KAPITOLA 13: Lineární diferenciální rovnice řádu n

rovnice typu

$$y^{(n)} + p_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_1(x)y' + p_0(x)y = q(x) \tag{1}$$

počáteční podmínky:

$$\begin{aligned} y(x_0) &= y_0 \\ y'(x_0) &= y_1 \\ &\vdots \\ y^{(n-1)}(x_0) &= y_{n-1} \end{aligned} \tag{2}$$

Věta 13.1 :
Nechť jsou funkce $p_0,\ p_1,\ \ldots,\ p_{n-1},\ q$ spojité na intervalu I, $x_0 \in I$, $(y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$. Pak má Cauchyova úloha (1), (2) právě jedno řešení na I.

homogenní LDR: $q(x) = 0$ pro každé $x \in I$

nehomogenní LDR: $q(x) \neq 0$ alespoň pro jedno $x \in I$

přidružená homogenní rovnice: v rovnici nahradíme q nulovou funkcí

označíme-li

$$D: \ y \mapsto y^{(n)} + p_{n-1}\, y^{(n-1)} + \ldots + p_1\, y' + p_0\, y\,,$$

je D lineární zobrazení a rovnici **(1)** lze přepsat ve tvaru

$$D(y) = q$$

z linearity zobrazení D máme:

- **pro homogenní LDR řádu** n :

  množina řešení je lineární prostor; lze ukázat, že jeho dimenze je n (viz Větu 13.8 dále)

  fundamentální systém řešení (FSŘ) – množina n lineárně nezávislých řešení homogenní LDR

  obecné řešení homogenní LDR řádu n:

  $$y = c_1\, \overline{y}_1 + c_2\, \overline{y}_2 + \ldots + c_n\, \overline{y}_n, \qquad x \in I, \qquad \text{kde } \{\overline{y}_1, \ldots, \overline{y}_n\} \text{ je FSŘ}, \quad c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$$

- **pro nehomogenní LDR řádu** n :

  předpokládejme, že $\overline{y}_1$, $\overline{y}_2$ řeší danou rovnici a $\overline{y}_0$ řeší přidruženou homogenní rovnici, pak platí

  a) $\overline{y}_1 - \overline{y}_2$ řeší přidruženou homogenní rovnici

  b) $\overline{y}_1 + \overline{y}_0$ řeší danou rovnici

  a)+b) $\Rightarrow$ pro obecné řešení y LDR platí:

  $$y = \hat{y} + \tilde{y},$$

  kde $\hat{y}$ je jedno pevné řešení dané rovnice (tzv. partikulární řešení) a $\tilde{y}$ je obecné řešení přidružené homogenní rovnice

Věta 13.2 (princip superpozice) :
Je-li $\overline{y}_1$ řešení rovnice $D(y) = q_1$ a $\overline{y}_2$ řešení rovnice $D(y) = q_2$, pak $\overline{y}_1 + \overline{y}_2$ je řešení rovnice $D(y) = q_1 + q_2$.

13.1 Metoda variace konstant

$\{\overline{y}_1, \ldots, \overline{y}_n\}$ ... FSŘ homogenní rovnice přidružené k rovnici **(1)**

partikulární řešení $\hat{y}$ rovnice **(1)** hledáme ve tvaru

$$y(x) = c_1(x)\overline{y}_1(x) + c_2(x)\overline{y}_2(x) + \ldots + c_n(x)\overline{y}_n(x)$$

(stačí nám najít jednu $n-$tici funkcí $c_1(x), \ \ldots, \ c_n(x)$)

princip metody ukážeme na následujícím příkladu:

Příklad 13.1: Najděte obecné řešení rovnice

$$y''' + \frac{2y''}{x} - \frac{2y'}{x^2} = -\frac{2}{x^2},$$

víte-li, že přidružená homogenní rovnice má FSŘ $\Big\{1, \ x^2, \ \dfrac{1}{x}\Big\}$.

