

KAPITOLA 7: Primitivní funkce

7.1 Úvod

Definice:

Funkce F je **primitivní funkcí** k funkci f na intervalu I , jestliže pro každé $x \in I$ existuje $F'(x)$ a platí

$$F'(x) = f(x).$$

Poznámky:

- 1) Obsahuje-li I některý z krajních bodů, rozumíme pod $F'(x)$ v krajním bodě příslušnou jednostrannou derivaci.
- 2) F je **spojitá** na I , protože má v každém bodě intervalu I vlastní derivaci.

Věta 7.1:

- a) Je-li F primitivní funkcí k funkci f na intervalu I , potom pro každé $c \in \mathbb{R}$ je $F + c$ také primitivní funkcí k funkci f na intervalu I .
- b) Jsou-li F a G primitivní funkce k funkci f na intervalu I , pak existuje $c \in \mathbb{R}$ takové, že

$$G = F + c \quad (\text{tj. } G(x) = F(x) + c \quad \forall x \in I).$$

Příklad 7.1: Ve Větě 7.1, b) je podstatné, že I je interval.

neurčitý integrál funkce f na intervalu I

... $\int f(x) dx$ $\left(\int f dx \right)$... množina všech
primitivních funkcí k funkci f na intervalu I

\int ... integrační znak

$f(x)$... integrand

x ... integrační proměnná

Příklad 7.2: a) Ukažte, že funkce $f(x) = \operatorname{sgn} x$ nemá primitivní funkci na žádném intervalu (a, b) obsahujícím nulu.

Řešení: Každá primitivní funkce je spojitá. Ukážeme tedy, že pokud je funkce F spojitá na (a, b) a $F' = f$ na $(a, b) \setminus \{0\}$, pak neexistuje $F'(0)$, tj. F není primitivní funkce k funkci $f(x) = \operatorname{sgn} x$ na (a, b) . Máme

$$F'(x) = 1 \quad (= \operatorname{sgn} x) \quad \forall x \in (0, b)$$

$$F'(x) = -1 \quad (= \operatorname{sgn} x) \quad \forall x \in (a, 0)$$

Tedy podle Věty 4.5 platí

$$F'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} F'(x) = 1$$

$$F'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} F'(x) = -1,$$

což ovšem znamená, že $F'(0)$ neexistuje.

Příklad 7.2: b) Funkce

$$\begin{aligned} f(x) &= 2x \cos \frac{1}{x} + \sin \frac{1}{x} \quad \text{pro } x \neq 0, \\ f(0) &= 0 \end{aligned}$$

má primitivní funkci na \mathbb{R} , i když není na \mathbb{R} spojitá – má nespojitost v nule.

Podle **Příkladu 4.8** je primitivní funkcí k funkci f např. funkce

$$\begin{aligned} F(x) &= x^2 \cos \frac{1}{x} \quad \text{pro } x \neq 0, \\ F(0) &= 0. \end{aligned}$$

Věta 7.2:

Je-li funkce f spojitá na intervalu I , pak existuje k funkci f primitivní funkce na intervalu I .

Poznámka:

Primitivní funkce k funkcím

$$e^{-x^2}, \quad \sin(x^2), \quad \cos(x^2), \quad \frac{e^x}{x}, \quad \frac{\sin x}{x}, \quad \frac{\cos x}{x}, \quad \frac{1}{\ln x}$$

nelze vyjádřit pomocí elementárních funkcí v konečném tvaru.

$f(x)$	$F(x)$ *	I
$A \quad (A \in \mathbb{R})$	Ax	\mathbb{R}
x^α	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$	$\mathbb{R} \quad \text{pro } \alpha \in \mathbb{N}_0$ $(-\infty, 0), (0, \infty) \quad \text{pro } \alpha \in \mathbb{Z}, \alpha < -1$ $(0, \infty) \quad \text{pro } \alpha \notin \mathbb{Z}^*)$
$\frac{1}{x}$	$\ln x $	$(-\infty, 0), (0, \infty)$
e^x	e^x	\mathbb{R}
$a^x \quad \left(\begin{matrix} a > 0 \\ a \neq 1 \end{matrix} \right)$	$\frac{a^x}{\ln a}$	\mathbb{R}

*) ... pro některé racionální exponenty lze brát též $I = (-\infty, 0)$

$f(x)$	$F(x)$ např.	I
$\sin x$	$-\cos x$	\mathbb{R}
$\cos x$	$\sin x$	\mathbb{R}
$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\operatorname{tg} x$	$\left(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right); k \in \mathbb{Z}$
$-\frac{1}{\sin^2 x}$	$\operatorname{cotg} x$	$(k\pi, (k+1)\pi); k \in \mathbb{Z}$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x$ $-\arccos x$	$(-1, 1)$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\operatorname{arctg} x$ $-\operatorname{arccotg} x$	\mathbb{R}

