KAPITOLA 7: Primitivní funkce

7.1 Úvod

Definice:

Funkce F je **primitivní funkcí** k funkci f na intervalu I, jestliže pro každé $x \in I$ existuje $F'(x)$ a platí

$$F'(x) = f(x).$$

Poznámky: 1) Obsahuje-li I některý z krajních bodů, rozumíme pod $F'(x)$ v krajním bodě příslušnou jednostrannou derivaci.

2) F je **spojitá** na I, protože má v každém bodě intervalu I vlastní derivaci.

Věta 7.1:

a) Je-li F primitivní funkcí k funkci f na intervalu I, potom pro každé $c \in \mathbb{R}$ je $F + c$ také primitivní funkcí k funkci f na intervalu I.

b) Jsou-li F a G primitivní funkce k funkci f na intervalu I, pak existuje $c \in \mathbb{R}$ takové, že

$$G = F + c \qquad \big(\text{tj.} \quad G(x) = F(x) + c \quad \forall x \in I\big).$$

Příklad 7.1: Je-li $f \equiv 0$ (tj. $f(x) = 0 \ \ \forall x$) a $M = (0,1) \cup (2,3)$, pak pro funkce $F(x) = 1$ pro každé $x \in M$ a $G(x) = 2$ pro $x \in (0,1)$, $G(x) = 7$ pro $x \in (2,3)$, platí $F'(x) = G'(x) = f(x)$ pro všechna $x \in M$. Přitom pro žádné $c \in \mathbb{R}$ neplatí $G = F + c$. (Ve Větě 7.1, b) je tedy podstatné, že I je interval, a proto také požadujeme v definici, aby I byl interval.)

neurčitý integrál funkce f na intervalu I ... $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x$ $\Big($zkráceně též $\displaystyle\int f\,\mathrm{d}x\Big)$ ...

... množina všech primitivních funkcí k funkci f na intervalu I

používáme zde tyto názvy: $\int$ ... integrační znak; $f(x)$ ... integrand; x ... integrační proměnná

$\big($ nebude-li hrozit nedorozumění, použijeme někdy pro neurčitý integrál jen stručné označení $\int f$ $\big)$

Příklad 7.2a): Ukažte, že pokud $0 \in (a,b)$, pak funkce $f(x) = \operatorname{sgn} x$ nemá primitivní funkci na (a,b).

Řešení: Každá primitivní funkce je spojitá. Ukážeme tedy, že pokud je funkce F spojitá na (a,b) a $F' = f$ na $(a,b) \setminus \{0\}$, pak neexistuje $F'(0)$, tj. F není primitivní funkce k funkci $f(x) = \operatorname{sgn} x$ na (a,b). Splňuje-li totiž funkce F uvedené předpoklady, pak $F'(x) = 1$ pro všechna $x \in (0,b)$ a $F'(x) = -1$ pro všechna $x \in (a,0)$. Tedy podle Věty 4.5 platí $F'_+(0) = \lim_{x\to 0^+} F'(x) = 1$ a $F'_-(0) = \lim_{x\to 0^-} F'(x) = -1$, což ovšem znamená, že $F'(0)$ neexistuje.

Příklad 7.2b): Funkce $f(x) = 2x\cos\frac{1}{x} + \sin\frac{1}{x}$ pro $x \neq 0$, $f(0) = 0$, má primitivní funkci na $\mathbb{R}$, přestože není na $\mathbb{R}$ spojitá - má nespojitost v nule. Primitivní funkcí je podle Příkladu 4.8 funkce $F(x) = x^2 \cdot \cos\frac{1}{x}$, $x \neq 0$, $F(0) = 0$.

Věta 7.2:

Je-li funkce f spojitá na intervalu I, pak existuje k funkci f primitivní funkce na intervalu I.

Poznámka: I když primitivní funkce existuje ke každé spojité funkci, ne vždy ji lze vyjádřit pomocí elementárních funkcí v konečném tvaru (tj. pomocí konečného počtu aritmetických operací a operací skládání). Mezi takové primitivní funkce patří primitivní funkce k funkcím e^{-x^2}, $\sin(x^2)$, $\cos(x^2)$, $\frac{\mathrm{e}^x}{x}$, $\frac{\sin x}{x}$, $\frac{\cos x}{x}$, $\frac{1}{\ln x}$ (na intervalech, na kterých jsou tyto funkce definované).

Poznámka: Lze ukázat, že pokud funkce f je derivací funkce F na intervalu I, pak f má Darbouxovu vlastnost (vlastnost mezihodnoty – viz Důsledek 5.2). Tedy primitivní funkce existují jen k funkcím s Darbouxovou vlastností.

Tabulkové integrály

$f(x)$	$F(x)$ např.	I
$A \qquad (A \in \mathbb{R})$	Ax	$\mathbb{R}$
x^α	$\dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$	$\mathbb{R}$ pro $\alpha \in \mathbb{N}_0$ $(-\infty,0),\ (0,\infty)$ pro $\alpha \in \mathbb{Z};\ \alpha < -1$ $(0,\infty)$ pro $\alpha \notin \mathbb{Z}$ $^{\star)}$
$\dfrac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert$	$(-\infty,0),\ (0,\infty)$
e^x	e^x	$\mathbb{R}$
$a^x \qquad (a>0,\ a \neq 1)$	$\dfrac{a^x}{\ln a}$	$\mathbb{R}$
$\sin x$	$-\cos x$	$\mathbb{R}$
$\cos x$	$\sin x$	$\mathbb{R}$
$\dfrac{1}{\cos^2 x}$	$\operatorname{tg} x$	$\left(-\dfrac{\pi}{2}+k\pi, \dfrac{\pi}{2}+k\pi\right);\ k \in \mathbb{Z}$
$-\dfrac{1}{\sin^2 x}$	$\operatorname{cotg} x$	$\big(k\pi,(k+1)\pi\big);\ k \in \mathbb{Z}$
$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x$ $-\arccos x$	$(-1,1)$
$\dfrac{1}{1+x^2}$	$\operatorname{arctg} x$ $-\operatorname{arccotg} x$	$\mathbb{R}$
$\sinh x$	$\cosh x$	$\mathbb{R}$
$\cosh x$	$\sinh x$	$\mathbb{R}$
$\dfrac{1}{\cosh^2 x}$	$\operatorname{tgh} x$	$\mathbb{R}$
$\dfrac{1}{\sinh^2 x}$	$-\operatorname{cotgh} x$	$(-\infty,0),\ (0,\infty)$
$\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$\operatorname{argsinh} x$	$\mathbb{R}$
$\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$\operatorname{argcosh} x$ $-\operatorname{argcosh}(-x)$	$(1,\infty)$ $(-\infty,-1)$

$^{\star)}$ … pro některé racionální exponenty lze brát též $I = (-\infty, 0)$

7.2 Základní metody hledání primitivní funkce

Značení: Je-li $A,\ B \subset M,\ \ c \in M,$ pak píšeme

$$\begin{aligned} A \pm B &= \{\, a \pm b \mid a \in A,\ b \in B \,\}, \\ c \pm A &= \{\, c \pm a \mid a \in A \,\}, \\ c \cdot A &= \{\, c \cdot a \mid a \in A \,\}. \end{aligned}$$

Příklad 7.27: Najděte primitivní funkce k funkci $f(x) = \dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}$.

Řešení: viz Příklad 7.10 u věty o substituci $\big($je to typ c)$\big)$.

Příklad 7.28: Najděte primitivní funkce k funkci $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+4}}{x}$.

Řešení: Pro $x \in (-\infty, 0)$ a pro $x \in (0,\infty)$ máme

$$\int \frac{\sqrt{x^2+4}}{x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\sqrt{\left(\frac{x}{2}\right)^2+1}}{\frac{x}{2}}\,\mathrm{d}x = \left|\begin{array}{rcl} \frac{x}{2} &=& y \\ \frac{\mathrm{d}x}{2} &=& \mathrm{d}y \end{array}\right| =$$

$$= 2\int \frac{\sqrt{\left(\frac{x}{2}\right)^2+1}}{\frac{x}{2}} \cdot \frac{1}{2}\,\mathrm{d}x = 2\int \frac{\sqrt{y^2+1}}{y}\,\mathrm{d}y =$$

$$= \begin{array}{c} y \in (0,\infty),\ t \in (0,\infty) \quad \text{nebo} \quad y \in (-\infty,0),\ t \in (-\infty,0) \\ \left|\begin{array}{rcl} y &=& \sinh t \ - \text{prostá} \\ \mathrm{d}y &=& \cosh t\,\mathrm{d}t \\ t &=& \operatorname{argsinh} y = \ln(y+\sqrt{y^2+1}) \end{array}\right| \end{array} = \int \frac{2\cosh^2 t}{\sinh t}\,\mathrm{d}t =$$

$$= \int \frac{(\mathrm{e}^t+\mathrm{e}^{-t})^2}{\mathrm{e}^t-\mathrm{e}^{-t}}\,\mathrm{d}t = \int \frac{(\mathrm{e}^{2t}+1)^2}{(\mathrm{e}^{2t}-1)\,\mathrm{e}^t}\,\mathrm{d}t = \left|\begin{array}{rcl} \mathrm{e}^t &=& u \\ \mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t &=& \mathrm{d}u \end{array}\right| =$$

$$= \int \frac{(u^2+1)^2}{(u^2-1)\,u^2}\,\mathrm{d}u = \int \left(1 + \frac{3u^2+1}{(u-1)(u+1)u^2}\right)\mathrm{d}u =$$

$$= \int \left(1 - \frac{1}{u^2} + \frac{2}{u-1} - \frac{2}{u+1}\right)\mathrm{d}u = u + \frac{1}{u} + 2\ln|u-1| - 2\ln|u+1| + c =$$

$$= \underbrace{\mathrm{e}^t \ + \ \mathrm{e}^{-t}}_{2\cosh t = 2\sqrt{y^2+1}} + 2\ln\left|\frac{\mathrm{e}^t-1}{\mathrm{e}^t+1}\right| + c = 2\sqrt{\left(\frac{x}{2}\right)^2+1} + 2\ln\left|\frac{\frac{x}{2}+\sqrt{(\frac{x}{2})^2+1}-1}{\frac{x}{2}+\sqrt{(\frac{x}{2})^2+1}+1}\right| + c =$$

$$= \sqrt{x^2+4} + 2\ln\left|\frac{\sqrt{x^2+4}-2}{x}\right| + c \qquad \text{na } (-\infty,0) \text{ a na } (0,\infty)$$

(v poslední úpravě jsme zlomek v argumentu logaritmu rozšířili nejdříve dvěma a pak výrazem $(x+2-\sqrt{x^2+4})$).

$$= \int \frac{6t^5}{t^3+t^2}\,\mathrm{d}t = 6\int \frac{t^3}{t+1}\,\mathrm{d}t = 6\int (t^2-t+1-\frac{1}{t+1})\,\mathrm{d}t = 2t^3-3t^2+6t-6\ln|t+1|+c =$$

$$= 2\sqrt{x-1}-3\sqrt[3]{x-1}+6\sqrt[6]{x-1}-6\ln(\sqrt[6]{x-1}+1)+c \qquad \text{na } (1,\infty)$$

Příklad 7.26: Najděte primitivní funkce k funkci $f(x) = \sqrt{\dfrac{x-1}{2-x}}$.

