KAPITOLA 2: Funkce - úvod

reálná funkce (jedné) reálné proměnné ... $f : A \to \mathbb{R}$ ...
... zobrazení množiny $A \subset \mathbb{R}$ do množiny reálných čísel $\mathbb{R}$

funkční hodnota ... $y = f(x)$ (x – **argument**)
(tj. reálná funkce $f : A \to \mathbb{R}$ je „předpis“, který každému číslu x z množiny A přiřazuje právě jedno reálné číslo $y = f(x)$)

definiční obor ... $D(f)$ $(= A)$
(není-li výslovně uveden, bereme za $D(f)$ největší množinu, na níž má daný předpis smysl - tzv. *maximální definiční obor*)

obor hodnot ... $H(f) = \{ y \in \mathbb{R} \,|\, y = f(x) \text{ pro nějaké } x \in A \}$

$D(g) = A_1 \subset D(f) = A_2$, $f(x) = g(x)$ $\forall x \in D(g)$ ... $\begin{cases} g & – \ \textbf{zúžení} \text{ funkce } f \ ((\text{z } A_2) \text{ na } A_1), \\ f & – \ \textbf{rozšíření} \text{ funkce } g \ ((\text{z } A_1) \text{ na } A_2) \end{cases}$

Příklady: 1) $D(f) = \mathbb{N}$ ... **posloupnost** (více o posloupnostech bude v kapitole 13)

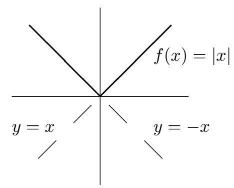
2) $f(x) = a$ $(\in \mathbb{R})$, $D(f) = \mathbb{R}$ ... **konstantní** funkce

3) $f(x) = \sin x$ ... $D(f) = \mathbb{R}$; $g(x) = \sin x$, $x \in \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle$ ... $D(g) = \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle$
g – zúžení funkce f, f – rozšíření funkce g

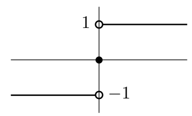
4) $f(x) = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} -1 & \text{pro } x < 0 \\ 0 & \text{pro } x = 0 \\ 1 & \text{pro } x > 0 \end{cases}$ ... **signum** (znaménko)

graf funkce f ... $\{ (x, f(x)) \,|\, x \in D(f) \}$

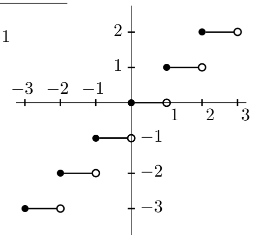
Příklady: 1) $f(x) = |x|$ ($x \geq 0 :$ $f(x) = x$; $x \leq 0 :$ $f(x) = -x$)



2) $f(x) = \operatorname{sgn} x$



3) $f(x) = [x]$



$f \leq g$ na M ... $M \subset D(f) \cap D(g)$ a $f(x) \leq g(x)$ $\forall x \in M$ (analogicky ostatní nerovnosti)

Operace s funkcemi

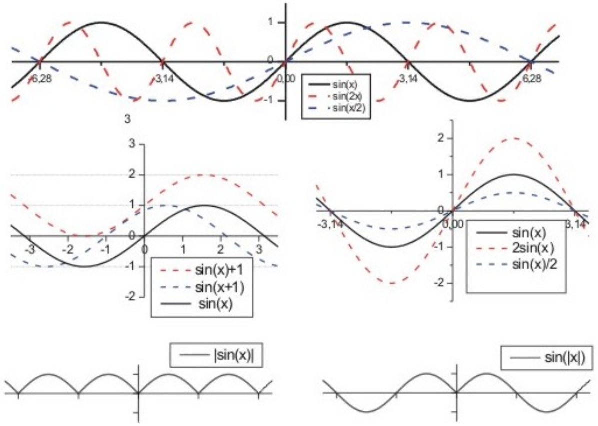
	h	$h(x)$	$D(h)$
součet	$f + g$	$f(x) + g(x)$	$D(f) \cap D(g)$
rozdíl	$f - g$	$f(x) - g(x)$	$D(f) \cap D(g)$
součin	$f \cdot g$	$f(x) \cdot g(x)$	$D(f) \cap D(g)$
podíl	$\frac{f}{g}$	$\frac{f(x)}{g(x)}$	$(D(f) \cap D(g)) \setminus \{x \,|\, g(x) = 0\}$
násobek ($a \in \mathbb{R}$)	$a \cdot f$	$a \cdot f(x)$	$D(f)$

složená funkce ... $h = g \circ f$ ... $h(x) = g(f(x))$ ... f – **vnitřní** funkce, g – **vnější** funkce

