Protože je zde vnější funkce $\exp x = \mathrm{e}^x$ spojitá, dostáváme z Věty 3.14 o limitě složené funkce, že pokud je $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)\cdot\ln\big(f(x)\big) = A$, pak $\lim\limits_{x\to x_0} \big(f(x)\big)^{g(x)} = \exp(A) = \mathrm{e}^A$ (kde zde značíme $\mathrm{e}^{+\infty} = +\infty$, $\mathrm{e}^{-\infty} = 0$).

Předpokládejme nyní, že funkce f je kladná na nějakém $P(x_0)$ a že existují $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a$ a $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = b$. Pokud je definován součin $(\ln a)\cdot b$ ($\ln a$ zde má pro $a \in \{0, +\infty\}$ význam $\ln 0 = -\infty$, $\ln(+\infty) = +\infty$), pak z předešlého

$$\lim_{x\to x_0} \big(f(x)\big)^{g(x)} = \mathrm{e}^{(\ln a)\cdot b} = \big(\mathrm{e}^{\ln a}\big)^b = a^b.$$

Věta o limitě složené funkce nám tak v takovémto případě dovoluje získat limitu funkce $f(x)^{g(x)}$ pouhým umocněním limity základu na limitu exponentu. V případech, kdy součin $(\ln a)\cdot b$ není definován, tj. u limit typu $\left\langle\!\left\langle 0^0 \right\rangle\!\right\rangle$, $\left\langle\!\left\langle \infty^0 \right\rangle\!\right\rangle$, $\left\langle\!\left\langle 1^{\pm\infty} \right\rangle\!\right\rangle$, ale takovéto jednoduché dosazení limit možné není.

Příklad 3.5: Ukažte, že pro $h(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}}$ je $\lim\limits_{x\to 0} h(x) = \mathrm{e}$.

Řešení: Zřejmě $1 + x > 0$ pro všechna $x \in (-1, 1)$, $D(\frac{1}{x}) = \mathbb{R}\setminus\{0\}$, tedy funkce h je definovaná na nějakém prstencovém okolí nuly (např. na $P_1(0)$) a má smysl uvedenou limitu zkoumat. Máme $h(x) = \exp\big(\frac{1}{x}\ln(1+x)\big) = \exp\big(\frac{\ln(1+x)}{x}\big)$. Podle Příkladu 3.4 je $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$. A to znamená, že $\lim_{x\to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = \mathrm{e}^1 = \mathrm{e}$.

Příklad 3.6: Vyšetřete limitu $\lim\limits_{x\to 0} f(x)^{g(x)}$, kde $f(x) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{x^4}}$ a 1) $g(x) = x^2$, 2) $g(x) = x^6$, 3) $g(x) = -x^2$, 4) $g(x) = -x^3$.

Řešení: Zřejmě $f > 0$ na $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, a tedy funkce f^g je definována na (dokonce libovolném) prstencovém okolí nuly. Protože $\lim_{x\to 0}\big(-\frac{1}{x^4}\big) = -\infty$, máme $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$. Dále ve všech případech je $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = 0$. Jde tedy vždy o limitu typu $\left\langle\!\left\langle 0^0 \right\rangle\!\right\rangle$. Přitom $\ln f(x) = -\frac{1}{x^4}$, a tedy

1) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)^{g(x)} = \lim\limits_{x\to 0} \mathrm{e}^{x^2\cdot(-\frac{1}{x^4})} = \lim\limits_{x\to 0} \mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}} = \left\langle\!\left\langle \mathrm{e}^{-\infty} \right\rangle\!\right\rangle = 0$,

2) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)^{g(x)} = \lim\limits_{x\to 0} \mathrm{e}^{x^6\cdot(-\frac{1}{x^4})} = \lim\limits_{x\to 0} \mathrm{e}^{-x^2} = \left\langle\!\left\langle \mathrm{e}^{0} \right\rangle\!\right\rangle = 1$,

3) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)^{g(x)} = \lim\limits_{x\to 0} \mathrm{e}^{-x^2\cdot(-\frac{1}{x^4})} = \lim\limits_{x\to 0} \mathrm{e}^{\frac{1}{x^2}} = \left\langle\!\left\langle \mathrm{e}^{\infty} \right\rangle\!\right\rangle = \infty$,

4) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)^{g(x)} = \lim\limits_{x\to 0} \mathrm{e}^{-x^3\cdot(-\frac{1}{x^4})} = \lim\limits_{x\to 0} \mathrm{e}^{\frac{1}{x}} = \left\langle\!\left\langle \mathrm{e}^{\pm\infty} \right\rangle\!\right\rangle$ – neexistuje.