Řešení: Musí platit $(x-1)/(2-x) > 0$, tj. $x \in (1,2)$.

$$\int \sqrt{\frac{x-1}{2-x}}\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{rcl} \sqrt{\frac{x-1}{2-x}} & = & t \in (0,\infty) \\ x & = & \frac{2t^2+1}{t^2+1} = 2-\frac{1}{t^2+1} \;-\; \text{prostá na } (0,\infty) \\ \mathrm{d}x & = & \frac{2t}{(t^2+1)^2}\,\mathrm{d}t \end{array} \right| =$$

$$= \int t\cdot\frac{2t}{(t^2+1)^2}\,\mathrm{d}t \overset{1)}{=} \operatorname{arctg} t - \frac{t}{t^2+1} + c = \operatorname{arctg}\sqrt{\frac{x-1}{2-x}} - \sqrt{(x-1)(2-x)} + c \qquad \text{na } (1,2)$$

1) použili jsme výpočet z Příkladu 7.8

E) Substituce pro integrály typu $\boxed{\int R(x,\sqrt{ax^2+bx+c})\,\mathrm{d}x \qquad a\neq 0,\ b^2\neq 4ac}$

(jen stručně; jiné možné substituce viz skripta)

- doplněním na úplný čtverec a vhodnou lineární substitucí převedeme $\sqrt{ax^2+bx+c}$ na tvar

$d\cdot\sqrt{\pm y^2 \pm 1}$ (případ $\sqrt{-y^2-1}$ je nezajímavý – $y\in\emptyset$, tj. $x\in\emptyset$)

např.:

$$\sqrt{-x^2+4x+5} = \sqrt{-(x^2-4x-5)} = \sqrt{-((x-2)^2-9)} =$$
$$= \sqrt{9-(x-2)^2} = 3\cdot\sqrt{1-\left(\frac{x-2}{3}\right)^2} = d\cdot\sqrt{1-y^2},$$
$$d=3,\quad y=\frac{x-2}{3}$$

následné substituce:

a) pro $d\cdot\sqrt{y^2+1}$ (odpovídá případu $a>0,\ b^2-4ac<0$)

$$y = \sinh t \qquad y\in\mathbb{R}$$
$$\sqrt{y^2+1} = \cosh t \qquad t\in\mathbb{R}$$

b) pro $d\cdot\sqrt{y^2-1}$ (odpovídá případu $a>0,\ b^2-4ac>0$)

$$\begin{cases} y = \cosh t & y>1 \\ y = -\cosh t & y<-1 \end{cases}$$
$$\sqrt{y^2-1} = \sinh t \qquad t>0$$

c) pro $d\cdot\sqrt{1-y^2}$ (odpovídá případu $a<0,\ b^2-4ac>0$)

$$\begin{array}{rcll} y &=& \cos t & y\in(-1,1) \\ \sqrt{1-y^2} &=& \sin t & t\in(0,\pi) \end{array} \qquad \text{nebo} \qquad \begin{array}{rcll} y &=& \sin t & y\in(-1,1) \\ \sqrt{1-y^2} &=& \cos t & t\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}) \end{array}$$

a)+b) dostaneme $R(\sinh t,\cosh t)$ a dále převedeme např. na $R(\mathrm{e}^{\alpha t})$

c) dostaneme $R(\sin t,\cos t)$

Poznámka: Při výběru z výše uvedených následných substitucí pomůže srovnání možných hodnot y s oborem hodnot funkcí $\sinh t$, $\pm\cosh t$, $\cos t$, $\sin t$.

Věta 7.3 (o linearitě):

Nechť F je primitivní funkce k funkci f na intervalu I, G primitivní funkce ke funkci g na intervalu I a $\alpha\in\mathbb{R}$. Pak

a) $F+G$ je primitivní funkcí k $f+g$ na I, tj. $\displaystyle\int (f+g)\,\mathrm{d}x = \int f\,\mathrm{d}x + \int g\,\mathrm{d}x$,

b) $\alpha\cdot F$ je primitivní funkcí k $\alpha\cdot f$ na I, tj. $\displaystyle\int \alpha\cdot f\,\mathrm{d}x = \alpha\cdot\int f\,\mathrm{d}x$.

Integrace per partes

Věta 7.4 (integrace per partes):

Nechť mají funkce u, v vlastní derivace na intervalu I a existuje primitivní funkce k funkci $u'\cdot v$ na intervalu I. Pak existuje také primitivní funkce k funkci $u\cdot v'$ na intervalu I a platí

$$\int u\cdot v'\,\mathrm{d}x = u\cdot v - \int u'\cdot v\,\mathrm{d}x\,.$$

Příklad 7.3: Nalezení $\int \ln x\ \mathrm{d}x$ na intervalu $(0,\infty)$. (Použijeme rovnost $\ln x = 1\cdot\ln x$. Takovýto přepis integrandu se hodí i při hledání $\int \operatorname{arctg} x\ \mathrm{d}x$, $\int \arcsin x\ \mathrm{d}x$ apod., kde je ovšem potřeba metodu per partes kombinovat s metodou substituce.)

Příklad 7.4: Najděte $I = \displaystyle\int \frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x$.

Řešení: Na $(0,\infty)$ máme

$$I = \int \frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x = \int \ln x\cdot\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{ll} u=\ln x & v'=\frac{1}{x} \\ u'=\frac{1}{x} & v=\ln x \end{array} \right| \overset{\mathrm{PP}}{=} \ln^2 x - \int \frac{1}{x}\cdot\ln x\,\mathrm{d}x = \ln^2 x - I.$$

Tím jsme dostali pro I rovnici $I = \ln^2 x - I$, odkud na $(0,\infty)$ je $\displaystyle\int \frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x = I = \frac{\ln^2 x}{2} + c$. (Podobně se hledají např. $\int \cos ax\cdot \mathrm{e}^{bx}\,\mathrm{d}x$, $\int \sin ax\cdot\mathrm{e}^{bx}\,\mathrm{d}x$ – v těchto případech se jen integrace per partes použije dvakrát.)

Metoda substituce

Věta 7.5 (o substituci):

a) Nechť I, J jsou otevřené intervaly, F je primitivní funkce k funkci f na J, $\varphi(I)\subset J$ a φ má vlastní derivaci na I (je tam tedy spojitá). Potom

$$\int f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)\,\mathrm{d}t = F(\varphi(t))+c \qquad \text{na } I.$$

b) Pokud je φ navíc prostá na I, $\varphi(I)=J$ a existuje primitivní funkce G k $f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)$ na I, pak

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = G(\varphi_{-1}(x))+c \qquad \text{na } J.$$

(Tvrzení Věty 7.5 lze zapsat také takto: $\displaystyle\int f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)\,\mathrm{d}t = \int f(x)\,\mathrm{d}x;\quad x=\varphi(t);\quad t\in I\,.$)

Poznámka: Ve Větě 7.5 je z předpokladů části a) funkce φ spojitá, tedy v části b) lze nahradit předpoklad prostoty funkce φ předpokladem ryzí monotonie funkce φ.

Příklad 7.5: Najděte $\displaystyle\int \cos(\ln u)\cdot\frac{1}{u}\,\mathrm{d}u$.

Řešení: Máme

$$\int \cos(\ln u)\cdot\frac{1}{u}\,\mathrm{d}u = \overset{u\in(0,\infty)}{\left| \begin{array}{rcl} x &=& \ln u\ \dots\ x\in\mathbb{R} \\ \mathrm{d}x &=& \frac{1}{u}\,\mathrm{d}u \end{array} \right|} = \int \cos x\,\mathrm{d}x = \sin x + c = \sin(\ln u)+c \qquad \text{na } (0,\infty).$$

Příklad 7.6: Nechť F je primitivní funkce k funkci f na intervalu (a,b). Vyjádřete pomocí F a) $\int f(x+B)\,\mathrm{d}x$, b) $\int f(Ax+B)\,\mathrm{d}x$ $(A,\ B\in\mathbb{R},\ A\neq 0)$.

Řešení: a) Máme $x+B\in(a,b)$ pro $x\in(a-B,b-B)$. Tedy

$$\int f(x+B)\,\mathrm{d}x = \left|\begin{array}{c} x\in(a-B,b-B) \\ y\ =\ x+B\ \dots\ y\in(a,b) \\ \mathrm{d}y\ =\ \mathrm{d}x \end{array}\right| = \int f(y)\,\mathrm{d}y = F(y)+c = F(x+B)+c \qquad \text{na } (a-B,b-B).$$

b) Označme $I=\{x|Ax+B\in(a,b)\}$. Pak

$$\int f(Ax+B)\,\mathrm{d}x = \left|\begin{array}{c} x\in I \\ z\ =\ Ax+B\ \dots\ z\in(a,b) \\ \mathrm{d}z\ =\ A\,\mathrm{d}x \end{array}\right| = \int \frac{1}{A} f(Ax+B)\cdot A\,\mathrm{d}x = \frac{1}{A}\int f(z)\,\mathrm{d}z =$$

$$= \frac{1}{A}F(z)+c = \frac{1}{A}F(Ax+B)+c \qquad \text{na } I.$$

Příklad 7.7: Nalezení $\int \frac{f'(x)}{(f(x))^k}\,\mathrm{d}x$ na intervalu $I\subset D(f')\setminus\{\,x\,|\,f(x)=0\,\}$ $(k\in\mathbb{N})$. (Důležité!)