$f(x)$	$F(x)$ např.	I
$\sinh x$	$\cosh x$	\mathbb{R}
$\cosh x$	$\sinh x$	\mathbb{R}
$\frac{1}{\cosh^2 x}$	$\operatorname{tgh} x$	\mathbb{R}
$\frac{1}{\sinh^2 x}$	$-\operatorname{cotgh} x$	$(-\infty, 0), (0, \infty)$
$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$\operatorname{argsinh} x$	\mathbb{R}
$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$\operatorname{argcosh} x$ $-\operatorname{argcosh} (-x)$	$(1, \infty)$ $(-\infty, -1)$

7.2 Základní metody hledání primitivní funkce

Věta 7.3 (o linearitě):

Nechť F je primitivní funkce k funkci f na intervalu I , G primitivní funkce ke funkci g na intervalu I a $\alpha \in \mathbb{R}$. Pak

a) $F + G$ je primitivní funkcí k $f + g$ na I , tj.

$$\int (f + g) dx = \int f dx + \int g dx,$$

b) $\alpha \cdot F$ je primitivní funkcí k $\alpha \cdot f$ na I , tj.

$$\int \alpha \cdot f dx = \alpha \cdot \int f dx.$$

Integrace per partes

Věta 7.4 (integrace per partes):

Nechť mají funkce u , v vlastní derivace na intervalu I a existuje primitivní funkce k funkci $u' \cdot v$ na intervalu I . Pak existuje také primitivní funkce k funkci $u \cdot v'$ na intervalu I a platí

$$\int u \cdot v' \, dx = u \cdot v - \int u' \cdot v \, dx.$$

Příklad 7.3: Nalezení $\int \ln x \, dx$ na intervalu $(0, \infty)$.

Příklad 7.4: Najděte $I = \int \frac{\ln x}{x} \, dx$.

Řešení: Na $(0, \infty)$ máme

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{\ln x}{x} \, dx = \int \ln x \cdot \frac{1}{x} \, dx = \left| \begin{array}{ll} u = \ln x & v' = \frac{1}{x} \\ u' = \frac{1}{x} & v = \ln x \end{array} \right| \stackrel{\text{PP}}{=} \\ &\stackrel{\text{PP}}{=} \ln^2 x - \int \frac{1}{x} \cdot \ln x \, dx = \ln^2 x - I. \end{aligned}$$

Tím jsme dostali pro I rovnici $I = \ln^2 x - I$, odkud na $(0, \infty)$ je

$$\int \frac{\ln x}{x} \, dx = I = \frac{\ln^2 x}{2} + c$$

Podobně se hledají např. $\int \cos ax \cdot e^{bx} \, dx$, $\int \sin ax \cdot e^{bx} \, dx$ –
v těchto případech se jen integrace per partes použije dvakrát.

Metoda substituce

Věta 7.5 (o substituci):

- a) Nechť I, J jsou otevřené intervaly, φ má vlastní derivaci na I (je tam tedy spojitá), $\varphi(I) \subset J$ a F je primitivní funkce k funkci f na J . Potom

$$\int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dt = F(\varphi(t)) + c \quad \text{na } I.$$

- b) Pokud je φ navíc prostá na I , $\varphi(I) = J$ a existuje primitivní funkce G k $f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)$ na I , pak

$$\int f(x) dx = G(\varphi^{-1}(x)) + c \quad \text{na } J.$$

Tvrzení Věty 7.5 lze zapsat také takto:

$$\int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dt = \int f(x) dx; \quad x = \varphi(t); \quad t \in I.$$

Příklad 7.5: Nalezení $\int \cos(\ln t) \cdot \frac{1}{t} dt$ na $(0, \infty)$ pomocí substituce $x = \varphi(t) = \ln t$.

Příklad 7.4*: Najděte $I = \int \frac{\ln x}{x} dx$ metodou substituce.

Příklad 7.6a): Vyjádřete $\int f(x+B) dx$ ($B \in \mathbb{R}$) pomocí primitivní funkce F k funkci f .