(Tedy přestože jsme definovali $0^0 = 1$, nemůžeme to použít při výpočtu limit – nemáme větu, která by nám to dovolovala.)
(Vyjadřovat f^g postupem z předchozí poznámky tu ani nebylo nutné. Mohli jsme využít toho, že $(\mathrm{e}^{-1/x^4})^{g(x)} = \mathrm{e}^{(-1/x^4)\cdot g(x)}$.)

Přehled některých užitečtých limit funkcí

- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$
- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\mathrm{e}^x - 1}{x} = 1$
- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(x+1)}{x} = 1$
- $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln x}{x-1} = 1$
- $\lim\limits_{x\to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = \mathrm{e}$
- $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x = \mathrm{e}$
- $\lim\limits_{x\to 0+} x^\alpha = \begin{cases} 0 & \text{pro } \alpha > 0 \\ 1 & \text{pro } \alpha = 0 \\ \infty & \text{pro } \alpha < 0 \end{cases}$
- $\lim\limits_{x\to \infty} x^\alpha = \begin{cases} \infty & \text{pro } \alpha > 0 \\ 1 & \text{pro } \alpha = 0 \\ 0 & \text{pro } \alpha < 0 \end{cases}$

dále α, $\beta > 0$ (limity těchto čtyř typů je nutné v testu či písemce vždy spočítat – postup je uveden v kapitole 5):

- $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{(\ln x)^\alpha}{x^\beta} = 0$ (typ $\left\langle\!\left\langle \frac{\infty}{\infty} \right\rangle\!\right\rangle$)
- $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^\alpha}{(\mathrm{e}^x)^\beta} = 0$ (typ $\left\langle\!\left\langle \frac{\infty}{\infty} \right\rangle\!\right\rangle$)
- $\lim\limits_{x\to 0+} x^\beta \cdot |\ln x|^\alpha = 0$ (typ $\left\langle\!\left\langle 0\cdot\infty \right\rangle\!\right\rangle$)
- $\lim\limits_{x\to -\infty} (\mathrm{e}^x)^\beta \cdot |x|^\alpha = 0$ (typ $\left\langle\!\left\langle 0\cdot\infty \right\rangle\!\right\rangle$)

KAPITOLA 3: Limita a spojitost funkce

3.1 Úvod

Definice:

Nechť je funkce f definována alespoň na nějakém prstencovém okolí bodu $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$. Číslo $a \in \overline{\mathbb{R}}$ je **limitou funkce** f **v bodě** x_0, jestliže pro každé okolí $U(a)$ bodu a existuje prstencové okolí $P(x_0)$ bodu x_0 takové, že $P(x_0) \subset D(f)$ a pro všechna $x \in P(x_0)$ platí

$$f(x) \in U(a).$$

Píšeme $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a$, $f(x) \overset{x\to x_0}{\longrightarrow} a$, $f(x) \to a$ pro $x \to x_0$.

Zápisy pomocí kvantifikátorů:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = a \quad\Leftrightarrow\quad \forall\, U(a)\ \exists\, P(x_0)\ \forall x \in \mathbb{R} : \big(x \in P(x_0) \Rightarrow f(x) \in U(a)\big)$$

neboli

- $x_0 \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$ (vlastní limita ve vlastním bodě)

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = a \quad\Leftrightarrow\quad \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in \mathbb{R} : \big(0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon\big)$$

- $x_0 \in \mathbb{R}$, $a = \pm\infty$ (nevlastní limita ve vlastním bodě)

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty \quad\Leftrightarrow\quad \forall K \in \mathbb{R}\ \exists \delta > 0\ \forall x \in \mathbb{R} : \big(0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) > K\big)$$

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty \quad\Leftrightarrow\quad \forall K \in \mathbb{R}\ \exists \delta > 0\ \forall x \in \mathbb{R} : \big(0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) < K\big)$$

- $x_0 = \pm\infty$, $a \in \mathbb{R}$ (vlastní limita v nevlastním bodě)

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = a \quad\Leftrightarrow\quad \forall \varepsilon > 0\ \exists L \in \mathbb{R}\ \forall x \in \mathbb{R} : \big(x > L \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon\big)$$

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = a \quad\Leftrightarrow\quad \forall \varepsilon > 0\ \exists L \in \mathbb{R}\ \forall x \in \mathbb{R} : \big(x < L \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon\big)$$

- $x_0 = \pm\infty$, $a = \pm\infty$ (nevlastní limita v nevlastním bodě)

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty \quad\Leftrightarrow\quad \forall K \in \mathbb{R}\ \exists L \in \mathbb{R}\ \forall x \in \mathbb{R} : \big(x > L \Rightarrow f(x) > K\big)$$

