KAPITOLA 9: Nevlastní integrál

singulární bod integrace funkce f na (a,b):

- a, je-li $a=-\infty$; b, je-li $b=+\infty$
- $c \in \langle a,\, b\rangle$, je-li f neomezená na každém prstencovém okolí bodu c (pro $c=a$ nebo $c=b$ uvažujeme jen příslušná jednostranná okolí)

Definice:

- Nechť $-\infty < a < b \le +\infty$, b je singulární bod integrace funkce f na (a,b) a nechť pro každé $\beta \in (a,b)$ existuje $(R)\int_a^\beta f(x)\,\mathrm{d}x$ (*tedy* b *je jediný singulární bod integrace funkce* f *na* (a,b)). Potom definujeme **nevlastní integrál vzhledem k horní mezi** předpisem
$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\beta\to b^-} (R)\int_a^\beta f(x)\,\mathrm{d}x,$$
jestliže limita vpravo existuje.
- Nechť $-\infty \le a < b < +\infty$, a je singulární bod integrace funkce f na (a,b) a nechť pro každé $\alpha \in (a,b)$ existuje $(R)\int_\alpha^b f(x)\,\mathrm{d}x$ (*tedy* a *je jediný singulární bod integrace funkce* f *na* (a,b)). Potom definujeme **nevlastní integrál vzhledem k dolní mezi** předpisem
$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\alpha\to a^+} (R)\int_\alpha^b f(x)\,\mathrm{d}x,$$
jestliže limita vpravo existuje.
- Jestliže daná limita existuje a je konečná, říkáme, že integrál **konverguje**, je-li rovna $+\infty$ $(-\infty)$, říkáme, že integrál **diverguje k** $+\infty$ $(-\infty)$.

Poznámka: Je-li funkce f spojitá na $\langle a,\, b)$ resp. $(a,\, b\rangle$ a F je primitivní funkce k funkci f na (a,b), pak podle Věty 8.9 (Newton-Leibnitzova formule) můžeme díky spojitosti funkce F na (a,b) psát

$$\underline{\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x} = \lim_{\beta\to b^-} [\,F(x)\,]_a^\beta = \lim_{\beta\to b^-} (\underbrace{F(\beta-)}_{F(\beta)} - F(a+)) =$$
$$= \lim_{\beta\to b^-} F(\beta) - F(a+) = F(b-) - F(a+) = \underline{[\,F(x)\,]_a^b}$$

resp.

$$\underline{\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x} = \lim_{\alpha\to a^+} [\,F(x)\,]_\alpha^b = \lim_{\alpha\to a^+} (F(b-) - \underbrace{F(\alpha+)}_{F(\alpha)}) =$$
$$= F(b) - \lim_{\alpha\to a^+} F(\alpha) = F(b-) - F(a+) = \underline{[\,F(x)\,]_a^b}\,.$$

Integrál přitom v prvním případě existuje právě tehdy, když existuje $\lim_{\beta\to b^-} F(\beta)$, ve druhém, když existuje $\lim_{\alpha\to a^+} F(\alpha)$.

integrál nevlastní vlivem meze ... $a=-\infty$ nebo $b=+\infty$
integrál nevlastní vlivem funkce ... f není omezená na (a,b)

přípustné dělení intervalu (a,b) $(-\infty \le a < b \le +\infty)$ pro funkci f:

$\mathcal{D} = \{c_0, c_1, \ldots, c_n\}$, kde $a = c_0 < c_1 < \ldots < c_n = b$ a pro $i=1,\ldots,n$ je $\int_{c_{i-1}}^{c_i} f(x)\,\mathrm{d}x$ nevlastní (nejvýše) vzhledem k jedné mezi

Definice:

- Nechť $\mathcal{D} = \{c_0, c_1, \ldots, c_n\}$ je přípustné dělení intervalu (a,b) pro funkci f. Pak definujeme
$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{i=1}^{n} \int_{c_{i-1}}^{c_i} f(x)\,\mathrm{d}x,$$
jestliže všechny integrály vpravo existují a je definován jejich součet (*tj. nejsou mezi nimi jak integrály divergující k* $+\infty$, *tak i integrály divergující k* $-\infty$).
- Jestliže součet existuje a je konečný, říkáme, že integrál **konverguje**, je-li součet roven $+\infty$ $(-\infty)$, říkáme, že integrál **diverguje k** $+\infty$ $(-\infty)$.
- Jestliže alespoň jeden z bodů $c_0, \ldots, c_n$ je singulárním bodem integrace funkce f na (a,b), mluvíme o **nevlastním integrálu**, jinak o **integrálu vlastním**.