(musí platit $H(f) \subset D(g)$, proto u f někdy neuvažujeme maximální definiční obor)

vliv skládání na změnu grafu funkce ... zde je pro ilustraci pár obrázků, více viz skripta [JT-DIP] str. 28, Věta 3.31

(z technických důvodů jsou v obrázcích znázorněny násobky čísla $3,14$ místo násobků čísla π)



2.1 Vlastnosti funkcí

prostá funkce ... $f(x_1) \neq f(x_2)$ pro $x_1 \neq x_2$ (tj. $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$)

inverzní funkce ... $f_{-1}(x) = y \Leftrightarrow f(y) = x$ ... $D(f_{-1}) = H(f)$ (f musí být prostá)

Definice:

Řekneme, že funkce f je na množině $A \subset D(f)$

omezená, jestliže existuje $S \in \mathbb{R}$ tak, že pro všechna $x \in A$ platí: $|f(x)| \leq S$,

zdola omezená, jestliže existuje $L \in \mathbb{R}$ tak, že pro všechna $x \in A$ platí: $L \leq f(x)$,

shora omezená, jestliže existuje $K \in \mathbb{R}$ tak, že pro všechna $x \in A$ platí: $f(x) \leq K$.

(Je-li $A = D(f)$, vynecháváme v názvu: „na množině A“. Podobně i u dalších pojmů.)

Poznámka: Funkce je na množině A omezená, právě když je na ní omezená zdola i shora. Funkce je omezená právě tehdy, když je její obor hodnot omezená množina (analogicky funkce omezené z jedné strany).

Příklad 2.1: Funkce $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$ je omezená. Pro každé $x \in \mathbb{R} = D(f)$ totiž platí např. $0 \leq \frac{1}{x^2+1} \leq 1$ nebo také $|f(x)| \leq 1$.

Definice:

Řekneme, že funkce f je na množině $A \subset D(f)$

neklesající, jestliže $f(x_1) \leq f(x_2)$ $\forall x_1, x_2 \in A,\ x_1 < x_2$,

nerostoucí, jestliže $f(x_1) \geq f(x_2)$ $\forall x_1, x_2 \in A,\ x_1 < x_2$,

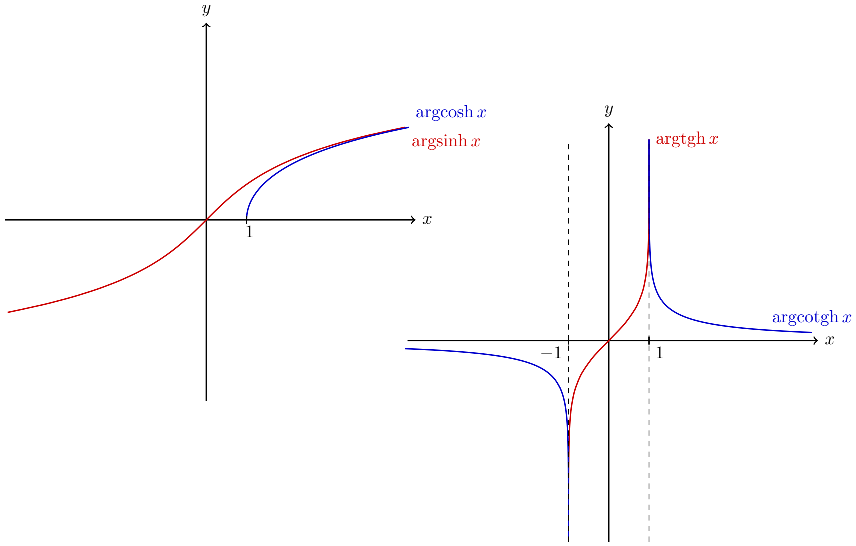
monotonní, je-li na A neklesající nebo nerostoucí,

rostoucí, jestliže $f(x_1) < f(x_2)$ $\forall x_1, x_2 \in A,\ x_1 < x_2$,

klesající, jestliže $f(x_1) > f(x_2)$ $\forall x_1, x_2 \in A,\ x_1 < x_2$,

ryze monotonní, je-li na A rostoucí nebo klesající.