Řešení: Funkce $p_2(x) = \dfrac{2}{x}$, $p_1(x) = -\dfrac{2}{x^2}$, $p_0(x) = 0$, $q(x) = -\dfrac{2}{x^2}$ jsou spojité na intervalech $I_1 = (-\infty, 0)$, $I_2 = (0, \infty)$, hledáme tedy řešení rovnice na těchto intervalech (dále už to nebudu uvádět)

1. obecné řešení přidružené homogenní rovnice je

$$\tilde{y}(x) = c_1 + c_2 \cdot x^2 + c_3 \cdot \frac{1}{x} \quad (c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R})$$

2. partikulární řešení nehomogenní rovnice tedy hledáme ve tvaru

$$\hat{y}(x) = c_1(x) + c_2(x) \cdot x^2 + c_3(x) \cdot \frac{1}{x}$$

hledáme tři funkce – můžeme na ně mít tři podmínky: jednu dostaneme dosazením do rovnice, zbylé dvě zvolíme tak, aby se nám zjednodušily derivace

- spočítáme 1. derivaci funkce $\hat{y}$:

$$\hat{y}'(x) = c_1'(x) + c_2'(x) \cdot x^2 + c_2(x) \cdot 2x + c_3'(x) \cdot \frac{1}{x} + c_3(x) \cdot \Big(- \frac{1}{x^2}\Big)$$

aby se nám v další derivaci neobjevily druhé derivace funkcí c_1, c_2, c_3, budeme chtít, aby platilo

$$c_1'(x) + c_2'(x) \cdot x^2 + c_3'(x) \cdot \frac{1}{x} = 0 \tag{3}$$

$\big($ pak ovšem $\hat{y}'(x) = c_2(x) \cdot 2x + c_3(x) \cdot \big(- \frac{1}{x^2}\big) \big)$

- spočítáme 2. derivaci funkce $\hat{y}$:

$$\hat{y}''(x) = c_2'(x) \cdot 2x + c_2(x) \cdot 2 + c_3'(x) \cdot \Big(- \frac{1}{x^2}\Big) + c_3(x)\frac{2}{x^3}$$

ze stejných důvodů jako u 1. derivace budeme chtít, aby platilo

$$c_2'(x) \cdot 2x + c_3'(x) \cdot \Big(- \frac{1}{x^2}\Big) = 0 \tag{4}$$

$\big($ pak ovšem $\hat{y}''(x) = c_2(x) \cdot 2 + c_3(x) \cdot \frac{2}{x^3} \big)$

- spočítáme 3. derivaci funkce $\hat{y}$:

$$\hat{y}'''(x) = c_2'(x) \cdot 2 + c_3'(x) \cdot \frac{2}{x^3} + c_3(x) \cdot \Big(- \frac{6}{x^4}\Big)$$

13.3 Homogenní LDR řádu n

$$y^{(n)} + p_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_1(x)y' + p_0(x)y = 0 \tag{8}$$

Množina řešení: jádro zobrazení D (je to tedy lineární prostor – tj. součet dvou řešení je řešením, násobek řešení je řešením)

Pro $f_1,\ f_2, \ldots,\ f_n \in C^{(n-1)}(I)$ (*kde* $C^k(I)$ *je prostor všech funkcí s* k *spojitými derivacemi na* I *a speciálně pro* $k=0$ *je* $C(I) = C^0(I)$ *prostor všech spojitých funkcí na* I) definujeme

Wronského determinant:

$$W_{f_1,\ldots,f_n}(x) = \begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) & \ldots & f_n(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) & \ldots & f_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1^{(n-1)}(x) & f_2^{(n-1)}(x) & \ldots & f_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$

Věta 13.6:

Jsou-li funkce $f_1,\ f_2, \ldots,\ f_n \in C^{(n-1)}(I)$ lineárně závislé, pak

$$W_{f_1,\ldots,f_n}(x) = 0 \quad \forall x \in I.$$

Poznámka: Obrácené tvrzení neplatí – např. funkce $f_1(x) = x^3,\ f_2(x) = |x|^3$ jsou na $\mathbb{R}$ lineárně nezávislé, ale $W_{f_1,f_2}(x) = 0$ pro každé $x \in \mathbb{R}$.

