KAPITOLA 6: Průběh funkce

6.1 Extrémy a monotonie

Definice:

Řekneme, že funkce f nabývá **na množině** $M \subset D(f)$ svého **globálního maxima** A v bodě x_0, jestliže $x_0 \in M$, $f(x_0) = A$ a pro každé $x \in M$ platí

$$f(x) \leq f(x_0). \tag{1}$$

Řekneme, že funkce f nabývá **na množině** $M \subset D(f)$ svého **globálního minima** A v bodě x_0, jestliže $x_0 \in M$, $f(x_0) = A$ a pro každé $x \in M$ platí

$$f(x_0) \leq f(x). \tag{2}$$

globální maximum, globální minimum ... **globální extrémy**

Víme:

Spojitá funkce na uzavřeném intervalu nabývá svých globálních extrémů.

Definice:

Řekneme, že funkce f nabývá **v bodě** x_0 **lokálního maxima** $f(x_0)$, jestliže existuje okolí $U(x_0)$ bodu x_0 takové, že pro každé $x \in U(x_0)$ platí

$$f(x) \leq f(x_0). \tag{3}$$

Řekneme, že funkce f nabývá **v bodě** x_0 **lokálního minima** $f(x_0)$, jestliže existuje okolí $U(x_0)$ bodu x_0 takové, že pro každé $x \in U(x_0)$ platí

$$f(x) \geq f(x_0). \tag{4}$$

lokální maximum, lokální minimum ... **lokální extrémy**

ostrá nerovnost v (1) – (4) pro $x \neq x_0$ ... **ostrý extrém**

Věta 6.1:

Jestliže funkce f nabývá lokálního extrému v bodě x_0 a existuje $f'(x_0)$, pak $f'(x_0) = 0$.

Poznámka:

Z **Věty 6.1** vyplývá, že funkce může mít lokální extrém jen v tom bodě, kde má nulovou derivaci nebo kde derivaci nemá.

$f'(x_0) = 0 \quad \dots \quad x_0$ – **stacionární bod** funkce

(může v něm být extrém, ale nemusí)

Definice:

Řekneme, že funkce f je **rostoucí v bodě** $x_0 \in D(f)$, jestliže existuje okolí $U(x_0) \subset D(f)$ bodu x_0 takové, že pro každé $x \in U(x_0)$ platí

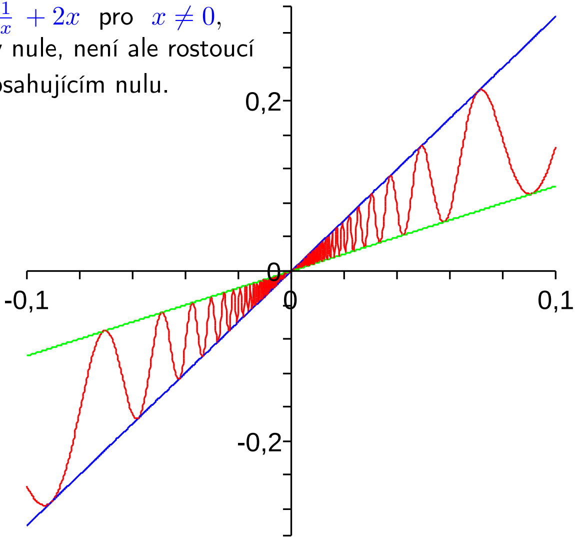
- je-li $x < x_0$, pak $f(x) < f(x_0)$,
- je-li $x > x_0$, pak $f(x) > f(x_0)$.

Řekneme, že funkce f je **klesající v bodě** $x_0 \in D(f)$, jestliže existuje okolí $U(x_0) \subset D(f)$ bodu x_0 takové, že pro každé $x \in U(x_0)$ platí

- je-li $x < x_0$, pak $f(x) > f(x_0)$,
- je-li $x > x_0$, pak $f(x) < f(x_0)$.

