

Transformace souřadnic

Odpřednesenou látku naleznete v kapitolách 9.2 a 9.3 skript
Abstraktní a konkrétní lineární algebra.

Minulá přednáška

- 1 Lineární zobrazení.
- 2 Výpočet souřadnic vzhledem k bázi je lineární zobrazení.
- 3 Matice libovolného lineárního zobrazení mezi lineárními prostory konečné dimenze vzhledem k pevně zvoleným bázím.

Dnešní přednáška

- 1 Matice transformace souřadnic v jedné bázi na souřadnice ve druhé bázi. Jde opět o matici jistého lineárního zobrazení.
- 2 Uvidíme, že pro stále více problémů je třeba se naučit řešit maticové soustavy.^a

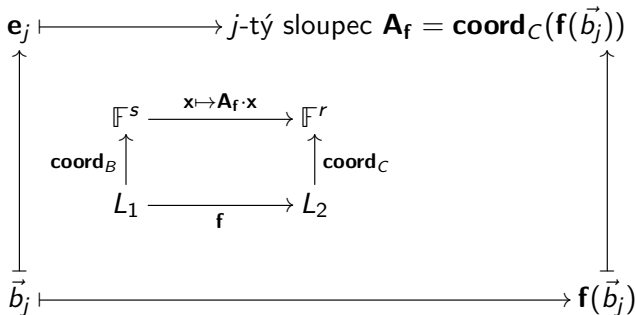
^aŘadu příkladů tedy v této přednášce nedopočítáme až do konce.

Příští přednáška

- 1 Koncepčně čistý a geometricky jasný způsob řešení soustav lineárních rovnic, maticových rovnic, atd.

Připomenutí (výpočet matice lineárního zobrazení)

Ať $\mathbf{f} : L_1 \rightarrow L_2$ je lineární zobrazení, ať $B = (\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_s)$ a $C = (\vec{c}_1, \dots, \vec{c}_r)$ jsou uspořádané báze prostorů L_1 a L_2 . Potom matice \mathbf{A}_f má r řádků a s sloupců a j -tý sloupec matice \mathbf{A}_f je tvořen souřadnicemi $\mathbf{coord}_C(\mathbf{f}(\vec{b}_j))$, zapsanými do sloupce.



Definice (matice transformace souřadnic)

Ať $B = (\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n)$ a $C = (\vec{c}_1, \dots, \vec{c}_n)$ jsou uspořádané báze prostoru L . Matici^a $\mathbf{T}_{B \mapsto C}$, která splňuje

$$\begin{array}{ccc}
 \vec{e}_j \vdash & \xrightarrow{\quad} & j\text{-tý sloupec } \mathbf{T}_{B \mapsto C} = \mathbf{coord}_C(\vec{b}_j) \\
 \uparrow & & \uparrow \\
 \begin{array}{ccc}
 \mathbb{F}^n & \xrightarrow{x \mapsto \mathbf{T}_{B \mapsto C} \cdot x} & \mathbb{F}^n \\
 \text{coord}_B \uparrow & & \uparrow \text{coord}_C \\
 L & \xrightarrow{\text{id}} & L
 \end{array} & & \\
 \vec{b}_j \vdash & \xrightarrow{\quad} & \vec{b}_j
 \end{array}$$

říkáme **matice transformace souřadnic z báze B do báze C** (také: **matice transformace souřadnic v bázi B na souřadnice v bázi C**).

^aVšimněte si značení: v dolním indexu $\mathbf{T}_{B \mapsto C}$ je šipka s patkou (bázi B „posíláme“ na bázi C).