Příklad 7.7*: Najděte $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx$ na intervalu
 $I \subset D(f') \setminus \{x \mid f(x) = 0\}.$

Příklad 7.8: Označme $I_n = \int \frac{1}{(1+x^2)^n} dx$. Pak

a) pro $n=1$ máme

$$I_1 = \int \frac{1}{1+x^2} dx = \operatorname{arctg} x + c \quad \text{na } \mathbb{R}.$$

b) v případě $n=2$ lze integrál vypočítat pomocí metody per partes a řešením lineární rovnice pro I_2 – dostaneme

$$I_2 = \frac{1}{2} \left(\operatorname{arctg} x + \frac{x}{1+x^2} \right) + c = \frac{1}{2} \left(I_1 + \frac{x}{1+x^2} \right) \quad \text{na } \mathbb{R}.$$

c) pro obecné $n > 1$ lze podobným postupem jako pro $n=2$ odvodit rekurentní vzorec

$$I_n = \frac{1}{2(n-1)} \left((2(n-1)-1)I_{n-1} - \frac{x}{(1+x^2)^{n-1}} \right) \quad \text{na } \mathbb{R}.$$

Příklad 7.10: Najděte $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$.

Řešení: 1. možnost: Na $(-1, 1)$ máme

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx &= \left| \begin{array}{l} x = \cos t \dots t \in (0, \pi) \\ (\arccos x = t) \\ dx = -\sin t \, dt \end{array} \right| = \\ &= \int \frac{1}{\sqrt{1-\cos^2 t}} (-\sin t) \, dt = \int \frac{-\sin t}{\sin t} \, dt = \\ &= - \int 1 \, dt = -t + c = -\arccos x + c \quad \text{na } (-1, 1). \end{aligned}$$

V substituci jsme využili toho, že funkce $\cos t$ je prostá na $(0, \pi)$ a na začátku druhého řádku úprav toho, že $\sin t > 0$ na $(0, \pi)$.

2. možnost: Na $(-1, 1)$ máme

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx &= \left| \begin{array}{l} x = \sin z \quad \dots \quad z \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \\ (\arcsin x = z) \\ dx = \cos z \, dz \end{array} \right| = \\ &= \int \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 z}} \cos z \, dz = \int \frac{\cos z}{\cos z} dz = \\ &= \int 1 \, dz = z + c = \arcsin x + c \quad \text{na } (-1, 1). \end{aligned}$$

V substituci jsme využili toho, že funkce $\sin z$ je prostá na $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ a na začátku druhého řádku uprav toho, že $\cos z > 0$ na $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

Přestože v první a druhé možnosti vyšly na první pohled různé výsledky, jsou oba tyto výsledky správné. Funkce $-\arccos x$ a $\arcsin x$ se totiž liší jen o konstantu ($\arcsin x = \frac{\pi}{2} - \arccos x$).

7.3 Integrace racionální funkce

7.3.1 Racionální funkce

P, Q ... polynomy s reálnými koeficienty, Q nenulový

$R = \frac{P}{Q}$... **racionální funkce**

Z věty o dělení polynomů existují polynomy Y a Z , $\text{st } Z < \text{st } Q$,
takové, že

$$P(x) = Y(x) \cdot Q(x) + Z(x) \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

tj.

$$R(x) = \frac{Y(x) \cdot Q(x) + Z(x)}{Q(x)} = \overbrace{Y(x)}^{\text{polynom}} + \overbrace{\frac{Z(x)}{Q(x)}}^{\text{st } Z < \text{st } Q}.$$

(Pro $\text{st } P < \text{st } Q$ je Y nulový polynom a $Z = P$.)

Dále uvažujeme jen funkce **ryze lomené**, tj. racionální funkce typu

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}, \quad \text{kde } \text{st } P < \text{st } Q.$$

Nejjednodušší typy funkcí ryze lomených ...

... **jednoduché** (též **parciální**) zlomky:

$$\frac{A}{(x - \alpha)^k},$$

$$A \in \mathbb{R}; \quad \alpha \in \mathbb{R}; \quad k \in \mathbb{N},$$

$$\frac{Bx + C}{(x^2 + px + q)^\ell},$$

$$B, C \in \mathbb{R}; \quad p, q \in \mathbb{R}, \quad p^2 - 4q < 0; \quad \ell \in \mathbb{N}.$$

Věta 7.6:

- 1) Každou **ryze lomenou** funkci lze zapsat právě jedním způsobem jako **součet jednoduchých zlomků**.
- 2) Každou **racionální** funkci lze zapsat právě jedním způsobem jako **součet polynomu a jednoduchých zlomků**.

(Přesněji: „ ... právě jedním způsobem až na pořadí sčítanců ...”)

Jaké máme očekávat v rozkladu jednoduché zlomky?

Obecně všech typů, kde jmenovatel je dělitelem polynomu \mathbb{Q}
(někde ovšem může vyjít nulový čítenel).

