KAPITOLA 1: Reálná čísla

(Význam logických a množinových symbolů je připomenut při jejich prvním použití v úvodní kapitole.)

1.1. Číselné množiny

Přirozená čísla ... $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$

nula ... 0, $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \dots\} = \mathbb{N} \cup \{0\}$

Celá čísla ... $\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, 3, \dots\}$

Racionální čísla ... $\mathbb{Q} = \left\{ \dfrac{p}{q} \,\middle|\, p,\ q \in \mathbb{Z},\ q \neq 0 \right\}$

Věta 1.1 : Číslo $\sqrt{2}$ není racionální.

Důkaz: Provedeme **sporem** (tj. budeme předpokládat, že tvrzení neplatí, a ukážeme, že to vede ke sporu; nebude proto možné, aby tvrzení neplatilo).

Nechť tedy tvrzení neplatí, tj. $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$, kde p, q jsou **nesoudělná** celá čísla (v takovémto tvaru lze zřejmě zapsat každé racionální číslo). Pak ovšem $2 = (\sqrt{2})^2 = \left(\frac{p}{q}\right)^2 = \frac{p^2}{q^2}$, tj. $2q^2 = p^2$. Tedy p^2 je sudé číslo, což ale znamená, že i p je sudé číslo. Kdyby totiž p bylo liché, pak by pro vhodné celé číslo k platilo $p = 2k + 1$. To by ale znamenalo, že p^2 je liché číslo, protože $(2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$. Jenže my víme, že p^2 je sudé. Proto p nemůže být liché a musí být sudé. Protože p je sudé, existuje celé číslo l takové, že $p = 2l$. Z rovnosti $2q^2 = p^2$ pak ale dostáváme, že $2q^2 = (2l)^2 = 4l^2$, tj. $q^2 = 2l^2$. Jenže to znamená, že q^2 je sudé, a tedy i q je sudé. A to je ve sporu s předpokladem, že p a q jsou čísla nesoudělná. Proto číslo $\sqrt{2}$ nelze zapsat jako podíl dvou nesoudělných celých čísel, takže to není číslo racionální.

Poznámka : Desetinný rozvoj každého racionálního čísla je periodický a každé číslo s periodickým desetinným rozvojem je racionální.

Příklad 1.1: Vyjádřete číslo $b = 0,\overline{9}$ jako podíl dvou celých čísel.

Řešení: Protože je délka periody 1, vynásobíme číslo a číslem 10^1 a odečteme b:

$$\begin{array}{rcr} 10^1 b \;=\; 10\,b & = & 9,\overline{9} \\ -b & = & -0,\overline{9} \\ \hline 9\,b & = & 9 \end{array}$$

Tedy $\mathbf{0,\overline{9} = \dfrac{9}{9} = 1}$!

Podobným způsobem lze najít vyjádření ve tvaru podílu dvou celých čísel i pro ostatní čísla s periodickým desetinným rozvojem, jen číslo násobíme číslem 10^k, kde k je délka jeho periody.

Reálná čísla ... $\mathbb{R}$ – lze je vyjádřit desetinným rozvojem (konečným nebo nekonečným); periodu 9 neuvažujeme (kvůli jednoznačnosti vyjádření - viz Příklad 1.1)

Iracionální čísla ... $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

1.2. Reálná čísla

Intervaly $(a,\ b \in \mathbb{R})$

- $\langle\, a,\ b \,\rangle = \{\, x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b \,\}$ ... **uzavřený** (také : $[\, a,\ b \,]$)
- $(\, a,\ b \,) = \{\, x \in \mathbb{R} \mid a < x < b \,\}$ ... **otevřený** (někdy také : $]\, a,\ b \,[$)
- $\langle\, a,\ b \,) = \{\, x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b \,\}$ ... **polouzavřené**
- $(\, a,\ b \,\rangle = \{\, x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b \,\}$ ... **polouzavřené**

