KAPITOLA 8: Riemannův integrál

určitý integrál

motivace: výpočet obsahu plochy pod grafem funkce

8.1 Úvod

(nejdříve jen pro $a < b$)

Definice:

řekneme, že množina $\mathcal{D} \subset \langle a,\, b\rangle$ je **dělením intervalu** $\langle a,\, b\rangle$, jestliže je konečná a $a,\ b \in \mathcal{D}$.

Prvky dělení $\mathcal{D} = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ intervalu $\langle a,\, b\rangle$ číslujeme tak, že platí

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b.$$

Pro funkci f omezenou na $\langle a,\, b\rangle$ označíme

$$m_{i,\mathcal{D}} = \inf_{x\in\langle x_{i-1},\, x_i\rangle} f(x)\,, \qquad\qquad M_{i,\mathcal{D}} = \sup_{x\in\langle x_{i-1},\, x_i\rangle} f(x).$$

Definice:

Je-li f funkce omezená na $\langle a,\, b\rangle$ a $\mathcal{D} = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ dělení intervalu $\langle a,\, b\rangle$, pak čísla

$$\underline{S}(f,\mathcal{D}) = \sum_{i=1}^{n} m_{i,\mathcal{D}} \cdot (x_i - x_{i-1}) \qquad \text{a} \qquad \overline{S}(f,\mathcal{D}) = \sum_{i=1}^{n} M_{i,\mathcal{D}} \cdot (x_i - x_{i-1}),$$

nazýváme **dolním** a **horním Riemannovým** (integrálním) **součtem** funkce f na $\langle a,\, b\rangle$.

Věta 8.1:

Pro každé dělení $\mathcal{D}$ intervalu $\langle a,\, b\rangle$ platí

$$(b-a)\cdot \inf_{x\in\langle a,\, b\rangle} f(x) \ \le\ \underline{S}(f,\mathcal{D}) \ \le\ \overline{S}(f,\mathcal{D}) \ \le (b-a)\cdot \sup_{x\in\langle a,\, b\rangle} f(x).$$

Důkaz: Zřejmě platí $\underline{S}(f,\mathcal{D}) \ge \sum_{i=1}^{n} \inf_{x\in\langle a,\, b\rangle} f(x)\ (x_i - x_{i-1}) = \inf_{x\in\langle a,\, b\rangle} f(x) \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) = \inf_{x\in\langle a,\, b\rangle} f(x)\cdot(b-a)$.
Podobně dostáváme i poslední nerovnost. Nerovnost $\underline{S}(f,\mathcal{D}) \ \le\ \overline{S}(f,\mathcal{D})$ vyplývá přímo z definice.

Definice:

Dělení $\mathcal{D}'$ intervalu $\langle a,\, b\rangle$ nazýváme **zjemněním** dělení $\mathcal{D}$ intervalu $\langle a,\, b\rangle$, je-li $\mathcal{D} \subset \mathcal{D}'$.

Poznámka: Je-li $\mathcal{D} = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ dělení intervalu $\langle a,\, b\rangle$ a $\mathcal{D}_1 = \mathcal{D} \cup \{\tilde{x}\}$, kde $\tilde{x} \notin \mathcal{D}$, pak zřejmě platí

$$\underline{S}(f,\mathcal{D}_1) \ \ge\ \underline{S}(f,\mathcal{D}) \qquad \text{a} \qquad \overline{S}(f,\mathcal{D}_1) \ \le\ \overline{S}(f,\mathcal{D}).$$

Uvědomíme-li si nyní, že jakékoliv zjemnění $\mathcal{D}'$ dělení $\mathcal{D}$ lze získat z dělení $\mathcal{D}$ postupným přidáváním jednoho bodu, dostaneme, že i pro toto obecné zjemnění platí

$$\underline{S}(f,\mathcal{D}') \ \ge\ \underline{S}(f,\mathcal{D}) \qquad \text{a} \qquad \overline{S}(f,\mathcal{D}') \ \le\ \overline{S}(f,\mathcal{D}).$$

Věta 8.2:

Jsou-li $\mathcal{D}_1,\ \mathcal{D}_2$ dělení intervalu $\langle a,\, b\rangle$, pak

$$\underline{S}(f,\mathcal{D}_1) \le \overline{S}(f,\mathcal{D}_2).$$

Důkaz: Dělení $\mathcal{D}' = \mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2$ je zjemněním obou dělení $\mathcal{D}_1$ a $\mathcal{D}_2$. Tedy $\underline{S}(f,\mathcal{D}_1) \le \underline{S}(f,\mathcal{D}') \le \overline{S}(f,\mathcal{D}') \le \overline{S}(f,\mathcal{D}_2)$.