Příklad 7.12: Rozložte na součet polynomu a jednoduchých

zlomků funkci $R(x) = \frac{x^6 + 2x^4 + 3x^2 + x - 1}{x^5 - x^2}$

Řešení: $x^5 - x^2 = x^2(x^3 - 1)$, tedy $D(R) = \mathbb{R} \setminus \{0; 1\}$

- $$\begin{array}{r} (x^6 + 0x^5 + 2x^4 + 0x^3 + 3x^2 + x - 1) : (x^5 - x^2) = \\ \underline{-x^6 + x^3} \\ 2x^4 + x^3 + 3x^2 + x - 1 \\ \\ = x + \frac{2x^4 + x^3 + 3x^2 + x - 1}{x^5 - x^2} = R(x) = x + R_1(x) \end{array}$$

- $$x^5 - x^2 = x^2(x^3 - 1) = x^2(x - 1)(x^2 + x + 1)$$

polynom $x^2 + x + 1$ nemá reálné kořeny

- $$R_1(x) = \frac{2x^4 + x^3 + 3x^2 + x - 1}{x^2(x-1)(x^2+x+1)} = \frac{A}{x^2} + \frac{B}{x} + \frac{C}{x-1} + \frac{Dx+E}{x^2+x+1}$$

Rovnost vynásobíme výrazem $x^2(x-1)(x^2+x+1)$:

$$\begin{aligned}
 2x^4 + x^3 + 3x^2 + x - 1 &= \\
 &= A \underbrace{(x^3 - 1)}_{(x-1)(x^2+x+1)} + B \underbrace{(x^4 - x)}_{x(x-1)(x^2+x+1)} + C \underbrace{(x^4 + x^3 + x^2)}_{x^2(x^2+x+1)} + \\
 &\quad + \underbrace{(Dx + E)(x^3 - x^2)}_{x^2(x-1)} = \\
 &= Ax^3 - A + Bx^4 - Bx + Cx^4 + Cx^3 + Cx^2 + \\
 &\quad + Dx^4 - Dx^3 + Ex^3 - Ex^2 = \\
 &= (B + C + D)x^4 + (A + C - D + E)x^3 + (C - E)x^2 - Bx - A
 \end{aligned}$$

$$2x^4 + x^3 + 3x^2 + x - 1 =$$

$$= (B + C + D)x^4 + (A + C - D + E)x^3 + (C - E)x^2 - Bx - A$$

Porovnáme koeficienty polynomů u stejných mocnin:

$$\begin{array}{lcl} x^4 : & 2 & = \quad B + C + D \\ x^3 : & 1 & = \quad A \quad + C - D + E \\ x^2 : & 3 & = \quad \quad C \quad - E \\ x^1 : & 1 & = \quad -B \\ x^0 : & -1 & = \quad -A \end{array}$$

Vyřešením soustavy rovnic dostaneme:

$$A = 1, \quad B = -1, \quad C = 2, \quad D = 1, \quad E = -1,$$

tedy

$$R(x) = x + \underbrace{\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} + \frac{2}{x-1} + \frac{x-1}{x^2+x+1}}_{R_1(x)}.$$

Zakrývací pravidlo

Lze ho použít k určení koeficientů v čitateli u zlomků, které mají ve jmenovateli nejvyšší mocniny jednotlivých kořenových činitelů. (Zde tedy k výpočtu koeficientů A a C .) Zmenšíme tím počet neznámých v soustavě lineárních rovnic.

Postupujeme tak, že danou ryze lomenou funkci zapíšeme se zcela rozloženým jmenovatelem

$$R_1(x) = \frac{2x^4 + x^3 + 3x^2 + x - 1}{x^2(x-1)(x^2+x+1)},$$

zakryjeme kořenový činitel jmenovatele a odpovídající kořen dosadíme do zbytku:

$$x := 0 \quad A = \left. \frac{2x^4 + x^3 + 3x^2 + x - 1}{(x-1)(x^2+x+1)} \right|_{x=0} = \frac{0+0+0+0-1}{(0-1) \cdot (0+0+1)} = 1,$$

$$x := 1 \quad C = \left. \frac{2x^4 + x^3 + 3x^2 + x - 1}{x^2(x^2+x+1)} \right|_{x=1} = \frac{2+1+3+1-1}{1 \cdot (1+1+1)} = 2.$$

Příklad 7.13: Určete tvar, v kterém je třeba hledat rozklad na jednoduché zlomky racionální funkce

a) $\frac{x^3 + 2x - 4}{(x^2 + 4)^2(x - 1)^3}$

$$\left[= \frac{Ax + B}{(x^2 + 4)^2} + \frac{Cx + D}{x^2 + 4} + \frac{E}{(x - 1)^3} + \frac{F}{(x - 1)^2} + \frac{G}{x - 1} \right],$$

b) $\frac{x^4}{(x^2 + 4x + 5)^2(x^2 + 1)(x + 4)^2}$

$$\left[= \frac{Ax + B}{(x^2 + 4x + 5)^2} + \frac{Cx + D}{x^2 + 4x + 5} + \frac{Ex + F}{x^2 + 1} + \frac{G}{(x + 4)^2} + \frac{H}{x + 4} \right].$$

7.3.2 Integrace racionální funkce

= integrace polynomu

+ integrace jednoduchých zlomků

Příklad 7.14: Vypočtete $\int \frac{x^6 + 2x^4 + 3x^2 + x - 1}{x^5 - x^2} dx$.