Poznámky (základní vlastnosti matice transformace souřadnic)

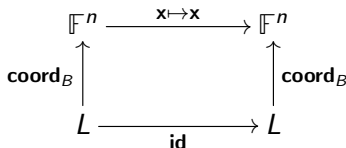
- ① Platí $\mathbf{T}_{B \mapsto C} \cdot \mathbf{coord}_B(\vec{x}) = \mathbf{coord}_C(\vec{x})$, pro každý vektor \vec{x} v L .
To plyne přímo z definice matice $\mathbf{T}_{B \mapsto C}$:

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbb{F}^n & \xrightarrow{x \mapsto \mathbf{T}_{B \mapsto C} \cdot x} & \mathbb{F}^n \\
 \uparrow \text{coord}_B & & \uparrow \text{coord}_C \\
 L & \xrightarrow{\text{id}} & L
 \end{array}$$

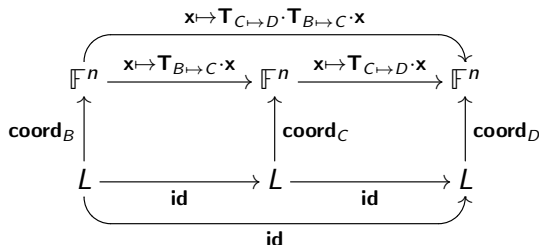
- ② Matice $\mathbf{T}_{B \mapsto C}$ je **vždy regulární**. Platí $(\mathbf{T}_{B \mapsto C})^{-1} = \mathbf{T}_{C \mapsto B}$.
To plyne z toho, že $\text{id} : L \rightarrow L$ je isomorfismus.

Poznámky (základní vlastnosti matice transformace, pokrač.)

- ③ Platí $\mathbf{T}_{B \mapsto B} = \mathbf{E}_n$. To je triviální:



- ④ Platí $\mathbf{T}_{B \mapsto D} = \mathbf{T}_{C \mapsto D} \cdot \mathbf{T}_{B \mapsto C}$. To plyne z vlastností matice složeného zobrazení:



Příklad (přepočet souřadnic vzhledem k jiné bázi)

V prostoru $\mathbb{R}^{\leq 3}[x]$ nad \mathbb{R} máme uspořádané báze $B = (x^3, x^2, x, 1)$ a $C = ((x-1)^3, (x-1)^2, x-1, 1)$.

Pro polynom $p(x) = -3x^2 + 6x + 3$ z $\mathbb{R}^{\leq 3}[x]$ hledáme $\mathbf{coord}_C(p(x))$. Víme, že $\mathbf{coord}_C(p(x)) = \mathbf{T}_{B \mapsto C} \cdot \mathbf{coord}_B(p(x))$.

Protože $\mathbf{coord}_B(p(x)) = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}$, stačí tedy znát^a matici $\mathbf{T}_{B \mapsto C}$.

$$\mathbf{T}_{B \mapsto C} = (\mathbf{T}_{C \mapsto B})^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

^aUvidíme později, že pro nalezení matice $(\mathbf{T}_{C \mapsto B})^{-1}$ lze využít **blokový tvar Gaussovy eliminace**:

$$(\mathbf{T}_{C \mapsto B} \mid \mathbf{E}_n) \sim \cdots \sim (\mathbf{E}_n \mid (\mathbf{T}_{C \mapsto B})^{-1})$$

Poznámka (konceptuální výpočet $\mathbf{T}_{B \mapsto C}$ v prostoru \mathbb{F}^n)

Ať $B = (\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n)$ a $C = (\mathbf{c}_1, \dots, \mathbf{c}_n)$ jsou libovolné báze prostoru \mathbb{F}^n .

Připomenutí: kanonická (také: standardní) báze $K_n = (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$ prostoru \mathbb{F}^n .

❶ Je snadné nalézt matice $\mathbf{T}_{B \mapsto K_n}$ a $\mathbf{T}_{C \mapsto K_n}$.

- ❶ Do j -tého sloupce $\mathbf{T}_{B \mapsto K_n}$ napíšeme souřadnice \mathbf{b}_j v kanonické bázi K_n .
- ❷ Do j -tého sloupce $\mathbf{T}_{C \mapsto K_n}$ napíšeme souřadnice \mathbf{c}_j v kanonické bázi K_n .