Poznámka: Každá funkce rostoucí na A je na A neklesající, každá funkce klesající na A je na A nerostoucí, a tedy každá funkce ryze monotonní na A je na A monotonní. Zřejmě žádná funkce není na jedné množině rostoucí a klesající zároveň, nerostoucí a zároveň neklesající jsou jen konstantní funkce.



grafy hyperbolometrických funkcí

Vyjádření hyperbolometrických funkcí pomocí logaritmů

- $\operatorname{argsinh} x \;=\; \ln(x + \sqrt{x^2+1}\,), \qquad x \in \mathbb{R}$
- $\operatorname{argcosh} x \;=\; \ln(x + \sqrt{x^2-1}\,), \qquad x \in \langle 1, \infty)$
- $\operatorname{argtgh} x \;=\; \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right), \qquad x \in (-1, 1)$ (viz Příklad 2.2)
- $\operatorname{argcotgh} x \;=\; \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{x-1}\right), \qquad x \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$

Příklad 2.2: Pro $|x| < 1$ vyjádřete $\operatorname{argtgh} x$ pomocí logaritmické funkce.

Řešení: Označíme $y = \operatorname{argtgh} x$. Pak

$$x = \operatorname{tgh} y = \frac{e^y - e^{-y}}{e^y + e^{-y}}\,.$$

Po rozšíření zlomku výrazem e^y postupně dostáváme

$$\begin{aligned} x &= \frac{e^{2y}-1}{e^{2y}+1} \\ (e^{2y}+1)x &= e^{2y}-1 \\ (x-1)\,e^{2y} &= -1-x \\ e^{2y} &= \frac{-1-x}{x-1} \\ e^{2y} &= \frac{1+x}{1-x} \\ 2y &= \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right). \end{aligned}$$

Tedy

$$\operatorname{argtgh} x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right).$$

Platí: Pokud je funkce f ryze monotonní na $D(f)$, pak je prostá a existuje k ní inverzní funkce f_{-1}. Funkce f_{-1} má přitom stejný typ monotonie jako f. Abychom si to ověřili, uvažujme např. funkci f, která je klesající (pro rostoucí funkci bychom postupovali analogicky), a libovolnou dvojici různých čísel $u_1, u_2 \in D(f_{-1})$. Označíme-li $f_{-1}(u_1) = v_1$, $f_{-1}(u_2) = v_2$, pak z definice inverzní funkce máme $v_1, v_2 \in D(f)$ a $f(v_1) = u_1, f(v_2) = u_2$. Funkce f je klesající, tedy rozdíly $v_2 - v_1$ a $f(v_2) - f(v_1)$ mají různá znaménka. Protože $\big(f(v_1) - f(v_2)\big)(v_1 - v_2) = (u_1 - u_2)\big(f_{-1}(u_1) - f_{-1}(u_2)\big)$, mají různá znaménka i rozdíly $u_2 - u_1$ a $f(u_1) - f(u_2)$. Takže funkce f_{-1} je také klesající.

Příklady: 1) Funkce $f(x) = [x]$ je neklesající na celém svém $D(f) = \mathbb{R}$, je ale také rostoucí např. na $\mathbb{Z}$ (protože $f(k) = k$ pro $k \in \mathbb{Z}$) nebo na $\{k + \frac{1}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\}$ (neboť $f(k + \frac{1}{2}) = k$ pro $k \in \mathbb{Z}$).