Řešení: **a)** pro $\underline{k=1}$

$$\int\frac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x = \left|\begin{array}{rcl} y &=& f(x) \\ \mathrm{d}y &=& f'(x)\,\mathrm{d}x \end{array}\right| = \int\frac{1}{y}\,\mathrm{d}y = \ln|y|+c = \ln|f(x)|+c \qquad \text{na } I.$$

b) pro $\underline{k>1}$

$$\int\frac{f'(x)}{(f(x))^k}\,\mathrm{d}x = \left|\begin{array}{rcl} y &=& f(x) \\ \mathrm{d}y &=& f'(x)\,\mathrm{d}x \end{array}\right| = \int\frac{1}{y^k}\,\mathrm{d}y = \frac{y^{-k+1}}{-k+1}+c = \frac{\big(f(x)\big)^{-k+1}}{-k+1}+c \qquad \text{na } I.$$

Příklad 7.8: Najděte $I_n=\int\frac{1}{(1+x^2)^n}\,\mathrm{d}x$ na $\mathbb{R}$, pro $n=1,\ 2$.
$\Big($Pro $n>1$ lze odvodit rekurentní vzorec $I_n=\frac{1}{2(n-1)}\Big(\big(2(n-1)-1\big)I_{n-1}-\frac{x}{(1+x^2)^{n-1}}\Big).\Big)$

Řešení: **a)** pro $\underline{n=1}$

$$I_1=\int\frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \operatorname{arctg}x+c \qquad \text{na } \mathbb{R}.$$

b) pro $\underline{n=2}$

$$I_2 = \int\frac{1}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x = \int\frac{(1+x^2)-x^2}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x = \underbrace{\int\frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x}_{\operatorname{arctg}x+c} - \int x\cdot\frac{x}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x =$$

$$= \left|\begin{array}{llll} u\ =x & v'\ = \frac{x}{(1+x^2)^2} & = \frac{1}{2}\cdot 2x(1+x^2)^{-2} & \\ u'\ =1 & v\ = \frac{1}{2}\,\frac{(1+x^2)^{-1}}{-1} & = -\frac{1}{2}\,\frac{1}{(1+x^2)} & \end{array}\right| =$$

$$= \operatorname{arctg}x - \left(-\frac{1}{2}\,\frac{x}{(1+x^2)} - \int -\frac{1}{2}\,\frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x\right) = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}x + \frac{x}{2(1+x^2)} + c,$$

tj.

$$I_2 = \frac{1}{2}\left(I_1+\frac{x}{1+x^2}\right) \qquad \text{na } \mathbb{R}.$$

Příklad 7.9: Najděte $\int\frac{1}{x^2+5}\,\mathrm{d}x$ na $\mathbb{R}$.

funkce G v lichých násobcích π, protože v nich G nemá limity. Máme totiž

$$\left.\begin{array}{r} \lim_{x\to(2k+1)\,\pi^-} G(x) \ = \ +\frac{\pi}{2} \\ (\lim_{x\to(2k-1)\,\pi^+} G(x) \ = \ )\ \lim_{x\to(2k+1)\,\pi^+} G(x) \ = \ -\frac{\pi}{2} \end{array}\right\}\ \text{skok}: \ -\pi.$$

Můžeme si ale pomoci tím, že na různých intervalech budeme ke G přičítat různé konstanty. Tím dostaneme funkci, která bude opět na každém z výše uvedených intervalů primitivní funkcí k funkci f a která navíc při vhodné volbě konstant bude mít v bodech $(2k+1)\,\pi$ limity. Těmito limitami ji pak dodefinujeme a dostaneme tak primitivní funkci k f na celém $\mathbb{R}$. (Primitivní funkci na $\mathbb{R}$ tedy dostaneme „slepením" vhodných primitivních funkcí na jednotlivých podintervalech.)
Primitivní funkcí k funkci f na $\mathbb{R}$ je tedy například funkce

$$F(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\sqrt{2}} + k\,\pi, & x\in\big((2k-1)\,\pi,\,(2k+1)\,\pi\big),\ k\in\mathbb{Z} \\ -\frac{\pi}{2} + k\,\pi, & x=(2k-1)\,\pi. \end{cases}$$

e) Typ $\boxed{\int \sin^m x\cdot\cos^n x\,\mathrm{d}x}$

$\underline{m \text{ - liché nebo } n \text{ - liché}}$ ... použijeme substituce uvedené v **a)** a **b)**
$\underline{m \text{ - sudé a } n \text{ - sudé}}$ ... přejdeme k dvojnásobnému argumentu:

$$\begin{array}{rcl} \cos^2 x &=& \frac{1}{2}\,(1+\cos 2x) \\ \sin^2 x &=& \frac{1}{2}\,(1-\cos 2x) \end{array}$$

(Tyto vztahy lze získat např. vyjádřením $\cos^2 x$ a $\sin^2 x$ z následujících rovností:

$$\cos 2x = \cos^2 x-\sin^2 x = \begin{cases} \cos^2 x-(1-\cos^2 x) = 2\cos^2 x-1, \\ (1-\sin^2 x)-\sin^2 x = 1-2\sin^2 x. \end{cases} \quad)$$

Příklad 7.24: Najděte primitivní funkce k funkci $f(x) = \sin^4 x$.

Řešení:

$$\int\sin^4 x\,\mathrm{d}x = \int\left(\frac{1}{2}(1-\cos 2x)\right)^2\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\int(1-2\cos 2x+\cos^2 2x)\,\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{1}{4}\int\left(1-2\cos 2x+\frac{1}{2}(1+\cos 4x)\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\left(x-\sin 2x+\frac{1}{2}x+\frac{1}{8}\sin 4x\right)+c =$$

$$= \frac{3x}{8}-\frac{\sin 2x}{4}+\frac{\sin 4x}{32}+c \qquad \text{na } \mathbb{R}$$

D) <u>Substituce pro integrály typu</u> $\boxed{\int R\left(x,\ \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)\mathrm{d}x, \quad n\in\mathbb{N}\setminus\{1\},\quad ad\neq bc}$

Použijeme substituci

$$y = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\,.$$

Příklad 7.25: Najděte primitivní funkce k funkci $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-1}+\sqrt[3]{x-1}}$.

Řešení: Zřejmě $D(f)=(1,\infty)$.

$$\int\frac{1}{\sqrt{x-1}+\sqrt[3]{x-1}}\,\mathrm{d}x = \left|\begin{array}{rcl} \multicolumn{3}{c}{x\in(1,\infty);\quad t\in(0,\infty)} \\ \sqrt[6]{x-1} &=& t \\ x &=& t^6+1\ -\ \text{prostá na } (0,\infty) \\ \mathrm{d}x &=& 6t^5\,\mathrm{d}t \end{array}\right| =$$

Příklad 7.21: Najděte primitivní funkce k funkci $f(x) = \dfrac{1}{\cos^4 x}$.

Řešení: Musí platit $\cos x \neq 0$, tj. $x \in (-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi) = I_k$, $k \in \mathbb{Z}$.

$$\int \frac{1}{\cos^4 x}\,dx = \left| \begin{array}{rcl} \operatorname{tg} x &=& t \\ x &=& \operatorname{arctg} t + k\pi \quad - \text{ prostá} \\ dx &=& \frac{1}{t^2+1}\,dt \end{array} \right| = \int \frac{1}{\left(\frac{1}{1+t^2}\right)^2} \cdot \frac{1}{t^2+1}\,dt =$$

$$= \int (1+t^2)\,dt = t + \frac{t^3}{3} + c = \operatorname{tg} x + \frac{\operatorname{tg}^3 x}{3} + c \qquad \text{na } (-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi);\ k \in Z$$

Nebo jinak

$$\int \frac{1}{\cos^4 x}\,dx = \left| \begin{array}{rcl} \operatorname{tg} x &=& t \\ \frac{1}{\cos x}\,dx &=& dt \\ \cos^2 x = \frac{1}{1+t^2} && \end{array} \right| = \int \frac{1}{\cos^2 x} \cdot \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \int (1+t^2)\,dt = \ldots$$

Příklad 7.22: Najděte primitivní funkce k funkci $f(x) = \dfrac{\cos x}{\sin x - \cos x}$.

Řešení: Máme $x \in (-\frac{3\pi}{4} + k\pi, \frac{\pi}{4} + k\pi)$; $k \in Z$. Protože však použijeme substituci $t = \operatorname{tg} x$, musíme nejdříve vyloučit $x = -\frac{\pi}{2} + k\pi$, tedy budeme mít $x \in (-\frac{3\pi}{4} + k\pi, -\frac{\pi}{2} + k\pi) = I_k$ nebo $x \in (-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{4} + k\pi) = J_k$:

$$\int \frac{\cos x}{\sin x - \cos x}\,dx = \int \frac{1}{\operatorname{tg} x - 1}\,dx =$$

$$x \in I_k,\ t \in (1, \infty) \quad \text{nebo} \quad x \in J_k,\ t \in (-\infty, 1)$$

$$= \left| \begin{array}{rcl} \operatorname{tg} x &=& t \\ x &=& \begin{cases} \operatorname{arctg} t + k\pi - \pi & \text{pro } x \in I_k \\ \operatorname{arctg} t + k\pi & \text{pro } x \in J_k \end{cases} \quad - \text{ prostá} \\ dx &=& \frac{1}{t^2+1}\,dt \end{array} \right| = \int \frac{1}{t-1} \cdot \frac{1}{t^2+1}\,dt =$$

$$= \int \left(\frac{1}{2}\,\frac{1}{t-1} - \frac{1}{2}\,\frac{t+1}{t^2+1} \right) dt = \int \left(\frac{1}{2}\,\frac{1}{t-1} - \frac{1}{4}\,\frac{2t}{t^2+1} - \frac{1}{2}\,\frac{1}{t^2+1} \right) dt =$$

$$= \frac{1}{2}\ln|t-1| - \frac{1}{4}\ln(t^2+1) - \frac{1}{2}\operatorname{arctg} t + c = \frac{1}{2}\ln|\operatorname{tg} x - 1| - \frac{1}{4}\ln(\operatorname{tg}^2 x + 1) - \frac{1}{2}x + \frac{k\pi}{2} + c \overset{1)}{=}$$

$$= \frac{1}{4}\ln\frac{(\operatorname{tg} x - 1)^2}{\operatorname{tg}^2 x + 1} - \frac{1}{2}x + c \overset{2)}{=} \frac{1}{4}\ln(1 - \sin 2x) - \frac{1}{2}x + c$$

V předposlední rovnosti [1)] jsme využili toho, že $\frac{k\pi}{2} + c$ může být jakákoliv reálná konstanta a zápis s „$+c$" je jen symbolický. V poslední rovnosti [2)] jsme použili přepis

$$\frac{(\operatorname{tg} x - 1)^2}{\operatorname{tg}^2 x + 1} = \frac{(\sin x - \cos x)^2}{\sin^2 x + \cos^2 x} = (\sin x - \cos x)^2 = \sin^2 x - 2\sin x \cos x + \cos^2 x = 1 - \sin 2x.$$

Funkce $F(x) = \frac{1}{4}\ln(1 - \sin 2x) - \frac{1}{2}x$ je spojitá na $(-\frac{3\pi}{4} + k\pi, \frac{\pi}{4} + k\pi)$ a na I_k a J_k je její derivací funkce f, která je spojitá v $-\frac{\pi}{2} + k\pi$. Tedy z věty 4.5 je $F'(-\frac{\pi}{2} + k\pi) = f(-\frac{\pi}{2} + k\pi)$ a F je primitivní funkcí k f na celém intervalu $(-\frac{3\pi}{4} + k\pi, \frac{\pi}{4} + k\pi)$.

