KAPITOLA 6: Průběh funkce

6.1 Extrémy a monotonie

Definice:

Řekneme, že funkce f nabývá **na množině** $M \subset D(f)$ svého **globálního maxima** (**globálního minima**) A v bodě x_0, jestliže $x_0 \in M$, $f(x_0) = A$ a pro každé $x \in M$ platí

$$f(x) \leq f(x_0) \qquad \big(f(x) \geq f(x_0) \big). \tag{1}$$

(též: „absolutní maximum a minimum na M“, „největší a nejmenší hodnota na M“)

$$\left.\begin{array}{l}\text{globální maximum}\\ \text{globální minimum}\end{array}\right\} \quad \dots \quad \text{globální extrémy}$$

Víme: Spojitá funkce na uzavřeném intervalu nabývá svých globálních extrémů (Věta 5.5).

Definice:

Řekneme, že funkce f nabývá **v bodě** x_0 **lokálního maxima** (**lokálního minima**) $f(x_0)$, jestliže existuje okolí $U(x_0)$ bodu x_0 takové, že pro každé $x \in U(x_0)$ platí

$$f(x) \leq f(x_0) \qquad \big(f(x) \geq f(x_0) \big). \tag{2}$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{lokální maximum}\\ \text{lokální minimum}\end{array}\right\} \quad \dots \quad \text{lokální extrémy}$$

ostrá nerovnost v (1), (2) pro $x \neq x_0$ ... **ostrý extrém**

Věta 6.1:

Jestliže funkce f nabývá lokálního extrému v bodě x_0 a existuje $f'(x_0)$, pak $f'(x_0) = 0$.

Poznámka: Z Věty 6.1 vyplývá, že funkce může mít lokální extrém jen v tom bodě, kde má nulovou derivaci nebo kde derivaci nemá.

$f'(x_0) = 0$ ... x_0 – **stacionární bod** funkce (může v něm být extrém, ale nemusí)

Definice:

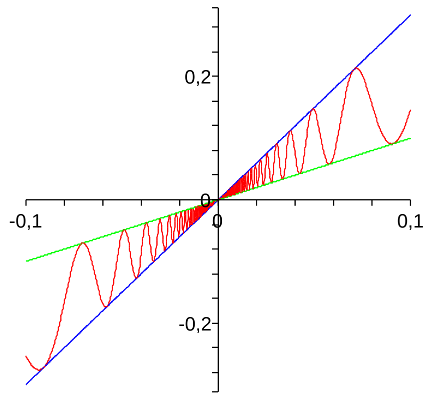
Řekneme, že funkce f je **rostoucí** (**klesající**) **v bodě** $x_0 \in D(f)$, jestliže existuje okolí $U(x_0) \subset D(f)$ bodu x_0 takové, že pro každé $x \in U(x_0)$ platí

a) je-li $x < x_0$, pak $f(x) < f(x_0)$ $\big(f(x) > f(x_0) \big)$,

b) je-li $x > x_0$, pak $f(x) > f(x_0)$ $\big(f(x) < f(x_0) \big)$.

(analogicky funkce **neklesající** a **nerostoucí** v bodě)

Poznámka: Funkce $f(x) = x \cdot \sin\frac{1}{x} + 2x$ pro $x \neq 0$, $f(0) = 0$, je rostoucí v nule, není ale rostoucí na žádném intervalu obsahujícím nulu. (Na obrázku jsou vyznačeny také grafy funkcí $g(x) = x$ a $h(x) = 3x$, mezi jejichž grafy graf funkce f kmitá.)



Platí: Funkce f je rostoucí na intervalu (a, b) právě tehdy, když je rostoucí v každém bodě tohoto intervalu. (Analogicky i pro ostatní typy monotonie.)

Věta 6.2:

Je-li $f'(x_0) > 0$ $(f'(x_0) < 0)$, pak je f v x_0 rostoucí (klesající).