2) Funkce $f(x) = \frac{1}{x}$ není klesající na celém definičním oboru $D(f) = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$, protože např. $-1 < 1$ a $f(-1) = -1 \not> 1 = f(1)$. Tato funkce je ale klesající na každém z intervalů $(-\infty, 0)$ a na $(0, \infty)$. Je-li totiž $x > y$, pak $f(x) - f(y) = (\frac{1}{x} - \frac{1}{y}) = \frac{y-x}{xy} = (y - x) \cdot \frac{1}{xy}$, kde $(y - x) < 0$ a pro $\operatorname{sgn} x = \operatorname{sgn} y$ platí $\frac{1}{xy} > 0$.

Poznámka: Budeme-li dále mluvit o intervalech, nebudeme brát v úvahu intervaly jednobodové (tj. typu $\langle a, a\rangle$).

Definice:

Řekneme, že funkce f je **sudá**, jestliže pro každé $x \in D(f)$ platí: $-x \in D(f)$ a $f(-x) = f(x)$.

Řekneme, že funkce f je **lichá**, jestliže pro každé $x \in D(f)$ platí: $-x \in D(f)$ a $f(-x) = -f(x)$.

Poznámky: 1) Pokud je funkce f lichá a $0 \in D(f)$, pak $f(0) = 0$. Je-li f sudá a $D(f) \neq \{0\}$, pak f není prostá.
2) „ sudá · sudá = lichá · lichá = sudá “, „ sudá · lichá = lichá · sudá = lichá “

Definice:

Řekneme, že funkce f je **periodická s periodou** $T > 0$, jestliže pro každé $x \in D(f)$ platí

$$x \pm T \in D(f) \qquad \text{a} \qquad f(x + T) = f(x) \;\big(= f(x - T)\big)$$

základní perioda . . . nejmenší perioda (pokud existuje)

- nemají ji např.: **konstantní** funkce (periodou je každé kladné číslo),
Dirichletova funkce: $f(x) = 1$ pro $x \in \mathbb{Q}$, $f(x) = 0$ pro $x \notin \mathbb{Q}$ (periodou je každé kladné racionální číslo)

Poznámka: Pokud je T perioda funkce f a $k \in \mathbb{N}$, pak $k \cdot T$ je také perioda funkce f.

2.3 Elementární funkce

podrobně viz skripta [JT-DIP] strany 30 - 40 (32 - 42) (je potřeba znát dobře grafy !)

1. Mocnina. Funkce x^α, a^x, $\log_a x$

Mocniny s racionálními exponenty

- $\underline{n \in \mathbb{N}}$: $\quad a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{\text{n−krát}}$ $\quad \underline{a \in \mathbb{R}}$
- $\underline{m \in \mathbb{N}}$: sudé $\quad a^{\frac{1}{m}} = \sqrt[m]{a}\; (= y \;\Leftrightarrow y^m = a \text{ a } y \geq 0)$ $\quad \underline{a \in \langle 0, \infty)}$
  liché $\quad a^{\frac{1}{m}} = \sqrt[m]{a}\; (= y \;\Leftrightarrow y^m = a)$ $\quad \underline{a \in \mathbb{R}}$
- $\underline{m,\ n \in \mathbb{N},\ \text{nesoudělná}}$: $\quad a^{\frac{n}{m}} = (\sqrt[m]{a})^n$ $\quad \underline{a \in \langle 0, \infty)}$ pro m sudé; $\underline{a \in \mathbb{R}}$ pro m liché
- $\underline{q \in \mathbb{Q}^+}$: $\quad a^{-q} = \frac{1}{a^q}$ $\quad \underline{a \neq 0}$ a podmínky z a^q
- $a^0 = 1$ $\quad \underline{a \in \mathbb{R}}$

Mocniny s reálnými exponenty

Pro $a > 0$ definujeme: $a^\alpha = \lim_{n\to\infty} a^{\alpha_n}$, kde $(\alpha_n)_{n=1}^\infty \subset \mathbb{Q}$ je taková posloupnost, že $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = \alpha$.

Poznámka: Lze ukázat, že taková posloupnost konvergující k α vždy existuje a že na jejím výběru uvedená limita nezávisí. Dále zřejmě vždy dostaneme $a^\alpha > 0$.