(analogicky funkce **neklesající** a **nerostoucí** v bodě)

Funkce $f(x) = x \cdot \sin \frac{1}{x} + 2x$ pro $x \neq 0$, $f(0) = 0$, je rostoucí v nule, není ale rostoucí na žádném intervalu obsahujícím nulu.



Platí:

Funkce f je rostoucí na intervalu $(\,a,\,b\,)$ právě tehdy, když je rostoucí v každém bodě tohoto intervalu.

(Analogicky i pro ostatní typy monotonie.)

Věta 6.2:

Je-li $f'(x_0)>0$, pak je f v x_0 **rostoucí**.

Je-li $f'(x_0)<0$, pak je f v x_0 **klesající**.

Věta 6.3:

Nechť f je spojitá na intervalu I a má v každém jeho vnitřním bodě derivaci. Pak

- je-li na vnitřku I $f' > 0$, pak f je na I **rostoucí**,

  je-li na vnitřku I $f' < 0$, pak f je na I **klesající**,

- f je na I **neklesající** právě tehdy, když na vnitřku I je $f' \geq 0$,

  f je na I **nerostoucí** právě tehdy, když na vnitřku I je $f' \leq 0$.

Platí:

a) Je-li f **rostoucí** na (a, b) a **spojitá zprava** v a, pak je **rostoucí** na $\langle a, b)$,

Je-li f **rostoucí** na (a, b) a **spojitá zleva** v b, pak je **rostoucí** na $(a, b\rangle$.

b) Je-li f **rostoucí** na $(a, b\rangle$ a na $\langle b, c)$, pak je **rostoucí** na (a, c).

Tedy, je-li f rostoucí na (a, b) a na (b, c) a spojitá v b, pak je rostoucí na (a, c).

(Analogicky i pro ostatní typy monotonie.)

Ověřování lokálních extrémů

A) Pomocí monotonie na okolí (a znaménka derivace):

Je-li f **spojitá** v x_0 a existuje-li $\delta > 0$ tak, že

f na $(x_0 - \delta, x_0)$	f na $(x_0, x_0 + \delta)$		v x_0
roste	klesá	pak	je ostré lokální maximum
klesá	roste	pak	je ostré lokální minimum
neklesá	neroste	pak	je lokální maximum
neroste	neklesá	pak	je lokální minimum
roste	roste	pak	není extrém (f v x_0 roste)
klesá	klesá	pak	není extrém (f v x_0 klesá)

Monotonii většinou ověřujeme pomocí znaménka derivace.

B) Pomocí 2. derivace:

Je-li $f'(x_0) = 0$ a $f''(x_0) > 0$ $[\,f''(x_0) < 0\,]$, pak má f v x_0 lokální minimum [lokální maximum].

Příklad 6.1: Najděte lokální extrémy funkce $f(x) = (x + 2|x|) - x^3$ a vyšetřete monotonii této funkce.

Řešení: f je spojitá na $D(f) = \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} -x - x^3 & \text{pro } x \le 0 \\ 3x - x^3 & \text{pro } x \ge 0 \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} -1 - 3x^2 & \text{pro } x < 0 \\ 3 - 3x^2 = 3(1 - x^2) & \text{pro } x > 0 \end{cases}$$

$$\left.\begin{aligned} \lim_{x \to 0^-} f'(x) &= -1 = f'_-(0) \\ \lim_{x \to 0^+} f'(x) &= 3 = f'_+(0) \end{aligned}\right\} \implies f'(0) \text{ neexistuje}$$

$$f'(x) = \begin{cases} -1-3x^2 & \text{pro} \quad x<0 \\ 3-3x^2 = 3(1-x^2) & \text{pro} \quad x>0 \end{cases}$$

- $\underline{\text{na} \quad (-\infty;0)}$

  $f'(x) < 0 \quad \Longrightarrow \quad f$ je klesající na $(-\infty;0)$

- $\underline{\text{na} \quad (0;+\infty)}$

  $f'(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; x = 1$ – stacionární bod
  $f'(x) < 0 \;\Leftrightarrow\; x \in (1;\infty) \quad \Longrightarrow \quad f$ je klesající na $(1;\infty)$
  $f'(x) > 0 \;\Leftrightarrow\; x \in (0;1) \quad \Longrightarrow \quad f$ je rostoucí na $(0;1)$