7.4 Některé důležité substituce

polynom $P(x, y)$ dvou proměnných $x, y \dots$

\dots součet konečného počtu funkcí typu $c_{m,n} \cdot x^m \cdot y^n$,

kde $m, n \in \mathbb{N}_0, c_{m,n} \in \mathbb{R}$

racionální funkce $R(x, y)$ dvou proměnných $x, y \dots$

\dots podíl dvou polynomů dvou proměnných x, y ;

$$R(x, y) = \frac{P(x, y)}{Q(x, y)}, \quad Q(x, y) \neq 0$$

analogicky pro tři a více proměnných

A) Integrály typu

$$\int R(e^{ax}) dx$$

Použijeme substituci

$$e^{ax} = t \quad \left(\text{prostá funkce na } \mathbb{R}, \quad t \in (0, \infty) \right).$$

Pro $x \in \mathbb{R}$ pak můžeme psát

$$\int R(e^{ax}) dx = \left| \begin{array}{lcl} e^{ax} & = & t \quad \dots \quad t \in (0, \infty) \\ x & = & \frac{1}{a} \ln t \\ dx & = & \frac{1}{a} \frac{1}{t} dt \end{array} \right| = \int \underbrace{R(t) \cdot \frac{1}{at}}_{\text{racionální funkce}} dt$$

nebo pro $R(e^{ax}) = \tilde{R}(e^{ax}) \cdot e^{ax}$ také

$$\begin{aligned} \int \tilde{R}(e^{ax}) \cdot e^{ax} dx &= \left| \begin{array}{ll} e^{ax} &= t \dots t \in (0, \infty) \\ a \cdot e^{ax} dx &= dt \end{array} \right| = \\ &= \frac{1}{a} \int \tilde{R}(e^{ax}) \cdot a \cdot e^{ax} dx = \frac{1}{a} \int \tilde{R}(t) dt . \end{aligned}$$

Příklad 7.15: Najděte primitivní funkce k funkci

$$f(x) = \frac{e^{4x} - 1}{e^{4x} + e^{2x} + 1}.$$

Řešení: $\int \frac{e^{4x} - 1}{e^{4x} + e^{2x} + 1} dx = \int \frac{(e^{2x})^2 - 1}{(e^{2x})^2 + e^{2x} + 1} dx =$

$$= \left| \begin{array}{l} x \in \mathbb{R}; \quad u \in (0, \infty) \\ e^{2x} = u \\ x = \frac{1}{2} \ln u \quad - \text{prostá} \\ dx = \frac{1}{2u} du \end{array} \right| = \frac{1}{2} \int \frac{u^2 - 1}{u^2 + u + 1} \cdot \frac{1}{u} du = \dots =$$

$$= \frac{1}{2} \left(-\ln u + \ln(\overbrace{u^2 + u + 1}^{>0}) \right) + c = \dots = -x + \frac{1}{2} \ln(e^{4x} + e^{2x} + 1) + c$$

na \mathbb{R}

Příklad 7.16: Najděte primitivní funkce k funkci

$$f(x) = \frac{e^{-6x} - e^{-2x}}{e^{-4x} + 1}.$$

Řešení:

$$\begin{aligned} \int \frac{e^{-6x} - e^{-2x}}{e^{-4x} + 1} dx &= \int \frac{(e^{-2x})^2 - 1}{(e^{-2x})^2 + 1} \cdot e^{-2x} dx = \\ &= \left| \begin{array}{l} x \in \mathbb{R}; \quad t \in (0, \infty) \\ e^{-2x} = t \\ -2e^{-2x} dx = dt \end{array} \right| = -\frac{1}{2} \int \frac{t^2 - 1}{t^2 + 1} dt = \dots = \\ &= -\frac{1}{2} \left(\int 1 dt - 2 \int \frac{1}{t^2 + 1} dt \right) = -\frac{1}{2} t + \operatorname{arctg} t + c = \\ &= -\frac{1}{2} e^{-2x} + \operatorname{arctg}(e^{-2x}) + c \quad \text{na } \mathbb{R} \end{aligned}$$