Věta 13.7:

Jsou-li funkce $\overline{y}_1,\ \overline{y}_2, \ldots,\ \overline{y}_n$ lineárně nezávislá řešení rovnice **(8)**, pak

$$W_{\overline{y}_1,\ldots,\overline{y}_n}(x) \neq 0 \quad \forall x \in I.$$

Věta 13.8:

Množina všech řešení homogenní lineární diferenciální rovnice řádu n je lineární prostor dimenze n.

poslední podmínku pro funkce $c_1,\ c_2,\ c_3$ nyní dostaneme dosazením do zadané rovnice – pro její levou stranu máme

$$\begin{aligned} D(\hat{y}) &= \hat{y}''' + \frac{2\hat{y}''}{x} - \frac{2\hat{y}'}{x^2} = \\ &= \left(c_2'(x)\cdot 2 + c_3'(x)\cdot\frac{2}{x^3} + c_3(x)\cdot\left(-\frac{6}{x^4}\right)\right) + \frac{2}{x}\left(c_2(x)\cdot 2 + c_3(x)\cdot\frac{2}{x^3}\right) - \\ &\quad -\frac{2}{x^2}\left(c_2(x)\cdot 2x + c_3(x)\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)\right) = \\ &= c_2'(x)\cdot 2 + c_3'(x)\cdot\frac{2}{x^3} + c_2(x)\cdot\underbrace{\left(0 + \frac{2}{x}\cdot 2 - \frac{2}{x^2}\cdot 2x\right)}_{D(\overline{y}_2)=0} + \\ &\quad + c_3(x)\cdot\underbrace{\left(-\frac{6}{x^4} + \frac{2}{x}\left(\frac{2}{x^3}\right) - \frac{2}{x^2}\left(-\frac{1}{x^2}\right)\right)}_{D(\overline{y}_3)=0} = \\ &= c_2'(x)\cdot 2 + c_3'(x)\cdot\frac{2}{x^3} \end{aligned}$$

(kdyby funkce $\overline{y}_1$ neměla všechny derivace nulové, objevil by se tu také člen $c_1(x)\,D(\overline{y}_1) = 0$)
dosazením do rovnice tedy dostáváme

$$c_2'(x)\cdot 2 + c_3'(x)\cdot\frac{2}{x^3} = -\frac{2}{x^2} \tag{5}$$

- pro každé x tak podmínky **(3)** – **(5)** představují soustavu tří lineárních rovnic s neznámými $c_1'(x),\ c_2'(x),\ c_3'(x)$ a maticí soustavy

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & x^2 & \frac{1}{x} & 0 \\ 0 & 2x & -\frac{1}{x^2} & 0 \\ 0 & 2 & \frac{2}{x^3} & -\frac{2}{x^2} \end{array}\right) \qquad \left(\text{ obecně: } \left(\begin{array}{ccc|c} \overline{y}_1 & \overline{y}_2 & \overline{y}_3 & 0 \\ \overline{y}_1' & \overline{y}_2' & \overline{y}_3' & 0 \\ \overline{y}_1'' & \overline{y}_2'' & \overline{y}_3'' & q \end{array}\right)\right)$$

  tuto soustavu lineárních rovnic vyřešíme například pomocí Cramerova pravidla a dostaneme

$$c_1'(x) = 1, \qquad c_2'(x) = -\frac{1}{3x^2}, \qquad c_3'(x) = -\frac{2}{3}x$$

  tedy např.