Poznámky: a) Existence a hodnota $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ nezávisí na volbě dělení $\mathcal{D}$.

b) Jestliže integrál existuje podle předchozí definice a je vlastní, existuje i jako Riemannův a je mu roven.

c) Pro $a > b$ opět pokládáme $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x.$

d) Speciálně, jestliže je funkce f spojitá na intervalu (a,b) a má na tomto intervalu primitivní funkci F (singulárními body integrace funkce f na (a,b) jsou tedy nejvýše body a, b), pak pro každé $c \in (a,b)$ je $\mathcal{D} = \{a, c, b\}$ přípustné dělení intervalu (a,b) pro funkci f a platí
$$\underline{\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x} = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x = \big[\,F(x)\,\big]_a^c + \big[\,F(x)\,\big]_c^b =$$
$$= \Big(\underbrace{F(c-)}_{F(c)} - F(a+)\Big) + \Big(F(b-) - \underbrace{F(c+)}_{F(c)}\Big) = F(b-) - F(a+) = \underline{\big[\,F(x)\,\big]_a^b}\,.$$
Výraz vpravo je přitom zřejmě definován právě tehdy, když je definován součet $\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$, tj. když existuje integrál $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

Příklad 9.1: a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$ – integrál nevlastní vlivem (obou) mezí; konverguje $(=\pi)$

b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$ – integrál nevlastní vlivem funkce; diverguje k $+\infty$

c) $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{x}{1-x^2}\,\mathrm{d}x$ – integrál nevlastní vlivem funkce; neexistuje (protože tu není definován součet $\int_{-1}^0 + \int_0^1$)

d) $\displaystyle\int_0^{\infty} \cos x\,\mathrm{d}x$ – integrál nevlastní vlivem meze; neexistuje (protože tu neexistuje limita primitivní funkce v $+\infty$)

e) $\displaystyle\int_0^1 \sin\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x$ – integrál nevlastní vlivem funkce; neexistuje
(protože tu neexistuje limita zprava primitivní funkce $\cos\frac{1}{x}$ v nule)

Příklad 9.2: Vypočtěte $\displaystyle\int_2^{\infty} \frac{2}{x^2-1}\,\mathrm{d}x.$

Řešení: Integrál je nevlastní vlivem meze. Máme
$$\int_2^{\infty} \frac{2}{x^2-1}\,\mathrm{d}x = \int_2^{\infty} \Big(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}\Big)\,\mathrm{d}x = \big[\,\ln|x-1| - \ln|x+1|\,\big]_2^{\infty} =$$
$$= \Big[\,\ln\Big|\frac{x-1}{x+1}\Big|\,\Big]_2^{\infty} = 0 - \ln\frac{1}{3} = \ln 3.$$

Všimněte si na tomto příkladu, že pro nevlastní integrály nemusí platit rovnost $\int_a^b (f-g) = \int_a^b f - \int_a^b g$, protože rozdíl vpravo nemusí být definován. (Zde např. máme $\int_2^{\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x-1} = \big[\,\ln|x-1|\,\big]_2^{\infty} = +\infty = \big[\,\ln|x+1|\,\big]_2^{\infty} = \int_2^{\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x+1}$.)