B) Integrály typu

$$\int \frac{R(\ln x)}{x} dx$$

Použijeme substituci

$$\ln x = t \quad \left(\text{prostá funkce na } (0, \infty), \quad t \in \mathbb{R} \right)$$

a pro $x \in (0, \infty)$ dostaneme

$$\int \frac{R(\ln x)}{x} dx = \left| \begin{array}{l} \ln x = t \dots t \in \mathbb{R} \\ \frac{1}{x} dx = dt \end{array} \right| = \int R(t) dt.$$

Příklad 7.17: Najděte primitivní funkce k funkci

$$f(x) = \frac{5 \ln x}{x(\ln^3 x + \ln^2 x - 2)}.$$

Řešení: $x > 0$, $x \neq e$ (viz rozklad jmenovatele po substituci)

$$\begin{aligned} \int \frac{5 \ln x}{x(\ln^3 x + \ln^2 x - 2)} dx &= \left| \begin{array}{l} t = \ln x \\ dt = \frac{1}{x} dx \end{array} \right| = \\ &= \int \frac{5t}{\underbrace{t^3 + t^2 - 2}_{(t-1)(t^2+2t+2)}} dt = \dots = \int \left(\frac{1}{t-1} + \frac{-t+2}{t^2+2t+2} \right) dt = \\ &= \ln |t-1| + \int \frac{-\frac{1}{2}(2t+2)}{t^2+2t+2} dt + \int \frac{3}{\underbrace{t^2+2t+2}_{(t+1)^2+1}} dt = \\ &= \ln |t-1| - \frac{1}{2} \ln(t^2+2t+2) + 3 \operatorname{arctg}(t+1) + c = \\ &= \ln |\ln x - 1| - \frac{1}{2} \ln(\ln^2 x + 2 \ln x + 2) + 3 \operatorname{arctg}(\ln x + 1) + c \end{aligned}$$

na $(0, e)$ a na (e, ∞)

C) Integrály typu

$$\int R(\sin x, \cos x) dx$$

Výběr substituce

(I) Zkusíme, zda funkce $R(u, v)$ nemá některou z dále uvedených vlastností:

a) $R(-u, v) = -R(u, v)$... R je lichá v první proměnné – sinech

$$R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$$

b) $R(u, -v) = -R(u, v)$... R je lichá v druhé proměnné – kosinech

$$R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$$

c) $R(-u, -v) = R(u, v)$... $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$

Příklady

$$1. \quad \int \frac{2 \sin x}{\sin^2 x + 1} \, dx$$

$$R(\sin x, \cos x) = \frac{2 \sin x}{\sin^2 x + 1},$$

$$R(-\sin x, \cos x) = \frac{-2 \sin x}{(-\sin x)^2 + 1} = -R(\sin x, \cos x),$$

$$R(\sin x, -\cos x) = \frac{2 \sin x}{\sin^2 x + 1} \neq -R(\sin x, \cos x),$$

$$R(-\sin x, -\cos x) = \frac{-2 \sin x}{(-\sin x)^2 + 1} \neq R(\sin x, \cos x),$$

a) $R(-u, v) = -R(u, v)$ (tj. R je lichá "v sinech")

$$R(\sin x, \cos x) = \tilde{R}(\sin^2 x, \cos x) \cdot \sin x,$$

Volíme substituci:

$t = \cos x, \quad dt = -\sin x \, dx \quad (\sin^2 x = 1 - t^2).$
--

Příklad 7.19:

$$\begin{aligned} \int \frac{2 \sin x}{\sin^2 x + 1} dx &= 2 \int \frac{\sin x}{2 - \cos^2 x} dx = \\ &= \left| \begin{array}{l} t = \cos x \in \langle -1, 1 \rangle \\ dt = -\sin x dx \end{array} \right| = 2 \int \frac{-dt}{2 - t^2} = 2 \int \frac{dt}{t^2 - 2} = \\ &= \dots = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\ln |\cos x - \sqrt{2}| - \ln |\cos x + \sqrt{2}| \right) + c \end{aligned}$$

na \mathbb{R}

$$2. \int \frac{1}{\cos^3 x} \, dx$$

$$R(\sin x, \cos x) = \frac{1}{\cos^3 x},$$

$$R(-\sin x, \cos x) = \frac{1}{\cos^3 x} \neq -R(\sin x, \cos x),$$

$$R(\sin x, -\cos x) = \frac{1}{(-\cos x)^3} = -R(\sin x, \cos x),$$

$$R(-\sin x, -\cos x) = \frac{1}{(-\cos x)^3} \neq R(\sin x, \cos x)$$

b) $R(u, -v) = -R(u, v)$ (tj. R je lichá "v kosinech")

$$R(\sin x, \cos x) = \tilde{R}(\sin x, \cos^2 x) \cdot \cos x,$$

Volíme substituci:

$t = \sin x, \quad dt = \cos x \, dx \quad (\cos^2 x = 1 - t^2).$

Příklad 7.20:

Musí platit $\cos x \neq 0$, tj. $x \in (-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$.