Absolutní hodnota čísla $a \in \mathbb{R}$

- $|a| = a$ pro $a \geq 0$
- $|a| = -a$ pro $a \leq 0$

Platí pro všechna $a,\ b,\ c \in \mathbb{R}$:

a) $|a| = |-a|$, $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$, $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$ pro $b \neq 0$

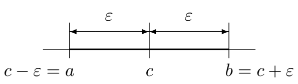
!!! b) $|a + b| \leq |a| + |b|$ ... **trojúhelníková nerovnost**

c) $|c - a| \geq |c| - |a|$ (v **b)** stačí vzít $b = c - a$)

Platí pro $c,\ x,\ \varepsilon \in \mathbb{R},\ \ \varepsilon > 0$:

- $|x-c| \ = \ \varepsilon \qquad \Leftrightarrow \qquad x \in \{c-\varepsilon,\ c+\varepsilon\}$ (tj. vzdálenost x od c je rovna ε)
- $|x-c| \ < \ \varepsilon \qquad \Leftrightarrow \qquad c-\varepsilon \ < \ x \ < \ c+\varepsilon$ (tj. $x \in (c-\varepsilon, c+\varepsilon)$)
- $|x-c| \ \le \ \varepsilon \qquad \Leftrightarrow \qquad c-\varepsilon \ \le \ x \ \le \ c+\varepsilon$ (tj. $x \in \langle c-\varepsilon,\ c+\varepsilon\rangle$)

$c -$ střed intervalu
$\varepsilon -$ poloměr intervalu

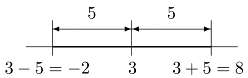


$$c = \frac{a+b}{2} \qquad (\text{pak } \ \varepsilon = c-a = b-c)$$

$$\varepsilon = \frac{b-a}{2} \qquad (\text{pak } \ c = a+\varepsilon = b-\varepsilon)$$

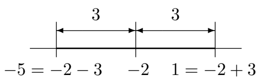
např.:

- $|x-3| \ < \ 5 \quad \dots \quad x \in (3-5, 3+5) = (-2, 8)$



- $x \ \in \ \langle -5,\ 1\rangle \quad \dots \quad c = \dfrac{-5+1}{2} = -2, \quad \varepsilon = \dfrac{1-(-5)}{2} = 3$

  $\dots \quad |x-(-2)| \le 3, \quad$ tj. $\quad |x+2| \le 3$



Definice :

Okolím bodu $c \in \mathbb{R}$ **o poloměru** $\varepsilon > 0$ nazýváme množinu

$$U_\varepsilon(c) \ = \ \{\, x \in \mathbb{R} \,\big|\, |x-c| < \varepsilon \,\} \qquad \big[\ = \ (c-\varepsilon, c+\varepsilon) \ \big].$$

Prstencovým okolím bodu $c \in \mathbb{R}$ **o poloměru** $\varepsilon > 0$ nazýváme množinu

$$P_\varepsilon(c) \ = \ U_\varepsilon(c) \setminus \{c\} \qquad \big[\ = \ (c-\varepsilon, c) \cup (c, c+\varepsilon) \ \big].$$

Pravým (levým) okolím bodu $c \in \mathbb{R}$ **o poloměru** $\varepsilon > 0$ nazýváme množinu

$$U_\varepsilon^+(c) \ = \ \langle c,\ c+\varepsilon) \qquad \big(\ U_\varepsilon^-(c) \ = \ (c-\varepsilon,\ c\rangle \ \big)$$

Pravým (levým) prstencovým okolím bodu $c \in \mathbb{R}$ **o poloměru** $\varepsilon > 0$ nazýváme množinu

$$P_\varepsilon^+(c) \ = \ (c, c+\varepsilon) \qquad \big(\ P_\varepsilon^-(c) \ = \ (c-\varepsilon, c) \ \big)$$

Poznámka: Dolní index, udávající poloměr okolí, často vynecháváme.