Definice:

Je-li

$$\sup\{\underline{S}(f,\mathcal{D}) \,|\, \mathcal{D} \text{ dělení } \langle a,\, b\rangle\} = \inf\{\overline{S}(f,\mathcal{D}) \,|\, \mathcal{D} \text{ dělení } \langle a,\, b\rangle\} = I,$$

pak číslo I nazýváme **Riemannovým** (určitým) **integrálem** funkce f na intervalu $\langle a,\, b\rangle$ a píšeme

$$I = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \qquad \Big(\text{případně} \quad {}_{(R)}\!\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{nebo stručně jen} \quad \int_a^b f \;\Big).$$

(používané názvy: a ... dolní mez; b ... horní mez; f ... integrand)

Poznámka: Riemannův integrál je definován jen pro funkce omezené - pro jiné funkce totiž není definován horní a dolní Riemannův součet.

Poznámka: Jak uvidíme ve Větě 8.6, nemá na existenci a hodnotu Riemannova integrálu vliv, změníme-li hodnotu integrované funkce v konečně mnoha bodech. Díky tomu lze připustit, aby integrovaná funkce nebyla v konečně mnoha bodech intervalu definována. Mohou totiž nastat jen dvě možnosti:

a) Ať dodefinujeme funkci v bodech, kde nebyla definována, jakýmkoliv způsobem, integrál existovat bude a bude pokaždé stejný.

b) Ať dodefinujeme funkci v bodech, kde nebyla definována, jakýmkoliv způsobem, integrál existovat nebude.

Poznámka: Pro každé dělení $\mathcal{D}$ intervalu $\langle a,\, b\rangle$ zřejmě platí

$$\underline{S}(f,\mathcal{D}) \;\le\; \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \;\le\; \overline{S}(f,\mathcal{D}).$$

(Samozřejmě za předpokladu, že $\int_a^b f$ existuje.)

Poznámka: Riemannův integrál lze zavést také pomocí **Riemannových integrálních součtů** (už ne horních a dolních). K tomu kromě dělení $\mathcal{D} = \{x_0, \ldots, x_n\}$ uvažujeme ještě množinu $\tau = \{t_1, \ldots, t_n\}$, takovou, že $t_i \in \langle x_{i-1},\, x_i\rangle$, a položíme

$$S(f,\mathcal{D},\tau) \;=\; \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\,(x_i - x_{i-1}).$$

Integrál pak definujeme jako limitu těchto součtů, pokud půjde norma dělení, tj. maximální délka intervalu vzniklého dělením, k nule. Obě definice Riemannova integrálu jsou ekvivalentní, tedy existuje-li integrál podle jedné z definic, existuje i podle druhé a jeho hodnoty jsou v obou případech stejné. Všimněte si, že pro f spojitou odpovídá dolní součet tomu, že za body t_i vybereme body minima funkce f na intervalech $\langle x_{i-1},\, x_i\rangle$, a pro horní součet analogicky volíme body maxima.