(Pokud jste se ještě nesetkali s limitami posloupnosti, vraťte se k této definici a poznámce, až budeme probírat posloupnosti na přednášce.)

Vlastnosti jsou stejné jako u racionálních exponentů $(a,\ b > 0,\quad r,\ s \in \mathbb{R})$:

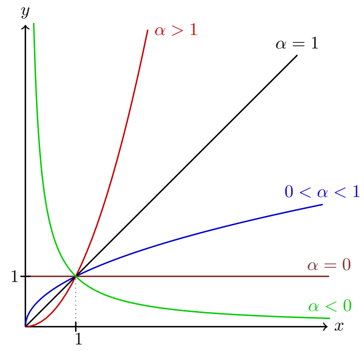
- $(a\,b)^r = a^r\, b^r\,;\qquad \left(\frac{a}{b}\right)^r = \frac{a^r}{b^r}$
- $a^{r+s} = a^r\, a^s$
- $a^{r\,s} = (a^r)^s$
- $a^{-r} = \frac{1}{a^r}$

A) MOCNINNÁ FUNKCE

$f(x) = x^\alpha \quad \dots \quad \alpha \in \mathbb{R}$ – pevné

pro α racionální: $D(f)$ a $H(f)$ závisí na α (viz výše), vždy $(0,\infty) \subset D(f)$ a pro $\alpha \neq 0$ též $(0,\infty) \subset H(f)$

pro α iracionální: $D(f) = (0,\infty)$, $H(f) = (0,\infty)$



graf zúžení funkce $f(x) = x^\alpha$ na interval $\langle 0,\infty)$ resp. $(0,\infty)$

B) EXPONENCIÁLNÍ FUNKCE (o základu a)

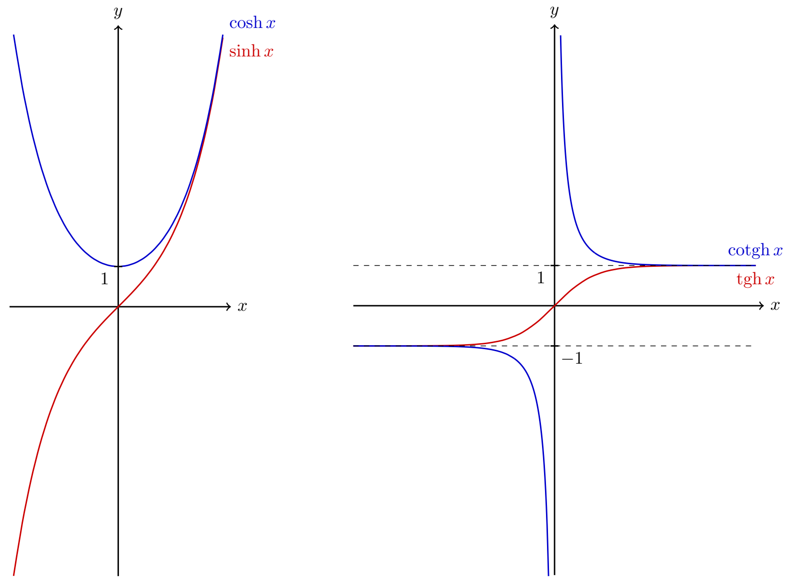
$f(x) = a^x \quad \dots \quad a > 0$ – pevné

$D(f) = \mathbb{R}$, $H(f) = (0,\infty)$ pro $a \neq 1$, $H(f) = \{1\}$ pro $a = 1$

speciálně pro $a = \mathrm{e}$ (Eulerovo číslo) značíme $\mathrm{e}^x = \exp(x)$ … exponenciální funkce

($\mathrm{e} \doteq 2{,}718$, definuje se předpisem $\mathrm{e} = \lim_{n\to\infty} (1 + \frac{1}{n})^n$ - viz skripta [JT-DIP] příklad **2.36**)

Poznámka: Kdybychom zúžili definiční obor funkce a^x na přirozená čísla, dostali bychom geometrickou posloupnost $(a_n^n)_{n=1}^\infty$ s prvním členem a a kvocientem také a.