1.3. <u>Supremum a infimum</u>

Definice :

Řekneme, že $b \in M$ je **největším prvkem** (maximem) množiny $M \subset \mathbb{R}$ (píšeme $b = \max M$), jestliže v M neexistuje prvek větší než b.
Řekneme, že $a \in M$ je **nejmenším prvkem** (minimem) množiny $M \subset \mathbb{R}$ (píšeme $a = \min M$), jestliže v M neexistuje prvek menší než a.

Příklad 1.2: **a)** $\min\{-2, 3, 8, 25, 57\} = -2, \quad \max\{-2, 3, 8, 25, 57\} = 57;$

b) $\min \mathbb{N} = 1, \quad \max \mathbb{N}$ neexistuje;

c) $\min\{\, 1 - \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N} \,\} = 0 \ \ \big(= 1 - \frac{1}{1} \big), \quad \max\{\, 1 - \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N} \,\}$ neexistuje;

d) $\min\{\, x \mid 3 < x \le 6 \}$ neexistuje, $\quad \max\{\, x \mid 3 < x \le 6 \} = 6.$

Příklad 1.3: <u>Celá část</u> čísla $x \in \mathbb{R}$: $\quad [x] = \max\{\, k \in \mathbb{Z} \mid k \le x \,\} \quad (\in \mathbb{Z});$

Definice:

Číslo $K \in \mathbb{R}$ nazýváme **horní mezí** množiny $M \subset \mathbb{R}$, jestliže pro všechna $x \in M$ platí $x \leq K$. Pokud existuje nějaká horní mez množiny $M \subset \mathbb{R}$, říkáme, že množina M je **shora omezená**.

Číslo $L \in \mathbb{R}$ nazýváme **dolní mezí** množiny $M \subset \mathbb{R}$, jestliže pro všechna $x \in M$ platí $x \geq L$. Pokud existuje nějaká dolní mez množiny $M \subset \mathbb{R}$, říkáme, že množina M je **zdola omezená**.

Řekneme, že množina $M \subset \mathbb{R}$ je **omezená**, jestliže je omezená shora i zdola.

Poznámky: 1) Množina $M \subset \mathbb{R}$ je omezená, právě když existuje $S \in \mathbb{R}$ takové, že $|x| \leq S$ pro všechna $x \in M$. Jestliže totiž takové číslo S existuje, pak pro všechna $x \in M$ platí $-S \leq x \leq S$. Naopak, pokud pro všechna $x \in M$ je $L \leq x \leq K$, potom pro ně také platí $|x| \leq \max\{|K|, |L|\}$.

2) Má-li množina $M \subset \mathbb{R}$ nějakou horní mez, pak jich má nekonečně mnoho. Je-li totiž K horní mezí množiny M, pak je horní mezí také každé číslo větší než K. Analogicky pro dolní meze: Je-li L dolní mezí množiny M, pak je dolní mezí také každé číslo menší než L.

Příklad 1.4: **a)** $\{ x \in \mathbb{R} \,|\, 0 < x \}$ ... množina je omezená jen zdola (např. $L = 0$ nebo $L = -1$, $L = -158,6$);

b) $\{ x \in \mathbb{R} \,|\, x \leq -3 \}$ ... množina je omezená jen shora (např. $K = -3$ nebo $K = 0$, $K = \sqrt{3}$);

c) $\langle -5, 1)$ ... množina je omezená shora i zdola, tj. je omezená (např. $S = 5$ nebo $S = 5,01$, $S = 3596$);

d) $\{ x \in \mathbb{R} \,|\, x^2 > 10 \}$ ... množina není omezená ani shora ani zdola (jde o množinu $(-\infty, -\sqrt{10}) \cup (\sqrt{10}, \infty)$).

Definice:

Řekneme, že číslo $b \in \mathbb{R}$ je **supremem** neprázdné množiny $M \subset \mathbb{R}$ (píšeme $b = \sup M$), jestliže je nejmenší horní mezí množiny M.