Věta 8.3:

Integrál $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ existuje a je roven A právě tehdy, když existuje posloupnost $(\mathcal{D}_n)_{n=1}^{\infty}$ dělení intervalu $\langle a,\, b\rangle$ taková, že

$$\lim_{n\to\infty} \underline{S}(f,\mathcal{D}_n) = \lim_{n\to\infty} \overline{S}(f,\mathcal{D}_n) = A.$$

Poznámka: Pro $(\mathcal{D}_n)_{n=1}^{\infty}$ z Věty 8.3 zřejmě platí

$$\lim_{n\to\infty} \big(\overline{S}(f,\mathcal{D}_n) - \underline{S}(f,\mathcal{D}_n) \big) = 0. \tag{1}$$

I když k tomu, aby měly dvě posloupnosti stejnou limitu, obecně nestačí, když jejich rozdíl má limitu nulovou (uvažujme například posloupnosti $a_n = b_n = (-1)^n$, které limitu nemají, jejich rozdíl je ale nulová posloupnost s limitou nula), z vlastností dolních a horních Riemannových součtů se dá ukázat, že pokud najdeme posloupnost dělení $(\mathcal{D}_n)_{n=1}^{\infty}$ splňující (1), pak limity jim odpovídajících dolních a horních Riemannových součtů existují a jsou si rovny. V takovém případě tedy z Věty 8.3 víme, že Riemannův integrál existuje. Jen čemu se integrál rovná, nám limita (1) neříká.

Příklad 8.1: Pro $k \in \mathbb{R}$ pevné je $\displaystyle\int_a^b k\,\mathrm{d}x = k\cdot(b-a).$

Řešení: Pro libovolné dělení $\mathcal{D}=\{x_0,x_1,\dots,x_n\}$ zřejmě platí

$$\underline{S}(k,\mathcal{D}) \quad = \quad \underbrace{\sum_{i=1}^{n} k(x_i-x_{i-1})}_{k\sum_{i=1}^{n}(x_i-x_{i-1})=k(b-a)} \quad = \quad \overline{S}(f,\mathcal{D})\ .$$

Příklad 8.2: Ukažte, že $\displaystyle\int_0^1 x\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}$.

Řešení: Nechť $n\in\mathbb{N}$. Pak pro posloupnost dělení $\mathcal{D}_n=\{0,\frac{1}{n},\dots,\frac{n-1}{n},1\}$ (tj. $x_i=\frac{i}{n}$) máme

$$\overline{S}(f,\mathcal{D}_n)=\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{n}\cdot\frac{1}{n}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{n}=\frac{1}{n^2}\cdot\frac{n(n+1)}{2}=\frac{1}{2}\,(1+\frac{1}{n})\longrightarrow\frac{1}{2}\,,$$

$$\underline{S}(f,\mathcal{D}_n)=\sum_{i=1}^{n}\frac{i-1}{n}\cdot\frac{1}{n}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{i-1}{n}=\frac{1}{n^2}\cdot\frac{(n-1)n}{2}=\frac{1}{2}\,(1-\frac{1}{n})\longrightarrow\frac{1}{2}\,.$$

Podle Věty 8.3 tedy uvedená rovnost platí.

Příklad 8.3: Integrál $\displaystyle\int_a^b d(x)\,\mathrm{d}x$, kde $d(x)$ je Dirichletova funkce (viz konec odstavce 2.1), neexistuje.

Řešení: Je-li $\mathcal{D}$ libovolné dělení, pak zřejmě platí $\underline{S}(f,\mathcal{D})=0$ a $\overline{S}(f,\mathcal{D}_n)=1\cdot(b-a)$. Tedy

$$\sup_{\mathcal{D}}\ \underline{S}(d,\mathcal{D}) \ = \ 0 \ \neq \ b-a \ = \ \inf_{\mathcal{D}}\ \overline{S}(d,\mathcal{D}).$$

Příklad 8.4: Ukažte, že $\displaystyle\int_0^1 \operatorname{sgn} x\,\mathrm{d}x=1$.

Řešení: Nechť $n\in\mathbb{N}$. Pak pro posloupnost dělení $\mathcal{D}_n=\{0,\frac{1}{n},1\}$ máme

$$\overline{S}(f,\mathcal{D}_n)=1\cdot\frac{1}{n}+1\cdot\frac{n-1}{n}=1,$$

$$\underline{S}(f,\mathcal{D}_n)=0\cdot\frac{1}{n}+1\cdot\frac{n-1}{n}\longrightarrow 1.$$

Podle Věty 8.3 tedy uvedená rovnost platí.