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = +\infty \quad\Leftrightarrow\quad \forall K \in \mathbb{R}\ \exists L \in \mathbb{R}\ \forall x \in \mathbb{R} : \big(x < L \Rightarrow f(x) > K\big)$$

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = -\infty \quad\Leftrightarrow\quad \forall K \in \mathbb{R}\ \exists L \in \mathbb{R}\ \forall x \in \mathbb{R} : \big(x > L \Rightarrow f(x) < K\big)$$

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = -\infty \quad\Leftrightarrow\quad \forall K \in \mathbb{R}\ \exists L \in \mathbb{R}\ \forall x \in \mathbb{R} : \big(x < L \Rightarrow f(x) < K\big)$$

Poznámka: Z definice limita nezávisí na hodnotě funkce v bodě x_0, funkce nemusí být v x_0 ani definována.

Příklad 3.1, a): Pomocí definice ukažte, že $\lim\limits_{x\to 1} (x^2 - 2x - 1) = -2$.

Řešení: Máme $f(x) = x^2 - 2x - 1$, $D(f) = \mathbb{R}$. Funkce je tedy definována na nějakém (zde dokonce na každém) prstencovém okolí bodu 1 a limitu lze počítat. Mějme nyní dáno $\varepsilon > 0$ (které určuje okolí $U_\varepsilon(-2)$ bodu $a = -2$). Hledáme k němu $\delta_\varepsilon > 0$ (určující prstencové okolí $P_{\delta_\varepsilon}(1)$ bodu $x_0 = 1$) takové, že

$$f(x) \in U_\varepsilon(-2), \quad \text{kdykoliv} \quad x \in P_{\delta_\varepsilon}(1),$$

neboli

$$|f(x) - (-2)| = |f(x) + 2| < \varepsilon, \quad \text{kdykoliv} \quad 0 < |x - 1| < \delta_\varepsilon. \tag{1}$$

Bude-li pro nějaké $\delta > 0$ platit $|x - 1| < \delta$, pak bude

$$|f(x) + 2| = |x^2 - 2x - 1 + 2| = |(x-1)^2| = |x - 1|^2 < \delta^2.$$

Zvolíme-li tedy δ_ε tak, že $\delta_\varepsilon^2 = \varepsilon$, tj. $\delta_\varepsilon = \sqrt{\varepsilon}$, bude (1) platit. Tím jsme dokázali, že $\lim_{x\to 1} (x^2 - 2x - 1) = -2$.

Definice:

Nechť je funkce f definována alespoň na nějakém pravém prstencovém okolí bodu $x_0 \in \mathbb{R}$. Řekneme, že $a \in \overline{\mathbb{R}}$ je **limitou zprava funkce f v bodě** x_0, jestliže pro každé okolí $U(a)$ bodu a existuje pravé prstencové okolí $P^+(x_0) \subset D(f)$ bodu x_0 takové, že pro všechna $x \in P^+(x_0)$ platí

$$f(x) \in U(a).$$

Píšeme $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = a$ apod. (též zkráceně $f(x_0^+) = a$). Analogicky definujeme **limitu zleva** $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$.

Limitě $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ říkáme **oboustranná** limita, limitám $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$ **jednostranné** limity.

<u>Vlastní limita zprava pomocí kvantifikátorů</u>:

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = a \qquad \Leftrightarrow \qquad \forall\, U(a)\ \ \exists\, P^+(x_0)\ \ \forall\, x\in\mathbb{R}: \ \big(x \in P^+(x_0)\ \Rightarrow\ f(x) \in U(a)\big)$$

neboli

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = a \qquad \Leftrightarrow \qquad \forall\,\varepsilon>0\ \ \exists\,\delta>0\ \ \forall\, x\in\mathbb{R}: \ \big(\underbrace{0<x-x_0<\delta}_{x_0<\ x\ <x_0+\delta}\ \Rightarrow\ |\,f(x)-a\,| < \varepsilon\big)$$

(Podobně pro vlastní limitu zleva a nevlastní limity zprava a zleva.)

Příklad 3.1, b) : Pomocí definice ukažte, že $\lim_{x\to 0^+} \big(\frac{1}{x} + \sin x\big) = +\infty$.