Příklad 7.23: Najděte primitivní funkce k funkci $f(x) = \dfrac{\sqrt{2}}{\cos x + 3}$.

Řešení: Na intervalech $((2k-1)\pi, (2k+1)\pi) = I_k$ máme

$$\int \frac{\sqrt{2}}{\cos x + 3}\,dx = \left| \begin{array}{rcl} \operatorname{tg} \frac{x}{2} &=& t \quad - \text{ prostá na } I_k \\ x &=& 2\operatorname{arctg} t + 2k\pi \\ dx &=& \frac{2}{1+t^2}\,dt \end{array} \right| = \int \frac{\sqrt{2}}{\frac{1-t^2}{1+t^2} + 3} \cdot \frac{2}{1+t^2}\,dt =$$

$$= \sqrt{2} \int \frac{1}{2+t^2}\,dt = \frac{\sqrt{2}}{2} \int \frac{1}{1 + \left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)^2}\,dt = \operatorname{arctg} \frac{t}{\sqrt{2}} + c = \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg} \frac{x}{2}}{\sqrt{2}} + c = G(x) + c.$$

Přestože byla integrovaná funkce definovaná a spojitá na $\mathbb{R}$, je díky použité substituci funkce G primitivní funkcí k funkci f jen na intervalech $\big((2k-1)\pi, (2k+1)\pi\big)$, $k \in \mathbb{Z}$. Primitivní funkci k f na celém $\mathbb{R}$ nemůžeme dostat dodefinováním

Řešení:

$$\int \frac{1}{x^2+5}\,dx = \frac{1}{5} \int \frac{1}{\left(\frac{x}{\sqrt{5}}\right)^2 + 1}\,dx = \left| \begin{array}{rcl} t &=& \frac{x}{\sqrt{5}} \\ dt &=& \frac{1}{\sqrt{5}}\,dx \end{array} \right| = \frac{1}{\sqrt{5}} \int \frac{1}{\left(\frac{x}{\sqrt{5}}\right)^2 + 1} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}}\,dx = \frac{1}{\sqrt{5}} \int \frac{1}{t^2+1}\,dt =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}} \operatorname{arctg} t + c = \frac{1}{\sqrt{5}} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{5}} + c \qquad \text{na } \mathbb{R}.$$

Příklad 7.10: Najděte $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$.

Řešení: 1. možnost: Na $(-1, 1)$ máme

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \left| \begin{array}{rcl} x &=& \cos t \ \ldots\ t \in (0, \pi) \\ (\ \arccos x &=& t\ ) \\ dx &=& -\sin t\,dt \end{array} \right| = \int \frac{1}{\sqrt{1-\cos^2 t}}\,(-\sin t)\,dt =$$

$$= \int \frac{-\sin t}{\sin t}\,dt = -\int 1\,dt = -t + c = -\arccos x + c \qquad \text{na } (-1, 1).$$

(V substituci jsme využili toho, že funkce $\cos t$ je prostá na $(0, \pi)$ a na začátku druhého řádku úprav toho, že $\sin t > 0$ na $(0, \pi)$.)

2. možnost: Na $(-1, 1)$ máme

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \left| \begin{array}{rcl} x &=& \sin z \ \ldots\ z \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \\ (\ \arcsin x &=& z\ ) \\ dx &=& \cos z\,dz \end{array} \right| = \int \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 z}} \cos z\,dz =$$

$$= \int \frac{\cos z}{\cos z}\,dz = \int 1\,dz = z + c = \arcsin x + c \qquad \text{na } (-1, 1).$$

(V substituci jsme využili toho, že funkce $\sin z$ je prostá na $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ a na začátku druhého řádku úprav toho, že $\cos z > 0$ na $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.)

Přestože v první a druhé možnosti vyšly na první pohled různé výsledky, jsou oba tyto výsledky správné. Funkce $-\arccos x$ a $\arcsin x$ se totiž liší jen o konstantu ($\arcsin x = \frac{\pi}{2} - \arccos x$).

7.3 Integrace racionální funkce

7.3.1 Racionální funkce

P, Q ... polynomy s reálnými koeficienty, Q nenulový

$R = \dfrac{P}{Q}$ ... racionální funkce

Z věty o dělení polynomů (viz předmět LAGA) existují polynomy Y a Z, $\operatorname{st} Z < \operatorname{st} Q$, takové, že

$$P(x) = Y(x) \cdot Q(x) + Z(x) \qquad \forall x \in \mathbb{R},$$

tj.

$$R(x) = \frac{Y(x) \cdot Q(x) + Z(x)}{Q(x)} = \underbrace{Y(x)}_{\substack{\text{už umíme} \\ \text{integrovat}}} + \underbrace{\frac{Z(x)}{Q(x)}}_{\operatorname{st} Z < \operatorname{st} Q}.$$

(Pro $\operatorname{st} P < \operatorname{st} Q$ je Y nulový polynom a $Z = P$.)

Dále uvažujeme jen funkce **ryze lomené,** tj. racionální funkce typu

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}, \quad \text{kde } \operatorname{st} P < \operatorname{st} Q.$$

Nejjednodušší typy funkcí ryze lomených ... **jednoduché** (též **parciální**) zlomky:

$$\frac{A}{(x-\alpha)^k}\ , \qquad A\in\mathbb{R};\ \ \alpha\in\mathbb{R};\ \ k\in\mathbb{N},$$

$$\frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^l}\ , \qquad B,\ C\in\mathbb{R};\ \ p,\ q\in\mathbb{R},\ p^2-4q<0;\ \ l\in\mathbb{N}.$$

Věta 7.6:

1) Každou ryze lomenou funkci lze zapsat právě jedním způsobem jako součet jednoduchých zlomků.
2) Každou racionální funkci lze zapsat právě jedním způsobem jako součet polynomu a jednoduchých zlomků.

(Přesněji: „... právě jedním způsobem až na pořadí sčítanců ...“)

Jak hledat rozklad funkce ryze lomené na součet jednoduchých zlomků najdete ve skriptech [JT-DIP], str. 112-114. Kde to lze, doporučiji použít *zakrývací pravidlo*. Základním vlastnostem polynomů a jejich kořenů je věnována 11. kapitola skript [PO-ÚAZL].

Jaké máme očekávat v rozkladu jednoduché zlomky? Obecně všech typů, kde jmenovatel je dělitelem polynomu Q (někde ovšem může vyjít nulový čitatel).

Příklad 7.11: Rozložte na součet polynomu a jednoduchých zlomků racionální funkci $R(x)=\dfrac{2x^2-7x+14}{(x-1)^2(x+2)}$.

Řešení: Funkce $R(x)$ je ryze lomená, tedy polynom bude nulový a $R(x)$ bude pouze součtem jednoduchých zlomků. Vzhledem ke tvaru jejího jmenovatele budeme její rozklad hledat ve tvaru

$$\frac{2x^2-7x+14}{(x-1)^2(x+2)}=\frac{A}{(x-1)^2}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{x+2}\,.$$

Rovnost vynásobíme jmenovatelem levé strany $(x-1)^2(x+2)$ a pak upravíme novou pravou stranu. Dostaneme

$$2x^2-7x+14 \;=\; A(x+2)+B(x-1)(x+2)+C(x-1)^2 \;=\; A(x+2)+B(x^2+x-2)+C(x^2-2x+1) \;=$$

$$=\; Ax+2A+Bx^2+Bx-2B+Cx^2-2Cx+C \;=\; (B+C)x^2+(A+B-2C)x+(2A-2B+C).$$

Porovnáním koeficientů polynomů u stejných mocnin získáme soustavu lineárních rovnic pro neznámé koeficienty $A,\ B,\ C$

$$\begin{array}{lrcl} x^2: & 2 & = & B+\ C\\ x^1: & -7 & = & A+\ B-\ 2C\\ x^0: & 14 & = & 2A-2B+\ C\end{array}$$

která má, jak snadno ověříme, řešení $A=3,\ \ B=-2,\ \ C=4$, tedy

$$R(x)=\frac{3}{(x-1)^2}-\frac{2}{x-1}+\frac{4}{x+2}\ .$$

Poznámka: Počet neznámých v soustavě lineárních rovnic získané porovnáním koeficientů u stejných mocnin je možné snížit pomocí tzv. **zakrývacího pravidla**. Toto pravidlo lze použít k určení koeficientů v čitateli u zlomků, které mají ve jmenovateli nejvyšší mocniny jednotlivých kořenových činitelů. Použití pravidla si ukážeme na Příkladu 7.11 a později také u Příkladu 7.12. V Příkladu 7.11 je ho možné použít k výpočtu koeficientů A a C. Postupujeme tak, že danou ryze lomenou funkci zapíšeme se zcela rozloženým jmenovatelem

$$R(x)=\frac{2x^2-7x+14}{(x-1)^2(x+2)}$$

(zde jsme ji tak dostali zapsanou již v zadání), zakryjeme kořenový činitel jmenovatele a odpovídající kořen dosadíme do zbytku:

$$x:=1 \qquad A=\left.\frac{2x^2-7x+14}{x+2}\right|_{x=1}=\frac{2-7+14}{1+2}=3,$$

$$x:=-2 \qquad C=\left.\frac{2x^2-7x+14}{(x-1)^2}\right|_{x=-2}=\frac{8+14+14}{(-3)^2}=4.$$

5. $\displaystyle\int\frac{\cos x}{\sin x-\cos x}\,\mathrm{d}x$ (viz příklad 7.22)

$R(u,v)=\dfrac{v}{u-v}$, neboli $R(\sin x,\cos x)=\dfrac{\cos x}{\sin x-\cos x}$

$R(-u,v)=\dfrac{v}{-u-v}\neq -R(u,v)$, $\quad R(-\sin x,\cos x)=\dfrac{\cos x}{-\sin x-\cos x}\neq -R(\sin x,\cos x)$

