Příklad 9.6: a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{0}(x+1)\,\mathrm{e}^{3x}\,\mathrm{d}x \;=\; \frac{2}{9}\,,$ b) $\displaystyle\int_{0}^{\infty} x\,\mathrm{e}^{x}\,\mathrm{d}x \;=\; +\infty\,.$

Věta 9.1 (srovnávací kritérium):

a) Nechť $|f| \le g$ na (a,b), f je na (a,b) po částech spojitá a $\displaystyle\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$ konverguje. Pak konverguje také $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

b) Nechť $f \le g$ $(g \le h)$ na (a,b), g je na (a,b) po částech spojitá a $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = +\infty$ $\Big(\displaystyle\int_a^b h(x)\,\mathrm{d}x = -\infty\Big)$. Pak $\displaystyle\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x = +\infty$ $\Big(\displaystyle\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x = -\infty\Big)$.

Příklad 9.7: a) $\displaystyle\int_0^1 x^\alpha\,\mathrm{d}x$ konverguje právě tehdy, když $\alpha > -1$,

b) $\displaystyle\int_1^\infty x^\alpha\,\mathrm{d}x$ konverguje právě tehdy, když $\alpha < -1$,

c) pro $c \in \mathbb{R}$ konverguje $\displaystyle\int_c^{c+1} (x-c)^\alpha\,\mathrm{d}x$ právě tehdy, když $\alpha > -1$.

Příklad 9.8: $\displaystyle\int_0^\infty \mathrm{e}^{\alpha x}\,\mathrm{d}x$ konverguje právě tehdy, když $\alpha < 0$.

(Výsledky Příkladů 9.6 a 9.7 často využíváme ve srovnávacím kritériu.)

Příklad 9.9: Mějme polynomy P a Q, kde polynom Q nemá kořen v intervalu $\langle a,\,\infty)$. Z kapitoly o limitách víme, že se pro $x \to \infty$ podíl $\frac{P}{Q}$ chová jako funkce $B\,x^{\mathrm{st}P-\mathrm{st}Q}$, kde B je podíl koeficientů u nejvyšších mocnin v polynomech P a Q. Na základě výsledku Příkladu 9.7,b) můžeme usuzovat, že by integrál $\int_a^\infty \frac{P(x)}{Q(x)}\,\mathrm{d}x$ měl konvergovat právě tehdy, když $\mathrm{st}P - \mathrm{st}Q < -1$, neboli pokud stupeň jmenovatele je alespoň o dvě větší než stupeň čitatele.
Podívejme se, že to opravdu platí. Označme $k = \mathrm{st}Q - \mathrm{st}P$. Pak $\lim_{x\to\infty} \frac{P(x)x^k}{Q(x)} = A \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, kde A je podíl koeficientů u nejvyšších mocnin polynomů P a Q. Předpokládejme, že $A > 0$ (pro $A < 0$ by byl postup obdobný).
Z definice limity existuje pro $\varepsilon = \frac{A}{2}$ číslo $b \ge a,\ b > 0$, takové, že pro každé $x > b$ platí $\frac12 A \le \frac{P(x)x^k}{Q(x)} \le \frac32 A$, tj. $\frac{A}{2}\,\frac{1}{x^k} \le \frac{P(x)}{Q(x)} \le \frac{3A}{2}\,\frac{1}{x^k}$. Dolní odhad podílu $\frac{P(x)}{Q(x)}$ a druhá část srovnávacího kritéria nám spolu s Příkladem 9.7,b) říkají, že pro $k \le 1$ (kdy $-k \ge -1$) integrál $\int_b^\infty \frac{P(x)}{Q(x)}\,\mathrm{d}x$ diverguje. Na druhou stranu, protože $0 < \frac{A}{2}\,\frac{1}{x^k}$, máme pro $\frac{P(x)}{Q(x)}$ na intervalu $\langle b,\,\infty)$ odhad $\left|\frac{P(x)}{Q(x)}\right| \le \frac{3A}{2}\,\frac{1}{x^k}$, a tedy podle první části srovnávacího kritéria a Příkladu 9.7,b) pro $k > 1$ integrál $\int_b^\infty \frac{P(x)}{Q(x)}\,\mathrm{d}x$ konverguje. Tím jsme dostali, že integrál $\int_b^\infty \frac{P(x)}{Q(x)}\,\mathrm{d}x$ konverguje právě tehdy, když $k > 1$.
Potřebujeme se ještě podívat, jak je to s konvergencí integrálu $\int_a^b \frac{P(x)}{Q(x)}\,\mathrm{d}x$. Protože je ale na intervalu $\langle a,\,b\rangle$ funkce $\frac{P}{Q}$ spojitá, a tedy i omezená, je tento integrál vlastní, a tím také konečný, bez ohledu na to, jaké jsou stupně polynomů P a Q. Podmínky pro konvergenci integrálu funkce $\frac{P}{Q}$ jsou tak na intervalu $\langle a,\,\infty)$ stejné jako na integvalu $\langle b,\,\infty)$. Zjistili jsme tak, že pokud polynom Q nemá kořen v intervalu $\langle a,\,\infty)$,