$$c_1(x) = x, \qquad c_2(x) = \frac{1}{3x}, \qquad c_3(x) = -\frac{1}{3}x^2$$

- odtud již máme

$$\hat{y}(x) = x\cdot 1 + \left(\frac{1}{3x}\right)\cdot x^2 + \left(-\frac{1}{3}x^2\right)\cdot\frac{1}{x} = x$$

3. obecné řešení nehomogenní rovnice nyní je

$$y(x) = x + c_1 + c_2\cdot x^2 + c_3\cdot\frac{1}{x}, \qquad x \in (-\infty,0) \text{ nebo } x \in (0,\infty) \qquad (c_1,c_2,c_3 \in \mathbb{R})$$

13.2 Rovnice s konstantními koeficienty

- **Homogenní rovnice** •

$$y^{(n)} + A_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + A_1y' + A_0y = 0, \qquad A_{n-1},\ldots,A_0 \in \mathbb{R} \tag{6}$$

charakteristická rovnice rovnice **(6)**: $\underbrace{\lambda^n + A_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + A_1\lambda + A_0}_{\text{charakteristický polynom rovnice } \mathbf{(6)}} = 0$

Věta 13.3 :

Jsou-li $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ (všechny) kořeny charakteristického polynomu rovnice **(6)** a $k_1, \ldots, k_r$ jejich násobnosti, pak systém funkcí

$$\begin{array}{cccc} e^{\lambda_1 x}, & x \cdot e^{\lambda_1 x}, & \ldots, & x^{k_1 - 1} e^{\lambda_1 x}, \\ \vdots & & & \\ e^{\lambda_r x}, & x \cdot e^{\lambda_r x}, & \ldots, & x^{k_r - 1} e^{\lambda_r x} \end{array}$$

tvoří fundamentální systém řešení rovnice **(6)** na $\mathbb{R}$.

Věta 13.4 :

Jsou-li $x^s e^{\lambda x}$, $x^s e^{\overline{\lambda} x}$, $\lambda = \alpha + \beta j$, $\beta \neq 0$, dvě funkce z FSŘ z Věty 13.3, lze tyto dvě funkce v systému nahradit dvojicí funkcí $x^s e^{\alpha x} \cos \beta x$, $x^s e^{\alpha x} \sin \beta x$.

reálný FSŘ: ve FSŘ z Věty 13.3 nahradíme všechny dvojice řešení $x^s e^{\lambda x}$, $x^s e^{\overline{\lambda} x}$, kde $\lambda \notin \mathbb{R}$, podle Věty 13.4 (díky vlastnostem kořenů polynomů s reálnými koeficienty nezbude v systému žádná funkce, která není reálná)

• Nehomogenní rovnice •

$$y^{(n)} + A_{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + A_1 y' + A_0 y = q(x), \qquad q \text{ spojitá na } I \tag{7}$$

partikulární řešení $\hat{y}$ najdeme:

- pro obecné q metodou variace konstant
- pro q ve speciálním tvaru metodou odhadu

Metoda odhadu

Věta 13.5 :

Jestliže pravou stranu rovnice **(7)** lze zapsat ve tvaru kvazipolynomu

$$q(x) = P(x)\, e^{\alpha x} \cos \beta x + Q(x)\, e^{\alpha x} \sin \beta x,$$

kde α, $\beta \in \mathbb{R}$ a P, Q jsou polynomy stupně nejvýše r, pak lze nalézt řešení rovnice **(7)** ve tvaru

$$\hat{y}(x) = x^k \tilde{P}(x)\, e^{\alpha x} \cos \beta x + x^k \tilde{Q}(x)\, e^{\alpha x} \sin \beta x,$$

kde $\tilde{P}$, $\tilde{Q}$ jsou polynomy stupně nejvýše r a k je násobnost $\lambda = \alpha + \beta j$ jako kořene charakteristického polynomu rovnice.