Řekneme, že číslo $a \in \mathbb{R}$ je **infimem** neprázdné množiny $M \subset \mathbb{R}$ (píšeme $a = \inf M$), jestliže je největší dolní mezí množiny M.

Poznámka: Pro supremum b množiny M tedy platí:

- Každý prvek množiny M je menší nebo roven b (protože b je horní mez).
- Vezmeme-li jakékoliv číslo c menší než b, pak už to není horní mez (b je nejmenší horní mez). Tedy v M najdeme prvek, který je větší než c.

Analogicky pro infimumum a množiny M platí:

- Každý prvek množiny M je větší nebo roven a (protože a je dolní mez).
- Vezmeme-li jakékoliv číslo c větší než a, pak už to není dolní mez (a je největší dolní mez). Tedy v M najdeme prvek, který je menší než c.

Platí: Má-li množina M největší (nejmenší) prvek, pak je tento prvek i supremem (infimem) množiny M.

Věta 1.2 (o supremu a infimu): Nechť $M \subset \mathbb{R}$ je neprázdná množina. Je-li M shora omezená, pak existuje $\sup M \in \mathbb{R}$. Je-li M zdola omezená, pak existuje $\inf M \in \mathbb{R}$.

1.4. Rozšíření množiny reálných čísel

nevlastní čísla (hodnoty) ... $(+)\infty$, $-\infty$

$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{ +\infty, -\infty \}$ ... **rozšířená reálná osa**

Uspořádání na $\overline{\mathbb{R}}$ – stejné jako na $\mathbb{R}$, jen navíc přidáváme

- $-\infty < +\infty$,
- $-\infty < a$, $a < +\infty$ pro každé $a \in \mathbb{R}$

Neomezené intervaly $(a \in \mathbb{R})$

- $(-\infty, a) = \{ x \in \mathbb{R} \mid x < a \}$
- $(a, +\infty) = \{ x \in \mathbb{R} \mid a < x \}$
- $(-\infty, a \rangle = \{ x \in \mathbb{R} \mid x \leq a \}$
- $\langle a, +\infty) = \{ x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \}$

<u>**Okolí**</u> bodů $+\infty,\ -\infty$ $\quad (K,\, L \in \mathbb{R})$

- $U_K(+\infty) = U_K^-(+\infty) = P_K(+\infty) = P_K^-(+\infty) \;=\; (K, +\infty)$,
- $U_L(-\infty) = U_L^+(-\infty) = P_L(-\infty) = P_L^+(-\infty) \;=\; (-\infty, L)$

Poznámka: Všimněte si, že všechny intervaly i okolí, které uvažujeme, obsahují pouze reálná (tj. konečná) čísla.

<u>**Aritmetické operace s nevlastními hodnotami**</u> $\quad (a \in \mathbb{R})$

Definujeme:

- $a + \infty = \infty \quad (= a - (-\infty))$ $\qquad\qquad a - \infty = -\infty \quad (= a + (-\infty))$
- $\infty + \infty = \infty \quad (= \infty - (-\infty))$ $\qquad\qquad -\infty - \infty = -\infty \quad (= -\infty + (-\infty))$
- $a \cdot \infty = \begin{cases} \infty & \text{pro } a > 0 \\ -\infty & \text{pro } a < 0 \end{cases}$ $\qquad\qquad a \cdot (-\infty) = \begin{cases} -\infty & \text{pro } a > 0 \\ \infty & \text{pro } a < 0 \end{cases}$
- $\infty \cdot \infty = (-\infty) \cdot (-\infty) = \infty$ $\qquad\qquad \infty \cdot (-\infty) = -\infty$
- $\dfrac{\pm\infty}{a} = (\pm\infty) \cdot a^{-1} \quad \text{pro } a \neq 0$ $\qquad\qquad \dfrac{a}{\pm\infty} = 0$

Nedefinujeme:

- $\infty - \infty, \quad \infty + (-\infty)$
- $(\pm\infty) \cdot 0$
- $\dfrac{\pm\infty}{\pm\infty}, \quad \dfrac{\pm\infty}{0}, \quad \dfrac{a}{0}$

Definice:

Nechť $M \subset \mathbb{R}$ je neprázdná množina. Je-li M shora neomezená, pak pokládáme $\sup M = +\infty$, je-li M zdola neomezená, pokládáme $\inf M = -\infty$.