Důkaz: Předpokládejme, že derivace $f'(x_0)$ je kladná. Pak $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0) > 0$, tedy podle věty 3.4 o zachování znaménka existuje prstencové okolí $P(x_0)$ bodu x_0 takové, že $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} > 0$ pro všechna $x \in P(x_0)$. To znamená, že na $P(x_0)$ pro $x > x_0$ platí $f(x) > f(x_0)$ a pro $x < x_0$ platí $f(x) < f(x_0)$. Funkce f je tak skutečně v x_0 rostoucí. V případě $f'(x_0) < 0$ bychom postupovali analogicky.

Poznámka: Má-li funkce f v bodě x_0 nezápornou dervaci, tj. je-li $f'(x_0) \geq 0$, nemusí být nutně v x_0 neklesající. Např. pro $f(x) = x^2$ máme $f'(x) = 2x$, tedy $f'(0) = 0 \geq 0$, a přitom funkce f v nule neklesající není – má tam lokální minimum. Platí ale naopak, že pokud je funkce v x_0 neklesající a existuje $f'(x_0)$, pak $f'(x_0) \geq 0$. Kdyby totiž byla $f'(x_0) < 0$, byla by podle věty 6.2 funkce f v bodě x_0 klesající.

Věta 6.3:

Nechť f je spojitá na intervalu I a má v každém jeho vnitřním bodě derivaci. Potom

a) f je na I neklesající (nerostoucí) právě tehdy, když na vnitřku I je $f' \geq 0$ $(f' \leq 0)$,

b) je-li na vnitřku I $f' > 0$ $(f' < 0)$, pak f je na I rostoucí (klesající).

c) je-li na vnitřku I derivace funkce f spojitá a ve všech bodech nenulová, pak je f na I ryze monotonní.

Platí: a) Je-li f rostoucí na (a, b) a spojitá zprava v a (zleva v b), pak je rostoucí na $\langle a, b)$ (na $(a, b\rangle$).

b) Je-li f rostoucí na $(a, b\rangle$ a na $\langle b, c)$, pak je rostoucí na (a, c).

(Analogicky i pro ostatní typy monotonie.)

Ověřování lokálních extrémů

A) Pomocí monotonie na okolí (a znaménka derivace):

Je-li f **spojitá** v x_0 a existuje-li $\delta > 0$ tak, že

f na $P_\delta^-(x_0) = (x_0 - \delta, x_0)$	f na $P_\delta^+(x_0) = (x_0, x_0 + \delta)$		v x_0
roste	klesá	pak	je ostré lokální maximum
klesá	roste	pak	je ostré lokální minimum
neklesá	neroste	pak	je lokální maximum
neroste	neklesá	pak	je lokální minimum
roste	roste	pak	není extrém (f v x_0 roste)
klesá	klesá	pak	není extrém (f v x_0 klesá)

Poznámka: Monotonii většinou ověřujeme pomocí znaménka derivace.

B) Pomocí 2. derivace:

Je-li $f'(x_0) = 0$ a $f''(x_0) > 0$ $(f''(x_0) < 0)$, pak f má v x_0 lokální minimum (lokální maximum).

Hledání globálních extrémů spojité funkce

A) na intervalu $I = \langle a, b\rangle$:

a) Najdeme v I body, kde může být globální extrém (tj. „body podezřelé z extrému“):

- body a, b
- stacionární body $(f'(x) = 0)$
- body, kde f nemá derivaci.

b) Spočítáme funkční hodnoty v bodech z a) a vybereme z nich největší / nejmenší.

B) **na intervalu, který není uzavřený** (např. pro $(a, b\rangle$ – jinak analogicky):

Postupujeme jako v A), pouze $f(a)$ nahradíme $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \alpha$ s tím, že je-li ve všech ostatních vyšetřovaných bodech funkční hodnota větší (menší) než α, pak f na $(a, b\rangle$ globálního minima (maxima) nenabývá a

$\alpha = \inf\{f(x) \,|\, x \in (a, b\rangle\}$ $\quad (\alpha = \sup\{f(x) \,|\, x \in (a, b\rangle\})$.