$$\int_a^\infty \frac{P(x)}{Q(x)}\,\mathrm{d}x \quad \text{konverguje právě tehdy, když} \quad \mathrm{st}\,Q \;\ge\; \mathrm{st}\,P + 2.$$

Příklad 9.10: Vyšetřete konvergenci integrálů a) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{1+x^2}}$, b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{1+x^2}}$.

Řešení: a) Protože na intervalu $\langle 1,\,\infty)$ platí $\left|\dfrac{1}{x\sqrt{1+x^2}}\right| = \dfrac{1}{x\sqrt{1+x^2}} \le \dfrac{1}{x\sqrt{x^2}} = \dfrac{1}{x^2}$ a podle Příkladu 9.7b) integrál $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x$ konverguje, konverguje podle Věty 9.1a) i integrál $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{1+x^2}}$.

b) Na intervalu $(0,\,1\rangle$ máme $\dfrac{1}{x\sqrt{1+x^2}} \ge \dfrac{1}{x\sqrt{1+1}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}\,x}$. Podle Příkladu 9.7a) integrál $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$ diverguje k $+\infty$, takže také integrál $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{2}\,x}\,\mathrm{d}x$ diverguje k $+\infty$, a tím podle Věty 9.1b) k $+\infty$ diverguje i integrál $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{1+x^2}}$.

Příklad 9.11: a) $\displaystyle\int_2^\infty \frac{\operatorname{arctg} x}{x^2-1}\,\mathrm{d}x$ konverguje, b) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\mathrm{e}^x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$ diverguje k $+\infty$.

KAPITOLA 9: Nevlastní integrál

singulární bod integrace funkce f na (a,b) :

- a, je-li $a = -\infty$; b, je-li $b = +\infty$
- $c \in \langle a,\,b\rangle$, je-li f neomezená na každém prstencovém okolí bodu c (pro $c = a$ nebo $c = b$ uvažujeme jen příslušná jednostranná okolí)

Definice:

- Nechť $-\infty < a < b \le +\infty$, b je singulární bod integrace funkce f na (a,b) a nechť pro každé $\beta \in (a,b)$ existuje $(R)\displaystyle\int_a^\beta f(x)\,\mathrm{d}x$ (*tedy b je jediný singulární bod integrace funkce f na (a,b)*). Potom definujeme **nevlastní integrál vzhledem k horní mezi** předpisem
$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\beta\to b^-}\ (R)\!\int_a^\beta f(x)\,\mathrm{d}x,$$
jestliže limita vpravo existuje.
- Nechť $-\infty \le a < b < +\infty$, a je singulární bod integrace funkce f na (a,b) a nechť pro každé $\alpha \in (a,b)$ existuje $(R)\displaystyle\int_\alpha^b f(x)\,\mathrm{d}x$ (*tedy a je jediný singulární bod integrace funkce f na (a,b)*). Potom definujeme **nevlastní integrál vzhledem k dolní mezi** předpisem
$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\alpha\to a^+}\ (R)\!\int_\alpha^b f(x)\,\mathrm{d}x,$$
jestliže limita vpravo existuje.
- Jestliže daná limita existuje a je konečná, říkáme, že integrál **konverguje**, je-li rovna $+\infty$ $(-\infty)$, říkáme, že integrál **diverguje k** $+\infty$ $(-\infty)$.