Věta 8.4:

Je-li funkce f na intervalu $\langle a,\,b\rangle$ spojitá nebo monotonní, pak existuje $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

Důkaz pro f monotonní, např. neklesající: Použijeme Větu 8.3 s děleními $\mathcal{D}_n=\{a,a+\frac{b-a}{n},\ a+2\frac{b-a}{n},\dots,a+(n-1)\frac{b-a}{n},b\}$, pro která máme

$$\overline{S}(f,\mathcal{D}_n)-\underline{S}(f,\mathcal{D}_n) \ = \ \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\frac{b-a}{n}-\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)\frac{b-a}{n} \ =$$

$$= \ \frac{b-a}{n}\,\big(f(x_1)+\ldots+f(x_n)-f(x_0)-\ldots-f(x_{n-1})\big) \ = \ \frac{b-a}{n}\,\big(f(b)-f(a)\big)\longrightarrow 0 \quad \text{pro} \ \ n\to\infty.$$

(Dělením, která jsme použili, se říká **ekvidistantní** nebo též **rovnoměrná**.)

8.2 Vlastnosti

Věta 8.5 (aditivita integrálu vzhledem k integračnímu oboru)

Nechť $a<b<c$. Pak $\displaystyle\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x$ existuje, právě když existují $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ a $\displaystyle\int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x$, a v tomto případě platí

$$\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x+\int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x$$

Definice:

Nechť $a<b$ a existuje $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$. Pak definujeme

$$\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x=-\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Dále definujeme

$$\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x=0.$$

Poznámka: Předpoklad $a < b < c$ ve Větě 8.5 lze nahradit předpokladem existence integrálu $\displaystyle\int_\alpha^\beta f(x)\,\mathrm{d}x$, kde $\alpha = \min\{a, b, c\}$ a $\beta = \max\{a, b, c\}$.

Věta 8.6:

Nechť existuje $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$. Jestliže se g liší od f na $\langle a,\, b\rangle$ v nejvýše konečně mnoha bodech, pak existuje $\displaystyle\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$ a platí

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Důkaz: Nechť $c_1 < c_2 < \ldots < c_k$ jsou právě ty body z intervalu (a, b), ve kterých $f \neq g$. Pak opakovaným použitím Věty 11.5 dostaneme

$$\int_a^b f = \int_a^{c_1} f + \int_{c_1}^b f = \ldots = \int_a^{c_1} f + \int_{c_1}^{c_2} f + \ldots + \int_{c_k}^b f\,.$$

Položme $c_0 = a$, $c_{k+1} = b$ a $h = f - g$. Pro $i \in \{1, \ldots, k+1\}$, $n \in \mathbb{N}$ uvažujme posloupnost dělení

$$\mathcal{D}_{i,n} = \{c_{i-1}, c_{i-1} + \frac{1}{3}\cdot\frac{c_i - c_{i-1}}{n}, c_i - \frac{1}{3}\cdot\frac{c_i - c_{i-1}}{n}, c_i\}$$

intervalu $\langle x_{i-1},\, x_i\rangle$. Předpokládejme například, že $h(c_{i-1}) > 0$, $h(c_i) < 0$ (jinak bychom postupovali podobně). Pak protože $h(x) = 0$ na (c_{i-1}, c_i), máme

$$\underline{S}(h, \mathcal{D}_{i,n}) = 0\cdot\frac{c_i - c_{i-1}}{3n} + 0\cdot\frac{(3n-1)(c_i - c_{i-1})}{3n} + h(c_i)\cdot\frac{c_i - c_{i-1}}{3n} = h(c_i)\cdot\frac{c_i - c_{i-1}}{3n} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

$$\overline{S}(h, \mathcal{D}_{i,n}) = h(c_{i-1})\cdot\frac{c_i - c_{i-1}}{3n} + 0\cdot\frac{(3n-1)(c_i - c_{i-1})}{3n} + 0\cdot\frac{c_i - c_{i-1}}{3n} = h(c_{i-1})\cdot\frac{c_i - c_{i-1}}{3n} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Protože posloupnost dolních součtů a posloupnost horních součtů mají stejnou limitu a ta je rovna nule, je podle Věty 8.3 $\int_{c_{i-1}}^{c_i} h(x)\,\mathrm{d}x = 0$. Tedy podle Věty 8.5 o aditivitě integrálu vzhledem k integračnímu oboru máme

$$\int_a^b h(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{i=1}^{k+1}\int_{c_{i-1}}^{c_i} h(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