Poznámka : Při ověřování, zda je pravá strana rovnice ve tvaru z Věty 13.5, je často potřeba si uvědomit, že $1 = \cos 0x = e^{0x}$ a že polynomy P, Q mohou být i nulové.

Příklad 13.2: Najděte řešení rovnice

$$y''' - 4y' \;=\; 8x + 10 \cos x + 4\, e^{-2x}.$$

vyhovující počátečním podmínkám $y(0) = 1$, $y'(0) = \frac{1}{2}$, $y''(0) = 0$.

Řešení: Protože je pravá strana spojitá pro každé $x \in \mathbb{R}$, dostaneme řešení na celém $\mathbb{R}$.

(A) **Přidružená homogenní rovnice** $y''' - 4y' = 0$ má charakteristickou rovnici $\lambda^3 - 4\lambda = 0$, jejímiž kořeny jsou čísla $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 2$ a $\lambda_3 = -2$. Obecné řešení přidružené homogenní rovnice je tedy tvaru

$$\tilde{y}(x) \;=\; c_1 \cdot 1 \;+\; c_2 \cdot e^{2x} \;+\; c_3 \cdot e^{-2x}.$$

(B) **Partikulární řešení nehomogenní rovnice** hledáme na základě principu superpozice (Věta 13.2) ve tvaru $\hat{y} = \hat{y}_1 + \hat{y}_2 + \hat{y}_3$, kde část řešení $\hat{y}_1$ odpovídá části pravé strany $q_1(x) = 8x$, část $\hat{y}_2$ pravé straně $q_2(x) = 10 \cos x$ a část $\hat{y}_3$ pak funkci $q_3(x) = 4\, e^{-2x}$.

1. Můžeme psát $q_1(x) = 8x = 8x\, e^{0x} \cos(0x)$. Odtud při použití značení z Věty 13.5 je $P(x) = 8x$, $Q(x) = 0$, $r = 1$, $\lambda = 0 + 0\,j = 0$, $k = 1$ (0 je jednoduchý kořen charakteristické rovnice). Řešení $\hat{y}_1$ proto hledáme ve tvaru
$$\hat{y}_1(x) = x(Ax + B) \cdot e^0 = Ax^2 + Bx.$$
Funkci $\hat{y}_1$ třikrát zderivujeme ($\hat{y}_1' = 2Ax + B$, $\hat{y}_1'' = 2A$, $\hat{y}_1''' = 0$) a pak funkci s jejími derivacemi dosadíme do rovnice s pravou stranou q_1. Dostaneme tak rovnost dvou polynomů $0 - 4(2Ax + B) = 8x$. Tyto polynomy se rovnají, pokud mají u stejných funkcí stejné koeficienty. Potřebujeme tedy porovnat koeficienty u funkcí $x^1 = x$ a $x^0 = 1$ na obou stranách rovnosti. Rovnosti koeficintů u x a 1 nám postupně dávají, že musí platit $-8A = 8$ a $-4B = 0$. Dostali jsme tak soustavu dvou lineárních rovnic o dvou neznámých A a B. Jejím řešením jsou $A = -1$ a $B = 0$. Odtud
$$\hat{y}_1(x) = -x^2.$$
2. Druhou část pravé strany přepíšeme ve tvaru $q_2(x) = 10 \cos x = 10\, e^{0x} \cos(1x)$. Protože $\lambda = 0 + 1\,j$ není kořenem charakteristické rovnice, máme tentokrát $k = 0$. Konstantní funkce $P(x) = 10$ je polynom stupně nula, tedy $r = 0$, polynom Q je opět nulový. Část řešení $\hat{y}_2$ proto hledáme ve tvaru
$$\hat{y}_2(x) = C \cos x + D \sin x.$$
(Všiměte si, že i když se v pravé straně q_2 vyskytoval jen kosinus, musím v řešení očekávat i sinus. A jak dále uvidíme, může – ale nemusí – se v řešení objevit jen sinus a ne už kosinus.) Dosazením funkce $C \cos x + D \sin x$ do rovnice s pravou stranou q_2 dostaneme rovnost $C \sin x - D \cos x + 4C \sin x - 4D \cos x = 10 \cos x$. Opět porovnáme koeficienty u stejných funkcí na obou stranách. Pro $\sin x$ dostáváme $5C = 0$ a pro $\cos x$ pak $-5D = 10$, což je soustava dvou lineárních rovnic pro neznámé C a D. Jejími řešeními jsou $C = 0$ a $D = -2$. Máme tak
$$\hat{y}_2(x) = -2 \sin x.$$
3. Konečně $q_3(x) = 4\, e^{-2x} = 4\, e^{-2x} \cos 0x$. Tedy tentokrát $P(x) = 4$, $Q(x) = 0$, $r = 0$, $\lambda = -2 + 0\,j = -2$, $k = 1$ (-2 je jednoduchý kořen charakteristické rovnice). Funkci $\hat{y}_3$ proto hledáme ve tvaru
$$\hat{y}_3(x) = xE\, e^{-2x}.$$
Po dosazení do rovnice s pravou stranou q_3 dostanem rovnost $E\, e^{-2x}(-8x + 12) - 4E\, e^{-2x}(-2x + 1) = 4\, e^{-2x}$ a po úpravě $8E\, e^{-2x} = 4\, e^{-2x}$. Odtud $8E = 4$, tj. $E = \frac{1}{2}$. Tedy
$$\hat{y}_3(x) = \frac{1}{2}\, x\, e^{-2x}.$$

