KAPITOLA 8: Riemannův integrál

určitý integrál

motivace: výpočet obsahu plochy pod grafem funkce

8.1 Úvod

(nejdříve jen pro $a < b$)

Definice:

řekneme, že množina $\mathcal{D} \subset \langle a, b \rangle$ je **dělením intervalu** $\langle a, b \rangle$, jestliže je konečná a $a,\ b \in \mathcal{D}$.

Prvky dělení $\mathcal{D} = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ intervalu $\langle a, b \rangle$ číslujeme tak, že platí

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b\,.$$

Pro funkci f omezenou na $\langle a, b\rangle$ označíme

$$m_{i,\mathcal{D}} = \inf_{x\in\langle x_{i-1}, x_i\rangle} f(x)\,, \qquad M_{i,\mathcal{D}} = \sup_{x\in\langle x_{i-1}, x_i\rangle} f(x)\,.$$

Definice:

Je-li f funkce <u>omezená</u> na $\langle a, b\rangle$ a $\mathcal{D} = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ dělení intervalu $\langle a, b\rangle$, pak čísla

$$\underline{S}(f, \mathcal{D}) = \sum_{i=1}^{n} m_{i,\mathcal{D}} \cdot (x_i - x_{i-1})$$

a

$$\overline{S}(f, \mathcal{D}) = \sum_{i=1}^{n} M_{i,\mathcal{D}} \cdot (x_i - x_{i-1}),$$

nazýváme **dolním** a **horním Riemannovým** (integrálním) **součtem** funkce f na $\langle a, b\rangle$.

Věta 8.1:

Pro každé dělení $\mathcal{D}$ intervalu $\langle a,\, b\rangle$ platí

$$(b-a)\cdot \inf_{x\in\langle a,b\rangle} f(x) \quad\leq\quad \underline{S}(f,\mathcal{D}) \quad\leq$$

$$\leq\quad \overline{S}(f,\mathcal{D}) \quad\leq\quad (b-a)\cdot \sup_{x\in\langle a,b\rangle} f(x).$$

Definice:

Dělení $\mathcal{D}'$ intervalu $\langle a,\, b\rangle$ nazýváme **zjemněním** dělení $\mathcal{D}$ intervalu $\langle a,\, b\rangle$, je-li $\mathcal{D}\subset\mathcal{D}'$.

Poznámka:

Je-li $\mathcal{D} = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ dělení intervalu $\langle a,\, b\rangle$ a $\mathcal{D}_1 = \mathcal{D} \cup \{\tilde{x}\}$, kde $\tilde{x} \notin \mathcal{D}$, pak zřejmě

$$\underline{S}(f, \mathcal{D}_1) \ \geq\ \underline{S}(f, \mathcal{D}) \qquad \text{a} \qquad \overline{S}(f, \mathcal{D}_1) \ \leq\ \overline{S}(f, \mathcal{D}).$$

Odtud pro jakékoliv zjemnění $\mathcal{D}'$ dělení $\mathcal{D}$ platí

$$\underline{S}(f, \mathcal{D}') \ \geq\ \underline{S}(f, \mathcal{D}) \qquad \text{a} \qquad \overline{S}(f, \mathcal{D}') \ \leq\ \overline{S}(f, \mathcal{D}),$$

protože dělení $\mathcal{D}'$ lze získat z dělení $\mathcal{D}$ postupným přidáváním jednoho bodu.

Věta 8.2:

Jsou-li $\mathcal{D}_1$, $\mathcal{D}_2$ dělení intervalu $\langle a,\, b\rangle$, pak

$$\underline{S}(f, \mathcal{D}_1) \leq \overline{S}(f, \mathcal{D}_2)\,.$$

Definice:

Jestliže

$$\sup\,\{\underline{S}(f,\mathcal{D})\,|\,\mathcal{D}\ \text{ dělení } \langle a,\,b\rangle\,\} =$$

$$= \inf\,\{\overline{S}\,(f,\mathcal{D})\,|\,\mathcal{D}\ \text{ dělení } \langle a,\,b\rangle\,\} = I,$$

pak číslo I nazýváme **Riemannovým** (určitým) **integrálem** funkce f na intervalu $\langle a,\,b\rangle$ a píšeme

$$I = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

$\Big($ případně $(R)\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ nebo stručně jen $\int_a^b f$ $\Big)$.

a ... dolní mez; b ... horní mez; f ... integrand

Poznámka:

Riemannův integrál je definován jen pro funkce omezené - pro jiné funkce není definován horní a dolní Riemannův součet.