		0		1	
f'	$-$	|	$+$	|	$-$
f	$\searrow$	|	$\nearrow$	|	$\searrow$

$$
\begin{array}{c|c|c|c|c}
 & & 0 & & 1 & \\
f' & - & | & + & | & - \\
\hline
f & \searrow & | & \nearrow & | & \searrow
\end{array}
$$

ze spojitosti:

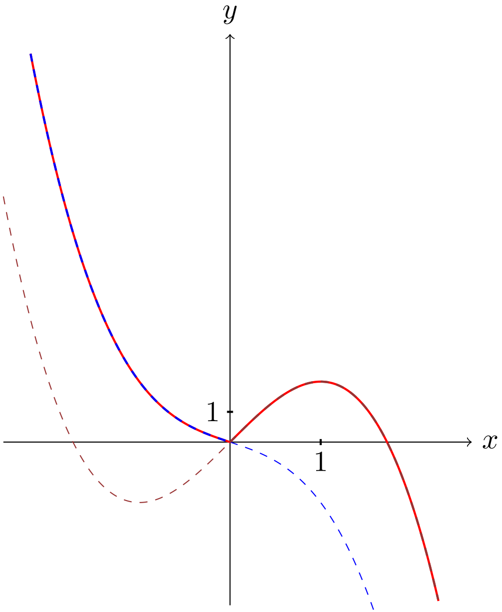
f je <u>klesající</u> na $(-\infty, 0\rangle$ a na $\langle 1, \infty)$

f je <u>rostoucí</u> na $\langle 0, 1\rangle$

f má <u>ostré lokální minimum</u> v bodě $x_1 = 0$, $f(0) = 0$

f má <u>ostré lokální maximum</u> v bodě $x_2 = 1$, $f(1) = 2$

(ověření extrému v bodě $x_2 = 1$ pomocí druhé derivace:
pro $x > 0$ je $f''(x) = -6x$, tj. $f''(1) = -6 < 0$
$\Longrightarrow$ v $x_2 = 1$ nabývá f lokálního maxima $f(1) = 2$)



$(x+2|x|)-x^3$

$3x-x^3$

$-x-x^3$

Hledání globálních extrémů spojité funkce

A) **na intervalu $I = \langle a, b \rangle$:**

a) Najdeme v I body, kde může být globální extrém (tj. "body podezřelé z extrému") :

- body $a,\ b$
- stacionární body ($f'(x) = 0$)
- body, kde f nemá derivaci.

b) Spočítáme funkční hodnoty v bodech z a) a vybereme z nich největší / nejmenší.

B) <u>**na intervalu, který není uzavřený**</u>

(např. pro $(a, b\rangle$ – jinak analogicky)

Postup jako v **A)**, pouze $f(a)$ nahradíme $\lim_{x \to a^+} f(x) = \alpha$ s tím, že je-li ve všech ostatních vyšetřovaných bodech funkce

- větší než α, pak f na $(a, b\rangle$ <u>globálního minima</u> nenabývá a

$$\alpha = \inf \{f(x) \,|\, x \in (a, b\rangle\},$$

- menší než α, pak f na $(a, b\rangle$ <u>globálního maxima</u> nenabývá a

$$\alpha = \sup \{f(x) \,|\, x \in (a, b\rangle\},$$

Příklad 6.2: Najděte největší a nejmenší hodnotu funkce $f(x) = (x + 2|x|) - x^3$ (tj. funkce z *Příkladu 6.1*) na intervalu **a)** $\langle -\frac{3}{2}, \frac{3}{2} \rangle$, **b)** $(-\frac{3}{2}, \frac{3}{2})$.

