli počtu prvků.^a

^aZnovu upozorňujeme: **slogan je reklamní heslo, nikoli skutečnost.**

Věta (za předpokladu (AC))

Každý lineární prostor L má bázi.

Důkaz.

Náročný: nebudeme dokazovat. 

Poznámka

Předpoklad (AC). Zkratka (AC) znamená **Axiom of Choice**, česky: axiom výběru.

Jedná se o tvrzení: kartézský součin libovolného systému neprázdných množin je neprázdna množina.^a

Tvrzení (AC) je nezávislé na základních axiomech teorie množin. Srovnejte s axiomem o rovnoběžkách z geometrie.

^aVe **skriptech** je použita ekvivalentní formulace (AC), tzv. **Zornovo Lemma**.

Pozor: stejný prostor nad různými tělesy má různé vlastnosti

- ① Množina \mathbb{C} všech komplexních čísel je
 - ① lineární prostor dimenze 1 nad tělesem \mathbb{C} ,
 - ② lineární prostor dimenze 2 nad tělesem \mathbb{R} .
- ② Množina \mathbb{R} všech reálných čísel je
 - ① lineární prostor dimenze 1 nad tělesem \mathbb{R} ,
 - ② lineární prostor nekonečné dimenze nad tělesem \mathbb{Q} .^a

^aNepovinné: takzvaná Hamelova báze reálných čísel, viz Příklad 3.6.5 skript.

Důsledek: měli bychom vždy psát, nad jakým tělesem o lineárním prostoru mluvíme!