Poznámka: Je-li funkce f spojitá na $\langle a,\,b)$ resp. $(a,\,b\rangle$ a F je primitivní funkce k funkci f na (a,b), pak podle Věty 8.9 (Newton-Leibnitzova formule) můžeme díky spojitosti funkce F na (a,b) psát

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \;=\; \lim_{\beta\to b^-}\,[\,F(x)\,]_a^\beta \;=\; \lim_{\beta\to b^-}\,(\underbrace{F(\beta-)}_{F(\beta)} - F(a+)) \;=$$
$$=\; \lim_{\beta\to b^-} F(\beta) - F(a+) \;=\; F(b-) - F(a+) \;=\; [\,F(x)\,]_a^b$$

resp.

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \;=\; \lim_{\alpha\to a^+}\,[\,F(x)\,]_\alpha^b \;=\; \lim_{\alpha\to a^+}\,(F(b-) - \underbrace{F(\alpha+)}_{F(\alpha)}\,) \;=$$
$$=\; F(b) - \lim_{\alpha\to a^+} F(\alpha) \;=\; F(b-) - F(a+) \;=\; [\,F(x)\,]_a^b\,.$$

Integrál přitom v prvním případě existuje právě tehdy, když existuje $\lim_{\beta\to b^-} F(\beta)$, ve druhém, když existuje $\lim_{\alpha\to a^+} F(\alpha)$.

integrál nevlastní vlivem meze … $a = -\infty$ nebo $b = +\infty$
integrál nevlastní vlivem funkce … f není omezená na (a,b)

přípustné dělení intervalu (a,b) $(-\infty \le a < b \le +\infty)$ pro funkci f :

$\mathcal{D} = \{c_0, c_1, \ldots, c_n\}$, kde $a = c_0 < c_1 < \ldots < c_n = b$ a pro $i = 1,\ldots,n$ je $\displaystyle\int_{c_{i-1}}^{c_i} f(x)\,\mathrm{d}x$ nevlastní (nejvýše) vzhledem k jedné mezi

Veronika Sobotíková, FEL ČVUT Praha

Definice:

- Nechť $\mathcal{D}=\{c_0,c_1,\dots,c_n\}$ je přípustné dělění intervalu (a,b) pro funkci f. Pak definujeme
$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\sum_{i=1}^{n}\int_{c_{i-1}}^{c_i} f(x)\,\mathrm{d}x,$$
jestliže všechny integrály vpravo existují a je definován jejich součet (*tj. nejsou mezi nimi jak integrály divergující k* $+\infty$, *tak i integrály divergující k* $-\infty$).
- Jestliže součet existuje a je konečný, říkáme, že integrál **konverguje**, je-li součet roven $+\infty$ $(-\infty)$, říkáme, že integrál **diverguje k** $+\infty$ $(-\infty)$.
- Jestliže alespoň jeden z bodů $c_0,\dots,c_n$ je singulárním bodem integrace funkce f na (a,b), mluvíme o **nevlastním integrálu**, jinak o **integrálu vlastním**.

Poznámky: a) Existence a hodnota $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ nezávisí na volbě dělení $\mathcal{D}$.

b) Jestliže integrál existuje podle předchozí definice a je vlastní, existuje i jako Riemannův a je mu roven.

c) Pro $a>b$ opět pokládáme $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=-\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x$.

d) Speciálně, jestliže je funkce f spojitá na intervalu (a,b) a má na tomto intervalu primitivní funkci F (singulárními body integrace funkce f na (a,b) jsou tedy nejvýše body a, b), pak pro každé $c\in(a,b)$ je $\mathcal{D}=\{a,c,b\}$ přípustné dělění intervalu (a,b) pro funkci f a platí
$$\underline{\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x}=\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x+\int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x=\big[F(x)\big]_a^c+\big[F(x)\big]_c^b=$$
$$=\big(\underbrace{F(c-)}_{F(c)}-F(a+)\big)+\big(F(b-)-\underbrace{F(c+)}_{F(c)}\big)=F(b-)-F(a+)=\underline{\big[F(x)\big]_a^b}.$$
Výraz vpravo je přitom zřejmě definován právě tehdy, když je definován součet $\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x+\int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$, tj. když existuje integrál $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