$R(u,-v)=\dfrac{-v}{u-(-v)}\neq -R(u,v)$, $\quad R(\sin x,-\cos x)=\dfrac{-\cos x}{\sin x-(-\cos x)}\neq -R(\sin x,\cos x)$

$R(-u,-v)=\dfrac{-v}{-u-(-v)}=R(u,v)$, $\quad R(-\sin x,-\cos x)=\dfrac{-\cos x}{-\sin x-(-\cos x)}=R(\sin x,\cos x)$

z jednodušších substitucí lze tedy použít pouze substituci $t=\operatorname{tg}x$

$\left(\dfrac{\cos x}{\sin x-\cos x}=\dfrac{\cos^2 x}{\sin x\cos x-\cos^2 x},\right.$ tedy jde o integrál typu $\left.\displaystyle\int\tilde R(\cos^2 x,\sin^2 x,\sin x\cdot\cos x)\,\mathrm{d}x\right)$

6. $\displaystyle\int\frac{\sin x\,\cos x}{\sin x+\cos x}\,\mathrm{d}x$

$R(u,v)=\dfrac{uv}{u+v}$, neboli $R(\sin x,\cos x)=\dfrac{\sin x\,\cos x}{\sin x+\cos x}$

$R(-u,v)=\dfrac{(-u)v}{-u+v}\neq -R(u,v)$, $\quad R(-\sin x,\cos x)=\dfrac{(-\sin x)\,\cos x}{-\sin x+\cos x}\neq -R(\sin x,\cos x)$

$R(u,-v)=\dfrac{u(-v)}{u+(-v)}\neq -R(u,v)$, $\quad R(\sin x,-\cos x)=\dfrac{\sin x\,(-\cos x)}{\sin x+(-\cos x)}\neq -R(\sin x,\cos x)$

$R(-u,-v)=\dfrac{(-u)(-v)}{-u+(-v)}\neq R(u,v)$, $\quad R(-\sin x,-\cos x)=\dfrac{(-\sin x)(-\cos x)}{-\sin x+(-\cos x)}\neq R(\sin x,\cos x)$

lze tedy použít pouze substituci $t=\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$

Příklad 7.19: Najděte primitivní funkce k funkci $f(x)=\dfrac{2\sin x}{\sin^2 x+1}$.

Řešení:

$$\int\frac{2\sin x}{\sin^2 x+1}\,\mathrm{d}x = 2\int\frac{\sin x}{2-\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \left|\begin{array}{rcl} t&=&\cos x\in\langle-1,1\rangle\\ \mathrm{d}t&=&-\sin x\,\mathrm{d}x\end{array}\right| =$$

$$=2\int\frac{-\,\mathrm{d}t}{2-t^2}=\frac{1}{\sqrt2}\int\left(\frac{1}{t-\sqrt2}-\frac{1}{t+\sqrt2}\right)\mathrm{d}t=$$

$$=\frac{1}{\sqrt2}\Big(\ln\underbrace{|t-\sqrt2|}_{\sqrt2-t}-\ln\underbrace{|t+\sqrt2|}_{\sqrt2+t}\Big)+c=\frac{1}{\sqrt2}\ln\frac{\sqrt2-\cos x}{\sqrt2+\cos x}+c \qquad \text{na } \mathbb{R}$$

Příklad 7.20: Najděte primitivní funkce k funkci $f(x)=\dfrac{1}{\cos^3 x}$.

Řešení: Musí platit $\cos x\neq 0$, tj. $x\in(-\frac{\pi}{2}+k\pi,\frac{\pi}{2}+k\pi)$, $k\in\mathbb{Z}$.

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{\cos^3 x}=\int\frac{\cos x}{(1-\sin^2 x)^2}\,\mathrm{d}x=\left|\begin{array}{rcl} t&=&\sin x\in(-1,1)\\ \mathrm{d}t&=&\cos x\,\mathrm{d}x\end{array}\right|=$$

$$=\int\frac{\mathrm{d}t}{(1-t^2)^2}=\frac14\int\left(\frac{1}{(t-1)^2}+\frac{1}{(t+1)^2}+\frac{1}{t+1}-\frac{1}{t-1}\right)\mathrm{d}t=$$

$$=\frac14\Big(-\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+1}+\ln\underbrace{|t+1|}_{t+1}-\ln\underbrace{|t-1|}_{1-t}\Big)+c=$$

$$=\frac14\left(\frac{2t}{1-t^2}+\ln\frac{t+1}{1-t}\right)+c=\frac14\left(\frac{2\sin x}{\cos^2 x}+\ln\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right)+c$$

na $(-\frac{\pi}{2}+k\pi,\frac{\pi}{2}+k\pi)$; $\quad k\in\mathbb{Z}$

Příklady na výběr substituce pro integrály typu $\int R(\sin x, \cos x)\,\mathrm{d}x$

1. $\displaystyle\int \frac{2\sin x}{\sin^2 x + 1}\,\mathrm{d}x$ (viz příklad 7.19)

$R(u,v) = \dfrac{2u}{u^2+1}$, neboli $R(\sin x, \cos x) = \dfrac{2\sin x}{\sin^2 x + 1}$

$R(-u,v) = \dfrac{-2u}{(-u)^2+1} = -R(u,v)$, $\quad R(-\sin x, \cos x) = \dfrac{2(-\sin x)}{(-\sin x)^2+1} = -R(\sin x, \cos x)$

$R(u,-v) = \dfrac{2u}{u^2+1} \neq -R(u,v)$, $\quad R(\sin x, -\cos x) = \dfrac{2\sin x}{\sin^2 x+1} \neq -R(\sin x, \cos x)$

$R(-u,-v) = \dfrac{-2u}{(-u)^2+1} \neq R(u,v)$, $\quad R(-\sin x, -\cos x) = \dfrac{2(-\sin x)}{(-\sin x)^2+1} \neq R(\sin x, \cos x)$

z jednodušších substitucí lze tedy použít pouze substituci $t = \cos x$

$\left(\dfrac{2\sin x}{\sin^2 x+1} = \dfrac{2}{\sin^2 x + 1}\cdot \sin x, \text{ tedy jde o integrál typu } \displaystyle\int \tilde{R}(\sin^2 x, \cos x)\cdot \sin x\,\mathrm{d}x \right)$

2. $\displaystyle\int \frac{1}{\cos^3 x}\,\mathrm{d}x$ (viz příklad 7.20)

$R(u,v) = \dfrac{1}{v^3}$, neboli $R(\sin x, \cos x) = \dfrac{1}{\cos^3 x}$

$R(-u,v) = \dfrac{1}{v^3} \neq -R(u,v)$, $\quad R(-\sin x, \cos x) = \dfrac{1}{\cos^3 x} \neq -R(\sin x, \cos x)$

$R(u,-v) = \dfrac{1}{(-v)^3} = -R(u,v)$, $\quad R(\sin x, -\cos x) = \dfrac{1}{(-\cos x)^3} = -R(\sin x, \cos x)$

$R(-u,-v) = \dfrac{1}{(-v)^3} \neq R(u,v)$ $\quad R(-\sin x, -\cos x) = \dfrac{1}{(-\cos x)^3} \neq R(\sin x, \cos x)$

z jednodušších substitucí lze tedy použít pouze substituci $t = \sin x$

$\left(\dfrac{1}{\cos^3 x} = \dfrac{\cos x}{\cos^4 x} = \dfrac{1}{(\cos^2 x)^2}\cdot \cos x, \text{ tedy jde o integrál typu } \displaystyle\int \tilde{R}(\cos^2 x, \sin x)\cdot \cos x\,\mathrm{d}x \right)$

3. $\displaystyle\int \frac{1}{\cos^4 x}\,\mathrm{d}x$ (viz příklad 7.21)

$R(u,v) = \dfrac{1}{v^4}$, neboli $R(\sin x, \cos x) = \dfrac{1}{\cos^4 x}$

$R(-u,v) = \dfrac{1}{v^4} \neq -R(u,v)$, $\quad R(-\sin x, \cos x) = \dfrac{1}{\cos^4 x} \neq -R(\sin x, \cos x)$

$R(u,-v) = \dfrac{1}{(-v)^4} \neq -R(u,v)$, $\quad R(\sin x, -\cos x) = \dfrac{1}{(-\cos x)^4} \neq -R(\sin x, \cos x)$

$R(-u,-v) = \dfrac{1}{(-v)^4} = R(u,v)$ $\quad R(-\sin x, -\cos x) = \dfrac{1}{(-\cos x)^4} = R(\sin x, \cos x)$

z jednodušších substitucí lze tedy použít pouze substituci $t = \operatorname{tg} x$

$\left(\dfrac{1}{\cos^4 x} = \dfrac{1}{(\cos^2 x)^2}, \text{ tedy jde o integrál typu } \displaystyle\int \tilde{R}(\cos^2 x, \sin^2 x, \sin x\cdot\cos x)\,\mathrm{d}x \right)$

4. $\displaystyle\int \frac{1}{(3\sin x - 2\cos x)^2}\,\mathrm{d}x$

$R(u,v) = \dfrac{1}{(3u-2v)^2}$, neboli $R(\sin x, \cos x) = \dfrac{1}{(3\sin x - 2\cos x)^2}$

$R(-u,v) = \dfrac{1}{(3(-u)-2v)^2} \neq -R(u,v)$, $\quad R(-\sin x, \cos x) = \dfrac{1}{(3(-\sin x) - 2\cos x)^2} \neq -R(\sin x, \cos x)$

$R(u,-v) = \dfrac{1}{(3u-2(-v))^2} \neq -R(u,v)$, $\quad R(\sin x, -\cos x) = \dfrac{1}{(3\sin x - 2(-\cos x))^2} \neq -R(\sin x, \cos x)$

$R(-u,-v) = \dfrac{1}{(3(-u)-2(-v))^2} = R(u,v)$, $\quad R(-\sin x, -\cos x) = \dfrac{1}{(3(-\sin x) - 2(-\cos x))^2} = R(\sin x, \cos x)$

z jednodušších substitucí lze tedy použít pouze substituci $t = \operatorname{tg} x$

$\left(\dfrac{1}{(3\sin x - 2\cos x)^2} = \dfrac{1}{9\sin^2 x - 12\sin x\cos x + 4\cos^2 x}, \right.$

$\left. \text{tedy jde o integrál typu } \displaystyle\int \tilde{R}(\cos^2 x, \sin^2 x, \sin x\cdot\cos x)\,\mathrm{d}x \right)$

Příklad 7.12: Rozložte na součet polynomu a jednoduchých zlomků funkci $R(x) = \dfrac{x^6 + 2x^4 + 3x^2 + x - 1}{x^5 - x^2}$.