grafy hyperbolických funkcí

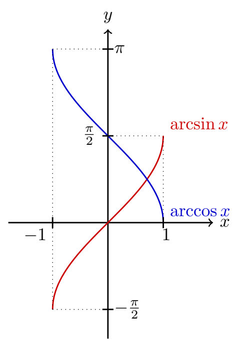
Vybrané vlastnosti funkcí $\sinh x$ **a** $\cosh x$**:**

- $|\sinh x| < \cosh x$
- $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$
- $\sinh 2x = 2 \sinh x \cosh x$
  $\cosh 2x = \cosh^2 x + \sinh^2 x$

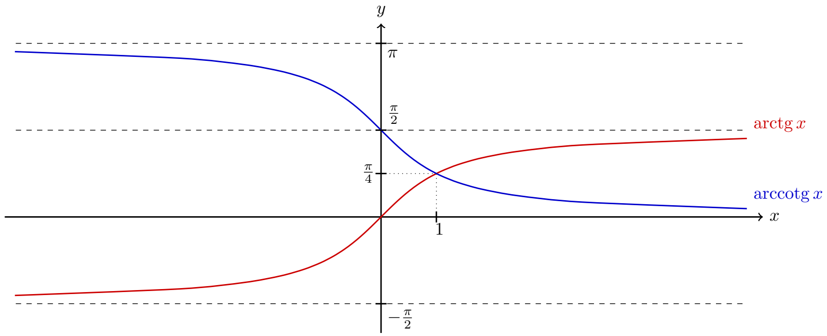
B) HYPERBOLOMETRICKÉ FUNKCE

(inverzní k hyperbolickým, případně zúženým na vhodný interval)

f	$D(f)$	$H(f)$	f_{-1}	$D(f_{-1})$	$H(f_{-1})$
$\sinh x$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\operatorname{argsinh} x$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
$\cosh x$	$\langle 0,\infty)$	$\langle 1,\infty)$	$\operatorname{argcosh} x$	$\langle 1,\infty)$	$\langle 0,\infty)$
$\operatorname{tgh} x$	$\mathbb{R}$	$(-1,\ 1)$	$\operatorname{argtgh} x$	$(-1,\ 1)$	$\mathbb{R}$
$\operatorname{cotgh} x$	$\mathbb{R}\setminus\{0\}$	$(-\infty,\ -1) \cup (1,\ \infty)$	$\operatorname{argcotgh} x$	$(-\infty,\ -1) \cup (1,\ \infty)$	$\mathbb{R}\setminus\{0\}$



grafy funkcí $\arcsin x$ a $\arccos x$

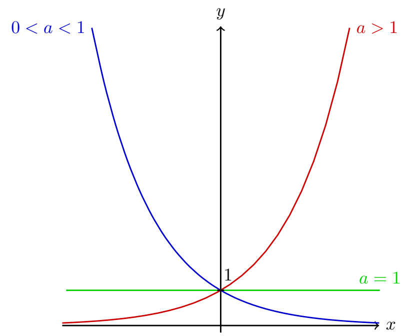


grafy funkcí $\operatorname{arctg} x$ a $\operatorname{arccotg} x$

3. Hyperbolické a hyperbolometrické funkce

A) HYPERBOLICKÉ FUNKCE

f	$D(f)$	$H(f)$
$\sinh x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
$\cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$	$\mathbb{R}$	$\langle 1, \infty)$
$\operatorname{tgh} x = \dfrac{\sinh x}{\cosh x} = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$	$\mathbb{R}$	$(-1, 1)$
$\operatorname{cotgh} x = \dfrac{\cosh x}{\sinh x} = \dfrac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$	$(-\infty, -1) \cup (1\ \infty)$



graf funkce $f(x) = a^x$

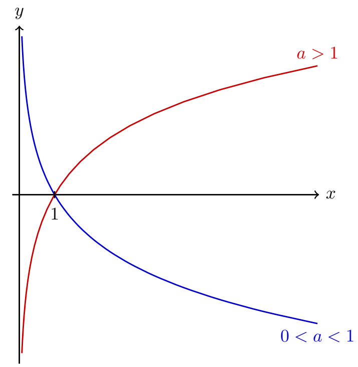
C) LOGARITMICKÁ FUNKCE (o základu a)

(inverzní funkce k exponenciální funkci)

$\log_a x = y \quad \Leftrightarrow \quad a^y = x \quad \dots \quad a > 0,\ a \neq 1$ – pevné (pro $a = 1$ není funkce a^x prostá!)