Poznámka:

Na existenci a hodnotu Riemannova integrálu nemá vliv, změníme-li hodnotu integrované funkce v konečně mnoha bodech. Díky tomu lze připustit, aby integrovaná funkce nebyla v konečně mnoha bodech intervalu definována.

Poznámka:

Pro každé dělení $\mathcal{D}$ intervalu $\langle a, b\rangle$ zřejmě platí

$$\underline{S}(f, \mathcal{D}) \leq \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq \overline{S}(f, \mathcal{D}).$$

(Samozřejmě za předpokladu, že $\int_a^b f$ existuje.)

Věta 8.3:

Integrál $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ existuje a je roven A právě tehdy, když existuje posloupnost $(\mathcal{D}_n)_{n=1}^{\infty}$ dělení intervalu $\langle a, b\rangle$ taková, že

$$\lim_{n\to\infty} \underline{S}(f, \mathcal{D}_n) = \lim_{n\to\infty} \overline{S}(f, \mathcal{D}_n) = A.$$

Poznámka:

Pro $(\mathcal{D}_n)_{n=1}^{\infty}$ z Věty 8.3 zřejmě platí

$$\lim_{n\to\infty} \left(\overline{S}(f, \mathcal{D}_n) - \underline{S}(f, \mathcal{D}_n) \right) = 0.$$

Poznámka:

Riemannův integrál lze zavést také pomocí **Riemannových integrálních součtů**. K tomu kromě dělení $\mathcal{D} = \{x_0, \ldots, x_n\}$ uvažujeme ještě množinu $\tau = \{t_1, \ldots, t_n\}$, takovou, že $t_i \in \langle x_{i-1}, x_i \rangle$, a položíme

$$S(f, \mathcal{D}, \tau) \;=\; \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\,(x_i - x_{i-1}).$$

Integrál pak definujeme jako limitu těchto součtů, pokud půjde norma dělení, tj. maximální délka intervalu vzniklého dělením, k nule. Obě definice Riemannova integrálu jsou ekvivalentní, tedy existuje-li integrál podle jedné z definic, existuje i podle druhé a jeho hodnoty jsou v obou případech stejné.

Příklad 8.1: Pro $k \in \mathbb{R}$ pevné je

$$\int_a^b k \, \mathrm{d}x = k \cdot (b-a).$$

Řešení: Pro libovolné dělení $\mathcal{D} = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ zřejmě platí

$$\underline{S}(k, \mathcal{D}) = \underbrace{\sum_{i=1}^{n} k(x_i - x_{i-1})}_{k \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \; = \; k(b-a)} = \overline{S}(f, \mathcal{D}) .$$

Příklad 8.4: Ukažte, že $\int_0^1 \operatorname{sgn} x \; \mathrm{d}x = 1.$

Řešení: Nechť $n \in \mathbb{N}$. Pak pro posloupnost dělení $\mathcal{D}_n = \{0, \frac{1}{n}, 1\}$ máme

$$\overline{S}(f, \mathcal{D}_n) = 1 \cdot \frac{1}{n} + 1 \cdot \frac{n-1}{n} = 1,$$

$$\underline{S}(f, \mathcal{D}_n) = 0 \cdot \frac{1}{n} + 1 \cdot \frac{n-1}{n} \longrightarrow 1.$$

Podle Věty 8.3 tedy uvedená rovnost platí.

Věta 8.4:

Je-li f na intervalu $\langle a, b\rangle$ spojitá nebo monotonní, pak existuje $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

8.2 Vlastnosti

Věta 8.5:

Nechť $a < b < c$. Pak $\displaystyle\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x$ existuje, právě když existují $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ a $\displaystyle\int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x$, a v tomto případě platí

$$\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x$$

(tzv. aditivita integrálu vzhledem k integračnímu oboru).

Definice:

Nechť $a < b$ a existuje $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$. Pak definujeme

$$\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Dále definujeme

$$\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

Poznámka:

Předpoklad $a < b < c$ ve Větě 8.5 lze nahradit předpokladem existence integrálu $\int_\alpha^\beta f(x)\,\mathrm{d}x$, kde $\alpha = \min\{a, b, c\}$ a $\beta = \max\{a, b, c\}$.

Věta 8.6:

Nechť existuje $\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x$. Jestliže se g liší od f na $\langle a, b\rangle$ v nejvýše konečně mnoha bodech, pak existuje $\int_a^b g(x)\ \mathrm{d}x$ a platí

$$\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x = \int_a^b g(x)\ \mathrm{d}x.$$

Poznámka:

Na základě Vět 8.4, 8.5 a 8.6 stačí k existenci $\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x$, když f je na $\langle a, b\rangle$ po částech spojitá (tj. má tam jen konečně mnoho bodů nespojitosti a v nich má konečné jednostranné limity).