Řešení: Víme, že f' neexistuje v $x_0 = 0$ a f má jeden stacionární bod $x_1 = 1$. Body x_0, x_1 leží v obou intervalech. Pro hledání globálních extrémů přidáme k těmto bodům ještě krajní body intervalů.

a) Porovnáváme hodnoty:

$$f(0)=0,\quad f(1)=2,\quad f\left(-\tfrac{3}{2}\right)=\tfrac{39}{8},\quad f\left(\tfrac{3}{2}\right)=\tfrac{9}{8}.$$

Z nich je nejmenší 0 a největší $\frac{39}{8}$, tedy

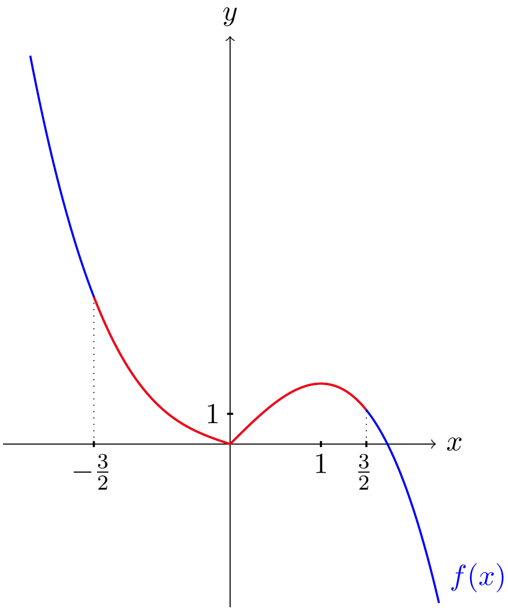
- f nabývá na $\langle -\frac{3}{2}, \frac{3}{2} \rangle$ v $x_0 = 0$ své nejmenší hodnoty (globálního minima) $f(0)=0$,
- f nabývá na $\langle -\frac{3}{2}, \frac{3}{2} \rangle$ v $x_2 = -\frac{3}{2}$ své největší hodnoty (globálního maxima) $f\left(-\frac{3}{2}\right)=\frac{39}{8}$.

b) Porovnáváme hodnoty:

$$f(0) = 0, \quad f(1) = 2, \quad \lim_{x \to -\frac{3}{2}+} f(x) = \frac{39}{8}, \quad \lim_{x \to \frac{3}{2}-} f(x) = \frac{9}{8}.$$

Protože největší z těchto hodnot je $\lim_{x \to -\frac{3}{2}+} f(x)$ a bod $-\frac{3}{2}$ v daném intervalu neleží, dostáváme, že

- f nabývá na $\left(-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$ v $x_0 = 0$ své nejmenší hodnoty (globálního minima) $f(0) = 0$,
- f na $\left(-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$ své největší hodnoty (globálního maxima) nenabývá.



y
x
1
$-\frac{3}{2}$
1
$\frac{3}{2}$
$f(x)$

6.2 Funkce konvexní a konkávní

Definice:

Řekneme, že funkce f je **konvexní** na intervalu I, jestliže pro každé tři body $t,\ x,\ z \in I$, $t < x < z$, a číslo

$$k_{t,z} = \frac{f(z) - f(t)}{z - t}$$

platí

$$f(x) \leq f(t) + k_{t,z} \cdot (x - t)\ .$$

pro všechna $t, x, z \in I, \quad t < x < z$:

$f(x) \leq f(t) + k_{t,z} \cdot (x - t)$ ... funkce **konvexní** na I

$f(x) < f(t) + k_{t,z} \cdot (x - t)$ ... funkce **ryze konvexní** na I

$f(x) \geq f(t) + k_{t,z} \cdot (x - t)$ ... funkce **konkávní** na I

$f(x) > f(t) + k_{t,z} \cdot (x - t)$ ... funkce **ryze konkávní** na I

Platí:

Nechť má funkce f derivaci na intervalu I a pro každé $x_0,\ x \in I,\ x \neq x_0,$ platí

$$f(x) > f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

$$\Big(f(x) < f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \Big).$$

Pak je funkce f na I ryze konvexní (ryze konkávní).