$D(f) = (0, \infty), \qquad H(f) = \mathbb{R}$

speciálně pro $a = \mathrm{e}$ značíme $\log_{\mathrm{e}} x = \ln x$ ... přirozený logaritmus



graf funkce $f(x) = \log_a x$

Vlastnosti logaritmů ($a, b > 0,\ a, b \neq 1;\quad x, y > 0;\quad r \in \mathbb{R}$):

- $\log_a \left(\dfrac{1}{x}\right) = -\log_a x$
- $\log_a (x\,y) = \log_a x + \log_a y$
- $\log_a \left(\dfrac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$
- $\log_a x^r = r \log_a x$
- $\log_a x = \dfrac{\log_b x}{\log_b a}$, speciálně: $\log_a x = \dfrac{\ln x}{\ln a}$

(máme $\log_a x = y \Leftrightarrow x = a^y \Leftrightarrow \log_b x = \log_b a^y \Leftrightarrow \log_b x = y \log_b a^y \Leftrightarrow \log_b x = \log_a x \cdot \log_b a$)

Platí: $a^x \;=\; \mathrm{e}^{x\ln a}$ pro $a>0,\ x\in\mathbb{R}$

(protože $\mathrm{e}^{x\ln a} = \mathrm{e}^{\ln a^x}$ a přirozený logaritmus je funkce inverzní k e^x)

2. Goniometrické a cyklometrické funkce

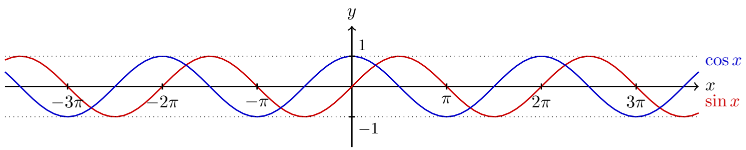
A) GONIOMETRICKÉ FUNKCE

$\sin x$ … $D(f)=\mathbb{R}$, $H(f)=\langle -1,\,1\rangle$, lichá, 2π-periodická

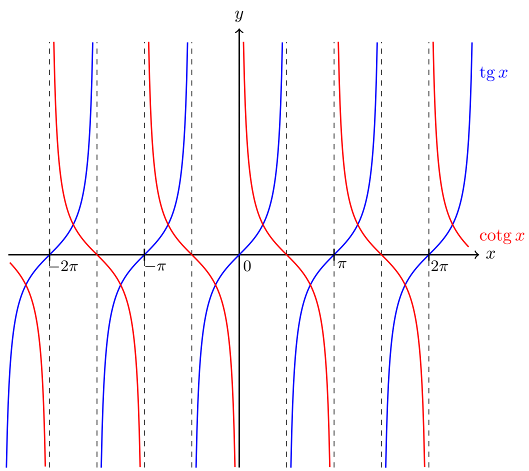
$\cos x$ … $D(f)=\mathbb{R}$, $H(f)=\langle -1,\,1\rangle$, sudá, 2π-periodická

$\operatorname{tg} x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ … $D(f)=\bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}}(-\dfrac{\pi}{2}+k\pi,\dfrac{\pi}{2}+k\pi)$, $H(f)=\mathbb{R}$, lichá, π-periodická

$\operatorname{cotg} x = \dfrac{\cos x}{\sin x}$ … $D(f)=\bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}}(k\pi,(k+1)\pi)$, $H(f)=\mathbb{R}$, lichá, π-periodická



grafy funkcí $\sin x$ a $\cos x$



grafy funkcí $\operatorname{tg} x$ a $\operatorname{cotg} x$

Vybrané vlastnosti funkcí $\sin x$ a $\cos x$:

