KAPITOLA 10: Aplikace určitého integrálu

10.1 V rovině

Obsah plochy

Věta 10.1:
Nechť f a g jsou na $\langle a,\, b\rangle$ spojité a $f \le g$. Pak obsah plochy ohraničené přímkami $x = a$, $x = b$ a grafy funkcí f, g (tj. množiny $\{\,[x,y] \in \mathbb{R}^2 \,|\, a \le x \le b,\ f(x) \le y \le g(x)\,\}$) je roven

$$S = \int_a^b \big(g(x) - f(x)\big)\,\mathrm{d}x.$$

Příklad 10.1: Vypočtěte obsah plochy omezené elipsou s poloosami a, b.

Řešení: Z rovnice elipsy $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$ dostáváme $y = \pm b\sqrt{1 - (\frac{x}{a})^2}$. Elipsa je tak tvořena grafy funkcí $f(x) = -b\sqrt{1 - (\frac{x}{a})^2}$ a $g(x) = b\sqrt{1 - (\frac{x}{a})^2}$ na intervalu $\langle -a,\, a\rangle$. Máme tedy při použití substituce $\frac{x}{a} = \sin t$, $t \in \langle -\frac{\pi}{2}\,,\, \frac{\pi}{2}\,\rangle$ ($\frac{1}{a}\,\mathrm{d}x = \cos t\,\mathrm{d}t$)

$$S \;=\; \int_{-a}^{a} \Big(b\sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2} - \Big(-b\sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2}\Big)\Big)\,\mathrm{d}x \;=\; 2b\int_{-a}^{a} \sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2}\,\mathrm{d}x \;=\; 2ba\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\,\mathrm{d}t \;=$$

$$=\; 2ba\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2t)\,\mathrm{d}t \;=\; \dots \;=\; 2b\,\frac{\pi a}{2} \;=\; \pi ab.$$

Příklad 10.2: Vypočtěte obsah plochy omezené grafy funkcí $f(x) = 9 - x$ a $g(x) = \dfrac{8}{x}$.

Poznámka: Vzorec z Věty 10.1 lze použít i v případě neuzavřených a/nebo neomezených intervalů (totéž platí i pro další vzorce).

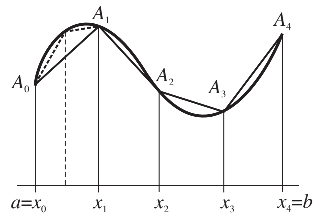
Příklad 10.3: Vypočtěte obsah plochy mezi osou x a grafem funkce $f(x) = \ln x$ na intervalu $(0,\, 1\rangle$.

Délka grafu

Nechť f je spojitá na $\langle a,\, b\rangle$, $\mathcal{D} = \{x_0, \dots, x_n\}$ je dělení intervalu $\langle a,\, b\rangle$ a $A_i = [x_i, f(x_i)]$.

Pak označíme

$$s(f, \mathcal{D}) \;=\; \sum_{i=1}^{n} \underbrace{d\,(A_i, A_{i-1})}_{\text{vzdálenost bodů } A_i, A_{i-1}} \quad .$$



Je-li $\mathcal{D}'$ zjemnění dělení $\mathcal{D}$, pak z trojúhelníkové nerovnosti zřejmě platí

$$s(f, \mathcal{D}') \ge s(f, \mathcal{D}).$$

Délku grafu funkce f na intervalu $\langle a,\, b\rangle$ tedy můžeme definovat předpisem:

$$\ell \;=\; \sup_{\mathcal{D}}\; s(f, \mathcal{D}), \qquad \text{je – li suprémum konečné.}$$

Věta 10.2:
Nechť f má spojitou derivaci na $\langle a,\, b\rangle$. Pak délka grafu funkce f na intervalu $\langle a,\, b\rangle$ je rovna

$$\ell = \int_a^b \sqrt{1 + \big(f'(x)\big)^2}\,\mathrm{d}x.$$

Příklad 10.4: Vypočtěte délku grafu funkce $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^3}}{3}$ na intervalu $\langle 12,\, 32\rangle$.