(Analogicky pro konvexní a konkávní funkce.)

Definice:

Řekneme, že bod $[x_0, f(x_0)]$ ($x_0 \in D(f)$) je **inflexním bodem grafu** funkce f, jestliže platí

1) f je spojitá v x_0 ,
2) existuje $f'(x_0)$,
3) existuje $\delta > 0$ takové, že f je na jednom z intervalů $(x_0 - \delta, x_0)$ a $(x_0, x_0 + \delta)$ ryze konvexní a na druhém ryze konkávní.

(Říkáme také, že f má v x_0 **inflexi**.)

inflexní tečna ... tečna v inflexním bodě

Věta 6.4:

Má-li funkce f druhou derivaci na (a, b), pak

a) je-li na (a, b) $f'' > 0$ ($f'' \geq 0$ | $f'' < 0$ | $f'' \leq 0$), pak je f na (a, b) ryze konvexní (konvexní | ryze konkávní | konkávní),

b) má-li f v $x_0 \in (a, b)$ inflexi a existuje-li $f''(x_0)$, pak $f''(x_0) = 0$,

c) je-li $x_0 \in (a, b)$, $f''(x_0) = 0$ a f'' mění v x_0 znaménko, pak f má v x_0 inflexi.

Příklad 6.3: Najděte (maximální) intervaly, na kterých je funkce $f(x) = x \ln^2 x$ konvexní, konkávní; najděte inflexní body jejího grafu.

Řešení: Zřejmě $D(f) = (0; \infty)$. Dále:

$$f'(x) = \ln^2 x + x \cdot 2 \ln x \cdot \frac{1}{x} = \ln^2 x + 2 \ln x,$$

$$f''(x) = 2 \ln x \cdot \frac{1}{x} + 2 \cdot \frac{1}{x} = \frac{2}{x} (\ln x + 1),$$

tedy $f''(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; x = \mathrm{e}^{-1} = \frac{1}{\mathrm{e}}$

$f''(x) > 0 \;\Leftrightarrow\; x \in \left(\frac{1}{\mathrm{e}}; \infty\right)$

$f''(x) < 0 \;\Leftrightarrow\; x \in \left(0; \frac{1}{\mathrm{e}}\right)$

$$f''(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; x = \mathrm{e}^{-1} = \frac{1}{\mathrm{e}}$$
$$f''(x) > 0 \;\Leftrightarrow\; x \in \left(\frac{1}{\mathrm{e}}\,; \infty\right)$$
$$f''(x) < 0 \;\Leftrightarrow\; x \in \left(0; \frac{1}{\mathrm{e}}\right)$$

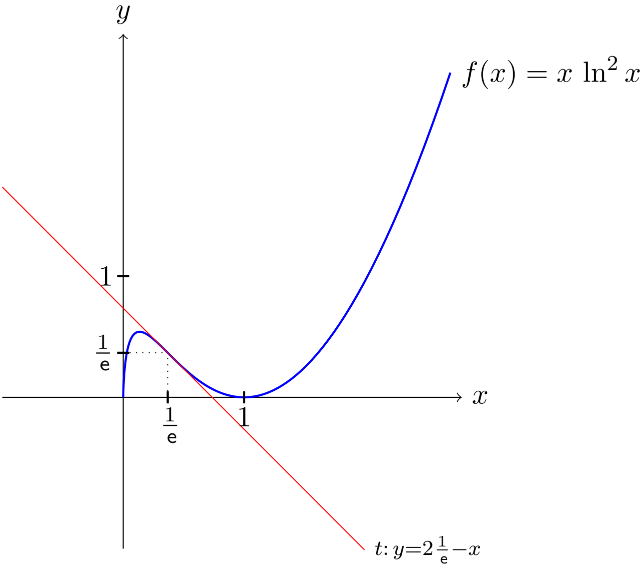
$$\begin{array}{c|cc|cc|c}
 & 0 & & \frac{1}{\mathrm{e}} & & \\
f'' & | & - & | & + & \\
\hline
f & | & \cap & | & \cup &
\end{array}$$

odtud

f je ryze konvexní na intervalu $\langle \frac{1}{\mathrm{e}}\,, \infty)$

f je ryze konkávní na intervalu $(0, \frac{1}{\mathrm{e}}\,\rangle$

v $x_0 = \frac{1}{\mathrm{e}}$ má f inflexi.