Věta 8.7:

Nechť existují $\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x$, $\int_a^b g(x)\ \mathrm{d}x$ a $c \in \mathbb{R}$. Potom

a) $$\int_a^b (f+g)(x)\ \mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\ \mathrm{d}x,$$

b) $$\int_a^b (c \cdot f)(x)\ \mathrm{d}x = c \cdot \int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x.$$

Je-li navíc $a < b$, pak

c) je-li $f \geq 0$ na $\langle a, b \rangle$, pak $\displaystyle\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x \geq 0$,

d) je-li $f \leq g$ na $\langle a, b \rangle$, pak

$$\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x \leq \int_a^b g(x)\ \mathrm{d}x$$

e) existuje $\displaystyle\int_a^b |f(x)|\ \mathrm{d}x$ a platí

$$\left| \int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x \right| \leq \int_a^b |f(x)|\ \mathrm{d}x,$$

f) je-li $|f| \leq M$ na $\langle a, b \rangle$, pak

$$\left| \int_A^B f(x)\ \mathrm{d}x \right| \leq M\,|B - A|$$

pro libovolná $A,\ B \in \langle a, b \rangle$.

Důkaz:

a), b) viz skripta Věta 10.12

c) zřejmé – sčítáme nezáporná čísla

d) $g - f \geq 0$ na $\langle a, b \rangle$, tedy podle a), b), c) je

$$\int_a^b g - \int_a^b f \overset{\text{b)}}{=} \int_a^b g + \int_a^b (-f) \overset{\text{a)}}{=} \int_a^b (g - f) \overset{\text{c)}}{\geq} 0$$

e) jen odhad: $-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$ pro každé $x \in \langle a, b \rangle$,
tedy

$$-\int_a^b |f| \overset{\text{b)}}{=} \int_a^b (-|f|) \overset{\text{d)}}{\leq} \int_a^b f \overset{\text{d)}}{\leq} \int_a^b |f|$$

Věta 8.8 (integrál jako funkce horní meze):

Nechť existuje $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ a $c \in \langle a, b\rangle$. Pak pro funkci

$$F_c(x) = \int_c^x f(t)\,\mathrm{d}t, \quad x \in \langle a, b\rangle$$

platí:

a) F_c je spojitá na $\langle a, b\rangle$ a $F_c(c) = 0$.

b) Je-li f spojitá v $x_0 \in \langle a, b\rangle$, pak $F_c'(x_0) = f(x_0)$.
(Existuje-li jen jednostranná limita funkce f v x_0, pak je rovna odpovídající jednostranné derivaci funkce F v x_0.)

Poznámka:

Funkce f spojitá na intervalu I má tedy na I primitivní funkci a pro libovolnou primitivní funkci F k f na I platí

$$F(x) = F_c(x) + F(c) = \int_c^x f(t)\,\mathrm{d}t + F(c).$$

Příklad 8.5: Pro funkci

$$f(x) = \int_0^x \left(\mathrm{e}^{t^2} - \mathrm{e}^4\right)\,\mathrm{d}t$$

vyšetřete body lokálních extrémů, intervaly monotonie, konvexnosti a konkávnosti.

Věta 8.9 (Newton-Leibnizova formule):

Jestliže existuje $\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x$ a F je primitivní funkce k f na (a,b), pak platí

$$\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x = F(b-) - F(a+) \ \left(= \lim_{x\to b^-} F(x) - \lim_{x\to a^+} F(x) \right).$$

Píšeme:

$$F(b-) - F(a+) = [\ F(x)\ ]_a^b.$$

Poznámka:

Na volbě primitivní funkce ve Větě 8.9 nezáleží. Jsou-li totiž F_1, F_2 primitivní funkce k f na (a,b), pak existuje $\tilde{c} \in \mathbb{R}$ tak, že $F_2 = F_1 + \tilde{c}$ na (a,b), tedy

$$[\ F_2(x)\ ]_a^b = F_2(b-) - F_2(a+) = (F_1(b-) + \tilde{c}) - (F_1(a+) + \tilde{c}) =$$

$$= F_1(b-) - F_1(a+) = [\ F_1(x)\ ]_a^b.$$

Příklad 8.6:

a) $\displaystyle\int_a^b k\,\mathsf{d}x \;=\; \left[k\,x\right]_a^b \;=\; k\,b - k\,a \;=\; k\,(b-a),$

b) $\displaystyle\int_a^b x\,\mathsf{d}x \;=\; \left[\frac{x^2}{2}\right]_a^b \;=\; \frac{b^2-a^2}{2}\;.$

Poznámka - Newtonův integrál:

Je-li F primitivní funkce k funkci f na intervalu (a, b)
a existují-li limity

$$\lim_{x \to a^+} F(x), \quad \lim_{x \to b^-} F(x),$$

pak definujeme Newtonův integrál funkce f na (a, b) předpisem

$$(N)\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{x \to b^-} F(x) - \lim_{x \to a^+} F(x) \quad \left(= F(b-) - F(a+) \right)$$

(samozřejmě, jen pokud je rozdíl $F(b-) - F(a+)$ definován).

