

# Algebra matic

Odpřednesenou látku naleznete v kapitolách 2.1, 2.2 a 4 skript *Abstraktní a konkrétní lineární algebra*.

## Minulá přednáška

- 1 Pojem **lineárního zobrazení** z  $\mathbb{F}^s$  do  $\mathbb{F}^r$  a jeho maticový zápis (vzhledem ke kanonickým bázím).

## Dnešní přednáška

- 1 Zavedeme základní **algebraické operace s maticemi**.
- 2 V příští přednášce vše zobecníme pro prostory **konečných dimensí**; zavedeme pojem **matice lineárního zobrazení** (vzhledem k pevně zvoleným bázím).

## Velmi důležité připomenutí

Vektory z prostoru  $\mathbb{F}^n$  píšeme jako sloupce.

**Již víme:**  $\text{Lin}(\mathbb{F}^s, \mathbb{F}^r)$  je lineární prostor nad  $\mathbb{F}$ .

Jak se operace v  $\text{Lin}(\mathbb{F}^s, \mathbb{F}^r)$  projeví na „manipulaci s tabulkami“? Použijeme **sloupcový zápis** matic.

Pro  $\mathbf{A} = (\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_s)$  a  $\mathbf{B} = (\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_s)$  a skalár  $a$  z  $\mathbb{F}$  je:

- ①  $\mathbf{A} + \mathbf{B} : \mathbb{F}^s \longrightarrow \mathbb{F}^r$  matice se sloupcovým zápisem  $(\mathbf{a}_1 + \mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{a}_s + \mathbf{b}_s)$ . Zápis  $\mathbf{A} + \mathbf{B}$  čteme **součet matic  $\mathbf{A}$  a  $\mathbf{B}$** .
- ②  $a \cdot \mathbf{A} : \mathbb{F}^s \longrightarrow \mathbb{F}^r$  je matice se sloupcovým zápisem  $(a \cdot \mathbf{a}_1, \dots, a \cdot \mathbf{a}_s)$ . Zápis  $a \cdot \mathbf{A}$  čteme **součin skaláru  $a$  a matice  $\mathbf{A}$** .

**Nulový vektor<sup>a</sup>** v lineárním prostoru  $\text{Lin}(\mathbb{F}^s, \mathbb{F}^r)$  je matice  $\mathbf{O}_{s,r} = \underbrace{(\mathbf{o}, \dots, \mathbf{o})}_{s\text{-krát}}$ , kde  $\mathbf{o}$  je nulový vektor v  $\mathbb{F}^r$ .

---

<sup>a</sup>Říkáme také: **nulová matice**.

## Příklad: výpočty v $\text{Lin}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$

❶ Příklad součtu:

$$\begin{pmatrix} 5 & 3 & 6 \\ -1 & 0 & 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 5 & -2 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 8 & 4 \\ 0 & 4 & 10 \end{pmatrix}$$

❷ Příklad skalárního násobku:

$$(-2) \cdot \begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 2 & 6 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -2 & -4 \\ -4 & -12 & -8 \end{pmatrix}$$

❸ Nulový vektor  $v$  v  $\text{Lin}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$  je:

$$\mathbf{0}_{3,2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

## Poznámky k součtu matic a ke skalárnímu násobku matic

Sčítání matic a skalární násobení skalárem jsou operace v lineárním prostoru  $\text{Lin}(\mathbb{F}^s, \mathbb{F}^r)$ . Přirozená čísla  $s$  a  $r$  jsou **pevná**. Proto:

- 1 Sčítat můžeme pouze matice **stejných** rozměrů. Pro matice různých rozměrů **není sčítání definováno**.

Sloupcový zápis součtu

$$(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_s) + (\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_s) = (\mathbf{a}_1 + \mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{a}_s + \mathbf{b}_s)$$

dává okamžitě „položkový návod“: chcete-li sečíst dvě matice stejných rozměrů, sečtěte položky na odpovídajících pozicích.

- 2 Sloupcový zápis skalárního násobku

$$a \cdot (\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_s) = (a \cdot \mathbf{a}_1, \dots, a \cdot \mathbf{a}_s)$$

dává okamžitě „položkový návod“: chcete-li matici vynásobit skalárem, vynásobte tímto skalárem každou položku matice.