(Pokud $\lim\limits_{x \to a^+} f(x)$ neexistuje, je situace složitější a nebudeme ji tu obecně řešit.)

6.2 Funkce konvexní a konkávní

Definice:

Řekneme, že funkce f je **konvexní** $\big($**ryze konvexní**$\big)$ $\big[$**konkávní** $\big($**ryze konkávní**$\big)\big]$ na intervalu I, jestliže pro každé tři body $t, x, z \in I$, $t < x < z$, a číslo

$$k_{t,z} = \frac{f(z) - f(t)}{z - t}$$

platí

$$f(x) \le f(t) + k_{t,z} \cdot (x - t) \qquad \Big(f(x) < f(t) + k_{t,z} \cdot (x - t) \Big)$$
$$\Big[f(x) \ge f(t) + k_{t,z} \cdot (x - t) \qquad \Big(f(x) > f(t) + k_{t,z} \cdot (x - t) \Big) \Big].$$

Platí: Má-li funkce f derivaci na intervalu I a pro každé $x_0, x \in I$, $x \ne x_0$, platí

$$f(x) > f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \quad \Big(f(x) < f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \Big),$$

pak f je na I ryze konvexní (ryze konkávní). (Analogicky pro konvexní a konkávní funkce.)

Definice:

Řekneme, že bod $[x_0, f(x_0)]$ $(x_0 \in D(f))$ je **inflexním bodem grafu** funkce f, jestliže f je spojitá v x_0, existuje $f'(x_0)$ a existuje $\delta > 0$ takové, že f je na jednom z intervalů $(x_0 - \delta, x_0)$ a $(x_0, x_0 + \delta)$ ryze konvexní a na druhém ryze konkávní. (Říkáme též, že f má v x_0 **inflexi**.)

inflexní tečna ... tečna v inflexním bodě

Věta 6.4:

Má-li funkce f druhou derivaci na (a, b), pak

a) je-li na (a, b) $f'' > 0$ $(f'' \ge 0 \,|\, f'' < 0 \,|\, f'' \le 0)$, pak je f na (a, b) ryze konvexní (konvexní | ryze konkávní | konkávní),

b) má-li f v $x_0 \in (a, b)$ inflexi a existuje-li $f''(x_0)$, pak $f''(x_0) = 0$,

c) je-li $x_0 \in (a, b)$, $f''(x_0) = 0$ a f'' mění v x_0 znaménko, pak f má v x_0 inflexi.

6.3 Asymptoty grafu funkce

Definice:

a) Řekneme, že funkce f má v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$ **svislou asymptotu**, jestliže alespoň jedna jednostranná limita v x_0 existuje a je nevlastní. Rovnice této asymptoty je $\underline{x = x_0}$.

b) Řekneme, že funkce f má v bodě $x_0 = +\infty$ $(-\infty)$ **asymptotu** $\underline{y = kx + q}$ $(k, q \in \mathbb{R})$, jestliže

$$\lim_{x \to x_0} \big(f(x) - (kx + q) \big) = 0.$$

$$\left.\begin{array}{lll} k = 0 & \ldots & \textbf{vodorovná} \\ k \ne 0 & \ldots & \textbf{šikmá} \end{array}\right\} \text{ asymptota}$$

Věta 6.5:

a) Je-li $k,\ q \in \mathbb{R}$, pak přímka $y = kx + q$ je asymptotou funkce f v $+\infty$ právě tehdy, když

(i) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = k,$

(ii) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} (f(x) - kx) = q.$

b) Přímka $y = q$ je vodorovnou asymptotou funkce f v $+\infty$ právě tehdy, když $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = q.$

(Analogicky pro asymptoty v $-\infty$.)