Nyní už stačí jen využít toho, že integrál z rozdílu je rozdíl integrálů (viz části a), b) následující Věty 8.7), a dostaneme

$$\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b (f(x) - h(x))\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b h(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Poznámka: Na základě vět 8.4, 8.5 a 8.6 stačí k existenci $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$, když je funkce f na $\langle a,\, b\rangle$ po částech spojitá (tj. má tam jen konečně mnoho bodů nespojitosti a v nich má konečné jednostranné limity).

Věta 8.7:

Nechť existují $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$, $\displaystyle\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$ a $c \in \mathbb{R}$. Potom

a) $\displaystyle\int_a^b (f+g)(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$,

b) $\displaystyle\int_a^b (c\cdot f)(x)\,\mathrm{d}x = c\cdot\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

Je-li navíc $a < b$, pak

c) je-li $f \geq 0$ na $\langle a,\, b\rangle$, pak $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geq 0$,

Důkaz: Zřejmé – sčítáme nezáporná čísla.

d) je-li $f \leq g$ na $\langle a,\, b\rangle$, pak $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$ (tzv. monotonie integrálu),

Důkaz: $g - f \geq 0$ na $\langle a,\, b\rangle$, tedy podle a), b), c) je $\int_a^b g - \int_a^b f \overset{\text{b)}}{=} \int_a^b g + \int_a^b(-f) \overset{\text{a)}}{=} \int_a^b (g-f) \overset{\text{c)}}{\geq} 0$.

e) existuje $\displaystyle\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$ a platí $\displaystyle\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$,

Důkaz odhadu: $-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$ pro každé $x \in \langle a,\, b\rangle$, tedy $-\int_a^b |f| \overset{\text{b)}}{=} \int_a^b(-|f|) \overset{\text{d)}}{\leq} \int_a^b f \overset{\text{d)}}{\leq} \int_a^b |f|$.

f) je-li $|f| \leq M$ na $\langle a,\, b\rangle$, $A,\ B \in \langle a,\, b\rangle$, pak $\displaystyle\left|\int_A^B f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leq M\,|B - A|$.

Důkaz: 1) pro $\underline{A = B}$ zřejmé; 2) pro $\underline{A < B}$: $|\int_A^B f| \overset{\text{e)}}{\leq} \int_A^B |f| \overset{\text{d)}}{\leq} \int_A^B M = M(B-A) = M|B-A|$;
3) pro $\underline{B < A}$: $|\int_A^B f| = |-\int_B^A f| = |\int_B^A f| \overset{2)}{\leq} M|A-B| = M|B-A|$.

Věta 8.8 (integrál jako funkce horní meze):

Nechť existuje $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ a $c \in \langle a, b\rangle$. Pak pro funkci

$$F_c(x) = \int_c^x f(t)\,\mathrm{d}t, \quad x \in \langle a, b\rangle$$

platí:

a) F_c je spojitá na $\langle a, b\rangle$, $F_c(c) = 0$.

b) Je-li f spojitá v $x_0 \in \langle a, b\rangle$, pak $F_c'(x_0) = f(x_0)$.

(Existuje-li jen jednostranná limita funkce f v x_0, pak je rovna odpovídající jednostranné derivaci funkce F v x_0.)

Poznámka: Z Věty 8.8 vyplývá, že funkce spojitá na intervalu I má na I primitivní funkci (viz Větu 7.2). Je-li totiž $c \in I$, pak $F_c(x) = \displaystyle\int_c^x f(t)\,\mathrm{d}t$ je primitivní funkcí k f na I. Navíc pro libovolnou primitivní funkci F k f na I platí

$$F(x) = F_c(x) + F(c) = \int_c^x f(t)\,\mathrm{d}t + F(c).$$

Příklad 8.5: Pro funkci $f(x) = \displaystyle\int_0^x \left(\mathrm{e}^{t^2} - \mathrm{e}^4\right)\,\mathrm{d}t$ vyšetřete body lokálních extrémů, intervaly monotonie, konvexity a konkávity.