## Vlastnosti součtu matic a skalárního násobku matic

Protože  $\text{Lin}(\mathbb{F}^s, \mathbb{F}^r)$  je lineární prostor nad  $\mathbb{F}$ , platí:

- ①  $\mathbf{A} + \mathbf{O}_{s,r} = \mathbf{O}_{s,r} + \mathbf{A} = \mathbf{A}$ , pro vš.  $\mathbf{A}$  z  $\text{Lin}(\mathbb{F}^s, \mathbb{F}^r)$ .
- ②  $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$ , pro vš.  $\mathbf{A}, \mathbf{B}$  z  $\text{Lin}(\mathbb{F}^s, \mathbb{F}^r)$ .
- ③  $\mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = (\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C}$ , pro vš.  $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$  z  $\text{Lin}(\mathbb{F}^s, \mathbb{F}^r)$ .
- ④ Pro každé  $\mathbf{A}$  z  $\text{Lin}(\mathbb{F}^s, \mathbb{F}^r)$  existuje právě jedno<sup>a</sup>  $\mathbf{B}$  z  $\text{Lin}(\mathbb{F}^s, \mathbb{F}^r)$  tak, že  $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{O}_{s,r}$ .
- ⑤  $1 \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A}$  pro vš.  $\mathbf{A}$  z  $\text{Lin}(\mathbb{F}^s, \mathbb{F}^r)$ .
- ⑥  $a \cdot (b \cdot \mathbf{A}) = (a \cdot b) \cdot \mathbf{A}$  pro vš.  $a, b$  z  $\mathbb{F}$  a vš.  $\mathbf{A}$  z  $\text{Lin}(\mathbb{F}^s, \mathbb{F}^r)$ .
- ⑦  $a \cdot (\mathbf{A} + \mathbf{B}) = a \cdot \mathbf{A} + a \cdot \mathbf{B}$  pro vš.  $a$  z  $\mathbb{F}$  a pro vš.  $\mathbf{A}, \mathbf{B}$  z  $\text{Lin}(\mathbb{F}^s, \mathbb{F}^r)$ .
- ⑧  $(a + b) \cdot \mathbf{A} = a \cdot \mathbf{A} + b \cdot \mathbf{A}$  pro vš.  $a, b$  z  $\mathbb{F}$  a pro vš.  $\mathbf{A}$  z  $\text{Lin}(\mathbb{F}^s, \mathbb{F}^r)$ .

---

<sup>a</sup>Tomuto jednoznačně určenému  $\mathbf{B}$  říkáme **opačná** matice k matici  $\mathbf{A}$  a značíme ji  $-\mathbf{A}$ .

## Připomenutí značení (téma 04A)

Matice  $\mathbf{A}$  se sloupcovým zápisem  $\mathbf{A} = (\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_s)$  je lineární zobrazení z  $\mathbb{F}^s$  do  $\mathbb{F}^r$ , dané předpisem

$$\mathbf{e}_j \mapsto \mathbf{a}_j, \quad j = 1, \dots, s$$

Princip superposice dává

$$\sum_{j=1}^s x_j \cdot \mathbf{e}_j \mapsto \sum_{j=1}^s x_j \cdot \mathbf{a}_j$$

Pro  $\mathbf{x} = \sum_{j=1}^s x_j \cdot \mathbf{e}_j$  značíme  $\sum_{j=1}^s x_j \cdot \mathbf{a}_j$  jako  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x}$ .

Proto

$$\mathbf{A} : \mathbf{x} \mapsto \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}$$

## Definice (součin matic)

Pro situaci<sup>a</sup>

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{F}^s & \xrightarrow{\mathbf{A}} & \mathbb{F}^p \xrightarrow{\mathbf{B}} \mathbb{F}^r \\ \mathbf{e}_j \longmapsto & \mathbf{a}_j \longmapsto & \mathbf{B} \cdot \mathbf{a}_j \end{array}$$

je  $\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$  matice,<sup>b</sup> jejíž  $j$ -tý sloupec je  $\mathbf{B} \cdot \mathbf{a}_j$ , kde  $\mathbf{a}_j$  je  $j$ -tý sloupec matice  $\mathbf{A}$ . Ve sloupcovém zápisu tedy platí  
 $\mathbf{B} \cdot \mathbf{A} = (\mathbf{B} \cdot \mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{B} \cdot \mathbf{a}_s).$

Matici  $\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$  říkáme **součin matic  $\mathbf{B}$  a  $\mathbf{A}$** .

<sup>a</sup>Diagram okamžitě dává **rozměrovou zkoušku** pro součin matic  $\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$ : počet řádků matice  $\mathbf{A}$  musí být roven počtu sloupců matice  $\mathbf{B}$ . **Jindy součin matic nedefinujeme, protože by skládání nedávalo smysl.**

<sup>b</sup>**Položkový zápis** součinu  $\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$ : pro  $\mathbf{A} = (a_{kj})_{k=1,\dots,p,j=1,\dots,s}$  a  $\mathbf{B} = (b_{ik})_{i=1,\dots,r,k=1,\dots,p}$  je  $\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$  matice s položkami  $(c_{ij})_{i=1,\dots,r,j=1,\dots,s}$ , kde

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^p b_{ik} \cdot a_{kj}$$



## Příklad (matice složených lineárních transformací v $\mathbb{R}^2$ )

Projekce na osu  $x$ :  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ , rotace (o úhel  $\alpha$ ):  $\begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$ .

Součin matic

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

je matice lineárního zobrazení „**nejprve** otočte o úhel  $\alpha$ , **potom** spočtete projekci na osu  $x$ “.