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{\cos^3 x} &= \int \frac{\cos x}{(1 - \sin^2 x)^2} dx = \left| \begin{array}{l} t = \sin x \in (-1, 1) \\ dt = \cos x dx \end{array} \right| = \\&= \int \frac{dt}{(1 - t^2)^2} = \frac{1}{4} \int \left(\frac{1}{(t-1)^2} + \frac{1}{(t+1)^2} + \frac{1}{t+1} - \frac{1}{t-1} \right) dt = \\&= \dots = \frac{1}{4} \left(-\frac{1}{\sin x - 1} - \frac{1}{\sin x + 1} + \ln |\sin x + 1| - \ln |\sin x - 1| \right) + c\end{aligned}$$

na $(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$; $k \in \mathbb{Z}$

$$3. \int \frac{1}{\cos^4 x} \, dx$$

$$R(\sin x, \cos x) = \frac{1}{\cos^4 x},$$

$$R(-\sin x, \cos x) = \frac{1}{\cos^4 x} \neq -R(\sin x, \cos x),$$

$$R(\sin x, -\cos x) = \frac{1}{(-\cos x)^4} \neq -R(\sin x, \cos x),$$

$$R(-\sin x, -\cos x) = \frac{1}{(-\cos x)^4} = R(\sin x, \cos x)$$

c) $R(-u, -v) = R(u, v)$

$$R(\sin x, \cos x) = \tilde{R}(\sin^2 x, \cos^2 x, \sin x \cdot \cos x),$$

Volíme substituci:

$$t = \operatorname{tg} x, \quad dt = \frac{1}{\cos^2 x} dx$$

Využijeme přitom toho, že

$$\cos^2 x = \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x + \sin^2 x} = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 x} = \frac{1}{1 + t^2},$$

$$\sin^2 x = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x + \sin^2 x} = \frac{\operatorname{tg}^2 x}{1 + \operatorname{tg}^2 x} = \frac{t^2}{1 + t^2},$$

$$\sin x \cdot \cos x = \operatorname{tg} x \cdot \cos^2 x = \frac{\operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg}^2 x} = \frac{t}{1 + t^2}$$

Příklad 7.21: 1. způsob řešení

Musí platit $\cos x \neq 0$, tj. $x \in (-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi) = I_k$, $k \in \mathbb{Z}$.

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\cos^4 x} dx &= \int \frac{1}{\cos^2 x} \cdot \frac{1}{\cos^2 x} dx = \left| \begin{array}{ll} \operatorname{tg} x &= t \\ \frac{1}{\cos^2 x} dx &= dt \end{array} \right| = \\ &= \int \frac{1}{1+t^2} dt = \int (1+t^2) dt = \\ &= t + \frac{t^3}{3} + c = \operatorname{tg} x + \frac{\operatorname{tg}^3 x}{3} + c\end{aligned}$$

na $(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$; $k \in \mathbb{Z}$

Poznámky:

- Je-li $x \in (-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$, můžeme psát

$$x = \operatorname{arctg} t + k\pi,$$

$$dx = \frac{1}{1+t^2} dt$$

Není tedy nutné upravovat funkci R tak, aby bylo možné ve jmenovateli vytknout $\cos^2 x$.

- Někdy je zde vhodnější substituce $t = \cotg x$.

Příklad 7.21: 2. způsob řešení

Musí platit $\cos x \neq 0$, tj. $x \in (-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi) = I_k$, $k \in \mathbb{Z}$.

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\cos^4 x} dx &= \left| \begin{array}{l} \operatorname{tg} x = t \\ x = \operatorname{arctg} t + k\pi \quad - \text{prostá} \\ dx = \frac{1}{t^2+1} dt \end{array} \right| = \\ &= \int \frac{1}{\left(\frac{1}{1+t^2}\right)^2} \cdot \frac{1}{t^2+1} dt = \int (1+t^2) dt = \\ &= t + \frac{t^3}{3} + c = \operatorname{tg} x + \frac{\operatorname{tg}^3 x}{3} + c \end{aligned}$$

na $(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$; $k \in \mathbb{Z}$

$$4. \int \frac{1}{(3 \sin x - 2 \cos x)^2} dx$$

$$R(\sin x, \cos x) = \frac{1}{(3 \sin x - 2 \cos x)^2},$$

$$R(-\sin x, \cos x) = \frac{1}{(3(-\sin x) - 2 \cos x)^2} \neq -R(\sin x, \cos x),$$