y
$f(x) = x\ \ln^2 x$
1
$\frac{1}{\mathsf{e}}$
x
$\frac{1}{\mathsf{e}}$
1
$t\colon y = 2\,\frac{1}{\mathsf{e}} - x$

6.3 Asymptoty grafu funkce

Definice:

a) Řekneme, že funkce f má v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$ **svislou asymptotu**, jestliže alespoň jedna jednostranná limita v x_0 existuje a je nevlastní. Rovnice této asymptoty je $x = x_0$.

b) Řekneme, že funkce f má v bodě $x_0 = +\infty$ $(-\infty)$ **asymptotu** $y = kx + q$ $(k,\ q \in \mathbb{R})$, jestliže

$$\lim_{x \to x_0} \Big(f(x) - (kx + q) \Big) = 0.$$

$$\left.\begin{array}{lll} k = 0 & \dots & \textbf{vodorovná} \\ k \neq 0 & \dots & \textbf{šikmá} \end{array}\right\} \text{asymptota}$$

Věta 6.5:

a) Je-li $k,\ q \in \mathbb{R}$, pak přímka $y = kx + q$ je asymptotou funkce f v $+\infty$ právě tehdy, když

(i) $$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = k,$$

(ii) $$\lim_{x\to+\infty} (f(x) - kx) = q.$$

b) Přímka $y = q$ je vodorovnou asymptotou funkce f v $+\infty$ právě tehdy, když

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = q.$$

(Analogicky pro asymptoty v $-\infty$.)

Příklad 6.4: Najděte asymptoty grafu funkce

$$f(x) = x + |x| + \frac{\sin(10x)}{x^2} + 3.$$

Řešení: Zřejmě $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Dále:

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \left(2x + \frac{\sin(10x)}{x^2} + 3\right) = +\infty,$$

tedy graf funkce f má svislou asymptotu v bodě $x_0 = 0$, její rovnice je $\underline{x = 0}$ (lze použít i $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x)$, která je také nevlastní);

$$f(x) = x + |x| + \frac{\sin(10x)}{x^2} + 3$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \left(2x + \frac{\sin(10x)}{x^2} + 3\right) = +\infty,$$

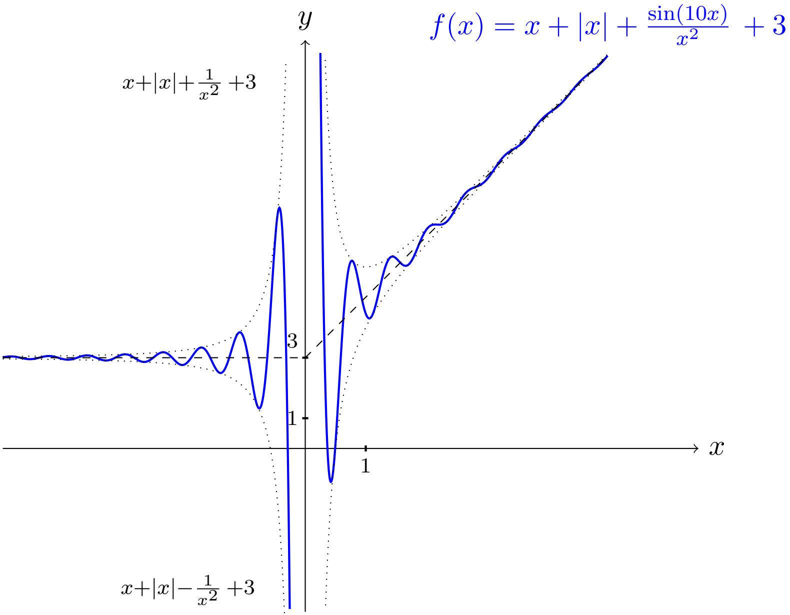
$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \left(2 + \frac{\sin(10x)}{x^3} + \frac{3}{x}\right) = 2\,(= k),$$