❷ $\mathbf{T}_{B \mapsto C} = \mathbf{T}_{K_n \mapsto C} \cdot \mathbf{T}_{B \mapsto K_n} = (\mathbf{T}_{C \mapsto K_n})^{-1} \cdot \mathbf{T}_{B \mapsto K_n}$.

Stačí tedy vyřešit^a maticovou rovnici $\mathbf{T}_{C \mapsto K_n} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{T}_{B \mapsto K_n}$.

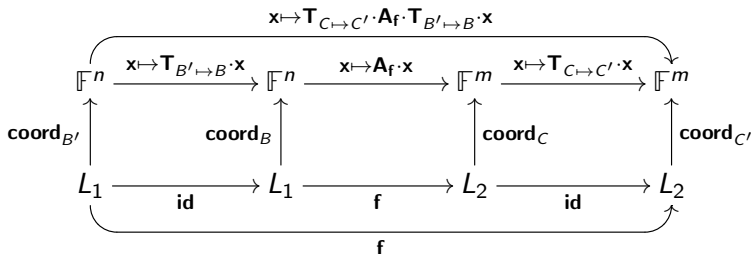
^aUvidíme později, že pro nalezení matice $(\mathbf{T}_{C \mapsto K_n})^{-1} \cdot \mathbf{T}_{B \mapsto K_n}$ lze využít blokový tvar Gaussovy eliminace:

$$(\mathbf{T}_{C \mapsto K_n} \mid \mathbf{T}_{B \mapsto K_n}) \sim \dots \sim (\mathbf{E}_n \mid (\mathbf{T}_{C \mapsto K_n})^{-1} \cdot \mathbf{T}_{B \mapsto K_n})$$

Věta (změna matice zobrazení při změně bází)

Ať $\mathbf{f} : L_1 \rightarrow L_2$ je lineární zobrazení, $\dim(L_1) = n$, $\dim(L_2) = m$.
 Ať B a B' jsou báze prostoru L_1 a ať C a C' jsou báze prostoru L_2 .
 Jestliže \mathbf{A}_f je matice \mathbf{f} vzhledem k B a C , pak součin
 $\mathbf{T}_{C \mapsto C'} \cdot \mathbf{A}_f \cdot \mathbf{T}_{B' \mapsto B}$ je matice \mathbf{f} vzhledem k B' a C' .

Důkaz.



Báze „typu easy“ v obecném lineárním prostoru a transformační matice

Ať L je lineární prostor nad \mathbb{F} dimenze n . Ať v L existuje uspořádaná báze $easy = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ taková, že hodnoty $\mathbf{coord}_{easy}(\vec{x})$ se počítají „snadno“.^a Takovým bázím budeme říkat **báze typu easy**.

Potom, pro jakoukoli uspořádanou bázi B prostoru L , lze matici $\mathbf{T}_{B \mapsto easy}$ spočítat „snadno“.

Obecnou transformační matici $\mathbf{T}_{B \mapsto C}$ pak lze spočítat jako součin

$$\mathbf{T}_{easy \mapsto C} \cdot \mathbf{T}_{B \mapsto easy} = \underbrace{\left(\mathbf{T}_{C \mapsto easy} \right)^{-1}}_{\text{snadno}} \cdot \underbrace{\mathbf{T}_{B \mapsto easy}}_{\text{snadno}}$$

^a Je jasné, že nejde o definici ve striktním smyslu. Co to znamená „snadno“?

Příklad (matice zobrazení vzhledem k „nepěkné“ bázi)

Nalezněte matici **A** zobrazení **der** : $\mathbb{R}^{\leq 3}[x] \rightarrow \mathbb{R}^{\leq 3}[x]$ vzhledem k bázi $C = (x^3 + 3x^2, 3x^2 + 4x - 23, x - 1, 42)$.