Příklad 10.5: Vypočtěte délku L kruhového oblouku o poloměru R odpovídajícího středovému úhlu $\alpha \in \langle 0,\, 2\pi\rangle$.

(Řešení příkladu je na další straně.)

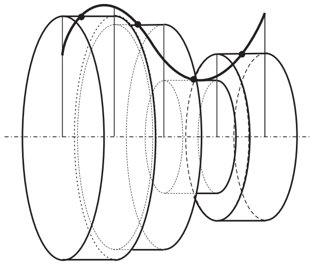
Řešení příkladu 10.5: Máme $L = 2\ell$, kde ℓ je délka grafu funkce $f(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$ na intervalu $\langle R\cos\frac{\alpha}{2}\,,\, R\rangle$. (Nakreslete si obrázek: střed kružnice umístěte do bodu $[0,0]$, střed oblouku do bodu $[R,0]$. Funkce f popisuje horní část kružnice.) Máme $f'(x) = \frac{1}{2}\,\frac{1}{\sqrt{R^2-x^2}}\,(-2x) = -\frac{x}{\sqrt{R^2-x^2}}$. Tedy

$$\ell = \int_{R\cos\frac{\alpha}{2}}^{R} \sqrt{1 + \frac{x^2}{R^2 - x^2}}\,\mathrm{d}x = \int_{R\cos\frac{\alpha}{2}}^{R} \sqrt{\frac{R^2}{R^2 - x^2}}\,\mathrm{d}x = \int_{R\cos\frac{\alpha}{2}}^{R} \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{R}\right)^2}}\,\mathrm{d}x =$$

$$= \Big[-R\arccos\frac{x}{R}\Big]_{R\cos\frac{\alpha}{2}}^{R} = \Big(-R\arccos 1 + R\arccos\Big(\cos\frac{\alpha}{2}\Big)\Big) = 0 + R\frac{\alpha}{2} = R\frac{\alpha}{2}\,.$$

Odtud dostáváme $L = 2\ell = R\alpha$. Tedy speciálně pro $\alpha = 2\pi$, kdy je obloukem celá kružnice, máme $L = 2\pi R$.

10.2 V prostoru: Rotační tělesa a plochy



Objem válce o poloměru podstavy R a výšce v :

$$V = \pi R^2 v$$

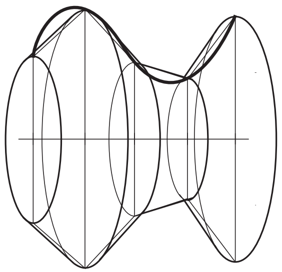
$$v \approx \mathrm{d}x, \quad R \approx f(x)$$

Obsah pláště komolého kužele s poloměry podstav $R_1,\ R_2$ a výškou v :

$$Q = \pi\sqrt{v^2 + (R_1 - R_2)^2}\,(R_1 + R_2) =$$

$$= 2\pi v\frac{(R_1 + R_2)}{2}\sqrt{1 + \Big(\frac{R_1 - R_2}{v}\Big)^2}$$

$$v \approx \mathrm{d}x, \quad \frac{(R_1 + R_2)}{2} \approx f(x), \quad \frac{R_1 - R_2}{v} \approx f'(x)$$



Věta 10.3:

Nechť f je kladná spojitá funkce na $\langle a, b\rangle$. Pak:

a) Objem tělesa, které vzniklo rotací kolem osy x plochy ohraničené přímkami $x = a$, $x = b$, $y = 0$ a grafem funkce f, je

$$V = \pi\int_a^b \big(f(x)\big)^2\,\mathrm{d}x.$$

b) Obsah plochy vzniklé rotací grafu funkce f kolem osy x je

$$Q = 2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1 + \big(f'(x)\big)^2}\,\mathrm{d}x.$$

Příklad 10.6: Vypočtěte objem elipsoidu vzniklého rotací elipsy s poloosami a, b kolem osy a) hlavní, b) vedlejší.

Příklad 10.7: Vypočtěte obsah kulové plochy o poloměru R.

Příklad 10.8: Vypočtěte objem anuloidu vzniklého rotací kruhu $\{\,[x,y]\,|\,x^2 + (y - 2R)^2 \le R^2\,\}$ kolem osy x.