$$\lim_{x\to\infty} (f(x) - 2\cdot x) = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{\sin(10x)}{x^2} + 3\right) = 3\,(= q),$$

tedy graf funkce f má v $+\infty$ šikmou asymptotu $y = 2x + 3$;

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \left(\frac{\sin(10x)}{x^2} + 3\right) = 3,$$

tedy graf funkce f má v $-\infty$ vodorovnou asymptotu $y = 3$.


$f(x) = x + |x| + \frac{\sin(10x)}{x^2} + 3$
$x+|x|+\frac{1}{x^2}+3$
$x+|x|-\frac{1}{x^2}+3$
y
x
3
1
1

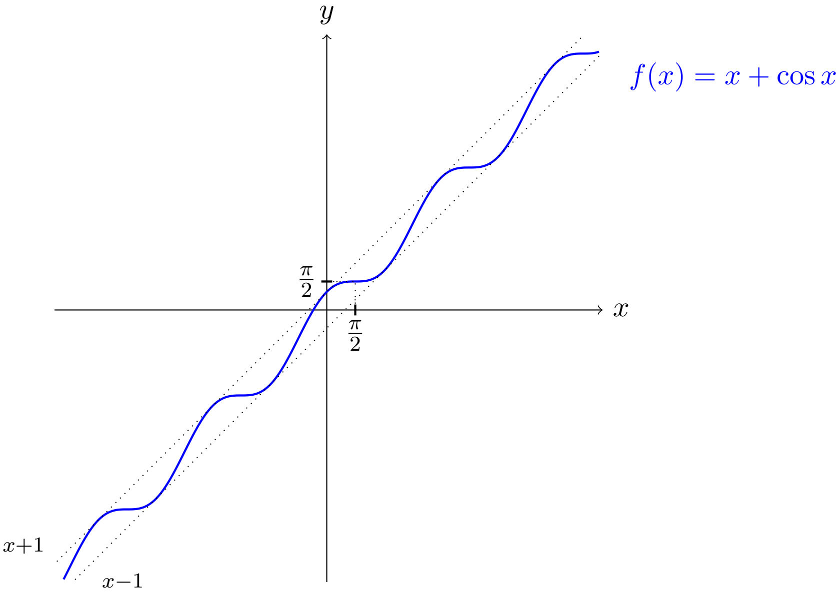
Příklad 6.5: Graf funkce $f(x) = x + \cos x$ nemá asymptoty v $\pm\infty$, protože sice

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty \qquad \text{a} \qquad \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 1,$$

ale

$$\lim_{x \to \pm\infty} \left(f(x) - 1 \cdot x\right) = \lim_{x \to \pm\infty} \cos x$$

neexistuje.


y
$f(x) = x + \cos x$
$\frac{\pi}{2}$
x
$\frac{\pi}{2}$
$x+1$
$x-1$

<u>Shrnutí</u> – Obecný postup při vyšetřování průběhu funkce f:

Zjišťujeme

1) • $D(f)$, $H(f)$, průsečíky s osami, „znaménko”

• je f sudá | lichá | periodická ?

• intervaly spojitosti, limity v bodech nespojitosti a v hraničních bodech $D(f)$

(vycházíme z předpisu pro $f(x)$)

2) • intervaly monotonie

• lokální a globální extrémy

• chování tečen v blízkosti bodů nespojitosti

(vycházíme převážně z předpisu pro $f'(x)$)

3) • intervaly konvexnosti a konkávnosti, inflexní body

(většinou pomocí f'', někdy lze i z f')

• tečny v inflexních bodech

4) • asymptoty