Příklad 9.3: Vypočtěte integrály (integrandy budeme značit f):

a) $\displaystyle\int_{-1}^{8} \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\,\mathrm{d}x$ ... singulárním bodem integrace funkce f na intervalu $(-1,8)$ je bod 0

$$\int_{-1}^{8} \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{0} \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{8} \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\,\mathrm{d}x = \Big[\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}\Big]_{-1}^{0} + \Big[\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}\Big]_{0}^{8} = \Big(0-\frac{3}{2}\Big) + \Big(6-0\Big) = \frac{9}{2}$$

b) $\displaystyle\int_{1}^{4} \frac{1}{(x-2)^2}\,\mathrm{d}x$ ... singulárním bodem integrace funkce f na intervalu $(1,4)$ je bod 2

$$\int_{1}^{4} \frac{1}{(x-2)^2}\,\mathrm{d}x = \int_{1}^{2} \frac{1}{(x-2)^2}\,\mathrm{d}x + \int_{2}^{4} \frac{1}{(x-2)^2}\,\mathrm{d}x = \Big[\frac{-1}{x-2}\Big]_{1}^{2} + \Big[\frac{-1}{x-2}\Big]_{2}^{4} = \big(+\infty-1\big) + \Big(-\frac{1}{2}-(-\infty)\Big) = +\infty$$

c) $\displaystyle\int_{-1}^{2} \frac{1}{x-1}\,\mathrm{d}x$ ... singulárním bodem integrace funkce f na intervalu $(-1,2)$ je bod 1

$$\int_{-1}^{2} \frac{1}{x-1}\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} \frac{1}{x-1}\,\mathrm{d}x + \int_{1}^{2} \frac{1}{x-1}\,\mathrm{d}x = \big[\ln|x-1|\big]_{-1}^{1} + \big[\ln|x-1|\big]_{1}^{2} = \langle\!\langle\big(-\infty-\ln 2\big) + \big(\ln 1-(-\infty)\big)\rangle\!\rangle \text{ neexistuje}$$

d) $\displaystyle\int_{-1}^{2} \frac{1}{|x-1|}\,\mathrm{d}x$ ... singulárním bodem integrace funkce f na intervalu $(-1,2)$ je bod 1

$$\int_{-1}^{2} \frac{1}{|x-1|}\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} \frac{-1}{x-1}\,\mathrm{d}x + \int_{1}^{2} \frac{1}{x-1}\,\mathrm{d}x = \big[-\ln|x-1|\big]_{-1}^{1} + \big[\ln|x-1|\big]_{1}^{2} = \langle\!\langle\big(+\infty-(-\ln 2)\big) + \big(\ln 1-(-\infty)\big)\rangle\!\rangle = +\infty$$

Poznámka: K výpočtu integrálů, které nemají singulární bod uvnitř integračního oboru, můžeme použít metodu substituce. Při použití metody substituce se někdy může stát, že přejdeme od integrálu nevlastního k integrálu vlastnímu nebo naopak. Při použití integrace per partes přímo pro nevlastní integrál musíme být opatrní. Může se stát, že i když integrál konverguje, dojdeme při výpočtu k rozdílu limit, který není definovaný.

Příklad 9.4: Vypočtěte $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\sin^2 x}\,\mathrm{d}x.$

Řešení: Integrál je vlastní, při použití metody substituce ale přejdeme k nevlastnímu integrálu. Máme totiž

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\sin^2 x}\,\mathrm{d}x = \left|\begin{array}{rcl} \operatorname{tg} x & = & t \\ x & = & \operatorname{arctg} t \\ \mathrm{d}x & = & \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \\ -\frac{\pi}{2} & \rightsquigarrow & -\infty \\ \frac{\pi}{2} & \rightsquigarrow & +\infty \end{array}\right| = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+\frac{t^2}{1+t^2}} \cdot \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+2t^2}\,\mathrm{d}t =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+(\sqrt{2}\,t)^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\sqrt{2}}\,\big[\operatorname{arctg}\sqrt{2}\,t\big]_{-\infty}^{+\infty} = \frac{1}{\sqrt{2}}\,\Big(\frac{\pi}{2}-\Big(-\frac{\pi}{2}\Big)\Big) = \frac{\sqrt{2}}{2}\pi.$$

Nyní už můžeme dopočítat Příklad 8.11. Z předchozího pro něj dostáváme

$$\int_{-2\pi}^{2\pi} \frac{1}{1+\sin^2 x}\,\mathrm{d}x = 4\cdot\Big(\frac{\sqrt{2}}{2}\pi\Big) = 2\sqrt{2}\pi.$$