6.4 Shrnutí

Obecný postup při vyšetřování průběhu funkce f:

Zjišťujeme

1)
- $D(f)$, $H(f)$, průsečíky s osami, ,,znaménko“
- je f sudá | lichá | periodická ?
- intervaly spojitosti, limity v bodech nespojitosti a v hraničních bodech $D(f)$

(vycházíme z předpisu pro $f(x)$)

2)
- intervaly monotonie
- lokální a globální extrémy
- chování tečen v blízkosti bodů nespojitosti

(vycházíme převážně z předpisu pro $f'(x)$)

3)
- intervaly konvexity a konkávity, inflexní body

(většinou pomocí f'', někdy lze i z f')

- tečny v inflexních bodech

4)
- asymptoty

6.5 Příklady

Příklad 6.1: Najděte lokální extrémy funkce $f(x) = (x + 2|x|) - x^3$ a vyšetřete monotonii této funkce. (Graf funkce f je na následující stránce.)

Příklad 6.2: Najděte největší a nejmenší hodnotu funkce f z Příkladu 6.1 na intervalu a) $\left\langle -\frac{3}{2}, \frac{3}{2} \right\rangle$, b) $\left(-\frac{3}{2}, \frac{3}{2} \right)$.

Řešení: Víme, že f' neexistuje v $x_0 = 0$ a f má jeden stacionární bod $x_1 = 1$ (viz řešení příkladu 7.2 na přednášce). Body $x_0,\ x_1$ leží v obou intervalech. Pro hledání globálních extrémů přidáme k těmto bodům ještě krajní body intervalů. Dále budeme řešit varianty a) a b) každou zvlášť.

a) Porovnáváme hodnoty:

$$f(0) = 0, \quad f(1) = 2, \quad f\left(-\tfrac{3}{2}\right) = \tfrac{39}{8}, \quad f\left(\tfrac{3}{2}\right) = \tfrac{9}{8}.$$

Z nich je nejmenší 0 a největší $\frac{39}{8}$, tedy

- f nabývá na $\left\langle -\frac{3}{2}, \frac{3}{2} \right\rangle$ v $x_0 = 0$ svého minima $f(0) = 0$,
- f nabývá na $\left\langle -\frac{3}{2}, \frac{3}{2} \right\rangle$ v $x_2 = -\frac{3}{2}$ svého maxima $f\left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{39}{8}$.

b) Porovnáváme hodnoty:

$$f(0) = 0, \quad f(1) = 2, \quad \lim_{x\to-\frac{3}{2}+} f(x) = \tfrac{39}{8}, \quad \lim_{x\to\frac{3}{2}-} f(x) = \tfrac{9}{8}.$$

Protože největší z těchto hodnot je $\displaystyle\lim_{x\to-\frac{3}{2}+} f(x)$ a bod $-\frac{3}{2}$ v daném intervalu neleží, dostáváme, že

- f nabývá na $\left(-\frac{3}{2}, \frac{3}{2} \right)$ v $x_0 = 0$ svého minima $f(0) = 0$,
- f na $\left(-\frac{3}{2}, \frac{3}{2} \right)$ svého minima nenabývá.

Příklad 6.3: Najděte (maximální) intervaly, na kterých je funkce $f(x) = x \ln^2 x$ konvexní, konkávní; najděte inflexní body jejího grafu.

Příklad 6.4: Najděte asymptoty grafu funkce $f(x) = x + |x| + \dfrac{\sin(10x)}{x^2} + 3$.

Řešení: Zřejmě $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Dále:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \Big(2x + \frac{\sin(10x)}{x^2} + 3\Big) = \lim_{x\to 0^+} \Big(2x + \frac{\sin(10x)}{10x} \cdot \frac{10}{x} + 3\Big) = +\infty,$$

tedy graf funkce f má svislou asymptotu v bodě $x_0 = 0$, její rovnice je $\underline{x = 0}$ (lze použít i $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$, která je také nevlastní);

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \big(2x + \tfrac{\sin(10x)}{x^2} + 3\big) = \lim_{x\to\infty} \big(2x + \tfrac{1}{x^2} \cdot \sin(10x) + 3\big) = \langle\!\langle +\infty + 0 \cdot \text{omez.} + 3 \rangle\!\rangle = +\infty,$$