Věta 8.9 (Newton-Leibnizova formule):

Jestliže existuje $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ a F je primitivní funkce k f na (a,b), pak platí

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b-) - F(a+) \ \left(= \lim_{x\to b^-} F(x) - \lim_{x\to a^+} F(x)\right).$$

Píšeme:

$$F(b-) \ - \ F(a+) \ = \ [\ F(x)\ ]_a^b\,.$$

Poznámka: Na volbě primitivní funkce ve Větě 8.9 nezáleží. Jsou-li totiž F_1, F_2 primitivní funkce k f na (a,b), pak existuje $\tilde{c} \in \mathbb{R}$ tak, že $F_2 = F_1 + \tilde{c}$ na (a,b), tedy

$$[\ F_2(x)\ ]_a^b \ = \ F_2(b-) \ - \ F_2(a+) \ = \ (F_1(b-) + \tilde{c}) \ - \ (F_1(a+) + \tilde{c}) \ = \ F_1(b-) \ - \ F_1(a+) \ = \ [\ F_1(x)\ ]_a^b.$$

Příklad 8.6: a) $\displaystyle\int_a^b k\,\mathrm{d}x \ = \ \big[k\,x\big]_a^b \ = \ k\,b - k\,a \ = \ k\,(b-a),$ b) $\displaystyle\int_a^b x\,\mathrm{d}x \ = \ \left[\frac{x^2}{2}\right]_a^b \ = \ \frac{b^2-a^2}{2}\,.$

Příklad 8.7: Pro funkci $f(x) = \dfrac{\sqrt{2}}{\cos x + 3}$ vypočtěte $\displaystyle\int_0^{2\pi} f(x)\,\mathrm{d}x.$

Řešení: Funkce f je spojitá na $\langle 0, 2\pi\rangle$, tedy integrál existuje. Podle Příkladu 7.23 je $G(x) = \operatorname{arctg}\dfrac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\sqrt{2}}$ primitivní funkce k f, ovšem pouze na intervalech $(\,(2k-1)\pi, (2k+1)\pi\,)$, $k \in \mathbb{Z}$, ne tedy na celém intervalu $(0, 2\pi)$. Musíme proto rozdělit náš integrál na dva:

$$\int_0^{2\pi} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_\pi^{2\pi} f(x)\,\mathrm{d}x = \left[\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\sqrt{2}}\right]_0^\pi + \left[\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\sqrt{2}}\right]_\pi^{2\pi} =$$

$$= \left(\frac{\pi}{2} - 0\right) + \left(0 - \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = \pi.$$

Je také možné použít funkci

$$F(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\sqrt{2}} & \text{na } (0,\pi) \\ \frac{\pi}{2} & \text{pro } x = \pi \\ \operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\sqrt{2}} + \pi & \text{na } (\pi, 2\pi) \end{cases}$$

která je, opět podle Příkladu 7.23, primitivní funkcí k f na celém intervalu $(0, 2\pi)$. Pak dostaneme

$$\int_0^{2\pi} f(x)\,\mathrm{d}x = F(2\pi-) - F(0+) = \lim_{x\to 2\pi^-}\left(\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\sqrt{2}} + \pi\right) - \lim_{x\to 0^+}\left(\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\sqrt{2}}\right) = \pi - 0 = \pi.$$

Poznámka: Už před výpočtem jsme si mohli všimnout, že funkce f je zdola omezená kladnou konstantou, tedy hledaný integrál musí být kladný. Konkrétněji máme $\dfrac{\sqrt{2}}{\cos x + 3} \geq \dfrac{\sqrt{2}}{4}$, tedy podle Věty 8.7 d) je

$$\int_0^{2\pi} f(x)\,\mathrm{d}x \geq \int_0^{2\pi} \frac{\sqrt{2}}{4}\,\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{2}}{4}\cdot 2\pi = \frac{\sqrt{2}}{2}\pi \overset{!!}{>} 0.$$

Přitom $G(2\pi-) - G(0+) = 0$, takže kdybychom zapomněli zkontrolovat, zda je G primitivní funkcí k f na celém intervalu $(0, 2\pi)$, mohli bychom takto odhalit chybu, které jsme se dopustili. Bohužel nám takováto kontrola nepomůže vždy. Přesto je dobré si ji udělat.