Příklad 9.5: Vypočtěte integrály (integrandy budeme opět značit f):

a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2-2x+5}\,\mathrm{d}x$ ... singulárními body integrace funkce f na intervalu $(-\infty,\infty)$ jsou krajní body intervalu

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2-2x+5}\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x-1)^2+4}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\big(\frac{x-1}{2}\big)^2+1}\,\mathrm{d}x = \left|\begin{array}{rcl} \frac{x-1}{2} & = & t \\ \frac{1}{2}\,\mathrm{d}x & = & \mathrm{d}t \\ -\infty & \rightsquigarrow & -\infty \\ +\infty & \rightsquigarrow & +\infty \end{array}\right| =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{t^2+1}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\big[\operatorname{arctg} t\big]_{-\infty}^{\infty} = \frac{1}{2}\Big(\frac{\pi}{2}-\Big(\frac{\pi}{2}\Big)\Big) = \frac{\pi}{2}$$

b) $\displaystyle\int_{-1}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg}^2 x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$ ... singulárními body integrace funkce f na intervalu $(-1,\infty)$ je bod ∞

$$\int_{-1}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg}^2 x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \left|\begin{array}{rcl} \operatorname{arctg} x & = & t \\ \frac{1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x & = & \mathrm{d}t \\ -1 & \rightsquigarrow & -\frac{\pi}{4} \\ +\infty & \rightsquigarrow & +\frac{\pi}{2} \end{array}\right| = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} t^2\,\mathrm{d}t = \Big[\frac{t^3}{3}\Big]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^3}{3}\Big(\frac{1}{8}-\Big(-\frac{1}{64}\Big)\Big) = \frac{\pi^3}{64}$$

Příklad 9.6: a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} (x+1)\,\mathrm{e}^{3x}\ \mathrm{d}x \ = \ \frac{2}{9}$, b) $\displaystyle\int_{0}^{\infty} x\,\mathrm{e}^{x}\ \mathrm{d}x \ = \ +\infty$.

Věta 9.1 (srovnávací kritérium):

a) Nechť $|f| \le g$ na (a,b), f je na (a,b) po částech spojitá a $\displaystyle\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$ konverguje. Pak konverguje také $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

b) Nechť $f \le g$ $(g \le h)$ na (a,b), g je na (a,b) po částech spojitá a $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = +\infty$ $\Big(\displaystyle\int_a^b h(x)\,\mathrm{d}x = -\infty\Big)$. Pak $\displaystyle\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x = +\infty$ $\Big(\displaystyle\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x = -\infty\Big)$.

Příklad 9.7: a) $\displaystyle\int_0^1 x^{\alpha}\,\mathrm{d}x$ konverguje právě tehdy, když $\alpha > -1$,

b) $\displaystyle\int_1^{\infty} x^{\alpha}\,\mathrm{d}x$ konverguje právě tehdy, když $\alpha < -1$,

c) pro $c \in \mathbb{R}$ konverguje $\displaystyle\int_c^{c+1} (x-c)^{\alpha}\,\mathrm{d}x$ právě tehdy, když $\alpha > -1$.

Příklad 9.8: $\displaystyle\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{\alpha x}\,\mathrm{d}x$ konverguje právě tehdy, když $\alpha < 0$.

(Výsledky Příkladů 9.6 a 9.7 často využíváme ve srovnávacím kritériu.)