$$R(\sin x, -\cos x) = \frac{1}{(3 \sin x - 2(-\cos x))^2} \neq -R(\sin x, \cos x),$$

$$R(-\sin x, -\cos x) = \frac{1}{(3(-\sin x) - 2(-\cos x))^2} = R(\sin x, \cos x),$$

lze použít substituci $t = \operatorname{tg} x$

$$6. \int \frac{\sin x \cos x}{\sin x + \cos x} dx$$

$$R(\sin x, \cos x) = \frac{\sin x \cos x}{\sin x + \cos x},$$

$$R(-\sin x, \cos x) = \frac{(-\sin x) \cos x}{-\sin x + \cos x} \neq -R(\sin x, \cos x),$$

$$R(\sin x, -\cos x) = \frac{\sin x(-\cos x)}{\sin x + (-\cos x)} \neq -R(\sin x, \cos x),$$

$$R(-\sin x, -\cos x) = \frac{(-\sin x)(-\cos x)}{-\sin x + (-\cos x)} \neq R(\sin x, \cos x),$$

nelze použít žádnou z předchozích substitucí

(II) Pokud funkce R nemá ani jednu z vlastností popsaných v (I) použijeme substituci

$$\boxed{\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t} \quad \left(\text{prostá funkce na } ((2k-1)\pi, (2k+1)\pi), k \in \mathbb{Z} \right)$$

a dostaneme

$$\cos x = \frac{\cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2}} = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}$$

$$\sin x = \frac{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2}} = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = \frac{2t}{1 + t^2}$$

Příklad 7.23*: Najděte primitivní funkce k funkci

$$f(x) = \frac{\sqrt{2}}{\cos x + 3} \quad \text{na intervalu } (-\pi, \pi).$$

Řešení: Na interval $(-\pi, \pi) = I$ máme

$$\begin{aligned} \int \frac{\sqrt{2}}{\cos x + 3} dx &= \left| \begin{array}{l} \operatorname{tg} \frac{x}{2} = t \quad - \text{prostá na } I \\ x = 2 \operatorname{arctg} t \\ dx = \frac{2}{1+t^2} dt \end{array} \right| = \\ &= \int \frac{\sqrt{2}}{\frac{1-t^2}{1+t^2} + 3} \cdot \frac{2}{1+t^2} dt = \sqrt{2} \int \frac{1}{2+t^2} dt \\ &= \operatorname{arctg} \frac{t}{\sqrt{2}} + c = \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg} \frac{x}{2}}{\sqrt{2}} + c. \end{aligned}$$

C*) Integrály typu

$$\int \sin^m x \cdot \cos^n x \, dx$$

m - liché nebo n - liché

... použijeme substituce uvedené v C(l)a) a C(l)b)

m - sudé a n - sudé

... přejdeme k dvojnásobnému argumentu:

$$\cos^2 x = \frac{1}{2} (1 + \cos 2x)$$

$$\sin^2 x = \frac{1}{2} (1 - \cos 2x)$$

Příklad 7.24: Najděte primitivní funkce k funkci $f(x) = \sin^4 x$.

D) Substituce pro integrály typu

$$\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) dx, \quad n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}, \quad ad \neq bc$$

Použijeme substituci

$$y = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}.$$

Speciálně v případě, kdy $c = 0$, $d = 1$, tj. pro integrály typu

$$\int R\left(x, \sqrt[n]{ax+b}\right) dx, \quad n \in \mathbb{N} \setminus \{1\},$$

použijeme substituci

$$y = \sqrt[n]{ax+b}.$$

Příklad 7.25: Najděte primitivní funkce k funkci

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-1} + \sqrt[3]{x-1}}.$$

Řešení: Zřejmě $D(f) = (1, \infty)$.

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\sqrt{x-1} + \sqrt[3]{x-1}} dx &= \left| \begin{array}{l} x \in (1, \infty); \quad t \in (0, \infty) \\ \sqrt[6]{x-1} = t \\ x = t^6 + 1 \\ dx = 6t^5 dt \end{array} \right. - \text{prostá na } (0, \infty) \left. \right| = \\ &= \int \frac{6t^5}{t^3 + t^2} dt = 6 \int \frac{t^3}{t+1} dt = 6 \int (t^2 - t + 1 - \frac{1}{t+1}) dt = \dots = \\ &= 2\sqrt{x-1} - 3\sqrt[3]{x-1} + 6\sqrt[6]{x-1} - 6\ln(\sqrt[6]{x-1} + 1) + c \quad \text{na } (1, \infty) \end{aligned}$$