Řešení: Máme $x^5 - x^2 = x^2(x^3 - 1)$, tedy $D(R) = \mathbb{R} \setminus \{0; 1\}$. Nejdříve vyjádříme $R(x)$ jako součet polynomu a funkce ryze lomené. K tomu vydělíme čitatel jmenovatelem a dostaneme

$$\begin{array}{l}(\;x^6 + 0x^5 + 2x^4 + 0x^3 + 3x^2 + x - 1) : (x^5 - x^2) = x + \dfrac{2x^4 + x^3 + 3x^2 + x - 1}{x^5 - x^2} = R(x) = x + R_1(x) \\ \underline{-x^6 \qquad\qquad\qquad + \; x^3 \qquad\qquad\qquad} \\ \qquad\qquad 2x^4 \;+\; x^3 + 3x^2 + x - 1\;,\end{array}$$

kde $R_1(x)$ je funkce ryze lomená. Protože $x^5 - x^2 = x^2(x^3-1) = x^2(x-1)(x^2+x+1)$, kde polynom x^2+x+1 už nemá reálné kořeny, bude mít funkce $R_1(x)$ rozklad na součet jednoduchých zlomků ve tvaru

$$\Big(R_1(x) = \Big)\; \frac{2x^4 + x^3 + 3x^2 + x - 1}{x^2(x-1)(x^2+x+1)} = \frac{A}{x^2} + \frac{B}{x} + \frac{C}{x-1} + \frac{Dx+E}{x^2+x+1}\,. \tag{1}$$

Vynásobením rovnosti (1) jmenovatelem její levé strany $x^2(x-1)(x^2+x+1)$ a postupnou úpravou nové pravé stray dostaneme

$$\begin{aligned} 2x^4 + x^3 + 3x^2 + x - 1 &= A\underbrace{(x^3-1)}_{(x-1)(x^2+x+1)} + B\underbrace{(x^4-x)}_{x(x-1)(x^2+x+1)} + C\underbrace{(x^4+x^3+x^2)}_{x^2(x^2+x+1)} + (Dx+E)\underbrace{(x^3-x^2)}_{x^2(x-1)} = \\ &= Ax^3 - A + Bx^4 - Bx + Cx^4 + Cx^3 + Cx^2 + Dx^4 - Dx^3 + Ex^3 - Ex^2 = \\ &= (B+C+D)x^4 + (A+C-D+E)x^3 + (C-E)x^2 - Bx - A\,. \end{aligned}$$

Nyní porovnáme koeficienty vlevo a vpravo u stejných mocnin:

$$\begin{array}{rrcl} x^4: & 2 &=& B + C + D \\ x^3: & 1 &=& A + C - D + E \\ x^2: & 3 &=& C - E \\ x^1: & 1 &=& -B \\ x^0: & -1 &=& -A \end{array} \tag{2}$$

Tím jsme získali pro neznámé koeficienty A, B, C, D, E soustavu rovnic, jejímž vyřešením dostaneme

$$A = 1,\quad B = -1,\quad C = 2,\quad D = 1,\quad E = -1.$$

Tedy

$$R(x) = x + \underbrace{\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} + \frac{2}{x-1} + \frac{x-1}{x^2+x+1}}_{R_1(x)}\,.$$

Pro snížení počtu neznámých v soustavě lineárních rovnic (2) (z pěti na tři) bylo možné vypočítat koeficienty A a C zakrývacím pravidlem:

$$x := 0 \qquad A = \left.\frac{2x^4 + x^3 + 3x^2 + x - 1}{(x-1)(x^2+x+1)}\right|_{x=0} = \frac{0+0+0+0-1}{(0-1)\cdot(0+0+1)} = 1,$$

$$x := 1 \qquad C = \left.\frac{2x^4 + x^3 + 3x^2 + x - 1}{x^2(x^2+x+1)}\right|_{x=1} = \frac{2+1+3+1-1}{1\cdot(1+1+1)} = 2.$$

Získané hodnoty jsme mohli dosadit za A a C hned v rovnosti (1) nebo až později po sestavení soustavy rovnic (2).

Příklad 7.13: Určete tvar, v kterém je třeba hledat rozklad na jednoduché zlomky racionální funkce

a) $\dfrac{x^3 + 2x - 4}{(x^2+4)^2(x-1)^3}$ $\left[\dfrac{Ax+B}{(x^2+4)^2} + \dfrac{Cx+D}{x^2+4} + \dfrac{E}{(x-1)^3} + \dfrac{F}{(x-1)^2} + \dfrac{G}{x-1} \right]$,

b) $\dfrac{x^4}{(x^2+4x+5)^2(x^2+1)(x+4)^2}$ $\left[\dfrac{Ax+B}{(x^2+4x+5)^2} + \dfrac{Cx+D}{x^2+4x+5} + \dfrac{Ex+F}{x^2+1} + \dfrac{G}{(x+4)^2} + \dfrac{H}{x+4} \right]$.

7.3.2 Integrace racionální funkce

= integrace polynomu + integrace jednoduchých zlomků

Integrace jednoduchých zlomků

Cílem této části je ukázat obecný postup, jak hledat primitivní funkce k jednoduchým zlomkům. Nejde tu o odvození vzorců, do kterých by se mělo při integraci dosazovat. Doporučuji porovnat obecný postup, který je zde uvedený, s integrací jednotlivých parciálních zlomků v následujícím Příkladu 7.14.

(1) TYP $\boxed{\dfrac{A}{(x-\alpha)^n}\,; \quad n\in\mathbb{N}\ \ (x\neq\alpha)}$

a) $\underline{n>1}$

$$\int \frac{A}{(x-\alpha)^n}\,\mathrm{d}x \;=\; A\int (x-\alpha)^{-n}\,\mathrm{d}x \overset{\text{(Př. 7.6a)}}{=} A\,\frac{(x-\alpha)^{-n+1}}{-n+1} \;+\; c \;=$$

$$= \frac{-A}{n-1}\cdot\frac{1}{(x-\alpha)^{n-1}} \;+\; c \qquad \text{na } (-\infty,\alpha) \text{ a na } (\alpha,\infty)$$

b) $\underline{n=1}$

$$\int \frac{A}{x-\alpha}\,\mathrm{d}x \;=\; A\ln|x-\alpha| \;+\; c \qquad \text{na } (-\infty,\alpha) \text{ a na } (\alpha,\infty)$$

(2) TYP $\boxed{\dfrac{Bx+C}{(x^2+px+q)^n}\,; \quad n\in\mathbb{N},\ p^2-4q<0\ \ (x\in\mathbb{R})}$ (jmenovatel nemá reálné kořeny)

přepíšeme

$$\frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^n} \;=\; \frac{\dfrac{B}{2}\cdot\overbrace{(2x+p)}^{(x^2+px+q)'}}{(x^2+px+q)^n} \;+\; \frac{C-\dfrac{Bp}{2}}{(x^2+px+q)^n} \;=$$

$$= \frac{B}{2}\underbrace{\frac{(2x+p)}{(x^2+px+q)^n}}_{\text{viz (2A)}} \;+\; \left(C-\frac{Bp}{2}\right)\underbrace{\frac{1}{(x^2+px+q)^n}}_{\text{viz (2B)}}$$

(K prvnímu kroku rozkladu: koeficient $\frac{B}{2}$ v prvním zlomku rozkladu jsme vybrali tak, aby v čitateli tohoto zlomku byla obsažena všechna x z čitatele zadané racionální funkce, koeficient $C-\frac{Bp}{2}$ v čitateli druhého zlomku rozkladu odpovídá tomu, že po sečtení čitatelů obou zlomků rozkladu musíme dostat původní čitatel. Jak už bylo uvedeno výše: Neučte se tyto koeficienty ani dále uvedené vyjádření integrálů jako vzorečky – podstatné tu je znát princip rozkladu na součet dvou zlomků a postup, jakým lze integrály najít.)

(2A)

$$\int \frac{(2x+p)}{(x^2+px+q)^n}\,\mathrm{d}x \;=\; \left|\begin{array}{rcl} x^2+px+q &=& t \\ (2x+p)\,\mathrm{d}x &=& \mathrm{d}t \end{array}\right| \;=\; \int \frac{\mathrm{d}t}{t^n} \;=\; (\star)$$

pro $\underline{n>1}$ (viz (1a)):

$$(\star) \;=\; -\frac{1}{n-1}\cdot\frac{1}{t^{n-1}} \;+\; c \;=\; -\frac{1}{n-1}\cdot\frac{1}{(x^2+px+q)^{n-1}} \;+\; c \qquad \text{na } \mathbb{R}$$

pro $\underline{n=1}$ (viz (1b)):

$$(\star) \;=\; \ln|t| \;+\; c \;=\; \ln(\underbrace{x^2+px+q}_{>0\ \mathbf{!}}) \;+\; c \qquad \text{na } \mathbb{R}$$

c) $\underline{R(-u,-v)=R(u,v)}$

V tomto případě (po eventuálním rozšíření zlomku výrazem $\cos x$, $\cos^2 x$ nebo $\cos^3 x$) bude možné ve jmenovateli vytknout $\cos^2 x$ a v čitateli a zbytku jmenovatele pak zbudou jen sudé mocniny sinů a kosinů, někdy vynásobené součinem $\sin x\cdot\cos x$. Integrand $R(\sin x,\cos x)$ lze tentokrát předpsat ve tvaru

$$R(\sin x,\cos x) = \tilde{R}(\sin^2 x,\cos^2 x,\sin x\cdot\cos x),$$

kde $\tilde{R}$ je vhodná racionální funkce tří proměnných. Při integraci využijeme toho, že $\cos^2 x$ vytknutý ve jmenovateli lze použít na derivaci tangenty a že platí

$$\cos^2 x = \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x+\sin^2 x} = \frac{1}{1+\mathrm{tg}^2 x}\,,$$

$$\sin^2 x = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x+\sin^2 x} = \frac{\mathrm{tg}^2 x}{1+\mathrm{tg}^2 x} \qquad \left(\text{nebo}\quad \sin^2 x = 1-\cos^2 x = 1-\frac{1}{1+\mathrm{tg}^2 x} = \frac{\mathrm{tg}^2 x}{1+\mathrm{tg}^2 x}\right),$$

$$\sin x\cdot\cos x = \frac{\sin x\cdot\cos x}{\cos^2 x+\sin^2 x} = \frac{\mathrm{tg}\, x}{1+\mathrm{tg}^2 x} \qquad \left(\text{nebo}\quad \sin x\cdot\cos x = \mathrm{tg}\, x\cdot\cos^2 x = \frac{\mathrm{tg}\, x}{1+\mathrm{tg}^2 x}\right).$$

Na intervalech $\left(-\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi\right)$, $k\in\mathbb{Z}$, tak můžeme použít substituci

$$t=\mathrm{tg}\, x, \quad \mathrm{d}t = \frac{1}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x \qquad \left(\cos^2 x = \frac{1}{1+t^2},\quad \sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2},\quad \sin x\cdot\cos x = \frac{t}{1+t^2}\right).$$

Poznámka: Jak se vypořádat s faktem, že definiční obor funkce $\mathrm{tg}\, x$ je někdy menší než definiční obor původní integrované funkce, najdete u příkladu 7.22.