Poznámka - Newtonův integrál: Je-li F primitivní funkce k funkci f na intervalu (a, b) a existují-li limity $\lim_{x\to a^+} F(x)$, $\lim_{x\to b^-} F(x)$, pak definujeme **Newtonův integrál funkce** f **na** (a, b) předpisem

$$(N)\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \;=\; \lim_{x\to b^-} F(x) - \lim_{x\to a^+} F(x) \quad (\,=\, F(b-) - F(a+)\,)$$

(samozřejmě, jen pokud je rozdíl $F(b-) - F(a+)$ definován). Existují-li Riemannův i Newtonův integrál, pak si jsou rovny.

8.3 Integrace per partes a metoda substituce

kombinace Newton-Leibnizovy formule a metod pro neurčitý integrál

!! při použití metody substitice je zde nutné přepočítat meze integrálu !!

Příklad 8.8: Pro funkci $f(x) = x\,\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}$ vypočtěte $\displaystyle\int_{-2}^{4} f(x)\,\mathrm{d}x$.

Řešení: Funkce f je na intervalu $\langle -2, 4\rangle$ spojitá (tj. i omezená), a tedy integrál existuje.
Máme:

$$\int_{-2}^{4} x\,\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}\,\mathrm{d}x = \left|\begin{array}{ccc} -\frac{x}{2} & = & t \\ -\frac{1}{2}\,\mathrm{d}x & = & \mathrm{d}t \\ -2 & \rightsquigarrow & 1 \\ 4 & \rightsquigarrow & -2 \end{array}\right| = \int_1^{-2} (-2t)\,\mathrm{e}^t\,(-2)\,\mathrm{d}t = 4\int_1^{-2} t\,\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t = -4\int_{-2}^{1} t\,\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t =$$

$$= \left|\begin{array}{cc} u = t & v' = \mathrm{e}^t \\ u' = 1 & v = \mathrm{e}^t \end{array}\right| \overset{\text{PP}}{=} -4\Big(\big[t\,\mathrm{e}^t\big]_{-2}^{1} - \int_{-2}^{1} \mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t\Big) = -4\big((\,\mathrm{e} - (-2)\,\mathrm{e}^{-2}) - (\,\mathrm{e} - \mathrm{e}^{-2})\big) = -12\,\mathrm{e}^{-2}.$$

Příklad 8.9: Předpokládejme, že existuje $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x$ $(a \geq 0)$ a f je sudá nebo lichá. Rozepišme

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-a}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x$$

a dopočítejme první integrál:

$$\int_{-a}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x = \left|\begin{array}{ccc} x & = & -t \\ \mathrm{d}x & = & -\,\mathrm{d}t \\ 0 & \rightsquigarrow & 0 \\ -a & \rightsquigarrow & a \end{array}\right| = -\int_a^0 f(-t)\,\mathrm{d}t = \int_0^a f(-t)\,\mathrm{d}t =$$

$$= \begin{cases} \displaystyle\int_0^a -f(t)\,\mathrm{d}t = -\int_0^a f(t)\,\mathrm{d}t & \text{pro } f \text{ lichou,} \\ \displaystyle\int_0^a f(t)\,\mathrm{d}t & \text{pro } f \text{ sudou.} \end{cases}$$

Dostaneme tak, že platí

$$\underline{\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x} \;=\; \begin{cases} \underline{0} & \text{pro } f \text{ lichou,} \\ \underline{2\displaystyle\int_0^a f(t)\,\mathrm{d}t} & \text{pro } f \text{ sudou.} \end{cases}$$

(Tohoto využijete v druhém semestru při výpočtu koeficientů Fourierových řad sudých a lichých funkcí.)