Víme, že **der** má následující matici vzhledem k $B = (x^3, x^2, x, 1)$:

$$\mathbf{A}_{\text{der}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Platí:

$$\mathbf{T}_{C \mapsto B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & -23 & -1 & 42 \end{pmatrix}$$

Tedy: $\mathbf{A} = \mathbf{T}_{B \mapsto C} \cdot \mathbf{A}_{\text{der}} \cdot \mathbf{T}_{C \mapsto B} = (\mathbf{T}_{C \mapsto B})^{-1} \cdot \mathbf{A}_{\text{der}} \cdot \mathbf{T}_{C \mapsto B}$.

Závěrečné poznámky k transformaci souřadnic

- ① **Jakoukoli** čvercovou regulární matici \mathbf{T} typu $n \times n$ nad \mathbb{F} lze považovat za matici transformace souřadnic $\mathbf{T}_{B \mapsto K_n}$, kde K_n je kanonická báze prostoru \mathbb{F}^n a báze B je tvořena sloupci matice \mathbf{T} .
- ② Je-li \mathbf{A}_f matice zobrazení $f : L_1 \rightarrow L_2$ vzhledem k bázím B a C , pak matice zobrazení f vzhledem k nějakým bázím B' a C' má tvar $\mathbf{S} \cdot \mathbf{A}_f \cdot \mathbf{T}$, pro nějaké regulární matice \mathbf{S} a \mathbf{T} .

Speciální případ: $L_1 = L_2$, $B = C$ a $B' = C'$. Pak matice \mathbf{A}_f přejde na matici tvaru $\mathbf{T}^{-1} \cdot \mathbf{A}_f \cdot \mathbf{T}$, pro nějakou regulární matici \mathbf{T} .

Poznámky (pokrač.)

- ③ Řekneme, že dvě matice **A** a **B** typu $n \times n$ nad \mathbb{F} jsou si **podobné** (značení: $\mathbf{A} \approx \mathbf{B}$), pokud platí rovnost $\mathbf{B} = \mathbf{T}^{-1} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{T}$, pro nějakou regulární matici **T**.

Podobné matice jsou tedy ty, které popisují **stejné lineární zobrazení**, každá matice jej vyjadřuje **v jiné bázi**. To využijeme při hledání vlastních hodnot lineárních zobrazení (později).

Příklad (Připomenutí příkladu z minulé přednášky)

Lineární zobrazení $\mathbf{f} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ je dáno hodnotami

$$\mathbf{f}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right) = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad \mathbf{f}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Zobrazení **f** tedy:

- ① „Prodlužuje“ $2\times$ měřítko v ose druhého a čtvrtého kvadrantu.
- ② „Zkracuje“ $3\times$ měřítko v ose prvního a třetího kvadrantu.

Příklad (pokrač.)

Vzhledem k **nekanonické** bázi $B = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ lineárního prostoru \mathbb{R}^2 má zobrazení \mathbf{f} matici

$$\mathbf{A}_{\mathbf{f}} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Vzhledem ke **kanonické** bázi K_2 lineárního prostoru \mathbb{R}^2 má zobrazení \mathbf{f} matici^a

$$\mathbf{B}_{\mathbf{f}} = \begin{pmatrix} \frac{7}{6} & -\frac{5}{6} \\ -\frac{5}{6} & \frac{7}{6} \end{pmatrix}$$

Platí: $\mathbf{A}_{\mathbf{f}} \approx \mathbf{B}_{\mathbf{f}}$.

Matice $\mathbf{A}_{\mathbf{f}}$ je „přehlednější“ než matice $\mathbf{B}_{\mathbf{f}}$ (matice $\mathbf{A}_{\mathbf{f}}$ vypovídá okamžitě o **geometrické povaze** zobrazení \mathbf{f}).

^aMinulá přednáška, téma 05A.