Poznámka: Je-li $x\in(-\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi)$, můžeme v praxi psát stejně jako např. v příkladu 7.21 $x = \mathrm{arctg}\, t + k\pi$ a $\mathrm{d}x = \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$. Není tedy nutné upravovat funkci R tak, aby bylo možné ve jmenovateli vytknout $\cos^2 x$.

Poznámka: Někdy je zde vhodnější substituce $t=\mathrm{cotg}\, x$.

Poznámka: V některých případech lze použít všechny tři uvedené substituce. (Dá se dokonce celkem snadno ukázat, že pokud je možné použít dvě z těchto substitucí, lze použít i třetí.) Záleží ovšem na konkrétním příkladu, která ze substitucí se nejsnáze provede a která nás dovede k nejjednodušší integraci racionální funkce.

(II) Pokud funkce R nemá ani jednu z vlastností popsaných v (I) použijeme k substituci funkci $\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}$, prostou na intervalech $\big((2k-1)\,\pi,\,(2k+1)\,\pi\big)$, $k\in\mathbb{Z}$. Pro $x\in\big((2k-1)\,\pi,\,(2k+1)\,\pi\big)$ je přitom $\frac{x}{2}\in\left(-\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi\right)$, takže $\frac{x}{2} = \mathrm{arctg}\, t + k\pi$ a $x = 2\,\mathrm{arctg}\, t + 2k\pi$. Substituce tedy bude vypadat takto

$$\mathrm{tg}\,\frac{x}{2} \;=\; t\,, \qquad \mathrm{d}x \;=\; \frac{2}{1+t^2}\,,$$

$$\cos x \;=\; \cos^2\tfrac{x}{2}-\sin^2\tfrac{x}{2} \;=\; \frac{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}} \;=\; \frac{1-\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}} \;=\; \frac{1-t^2}{1+t^2}\,,$$

$$\sin x \;=\; 2\,\sin\tfrac{x}{2}\cos\tfrac{x}{2} \;=\; \frac{2\,\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}} \;=\; \frac{2\,\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}} \;=\; \frac{2\,t}{1+t^2}\,.$$

Jak je vidět, tato substituce převede integraci jakékoliv funkce typu $R(\sin x,\cos x)$ na integraci racionální funnkce. Její velkou nevýhodou je však to, že po ní dostáváme racionální funkce s vyšším stupněm polynomu ve jmenovateli než u jiných substitucí. Přitom integrace racionálních funkcí v vysokým stupněm polynomu ve jmenovateli je pracná, často i neproveditelná běžným způsobem, protože nemusíme umět najít rozklad jmenovatele. Proto volíme tuto substituci, jen když nemáme jinou možnost.

C) Substituce pro integrály typu $\boxed{\int R(\sin x, \cos x)\,\mathrm{d}x}$

Výběr substituce závisí na vlastnostech funkce $R(u,v)$. Speciálně na tom, co se stane, když v předpisu pro funkci $R(u,v)$ u jedné z proměnných, nebo u obou proměnných změníme všude znaménko. Není přitom potřeba pracovat s proměnnými u a v. Stačí zkusit, co se stane s hodnotou zlomku, jestliže změníme znaménko u všech sinů resp. kosinů resp. sinů a kosinů.

Výběr substituce:

(I) Zkusíme, zda funkce $R(u,v)$ nemá některou z dále uvedených vlastností:

a) $R(-u,v) = -R(u,v)$ (tj. R je lichá v první proměnné),

b) $R(u,-v) = -R(u,v)$ (tj. R je lichá v druhé proměnné),

c) $R(-u,-v) = R(u,v)$.

V těchto případech nás následující úvahy vedou k vhodným substitucím. Vybereme-li však na základě vlastností funkce $R(u,v)$ substituci $t = \mathrm{tg}\, x$, lze v praxi často funkci $R(\sin x, \cos x)$ připravit k použití této substituce jiným (někdy i výrazně jednodušším) způsobem, než jak je to ukázáno pro obecný případ (viz např. příklady 7.21, 7.22).

a) $\underline{R(-u,v) = -R(u,v)}$ (tj. R je lichá v první proměnné)

V tomto případě se bude $\sin x$ (po eventuálním rozšíření zlomku výrazem $\sin x$) vyskytovat ve jmenovateli jen v sudých mocninách a čitatel bude možné zapsat jako součin funkce $\sin x$ a funkce, v níž se $\sin x$ vyskytuje opět jen v sudých mocninách. Sudé mocniny sinu tedy bude možné převést na mocniny kosinu a zbylý lichý sinus z čitatele použít na derivaci kosinu. To znamená, že lze funkci $R(\sin x, \cos x)$ přepsat ve tvaru

$$R(\sin x, \cos x) = \tilde{R}(\sin^2 x, \cos x)\cdot \sin x,$$

kde $\tilde{R}$ je vhodná racionální funkce dvou proměnných. Vzhledem k předchozím úvahám zde volíme substituci

$$\cos x \;=\; t \qquad \left(\, t \in \langle -1, 1\rangle, \quad \sin^2 x = 1 - t^2 \,\right).$$

Na $\mathbb{R}$ tak dostaneme

$$\int \tilde{R}\,(\,\sin^2 x,\, \cos x\,)\cdot \sin x\,\mathrm{d}x = \left|\begin{array}{rcl} \cos x &=& t \;\ldots\; t\in\langle -1,1\rangle \\ -\sin x\,\mathrm{d}x &=& \mathrm{d}t \\ (\sin^2 x &=& 1-t^2) \end{array}\right| = -\int \underbrace{\tilde{R}\,(\,1-t^2, t\,)}_{\substack{\text{racionální funkce}\\ \text{proměnné } t}} \;\mathrm{d}t\,.$$

b) $\underline{R(u,-v) = -R(u,v)}$ (tj. R je lichá v druhé proměnné)

V tomto případě se bude $\cos x$ (po eventuálním rozšíření zlomku výrazem $\cos x$) vyskytovat ve jmenovateli jen v sudých mocninách a čitatel bude možné zapsat jako součin funkce $\cos x$ a funkce, v níž se $\cos x$ vyskytuje opět jen v sudých mocninách. Sudé mocniny kosinu tedy bude možné převést na mocniny sinu a zbylý lichý kosinus z čitatele použít na derivaci sinu. Funkci $R(\sin x, \cos x)$ lze tentokrát přepsat ve tvaru

$$R(\sin x, \cos x) = \tilde{R}(\sin x, \cos^2 x)\cdot \cos x,$$

kde $\tilde{R}$ je opět vhodná racionální funkce dvou proměnných. K integraci použijeme substituci

$$\sin x \;=\; t \qquad \left(\, t \in \langle -1, 1\rangle, \quad \cos^2 x = 1 - t^2 \,\right),$$

která nám na $\mathbb{R}$ dá

$$\int \tilde{R}\,(\,\sin x,\, \cos^2 x\,)\cdot \cos x\,\mathrm{d}x = \left|\begin{array}{rcl} \sin x &=& t \;\ldots\; t\in\langle -1,1\rangle \\ \cos x\,\mathrm{d}x &=& \mathrm{d}t \\ (\cos^2 x &=& 1-t^2) \end{array}\right| = \int \underbrace{\tilde{R}\,(\,t, 1-t^2\,)}_{\substack{\text{racionální funkce}\\ \text{proměnné } t}} \;\mathrm{d}t\,.$$

(2B) V dalších úpravách použijeme pro lepší přehlednost označení $D = \dfrac{p}{2}$, $E = q - \left(\dfrac{p}{2}\right)^2$

$$\int \frac{1}{(x^2+px+q)^n}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{\left(\left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + q - \left(\frac{p}{2}\right)^2\right)^n}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{\left((x+D)^2+E\right)^n}\,\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{1}{E^n}\int \frac{1}{\left(\frac{(x+D)^2}{E}+1\right)^n}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{E^n}\int \frac{1}{\left(\left(\frac{x+D}{\sqrt{E}}\right)^2+1\right)^n}\,\mathrm{d}x = \left|\begin{array}{rcl} \frac{x+D}{\sqrt{E}} &=& t \\ \frac{1}{\sqrt{E}}\,\mathrm{d}x &=& \mathrm{d}t \end{array}\right| =$$

$$= \frac{\sqrt{E}}{E^n}\int \frac{1}{\left(\left(\frac{x+D}{\sqrt{E}}\right)^2+1\right)^n}\cdot\frac{1}{\sqrt{E}}\,\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{E}}{E^n}\int \frac{1}{(t^2+1)^n}\,\mathrm{d}t = (\star\star)$$

pro $\underline{n=1}$:

$$(\star\star) = \frac{1}{\sqrt{E}}\,\mathrm{arctg}\, t + c = \frac{1}{\sqrt{E}}\,\mathrm{arctg}\left(\frac{x+D}{\sqrt{E}}\right) + c \qquad \text{na } \mathbb{R}$$

pro $\underline{n>1}$ se použije Příklad 7.8 (primitivní funkci dostaneme opět na celém $\mathbb{R}$)

Příklad 7.14: Najděte primitivní funkce k funkci $g(x) = \frac{x^6+2x^4+3x^2+x-1}{x^5-x^2}$.