Příklad 8.10: Předpokládejme, že f je periodická s periodou T a po částech spojitá na $\mathbb{R}$. Pak pro $k \in \mathbb{Z}$, $0 \le \beta < T$ a $\alpha = kT + \beta$ platí

Aa)

$$\underline{\int_\beta^{\beta+T} f(t)\,\mathrm{d}t} = \int_\beta^T f(t)\,\mathrm{d}t + \int_T^{\beta+T} \underbrace{f(t)}_{f(t-T)}\,\mathrm{d}t = \left| \begin{array}{rcl} u & = & t-T \\ \mathrm{d}u & = & \mathrm{d}t \\ T & \rightsquigarrow & 0 \\ \beta+T & \rightsquigarrow & \beta \end{array} \right| =$$

$$= \int_\beta^T f(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^\beta f(u)\,\mathrm{d}u = \underline{\int_0^T f(t)\,\mathrm{d}t}$$

(protože nezáleží na označení integrační proměnné v určitém integrálu),

Ab)

$$\underline{\int_\alpha^{\alpha+T} \underbrace{f(x)}_{f(x-kT)}\,\mathrm{d}x} = \left| \begin{array}{rcl} t & = & x-kT \\ \mathrm{d}t & = & \mathrm{d}x \\ \alpha & \rightsquigarrow & \alpha - kT = \beta \\ \alpha+T & \rightsquigarrow & \beta+T \end{array} \right| = \int_\beta^{\beta+T} f(t)\,\mathrm{d}t \overset{Aa)}{=} \underline{\int_0^T f(t)\,\mathrm{d}t}.$$

Tedy při integraci periodické funkce nezáleží na tom, přes který interval délky periody integrujeme. Integrál je vždy stejný.

B) Je-li navíc $d \in \mathbb{R}$, pak

$$\underline{\int_\beta^{\beta+d} \underbrace{f(x)}_{f(x+kT)}\,\mathrm{d}x} = \left| \begin{array}{rcl} t & = & x+kT \\ \mathrm{d}t & = & \mathrm{d}x \\ \beta & \rightsquigarrow & \beta + kT = \alpha \\ \beta+d & \rightsquigarrow & \alpha+d \end{array} \right| = \underline{\int_\alpha^{\alpha+d} f(t)\,\mathrm{d}t}.$$

Tedy posun intervalu o násobek periody integrál nezmění.

Příklad 8.11: Vypočtěte $\displaystyle\int_{-2\pi}^{2\pi} f(x)\,\mathrm{d}x$, kde $f(x) = \dfrac{1}{1+\sin^2 x}$.

Řešení: Funkce f je spojitá na intervalu $\langle -2\pi, 2\pi\rangle$, tedy integrál existuje. Vhodná substituce zde je $t = \operatorname{tg} x$. Funkce tangens však není definována na celém intervalu $\langle -2\pi, 2\pi\rangle$. Proto náš integrál roztrhneme na několik integrálů:

$$\int_{-2\pi}^{2\pi} f = \int_{-2\pi}^{-\frac{3\pi}{2}} f + \int_{-\frac{3\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}} f + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} f + \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} f.$$

Funkce f je π-periodická, tedy podle Příkladů 8.9 a 8.10 máme

$$\int_{-2\pi}^{2\pi} f \overset{\text{Př. } \underline{8.10}B}{=} \int_{-2\pi}^{-\frac{3\pi}{2}} f + 3\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f + \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} f \overset{\text{Př. } \underline{8.10}B}{=} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f + 3\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} f = 4\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f.$$

Hodnotu integrálu $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f$ vypočteme v Příkladu 9.3.

8.4 Věta o střední hodnotě

Věta 8.10 (o střední hodnotě):

Nechť f je spojitá na $\langle a, b\rangle$. Pak existuje $c \in (a, b)$ tak, že

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = f(c)\cdot(b-a).$$

$f(c) = \dfrac{\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x}{b-a}$ $\quad\ldots\quad$ střední hodnota funkce f na intervalu $\langle a, b\rangle$