Poznámka: Nyní už má suprémum a infimum každá neprázdná podmnožina reálných čísel. Kdybychom chtěli definovat supremum i pro prázdnou množinu tak, aby mělo analogické vlastnosti jako v případě množin neprázdných (viz poznámku za definicí suprema a infima omezené množiny), museli bychom položit $\sup \emptyset = -\infty$. Prázdná množina totiž neobsahuje žádný prvek, takže neobsahuje ani žádný prvek, který by byl větší než $-\infty$. Tedy $-\infty$ je horní mezí prázdné množiny. A vzhledem k uspořádání na $\overline{\mathbb{R}}$ je to horní mez ze všech nejmenší. Infimum prázdné množiny by analogicky muselo být definováno rovností $\inf \emptyset = +\infty$. Prázdná množina by pak byla jedinou podmnožinou reálných čísel, která by měla větší infimum než supremum.

Příklad 1.5: **a)** pro $M = \{-2, 3, 8, 25, 57\}$ platí $\inf M = \min M = -2$, $\sup M = \max M = 57$;

b) pro $M = \mathbb{N}$ máme $\inf M = \min M = 1$, $\sup M = +\infty$;

c) pro $M = \{\, 1 - \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N} \,\}$ je $\inf M = \min M = 0$, $\sup M = 1$;

d) pro $M = \{\, x \mid 3 < x \leq 6 \,\}$ platí $\inf M = 3$, $\sup M = \max M = 6$.

(Srovnejte s Příkladem 1.2)

1.5. <u>Dodatky</u>

Věta 1.3: Jsou-li a, b reálná čísla, $a < b$, pak v intervalu $(a\,,\,b)$ leží alespoň jedno racionální číslo a alespoň jedno číslo iracionální. Speciálně mezi každými dvěma racionálními čísly leží alespoň jedno číslo iracionální a mezi každými dvěma iracionálními čísly leží alespoň jedno číslo racionální.

Důkaz: Není složitý, ale protože bychom museli probírat hodně různých případů, nebudeme ho tu provádět.

Důsledek 1.4: Jsou-li a, b reálná čísla, $a < b$, pak v intervalu $(a\,,\,b)$ leží nekonečně mnoho racionálních čísel a také nekonečně mnoho čísel iracionálních.

Důkaz: Větu 1.3 aplikujeme postupně na intervaly (a, c_n), kde c_1 je (i)racionální číslo ležící v intervalu (a, b) a pro $n \geq 1$ je c_{n+1} (i)racionální číslo ležící v intervalu (a, c_n). Protože pro každé n platí $c_{n+1} \in (a, c_n) \subset (a, b)$, leží všechna čísla c_n v intervalu (a, b), jak jsme požadovali. $\square$

Věta 1.5 (princip vnořených intervalů):

a) Nechť $I_n = \langle a_n\,,\, b_n \rangle$, $n = 1, 2, \ldots$, jsou takové <u>uzavřené</u> intervaly, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí $I_{n+1} \subset I_n$. Pak $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} I_n \neq \emptyset$ (tj. všechny intervaly I_n mají společný alespoň jeden bod).

b) Jestliže navíc ke každému $\varepsilon > 0$ existuje interval I_k takový, že $b_k - a_k < \varepsilon$ (a tedy i $b_m - a_m < \varepsilon$ pro všechna $m > k$), pak $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} I_n$ obsahuje jediný bod.