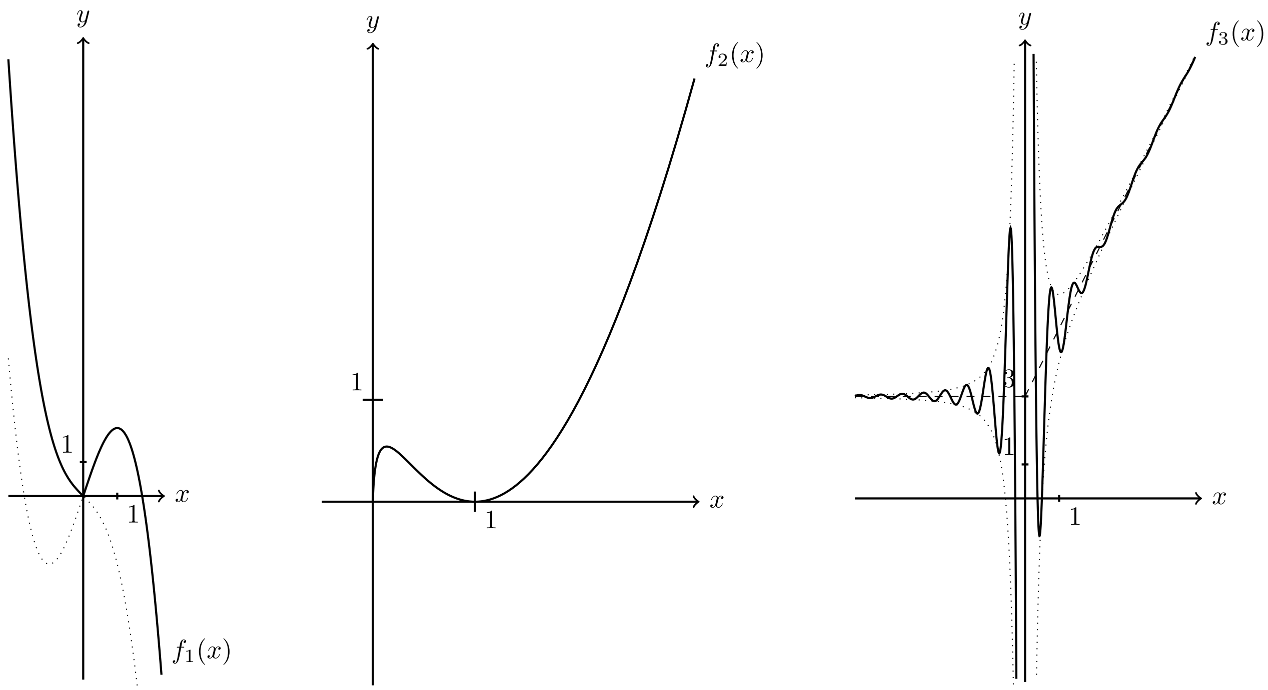
$$\lim_{x\to\infty} \tfrac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \big(2 + \tfrac{\sin(10x)}{x^3} + \tfrac{3}{x}\big) = 2\,(= k),$$

$$\lim_{x\to\infty} (f(x) - 2 \cdot x) = \lim_{x\to\infty} \big(\tfrac{\sin(10x)}{x^2} + 3\big) = 3\,(= q),$$

tedy graf funkce f má v $+\infty$ šikmou asymptotu $\underline{y = 2x + 3}$;

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \big(\tfrac{\sin(10x)}{x^2} + 3\big) = 3,$$

tedy graf funkce f má v $-\infty$ vodorovnou asymptotu $\underline{y = 3}$.



grafy funkcí $f_1(x) = (x + 2|x|) - x^3$, $f_2(x) = x \ln^2 x$ a $f_3(x) = x + |x| + \frac{\sin(10x)}{x^2} + 3$
(komentář na přednášce)

Příklad 6.5: Graf funkce $f(x) = x + \cos x$ nemá asymptoty v $\pm\infty$, protože sice

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty \qquad \text{a} \qquad \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 1,$$

ale

$$\lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - 1 \cdot x) = \lim_{x\to\pm\infty} \cos x$$

neexistuje.