Příklad 9.9: Mějme polynomy P a Q, kde polynom Q nemá kořen v intervalu $\langle a,\,\infty)$. Z kapitoly o limitách víme, že se pro $x \to \infty$ podíl $\frac{P}{Q}$ chová jako funkce $B\,x^{\mathrm{st}P - \mathrm{st}Q}$, kde B je podíl koeficientů u nejvyšších mocnin v polynomech P a Q. Na základě výsledku Příkladu 9.7,b) můžeme usuzovat, že by integrál $\int_a^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}\,\mathrm{d}x$ měl konvergovat právě tehdy, když $\mathrm{st}P - \mathrm{st}Q < -1$, neboli pokud stupeň jmenovatele je alespoň o dvě větší než stupeň čitatele.
Podívejme se, že to opravdu platí. Označme $k = \mathrm{st}Q - \mathrm{st}P$. Pak $\lim_{x\to\infty} \frac{P(x)x^k}{Q(x)} = A \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, kde A je podíl koeficientů u nejvyšších mocnin polynomů P a Q. Předpokládejme, že $A > 0$ (pro $A < 0$ by byl postup obdobný).
Z definice limity existuje pro $\varepsilon = \frac{A}{2}$ číslo $b \ge a$, $b > 0$, takové, že pro každé $x > b$ platí $\frac{1}{2}A \le \frac{P(x)x^k}{Q(x)} \le \frac{3}{2}A$, tj. $\frac{A}{2}\frac{1}{x^k} \le \frac{P(x)}{Q(x)} \le \frac{3A}{2}\frac{1}{x^k}$. Dolní odhad podílu $\frac{P(x)}{Q(x)}$ a druhá část srovnávacího kritéria nám spolu s Příkladem 9.7,b) říkají, že pro $k \le 1$ (kdy $-k \ge -1$) integrál $\int_b^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}\,\mathrm{d}x$ diverguje. Na druhou stranu, protože $0 < \frac{A}{2}\frac{1}{x^k}$, máme pro $\frac{P(x)}{Q(x)}$ na intervalu $\langle b,\,\infty)$ odhad $\left|\frac{P(x)}{Q(x)}\right| \le \frac{3A}{2}\frac{1}{x^k}$, a tedy podle první části srovnávacího kritéria a Příkladu 9.7,b) pro $k > 1$ integrál $\int_b^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}\,\mathrm{d}x$ konverguje. Tím jsme dostali, že integrál $\int_b^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}\,\mathrm{d}x$ konverguje právě tehdy, když $k > 1$.
Potřebujeme se ještě podívat, jak je to s konvergencí integrálu $\int_a^{b} \frac{P(x)}{Q(x)}\,\mathrm{d}x$. Protože je ale na intervalu $\langle a,\,b\rangle$ funkce $\frac{P}{Q}$ spojitá, a tedy i omezená, je tento integrál vlastní, a tím také konečný, bez ohledu na to, jaké jsou stupně polynomů P a Q. Podmínky pro konvergenci integrálu funkce $\frac{P}{Q}$ jsou tak na intervalu $\langle a,\,\infty)$ stejné jako na integvalu $\langle b,\,\infty)$. Zjistili jsme tak, že pokud polynom Q nemá kořen v intervalu $\langle a,\,\infty)$,

$$\int_a^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}\,\mathrm{d}x \quad \text{konverguje právě tehdy, když} \quad \mathrm{st}\,Q \ \ge \ \mathrm{st}\,P \,+\, 2.$$

Příklad 9.10: Vyšetřete konvergenci integrálů a) $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{1+x^2}}$, b) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{1+x^2}}$.

Řešení: a) Protože na intervalu $\langle 1,\,\infty)$ platí $\left|\dfrac{1}{x\sqrt{1+x^2}}\right| = \dfrac{1}{x\sqrt{1+x^2}} \le \dfrac{1}{x\sqrt{x^2}} = \dfrac{1}{x^2}$ a podle Příkladu 9.7b) integrál $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x$ konverguje, konverguje podle Věty 9.1a) i integrál $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{1+x^2}}$.

b) Na intervalu $(0,\,1\rangle$ máme $\dfrac{1}{x\sqrt{1+x^2}} \ge \dfrac{1}{x\sqrt{1+1}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}\,x}$. Podle Příkladu 9.7a) integrál $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$ diverguje k $+\infty$, takže také integrál $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{2}\,x}\,\mathrm{d}x$ diverguje k $+\infty$, a tím podle Věty 9.1b) k $+\infty$ diverguje i integrál $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{1+x^2}}$.

Příklad 9.11: a) $\displaystyle\int_2^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{x^2-1}\,\mathrm{d}x$ konverguje, b) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$ diverguje k $+\infty$.