Celkem tak dostáváme partikulární řešení nehomogenní rovnice

$$\hat{y} = -x^2 - 2 \sin x + \frac{1}{2}\, x\, e^{-2x}.$$

(C) Kombinací výsledků z bodů (A) a (B) dostáváme, že obecné řešení $y = \hat{y} + \tilde{y}$ rovnice $y''' - 4y' = x + 3 \cos x + e^{-2x}$ je tvaru

$$y(x) \;=\; -x^2 \;-\; 2 \sin x \;+\; \frac{1}{2}\, x\, e^{-2x} \;+\; c_1 \;+\; c_2\, e^{2x} \;+\; c_3\, e^{-2x} \qquad x \in \mathbb{R} \qquad (c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}).$$

(D) Abychom vybrali řešení vyhovující počátečním podmínkám, spočítáme první dvě derivace obecného řešení

$$\begin{aligned} y'(x) &= -2x - 2 \cos x + \frac{1}{2}\, e^{-2x}(-2x + 1) + 2c_2\, e^{2x} - 2c_3\, e^{-2x}, \\ y''(x) &= -2 + 2 \sin x + \frac{1}{2}\, e^{-2x}(4x - 4) + 4c_2\, e^{2x} + 4c_3\, e^{-2x} \end{aligned}$$

a následně hodnoty $y(0)$, $y'(0)$, $y''(0)$. Jejich porovnáním s počátečními podmínkami pak dostaneme pro koeficienty c_1, c_2, c_3 soustavu lineárních rovnic

$$\begin{array}{rrrrrrrr} y(0) = 1 : & & c_1 & + & c_2 & + & c_3 & = & 1 \\ y'(0) = \frac{1}{2} : & -\frac{3}{2} & + & & 2c_2 & - & 2c_3 & = & \frac{1}{2} \\ y''(0) = 0 : & -4 & + & & 4c_2 & + & 4c_3 & = & 0 \end{array}$$

která má řešení $c_1 = 0$, $c_2 = 1$, $c_3 = 0$. Hledaným řešením Cauchyovy úlohy tak je funkce

$$y(x) \;=\; -x^2 \;-\; 2 \sin x \;+\; \frac{1}{2}\, x\, e^{-2x} \;+\; e^{2x} \qquad x \in \mathbb{R}.$$