Příklad 9.1: a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$ – integrál nevlastní vlivem (obou) mezí; konverguje $(=\pi)$

b) $\displaystyle\int_0^1\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$ – integrál nevlastní vlivem funkce; diverguje k $+\infty$

c) $\displaystyle\int_{-1}^1\frac{x}{1-x^2}\,\mathrm{d}x$ – integrál nevlastní vlivem funkce; neexistuje (protože tu není definován součet $\int_{-1}^0+\int_0^1$)

d) $\displaystyle\int_0^{\infty}\cos x\,\mathrm{d}x$ – integrál nevlastní vlivem meze; neexistuje (protože tu neexistuje limita primitivní funkce v $+\infty$)

e) $\displaystyle\int_0^1\sin\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x$ – integrál nevlastní vlivem funkce; neexistuje
(protože tu neexistuje limita zprava primitivní funkce $\cos\frac{1}{x}$ v nule)

Příklad 9.2: Vypočtěte $\displaystyle\int_2^{\infty}\frac{2}{x^2-1}\,\mathrm{d}x$.

Řešení: Integrál je nevlastní vlivem meze. Máme
$$\int_2^{\infty}\frac{2}{x^2-1}\,\mathrm{d}x=\int_2^{\infty}\Big(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}\Big)\,\mathrm{d}x=\Big[\ln|x-1|-\ln|x+1|\Big]_2^{\infty}=$$
$$=\Big[\ln\Big|\frac{x-1}{x+1}\Big|\Big]_2^{\infty}=0-\ln\frac{1}{3}=\ln 3.$$

Všimněte si na tomto příkladu, že pro nevlastní integrály nemusí platit rovnost $\int_a^b(f-g)=\int_a^b f-\int_a^b g$, protože rozdíl vpravo nemusí být definován. (Zde např. máme $\int_2^{\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x-1}=\big[\ln|x-1|\big]_2^{\infty}=+\infty=\big[\ln|x+1|\big]_2^{\infty}=\int_2^{\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x+1}$.)

Příklad 9.3: Vypočtěte integrály (integrandy budeme značit f):

a) $\displaystyle\int_{-1}^{8}\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\,\mathrm{d}x$ … singulárním bodem integrace funkce f na intervalu $(-1,8)$ je bod 0
$$\int_{-1}^{8}\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\,\mathrm{d}x=\int_{-1}^{0}\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\,\mathrm{d}x+\int_0^8\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\,\mathrm{d}x=\Big[\frac32\sqrt[3]{x^2}\Big]_{-1}^{0}+\Big[\frac32\sqrt[3]{x^2}\Big]_0^8=\Big(0-\frac32\Big)+\Big(6-0\Big)=\frac92$$

b) $\displaystyle\int_1^4\frac{1}{(x-2)^2}\,\mathrm{d}x$ … singulárním bodem integrace funkce f na intervalu $(1,4)$ je bod 2
$$\int_1^4\frac{1}{(x-2)^2}\,\mathrm{d}x=\int_1^2\frac{1}{(x-2)^2}\,\mathrm{d}x+\int_2^4\frac{1}{(x-2)^2}\,\mathrm{d}x=\Big[\frac{-1}{x-2}\Big]_1^2+\Big[\frac{-1}{x-2}\Big]_2^4=(+\infty-1)+\Big(-\frac12-(-\infty)\Big)=+\infty$$

c) $\displaystyle\int_{-1}^2\frac{1}{x-1}\,\mathrm{d}x$ … singulárním bodem integrace funkce f na intervalu $(-1,2)$ je bod 1
$$\int_{-1}^2\frac{1}{x-1}\,\mathrm{d}x=\int_{-1}^1\frac{1}{x-1}\,\mathrm{d}x+\int_1^2\frac{1}{x-1}\,\mathrm{d}x=\big[\ln|x-1|\big]_{-1}^1+\big[\ln|x-1|\big]_1^2=\big\langle\!\big\langle(-\infty-\ln 2)+(\ln 1-(-\infty))\big\rangle\!\big\rangle\ \text{neexistuje}$$

d) $\displaystyle\int_{-1}^2\frac{1}{|x-1|}\,\mathrm{d}x$ … singulárním bodem integrace funkce f na intervalu $(-1,2)$ je bod 1
$$\int_{-1}^2\frac{1}{|x-1|}\,\mathrm{d}x=\int_{-1}^1\frac{-1}{x-1}\,\mathrm{d}x+\int_1^2\frac{1}{x-1}\,\mathrm{d}x=\big[-\ln|x-1|\big]_{-1}^1+\big[\ln|x-1|\big]_1^2=\big\langle\!\big\langle(+\infty-(-\ln 2))+(\ln 1-(-\infty))\big\rangle\!\big\rangle=+\infty$$