Součin matic

$$\begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & 0 \\ \sin \alpha & 0 \end{pmatrix}$$

je matice lineárního zobrazení „**nejprve** spočtete projekci na osu  $x$ , **potom** otočte o úhel  $\alpha$ “.

## Příklad (reflexe podle osy, která svírá úhel $\alpha$ s osou $x$ )

Jde o složené zobrazení: **nejdříve** rotace o úhel  $-\alpha$ , **potom** reflexe, **nakonec** rotace o úhel  $\alpha$ .

$$\begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos(-\alpha) & -\sin(-\alpha) \\ \sin(-\alpha) & \cos(-\alpha) \end{pmatrix} =$$
$$\begin{pmatrix} \cos 2\alpha & \sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & -\cos 2\alpha \end{pmatrix}$$

## Poznámka

Analogicky lze vytvořit matice základních lineárních transformací v  $\mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 3$ . Aplikace: matematická analýza, fyzika, grafika.<sup>a</sup>

---

<sup>a</sup>**Důležité:** projděte si podrobně Příklady 4.1.6 a 4.2.9 **skript**.

## Shrnutí: Vlastnosti operací s maticemi

- 1 Pro součin **platí** asociativní zákon  $\mathbf{C} \cdot (\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}) = (\mathbf{C} \cdot \mathbf{B}) \cdot \mathbf{A}$ , kdykoli jsou jednotlivé součiny definovány.
- 2 Obecně **neplatí** komutativní zákon  $\mathbf{B} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$  (i když jsou oba součiny definovány).
- 3 Pro každé  $n$  definujeme **jednotkovou matici**<sup>a</sup>  $\mathbf{E}_n : \mathbb{F}^n \longrightarrow \mathbb{F}^n$  takto:  $\mathbf{E}_n = (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$ , kde  $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$  jsou vektory kanonické báze  $\mathbb{F}^n$ .

Potom pro každou matici  $\mathbf{A} : \mathbb{F}^s \longrightarrow \mathbb{F}^r$  platí:

$$\mathbf{E}_r \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{E}_s.$$

---

<sup>a</sup>Matice  $\mathbf{E}_n$  je maticí **identického** lineárního zobrazení  $\text{id} : \mathbb{F}^n \longrightarrow \mathbb{F}^n$ .

## Důkaz.

Okamžitě z vlastností lineárních zobrazení. ■

## Příklad (popis řešení soustavy lineárních rovnic v $\mathbb{R}^2$ )

Ať  $\mathbf{P}_x : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  je projekce na osu  $x$ , ztotožněná s maticí

$$\mathbf{P}_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Víme, že zápis  $\mathbf{P}_x \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$  (pro pevně zadaný vektor  $\mathbf{b}$ ) kóduje soustavu lineárních rovnic. Pojd' me ji vyřešit.

- ❶ Pro vektor  $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$  nás zajímají všechny vektory  $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ , které se na  $\mathbf{b}$  projekcí  $\mathbf{P}_x$  zobrazí.

Protože vektor  $\mathbf{b}$  **není** funkční hodnotou matice  $\mathbf{P}_x$ , **nemá** soustava  $\mathbf{P}_x \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$  řešení.

- ❷ Pro vektor  $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$  nás zajímají všechny vektory  $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ , které se na  $\mathbf{b}$  projekcí  $\mathbf{P}_x$  zobrazí.

Jeden takový vektor  $\mathbf{x}$  jistě existuje, například vektor

$$\mathbf{p} = \begin{pmatrix} 3 \\ -7 \end{pmatrix}. \text{ Jak popsat množinu všech řešení?}$$

## Popis množiny všech řešení soustavy $\mathbf{P}_x \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$

Řešením soustavy rovnic

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

je množina všech vektorů  $\mathbf{x}$  tvaru  $\mathbf{p} + \mathbf{x}_h$ , kde  $\mathbf{p} = \begin{pmatrix} 3 \\ -7 \end{pmatrix}$  a kde vektor  $\mathbf{x}_h$  splňuje rovnost  $\mathbf{P}_x \cdot \mathbf{x}_h = \mathbf{0}$ .

Množinu všech řešení lze tedy napsat ve tvaru

$$\mathbf{p} + \{\mathbf{x}_h \mid \mathbf{P}_x \cdot \mathbf{x}_h = \mathbf{0}\} = \{\mathbf{p} + \mathbf{x}_h \mid \mathbf{P}_x \cdot \mathbf{x}_h = \mathbf{0}\}$$

Jak uvidíme, tento způsob zápisu řešení bude mít mnohé výhody.

### Důsledek

Pro lineární zobrazení  $\mathbf{f} : L_1 \longrightarrow L_2$  musíme studovat chování dvou množin

$$\{\mathbf{f}(\vec{x}) \mid \vec{x} \in L_1\}$$

tzv. **obraz  $\mathbf{f}$**

$$\{\vec{x} \in L_1 \mid \mathbf{f}(\vec{x}) = \mathbf{0}\}$$

tzv. **jádro  $\mathbf{f}$**