Existují-li Riemannův i Newtonův integrál, pak si jsou rovny.

8.3 Integrace per partes a metoda substituce

kombinace Newton-Leibnizovy formule a metod pro neurčitý integrál

při použití metody substutice je nutné přepočítat meze integrálu

Příklad 8.8: Pro funkci $f(x) = x\ \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}$ vypočtěte $\int_{-2}^{4} f(x)\,\mathrm{d}x$.

Řešení: Funkce f je na intervalu $\langle -2, 4\rangle$ spojitá (tedy i omezená), a proto integrál existuje. Máme:

$$\int_{-2}^{4} x\ \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}\ \mathrm{dx} = \left| \begin{array}{lcl} -\frac{x}{2} & = & t \\ -\frac{1}{2}\ \mathrm{d}x & = & \mathrm{d}t \\ -2 & \rightsquigarrow & 1 \\ 4 & \rightsquigarrow & -2 \end{array} \right| = \int_{1}^{-2} (-2t)\ \mathrm{e}^{\mathrm{t}}\,(-2)\,\mathrm{dt} =$$

$$= 4\int_{1}^{-2} t\ \mathrm{e}^{\mathrm{t}}\,\mathrm{dt} = -4\int_{-2}^{1} t\ \mathrm{e}^{\mathrm{t}}\,\mathrm{dt} =$$

$$= \left| \begin{array}{ll} u = t & v' = \mathrm{e}^{\mathrm{t}} \\ u' = 1 & v = \mathrm{e}^{\mathrm{t}} \end{array} \right| \overset{\text{P.P.}}{=} -4\Big(\big[t\ \mathrm{e}^{\mathrm{t}} \big]_{-2}^{1} - \int_{-2}^{1} \mathrm{e}^{\mathrm{t}}\,\mathrm{dt} \Big) =$$

$$= -4\Big(\big(\mathrm{e} - (-2)\,\mathrm{e}^{-2} \big) - \big(\mathrm{e} - \mathrm{e}^{-2} \big) \Big) = -12\,\mathrm{e}^{-2}\ .$$

Příklad 8.9: Předpokládejme, že existuje $\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x \quad (a \geq 0)$ a f je sudá nebo lichá. Rozepišme

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-a}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x$$

a dopočítejme první integrál:

$$\int_{-a}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{ccc} x & = & -t \\ \mathrm{d}x & = & -\,\mathrm{d}t \\ 0 & \rightsquigarrow & 0 \\ -a & \rightsquigarrow & a \end{array} \right| = -\int_{a}^{0} f(-t)\,\mathrm{d}t = \int_{0}^{a} f(-t)\,\mathrm{d}t =$$

$$= \begin{cases} \displaystyle\int_{0}^{a} -f(t)\,\mathrm{d}t = -\int_{0}^{a} f(t)\,\mathrm{d}t & \text{pro } f \text{ lichou,} \\ \displaystyle\int_{0}^{a} f(t)\,\mathrm{d}t & \text{pro } f \text{ sudou.} \end{cases}$$

Tedy

$$\underline{\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x} = \begin{cases} \underline{0} & \text{pro } f \text{ lichou,} \\ \underline{2\displaystyle\int_{0}^{a} f(t)\,\mathrm{d}t} & \text{pro } f \text{ sudou.} \end{cases}$$

Příklad 8.10: Předpokládejme, že f je periodická s periodou T a po částech spojitá na $\mathbb{R}$. Potom platí

