ÚVOD

0.1. Množiny

Známé pojmy: množina, prvek množiny, prázdná množina

$A = \{x \,|\, V(x)\}$ ... množina A obsahuje všechny objekty, které mají vlastnost V, a žádné jiné

systém množin ... „množina množin"

(např.: $\mathcal{S} = \{\langle 0,\, n\rangle \,|\, n \in \mathbb{N}\}$, tj. systém $\mathcal{S}$ je tvořen všemi intervaly typu $\langle 0,\, n\rangle$, kde n je přirozené číslo)

Podmnožiny

- $B \subset A$ ... B je **podmnožina** množiny A ... každý prvek množiny B je prvkem množiny A,
  tj. $x \in B \Rightarrow x \in A$ ($\Rightarrow$ ... „jestliže ..., pak")
  (jiná značení: $B \subseteq A$, $B \subseteqq A$, někdy též $A \supset B$ apod.)

  Platí: $A = B \Leftrightarrow (A \subset B \wedge B \subset A)$ ($\Leftrightarrow$ ... „právě tehdy, když", $\wedge$ ... „a zároveň")
- $B \subsetneqq A$ ... B je **vlastní podmnožina** množiny A ... každý prvek množiny B je prvkem množiny A a v množině A je nějaký prvek navíc, tj. $B \subset A \wedge B \neq A$

Operace s množinami

- **sjednocení množin** A, B: $A \cup B = \{x |\, x \in A \vee x \in B\}$ ($\vee$ ... „nebo" (nevylučovací))
- **průnik množin** A, B: $A \cap B = \{x |\, x \in A \wedge x \in B\}$
  $A \cap B = \emptyset$ ... A a B jsou **disjunktní**
- **rozdíl množin** A, B: $A \setminus B = \{x |\, x \in A \wedge x \notin B\}$
- **kartézský součin množin** A, B: $A \times B = \{\, (a, b) \,|\, a \in A \wedge b \in B\,\}$
  pro n množin: $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n = \{\, (a_1, a_2, \ldots, a_n) \,|\, \underbrace{a_1 \in A_1 \wedge a_2 \in A_2 \wedge \ldots \wedge a_n \in A_n}_{a_i \in A_i \text{ pro } i=1,\ldots,n} \,\}$

  n**-tá kartézská mocnina množiny** A: $A^n = \underbrace{A \times A \times \ldots \times A}_{n-\text{krát}}$

Obecněji: I - indexová množina, $\{A_i\}_{i\in I}$ - systém množin

- sjednocení: $\bigcup_{i\in I} A_i = \{\, x \,|\, \exists i \in I : x \in A_i \,\}$
- průnik: $\bigcap_{i\in I} A_i = \{\, x \,|\, \forall i \in I : x \in A_i \,\}$

($\forall$ ... „pro všechna", „pro každé", $\exists$ ... „existuje (alespoň jedno)", tedy
$\bigcup_{i\in I} A_i$ je množina všech x, pro která existuje nějaký index $i \in I$ takový, že $x \in A_i$, tj. x je alespoň v jedné A_i
$\bigcap_{i\in I} A_i$ je množina všech x takových, že pro všechna $i \in I$ je $x \in A_i$, tj. x je ve všech A_i)

speciálně pro $I = \mathbb{N}$ resp. $I = \{1, 2, \ldots n\}$: $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$, $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$ resp. $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$, $\bigcap_{i=1}^{n} A_i$

(ve vzorcích mimo text se používají zápisy: $\displaystyle\bigcup_{i\in I} A_i,\ \bigcap_{i\in I} A_i,\ \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i,\ \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i,\ \bigcup_{i=1}^{n} A_i,\ \bigcap_{i=1}^{n} A_i$)

0.2. Zobrazení

f - **zobrazení množiny** A **do množiny** B**:** $f : A \to B$ (jiné značení: $A \xrightarrow{f} B$)
každému prvku $a \in A$ přiřadí f právě jeden prvek $b \in B$ (ne více než jeden!)
(a - **vzor**, b - **obraz** (prvku a))
píšeme: $f(a) = b$
(je-li B číselná množina, nazýváme zobrazení obvykle **funkce** a $f(a)$ pak říkáme funkční hodnota,
je-li $A = \mathbb{N}$, mluvíme o **posloupnosti** $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, kde a_n označuje hodnotu zobrazení v čísle n a říkáme mu n**-tý člen posloupnosti** $(a_n)_{n=1}^{\infty}$)

pro $f : A \to B$:
definiční obor zobrazení f: $D(f) = A$ (množina všech vzorů)
obor hodnot zobrazení f: $H(f) = \{\, b \in B \,|\, \exists\, a \in A : f(a) = b\}$ (množina všech obrazů)

rovnost zobrazení f, g: $f = g$
$D(f) = D(g)$ a pro každé $x \in D(f)\, (= D(g))$ platí $f(x) = g(x)$