Poznámka: K výpočtu integrálů, které nemají singulární bod uvnitř integračního oboru, můžeme použít metodu substituce. Při použití metody substituce se někdy může stát, že přejdeme od integrálu nevlastního k integrálu vlastnímu nebo naopak. Při použití integrace per partes přímo pro nevlastní integrál musíme být opatrní. Může se stát, že i když integrál konverguje, dojdeme při výpočtu k rozdílu limit, který není definovaný.

Příklad 9.4: Vypočtěte $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{1+\sin^2 x}\,\mathrm{d}x$.

Řešení: Integrál je vlastní, při použití metody substituce ale přejdeme k nevlastnímu integrálu. Máme totiž
$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{1+\sin^2 x}\,\mathrm{d}x=\left|\begin{array}{rcl}\operatorname{tg}x&=&t\\ x&=&\operatorname{arctg}t\\ \mathrm{d}x&=&\frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t\\ -\frac{\pi}{2}&\rightsquigarrow&-\infty\\ \frac{\pi}{2}&\rightsquigarrow&+\infty\end{array}\right|=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{1+\frac{t^2}{1+t^2}}\cdot\frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{1+2t^2}\,\mathrm{d}t=$$
$$=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{1+(\sqrt2\,t)^2}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{\sqrt2}\big[\operatorname{arctg}\sqrt2\,t\big]_{-\infty}^{+\infty}=\frac{1}{\sqrt2}\Big(\frac{\pi}{2}-\Big(-\frac{\pi}{2}\Big)\Big)=\frac{\sqrt2}{2}\pi.$$

Nyní už můžeme dopočítat Příklad 8.11. Z předchozího pro něj dostáváme
$$\int_{-2\pi}^{2\pi}\frac{1}{1+\sin^2 x}\,\mathrm{d}x=4\cdot\Big(\frac{\sqrt2}{2}\pi\Big)=2\sqrt2\pi.$$

Příklad 9.5: Vypočtěte integrály (integrandy budeme opět značit f):

a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{x^2-2x+5}\,\mathrm{d}x$ … singulárními body integrace funkce f na intervalu $(-\infty,\infty)$ jsou krajní body intervalu
$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{x^2-2x+5}\,\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{(x-1)^2+4}\,\mathrm{d}x=\frac14\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\big(\frac{x-1}{2}\big)^2+1}\,\mathrm{d}x=\left|\begin{array}{rcl}\frac{x-1}{2}&=&t\\ \frac12\,\mathrm{d}x&=&\mathrm{d}t\\ -\infty&\rightsquigarrow&-\infty\\ +\infty&\rightsquigarrow&+\infty\end{array}\right|=$$
$$=\frac12\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{t^2+1}\,\mathrm{d}t=\frac12\big[\operatorname{arctg}t\big]_{-\infty}^{\infty}=\frac12\Big(\frac{\pi}{2}-\Big(\frac{\pi}{2}\Big)\Big)=\frac{\pi}{2}$$

b) $\displaystyle\int_{-1}^{\infty}\frac{\operatorname{arctg}^2 x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$ … singulárními body integrace funkce f na intervalu $(-1,\infty)$ je bod ∞
$$\int_{-1}^{\infty}\frac{\operatorname{arctg}^2 x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x=\left|\begin{array}{rcl}\operatorname{arctg}x&=&t\\ \frac{1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x&=&\mathrm{d}t\\ -1&\rightsquigarrow&-\frac{\pi}{4}\\ +\infty&\rightsquigarrow&+\frac{\pi}{2}\end{array}\right|=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}t^2\,\mathrm{d}t=\Big[\frac{t^3}{3}\Big]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi^3}{3}\Big(\frac18-\Big(-\frac{1}{64}\Big)\Big)=\frac{\pi^3}{64}$$