Poznámka: Ve Větě 1.5 je podstatné, že intervaly I_n jsou uzavřené. Např. pro intervaly $I_n = (0\,,\, \frac{1}{n}\,\rangle$ platí $I_{n+1} \subset I_n$, žádný společný bod ale tyto intervaly nemají.

Důkaz Věty 1.5: **a)** Každé a_n je dolní mezí množiny $B = \{b_1, b_2, \ldots\}$, tedy pro každé n je $a_n \leq \inf B \leq b_n$. To znamená, že $\inf B \in \bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}} I_n$.

b) Dokážeme sporem: Předpokládejme, že existují čísla $x < y$ v $\bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}} I_n$. Pak pro každé $n \in \mathbb{N}$ musí platit $a_n < x < y < b_n$, a tedy také $b_n - a_n > y - x > 0$. To je ovšem ve sporu s předpokladem věty, že ke každému $\varepsilon > 0$ existuje interval I_k takový, že $b_k - a_k < \varepsilon$. Pro $\varepsilon < y - x$ takové I_k nenajdeme. $\square$

Vzájemná poloha bodu a množiny

- Bod $a \in \mathbb{R}$ je **vnitřním bodem** množiny $M \subset \mathbb{R}$, jestliže existuje jeho okolí, které celé leží v množině M. Zřejmě pak $a \in M$. Množinu všech vnitřních bodů množiny M nazýváme **vnitřek** množiny M a značíme M°.
- Bod $a \in \mathbb{R}$ je **hraničním bodem** množiny $M \subset \mathbb{R}$, jestliže každé jeho okolí má neprázdný průnik jak s množinou M, tak i s jejím doplňkem $\mathbb{R} \setminus M$, tj. každé okolí bodu a obsahuje alespoň jeden bod, který v M leží, a alespoň jeden bod, který v M neleží. Samotný bod a nemusí v M ležet. Množinu všech hraničních bodů množiny M nazýváme **hranice** množiny M (a značíme ∂M).
- Bod $a \in \mathbb{R}$ je bodem **uzávěru** množiny $M \subset \mathbb{R}$, jestliže v každém jeho okolí leží alespoň jeden bod množiny M. Uzávěr množiny M značíme $\overline{M}$. Zřejmě platí $\overline{M} = M^\circ \cup \partial M$.
- Bod $a \in \mathbb{R}$ je **hromadným bodem** množiny $M \subset \mathbb{R}$, jestliže v každém jeho okolí leží nekonečně mnoho bodů množiny M. To nastává právě tehdy, když v každém prstencovém okolí bodu a leží alespoň jeden bod množiny M. Samotný bod a nemusí v M ležet.

  Někdy se hodí povolit, aby a bylo $+\infty$ nebo $-\infty$, tj. $a \in \overline{\mathbb{R}}$. To uděláme při definici limity posloupnosti.
- Bod $a \in \mathbb{R}$ je **izolovaným bodem** množiny $M \subset \mathbb{R}$, jestliže $a \in M$ a existuje jeho prstencové okolí, v kterém neleží žádný bod množiny M.

Příklady: **1)** Je-li I omezený interval (libovolného typu) s krajními body $a < b$, $c > b$ a $M = I \cup \{c\}$, pak vnitřními body množiny M jsou právě všechny body otevřeného intervalu (a, b) a hraničními body jsou body a, b a c (tj. $M^\circ = (a, b)$, $\overline{M} = \langle a, b \rangle \cup \{c\}$). Hromadnými body množiny M jsou všechny body uzavřeného intervalu $\langle a, b \rangle$. Množina M má jediný izolovaný bod c. (Nakreslete si obrázek.)

2) Množina $\mathbb{N}$ všech přirozených čísel nemá žádný vnitřní bod, všechny její body jsou izolované. Je tvořena samými hraničními body, jejím jediným hromadným bodem v $\overline{\mathbb{R}}$ je $+\infty$, v $\mathbb{R}$ žádný hromadný bod nemá.