Skládání zobrazení

složené zobrazení zobrazení $f : A \to B$ a $g : C \to D$, kde $H(f) \subset C\ (= D(g))$:

$$h : A \to D, \qquad h(a) = g(f(a)) \quad \text{pro } a \in A$$

f - vnitřní zobrazení, g - vnější zobrazení; píšeme: $h = g \circ f$

(aby platilo $H(f) \subset D(g)$, zmenšujeme někdy zobrazení f definiční obor; nové zobrazení pak už ale nebude rovno zobrazení f, bude mít jen stejný předpis - viz výše)

Příklad 0.1: Pro $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x$, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = \frac{1}{x^2+1}$, a $g_1 : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $g_1(x) = \frac{1}{x}$, máme

- Pro $x \in D(f) = \mathbb{R}$ je $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(2x) = \frac{1}{(2x)^2+1} = \frac{1}{4x^2+1}$, přitom pro $x \in D(g) = \mathbb{R}$ platí $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f\left(\frac{1}{x^2+1}\right) = \frac{2}{x^2+1}$. Tedy $g \circ f \neq f \circ g$.
- Pro $x \in D(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ platí $(f \circ g_1)(x) = f(g_1(x)) = f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{2}{x}$. Protože však $H(f) \not\subset D(g_1)$, nelze f a g_1 skládat v opačném pořadí (tj. v pořadí $g_1 \circ f$).

Speciální případy zobrazení $(f : A \to B)$

- **prosté** zobrazení (injektivní, injekce):
  je-li $a_1,\ a_2 \in A,\ a_1 \neq a_2$, pak $f(a_1) \neq f(a_2)$ (tj. různé vzory mají různé obrazy)
  (jinými slovy: je-li $a_1,\ a_2 \in A,\ f(a_1) = f(a_2)$, pak $a_1 = a_2$)
- zobrazení **na** (surjektivní, surjekce):
  $H(f) = B$ (tj. každý prvek množiny B je obrazem alespoň jednoho prvku množiny A)
- **vzájemně jednoznačné** zobrazení (**bijektivní, bijekce**):
  současně **prosté** i **na**

Inverzní zobrazení

inverzní zobrazení k prostému zobrazení $f : A \to B$:

$$f_{-1} : H(f) \to A, \qquad f_{-1}(y) = x \;\Leftrightarrow\; f(x) = y$$

$D(f_{-1}) = H(f)$, $H(f_{-1}) = D(f)$

je-li f bijekce, pak $f_{-1} : B \to A$ a f_{-1} je také bijekce

0.3. Základní vlastnosti sčítání, násobení a uspořádání na množině reálných čísel $\mathbb{R}$

1) Pro každá $a, b, c \in \mathbb{R}$ platí

- $(a+b)+c = a+(b+c)$; $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ ... **asociativita**
- $a+b = b+a$; $a \cdot b = b \cdot a$ ... **komutativita**
- $a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c$ ... **distributivita**

2)
- $a+b=b$ pro všechna $b \in \mathbb{R}$ $\Leftrightarrow$ $a=0$
- $a \cdot b = b$ pro všechna $b \in \mathbb{R}$ $\Leftrightarrow$ $a=1$

3)
- Ke každému $a \in \mathbb{R}$ existuje jediné $b \in \mathbb{R}$ takové, že $a+b=0$. ($b = (-1) \cdot a \stackrel{\text{def}}{=} -a$)
- Ke každému $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ existuje jediné $c \in \mathbb{R}$ takové, že $a \cdot c = 1$. ($c \stackrel{\text{def}}{=} a^{-1}$)

4) Pro všechna $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ platí

- $a \leq b \;\Leftrightarrow\; a+c \leq b+c$
- $a \cdot b = 0 \;\Leftrightarrow\; a = 0$ nebo $b=0$
- $a \cdot b > 0 \;\Leftrightarrow\; a,\ b > 0$ nebo $a,\ b < 0$
- $a \cdot b < 0 \;\Leftrightarrow\; (\, a > 0$ a $b < 0\,)$ nebo $(\, a < 0$ a $b > 0\,)$
- $a \leq b,\ c \geq 0 \;\Rightarrow\; a \cdot c \leq b \cdot c$
  $a \leq b,\ d \leq 0 \;\Rightarrow\; a \cdot d \geq b \cdot d$
- $a \leq b,\ c \leq d \;\Rightarrow\; a+c \leq b+d$
  $a \leq b,\ c \geq d \;\Rightarrow\; a-c \leq b-d$
- $0 \leq a \leq b,\ 0 \leq c \leq d \;\Rightarrow\; a \cdot c \leq b \cdot d$
- $0 < a \leq b \;\Rightarrow\; \dfrac{1}{b} \leq \dfrac{1}{a}$
- $0 < a \leq b,\ 0 < d \leq c \;\Rightarrow\; \dfrac{a}{c} \leq \dfrac{b}{d}$