- $\sin x \;=\; \cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$ $\qquad \cos x \;=\; \sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$
- $\sin^2 x+\cos^2 x \;=\; 1$
- $\sin 2x \;=\; 2\sin x\,\cos x$ $\qquad \cos 2x \;=\; \cos^2 x-\sin^2 x$
- $\sin^2 x \;=\; \frac{1}{2}\,(1-\cos 2x)$ $\qquad \cos^2 x \;=\; \frac{1}{2}\,(1+\cos 2x)$

- $\sin(x\pm y) \;=\; \sin x\,\cos y \pm \cos x\,\sin y$ $\qquad \cos(x\pm y) \;=\; \cos x\,\cos y \mp \sin x\,\sin y$
- $\sin x+\sin y \;=\; 2\sin\frac{x+y}{2}\,\cos\frac{x-y}{2}$ $\qquad \sin x-\sin y \;=\; 2\cos\frac{x+y}{2}\,\sin\frac{x-y}{2}$
  $\cos x+\cos y \;=\; 2\cos\frac{x+y}{2}\,\cos\frac{x-y}{2}$ $\qquad \cos x-\cos y \;=\; -2\sin\frac{x+y}{2}\,\sin\frac{x-y}{2}$

Ze vzorce pro součet sinů máme

$$\sin A\cdot\cos B = \tfrac{1}{2}\,(\sin x+\sin y),$$

kde $A=\frac{x+y}{2}$, $B=\frac{x-y}{2}$, tj. $x=A+B,\ y=A-B$. Tedy

$$\sin A\cdot\cos B = \tfrac{1}{2}\,(\sin(A+B)+\sin(A-B)).$$

Podobně lze převést na součet nebo rozdíl i součin sinů a součin kosinů – dostaneme:

$$\cos A\cdot\cos B = \tfrac{1}{2}\,(\cos(A+B)+\cos(A-B)) \quad \text{a} \quad \sin A\cdot\sin B = -\tfrac{1}{2}\,(\cos(A+B)-\cos(A-B)).$$

(Tento přepis se hodí při integraci uvedených součinů).

Základní hodnoty goniometrických funkcí

	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\operatorname{tg} x$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\times$	-1	0	1	$\times$	-1
$\operatorname{cotg} x$	$\times$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	-1	$\times$	1	0	-1

B) CYKLOMETRICKÉ FUNKCE

(inverzní ke goniometrickým zúženým na vhodný interval)

f	$D(f)$	$H(f)$	f_{-1}	$D(f_{-1})$	$H(f_{-1})$
$\sin x$	$\left\langle -\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right\rangle$	$\langle -1,1\rangle$	$\arcsin x$	$\langle -1,1\rangle$	$\left\langle -\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right\rangle$
$\cos x$	$\langle 0,\pi\rangle$	$\langle -1,1\rangle$	$\arccos x$	$\langle -1,1\rangle$	$\langle 0,\pi\rangle$
$\operatorname{tg} x$	$\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$	$\mathbb{R}$	$\operatorname{arctg} x$	$\mathbb{R}$	$\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$
$\operatorname{cotg} x$	$(0,\pi)$	$\mathbb{R}$	$\operatorname{arccotg} x$	$\mathbb{R}$	$(0,\pi)$

Poznámka: Je potřeba mít na paměti, že cyklometrické funkce nejsou inverzními funkcemi ke goniometrickým funkcím jako takovým, ale jen k jejich zúžením na určitý interval. Máme tak sice např. $\arcsin(\sin 0) = \arcsin 0 = 0$, ale $\arcsin(\sin(\pi)) = \arcsin 0 = 0 \neq \pi$, $\arcsin\left(\sin\left(\frac{3}{2}\pi\right)\right) = \arcsin(-1) = -\frac{\pi}{2} \neq \frac{3}{2}\pi$. Rozmyslete si, že pro funkci arctg platí:

Je-li $x\in(-\frac{\pi}{2}+k\pi,\frac{\pi}{2}+k\pi)$, kde $k\in\mathbb{Z}$, pak $x=\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x)+k\pi$.

Bude se nám to hodit, až budeme počítat integrály pomocí metody substitice a použijem substituci $t=\operatorname{tg} x$.