A) Pro každé $\alpha \in \mathbb{R}$ je

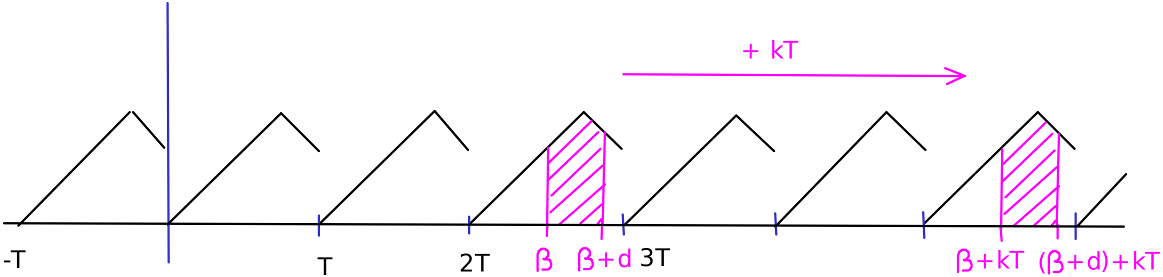
$$\int_{\alpha}^{\alpha+T} f(x)\,\mathrm{d}x \;=\; \int_{0}^{T} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Tedy při integraci periodické funkce nezáleží na tom, přes který interval délky periody integrujeme. Integrál je vždy stejný.

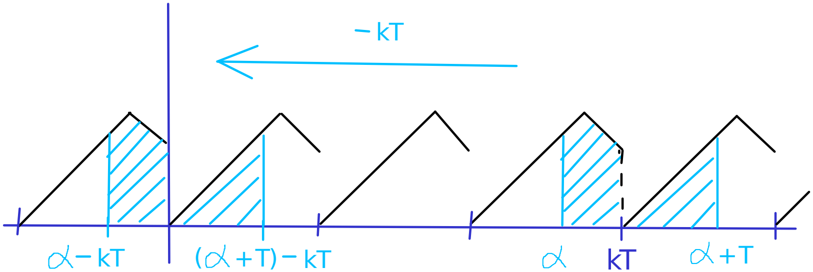
B) Jsou-li $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha = \beta + kT$ pro nějaké $k \in \mathbb{Z}$ a $d \in \mathbb{R}$, pak

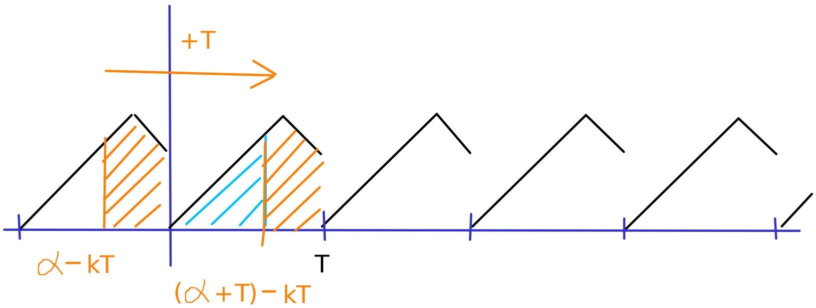
$$\int_{\beta}^{\beta+d} f(x)\,\mathrm{d}x \;=\; \int_{\alpha}^{\alpha+d} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Tedy posun intervalu o násobek periody integrál nezmění.



$$\int_{\beta}^{\beta+d} f(t)\,dt = \int_{\beta+kT}^{\beta+d)+kT} f(t)\,dt .$$





$$\int_{\alpha}^{\alpha+T} f(t)\,dt = \int_{0}^{T} f(t)\,dt$$

Příklad 8.11: Vypočtěte $\displaystyle\int_{-2\pi}^{2\pi} f(x)\,\mathrm{d}x$, kde $f(x) = \dfrac{1}{1+\sin^2 x}$.

Řešení: Funkce f je spojitá na intervalu $\langle -2\pi, 2\pi\rangle$, tedy integrál existuje. Vhodná substituce zde je $t = \operatorname{tg} x$. Funkce tangens však není definována na celém intervalu $\langle -2\pi, 2\pi\rangle$. Proto náš integrál roztrhneme na několik integrálů:

$$\int_{-2\pi}^{2\pi} f = \int_{-2\pi}^{-\frac{3\pi}{2}} f + \int_{-\frac{3\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}} f + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} f + \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} f\,.$$

Funkce f je π-periodická, tedy podle **Příkladu 8.10** máme

$$\int_{-2\pi}^{2\pi} f = \int_{-2\pi}^{-\frac{3\pi}{2}} f + 3\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f + \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} f =$$

$$\overset{\text{Př. } 8.10B}{=} \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} f + 3\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} f = 4\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f.$$

Hodnotu integrálu $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f$ vypočteme v Příkladu 9.3.

8.4 Věta o střední hodnotě

Věta 8.10 (o střední hodnotě):

Nechť f je spojitá na $\langle a,\, b\rangle$. Pak existuje $c \in (a, b)$ tak, že

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = f(c)\cdot(b-a).$$

$$f(c) = \frac{\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x}{b-a} \qquad \ldots$$

$\ldots$ střední hodnota funkce f na intervalu $\langle a,\, b\rangle$