Řešení: Podle Příkladu 7.12 máme

$$\int g(x)\,\mathrm{d}x = \int x\,\mathrm{d}x + \int \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x - \int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x + \int \frac{2}{x-1}\,\mathrm{d}x + \underbrace{\int \frac{x-1}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x}_{\tilde{I}}.$$

První čtyři integrály jsou snadné, poslední je složitější a spočítáme si ho zvlášť. Máme

$$\tilde{I} = \int \frac{x-1}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\frac{1}{2}(2x+1)-\frac{3}{2}}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\underbrace{\int\frac{2x+1}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x}_{\tilde{I}_1} - \frac{3}{2}\underbrace{\int\frac{1}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x}_{\tilde{I}_2}.$$

Integrál $\tilde{I}_1$ je typu $\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x$ (viz Příklad 7.7), tedy

$$\tilde{I}_1 = \int \frac{2x+1}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x = \ln|\underbrace{x^2+x+1}_{>0\ \forall x}| + c = \ln(x^2+x+1)+c.$$

Integrál $\tilde{I}_2$ spočítáme takto:

$$\tilde{I}_2 = \int \frac{1}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\frac{4}{3}}{\frac{(x+\frac{1}{2})^2}{\frac{3}{4}}+1}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\frac{4}{3}}{\left(\frac{x+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right)^2+1}\,\mathrm{d}x =$$

$$= \int \frac{\frac{4}{3}}{\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2+1}\,\mathrm{d}x = \left|\begin{array}{rcl} \frac{2x+1}{\sqrt{3}} &=& t \\ \frac{2}{\sqrt{3}}\,\mathrm{d}x &=& \mathrm{d}t \end{array}\right| = \int \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2+1}\,\frac{2}{\sqrt{3}}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\sqrt{3}}\int\frac{1}{t^2+1}\,\mathrm{d}t =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}}\,\mathrm{arctg}\, t + c = \frac{2}{\sqrt{3}}\,\mathrm{arctg}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)+c.$$

Tím jsme dostali

$$\tilde{I} = \tilde{I}_1 + \tilde{I}_2 = \ln(x^2+x+1) + \mathrm{arctg}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + c.$$

Nyní už snadno dopočítáme

$$\int g(x)\,\mathrm{d}x = \int x\,\mathrm{d}x + \int \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x - \int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x + \int \frac{2}{x-1}\,\mathrm{d}x + \tilde{I} =$$

$$= \frac{x^2}{2} - \frac{1}{x} - \ln|x| + 2\ln|x-1| + \ln(x^2+x+1) + \operatorname{arctg}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + c$$

na $(-\infty,0)$, na $(0,1)$ a na $(1,\infty)$.

7.4 Některé důležité substituce

polynom $P(x,y)$ dvou proměnných $x,\ y$ ...

... součet konečného počtu funkcí typu $c_{m,n}\cdot x^m\cdot y^n$, kde $m,\ n\in\mathbb{N}_0,\ c_{m,n}\in\mathbb{R}$

racionální funkce $R(x,y)$ dvou proměnných $x,\ y$ ...

... podíl dvou polynomů dvou proměnných $x,\ y$; $R(x,y)=\dfrac{P(x,y)}{Q(x,y)}$, $Q(x,y)\neq 0$

analogicky pro tři a více proměnných

(nebude-li řečeno jinak, budou v dalším písmena $R,\ \tilde{R}$ atd. označovat racionální funkce)

Poznámka: Dále uvedené substituce lze někdy použít, i když R není racionální funkce (viz např. Příklad 7.17).

A) Substituce pro integrály typu $\boxed{\int R(\mathrm{e}^{ax})\,\mathrm{d}x}$

Použijeme substituci

$$\mathrm{e}^{ax} = t \qquad \big(\text{ prostá funkce na } \mathbb{R},\ t\in(0,\infty)\ \big).$$

Pro $x\in\mathbb{R}$ pak můžeme psát

$$\int R(\mathrm{e}^{ax})\,\mathrm{d}x = \left|\begin{array}{rcl} \mathrm{e}^{ax} & = & t\ \dots\ t\in(0,\infty) \\ x & = & \frac{1}{a}\ln t \\ \mathrm{d}x & = & \frac{1}{a}\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \end{array}\right| = \int \underbrace{R(t)\cdot\frac{1}{at}}_{\text{racionální funkce}}\,\mathrm{d}t$$

nebo pro $R(\mathrm{e}^{ax}) = \tilde{R}(\mathrm{e}^{ax})\cdot \mathrm{e}^{ax}$ také

$$\int \tilde{R}(\mathrm{e}^{ax})\cdot\mathrm{e}^{ax}\,\mathrm{d}x = \left|\begin{array}{rcl} \mathrm{e}^{ax} & = & t\ \dots\ t\in(0,\infty) \\ a\,\mathrm{e}^{ax}\,\mathrm{d}x & = & \mathrm{d}t \end{array}\right| = \frac{1}{a}\int \tilde{R}(\mathrm{e}^{ax})\cdot a\,\mathrm{e}^{ax}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\int\tilde{R}(t)\,\mathrm{d}t.$$

Příklad 7.15: Najděte primitivní funkce k funkci $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{4x}-1}{\mathrm{e}^{4x}+\mathrm{e}^{2x}+1}$.

Řešení:

$$\int \frac{\mathrm{e}^{4x}-1}{\mathrm{e}^{4x}+\mathrm{e}^{2x}+1}\,\mathrm{d}x = \int\frac{(\mathrm{e}^{2x})^2-1}{(\mathrm{e}^{2x})^2+\mathrm{e}^{2x}+1}\,\mathrm{d}x = \begin{array}{c} x\in\mathbb{R};\quad t\in(0,\infty) \\ \left|\begin{array}{rcl} \mathrm{e}^{2x} & = & t \\ x & = & \frac{1}{2}\ln t \quad \text{– prostá} \\ \mathrm{d}x & = & \frac{1}{2t}\,\mathrm{d}t \end{array}\right| \end{array} =$$

$$= \int\frac{t^2-1}{t^2+t+1}\cdot\frac{1}{2t}\,\mathrm{d}t = \int\left(-\frac{1}{2t}+\frac{\overbrace{2t+1}^{(t^2+t+1)'}}{2(t^2+t+1)}\right)\mathrm{d}t \overset{1)}{=} \frac{1}{2}\big(-\ln t + \ln(t^2+t+1)\big)+c =$$

$$= \frac{1}{2}\big(-\ln\mathrm{e}^{2x}+\ln(\mathrm{e}^{4x}+\mathrm{e}^{2x}+1)\big)+c = -x+\frac{1}{2}\ln(\mathrm{e}^{4x}+\mathrm{e}^{2x}+1)+c \qquad \text{na } \mathbb{R}$$

1) vynechali jsme u logaritmů absolutní hodnoty, protože argumenty jsou kladné

Příklad 7.16: Najděte primitivní funkce k funkci $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{-6x}-\mathrm{e}^{-2x}}{\mathrm{e}^{-4x}+1}$.

Řešení:

$$\int\frac{\mathrm{e}^{-6x}-\mathrm{e}^{-2x}}{\mathrm{e}^{-4x}+1}\,\mathrm{d}x = \int\frac{\left(\mathrm{e}^{-2x}\right)^2-1}{\left(\mathrm{e}^{-2x}\right)^2+1}\cdot\mathrm{e}^{-2x}\,\mathrm{d}x = \begin{array}{c} x\in\mathbb{R};\quad t\in(0,\infty) \\ \left|\begin{array}{rcl} \mathrm{e}^{-2x} & = & t \\ -2\,\mathrm{e}^{-2x}\,\mathrm{d}x & = & \mathrm{d}t \end{array}\right| \end{array} = -\frac{1}{2}\int\frac{t^2-1}{t^2+1}\,\mathrm{d}t =$$

$$= -\frac{1}{2}\int 1\,\mathrm{d}t + \int\frac{1}{t^2+1}\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{2}t+\operatorname{arctg}t + c = -\frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-2x}+\operatorname{arctg}\left(\mathrm{e}^{-2x}\right)+c \qquad \text{na } \mathbb{R}$$

B) Substituce pro integrály typu $\boxed{\int\frac{R(\ln x)}{x}\,\mathrm{d}x}$

Použijeme substituci

$$\ln x = t \qquad \big(\text{ prostá funkce na } (0,\infty),\ t\in\mathbb{R}\ \big)$$

a pro $x\in(0,\infty)$ dostaneme

$$\int\frac{R(\ln x)}{x}\,\mathrm{d}x = \left|\begin{array}{rcl} \ln x & = & t\ \dots\ t\in\mathbb{R} \\ \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x & = & \mathrm{d}t \end{array}\right| = \int R(t)\,\mathrm{d}t.$$

Příklad 7.17: Najděte primitivní funkce k funkci $f(x) = \dfrac{5\ln x}{x(\ln^3x+\ln^2x-2)}$.

Řešení: $x>0,\ x\neq\mathrm{e}$ (máme totiž: $\ln^3x+\ln^2x-2 = (\ln x-1)(\ln^2x+2\ln x+2)=0 \Leftrightarrow \ln x = 1 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow\ x=\mathrm{e}$ – viz rozklad jmenovatele po substituci)

$$\int\frac{5\ln x}{x(\ln^3x+\ln^2x-2)}\,\mathrm{d}x = \left|\begin{array}{rcl} t & = & \ln x \\ \mathrm{d}t & = & \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \end{array}\right| = \int\frac{5t}{\underbrace{t^3+t^2-2}_{(t-1)(t^2+2t+2)}}\,\mathrm{d}t =$$

$$= \int\left(\frac{1}{t-1}+\frac{-t+2}{t^2+2t+2}\right)\mathrm{d}t = \ln|t-1| - \frac{1}{2}\int\frac{2t+2}{t^2+2t+2}\,\mathrm{d}t + \int\frac{3}{\underbrace{t^2+2t+2}_{(t+1)^2+1}}\,\mathrm{d}t =$$

$$= \ln|t-1| - \frac{1}{2}\ln(t^2+2t+2) + 3\operatorname{arctg}(t+1)+c =$$

$$= \ln|\ln x - 1| - \frac{1}{2}\ln(\ln^2x+2\ln x+2)+3\operatorname{arctg}(\ln x+1)+c$$

na $(0,\mathrm{e})$ a na (e,∞)

Příklad 7.18: Najděte primitivní funkce k funkci $f(x) = \dfrac{1}{x\sqrt{1-\ln^2x}}$.

Řešení: Toto je případ, kdy R není racionální funkce, přesto lze postupovat podobně jako v předcházejícím příkladu. $\Big($Funkce f je zde definována pro ta x, pro která platí $\ln x\in(-1,1)$, tj. pro $x\in\left(\frac{1}{\mathrm{e}},\mathrm{e}\right)$.$\Big)$

$$\int\frac{1}{x\sqrt{1-\ln^2x}}\,\mathrm{d}x = \left|\begin{array}{rcl} \ln x & = & t \\ \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x & = & \mathrm{d}t \end{array}\right| = \int\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t =$$

$$= \arcsin t + c = \arcsin(\ln x)+c \qquad \text{na } \left(\frac{1}{\mathrm{e}},\mathrm{e}\right)$$