Řešení: Máme $f(x) = \frac{1}{x} + \sin x$, $(0,\infty) \subset D(f)$, tedy funkce je definována na nějakém (zde dokonce na každém) pravém prstencovém okolí bodu 0 a limitu lze počítat. Mějme dáno $K \in \mathbb{R}$ (které určuje okolí $U_K(+\infty)$ bodu $a = +\infty$) a hledejme k němu $\delta_K > 0$ (určující pravé prstencové okolí $P^+_{\delta_K}(0)$ bodu $x_0 = 0$) takové, že

$$f(x) \in U_K(+\infty), \quad \text{kdykoliv} \quad x \in P^+_{\delta_K}(0)\,,$$

neboli

$$f(x) > K, \quad \text{kdykoliv} \quad 0 < x < \delta_K. \tag{2}$$

Zřejmě $f(x) \ge \frac{1}{x} - 1 > -1$ pro všechna $x > 0$. Tedy pro $K \le -1$ lze volit $\delta_K > 0$ libovolně. Je-li δ kladné číslo, $K > -1$, pak pro všechna x taková, že $0 < x < \delta$, máme $f(x) \ge \frac{1}{x} - 1 > \frac{1}{\delta} - 1$. Zvolíme-li tedy např. δ_K tak, že $\frac{1}{\delta_K} - 1 = K$, tj. $\delta_K = \frac{1}{K+1}$, bude (2) platit. Tím jsme dokázali, že $\lim_{x\to 0^+} \big(\frac{1}{x} + \sin x\big) = +\infty$.

Věta 3.1:

Funkce má v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$ limitu rovnou a právě tehdy, když má v x_0 limitu zleva i zprava a obě jsou rovny a.

Důkaz: Má-li funkce f v bodě x_0 limitu a, pak pro každé okolí $U(a)$ existuje $\delta > 0$ tak, že pro všechna $x \in P_\delta(x_0)$ platí $f(x) \in U(a)$. Tedy speciálně také pro všechna $x \in P^-_\delta(x_0)$ i pro všechna $x \in P^+_\delta(x_0)$ platí $f(x) \in U(a)$. To znamená, že a je také jednostrannými limitami funkce f v bodě x_0. Je-li naopak $a = \lim_{x\to x_0^-} f(x) = \lim_{x\to x_0^+} f(x)$, pak pro dané okolí $U(a)$ bodu a existují $\delta_1, \delta_2 > 0$ taková, že pro všechna $x \in P^-_{\delta_1}(x_0)$ i pro všechna $x \in P^+_{\delta_2}(x_0)$ je $f(x) \in U(a)$. To ale znamená, že $f(x) \in U(a)$ také všechna $x \in P_\delta(x_0)$, kde $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Tedy $\lim_{x\to x_0} f(x) = a$. $\square$

Podobně jako v Příkladu 3.1,b) můžeme ukázat, že $\lim_{x\to 0^-} \big(\frac{1}{x} + \sin x\big) = -\infty$. Tedy podle Věty 3.1 $\lim_{x\to 0} \big(\frac{1}{x} + \sin x\big)$ neexistuje.

Poznámka – limita posloupnosti: Protože definičním oborem posloupnosti, díváme-li se na ni jako na funkci, je množina přirozených čísel, která neobsahuje prstencové okolí žádného bodu z $\overline{\mathbb{R}}$, nemá takto chápaná posloupnost v žádném bodě limitu ve výše uvedeném smyslu. Definici limity funkce lze ovšem zobecnit a požadovat po bodu x_0 pouze to, aby byl hromadným bodem definičního oboru $D(f)$ funkce, tj. aby v každé jeho prstencovém okolí $P(x_0)$ ležel nějaký bod z $D(f)$ (viz [P1.5]). Podmínka „$f(x) \in U(a)$ pro všechna $x \in P(x_0)$" se pak nahradí podmínkou „$f(x) \in U(a)$ pro všechna $x \in P(x_0) \cap D(f)$". Protože jeden hromadný bod množina přirozených čísel má, je to $+\infty$, můžeme se při tomto obecnějším pojetí limity funkce zabývat limitou posloupnosti v $+\infty$. Budeme-li tedy v dalším mluvit o limitě posloupnosti, budeme ji chápat v tomto smyslu. (V případě ostatních funkcí budeme i nadále pro existenci limity požadovat, aby funkce byla definována alespoň na nějakém $P(x_0)$.) Pro limitu posloupnosti $(a_n)_{n=1}^\infty$ se používá označení $\lim_{n\to\infty} a_n$. Poznamenejme ještě, že má-li něco platit pro pro všechna čísla z $P_K(+\infty) \cap \mathbb{N}$, má to vlastně platit pro všechna přirozená čísla $n \ge n_0$, kde n_0 je vhodné přirozené číslo (závislé na K).

Věta 3.14 (limita složené funkce):

Jestliže $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a$, $\lim\limits_{y\to a} g(y) = b$ a platí alespoň jedna z následujících podmínek:

a) $f(x) \ne a$ na nějakém $P(x_0)$,

b) g je spojitá v a,

pak $\lim\limits_{x\to x_0} \big(g\circ f\big)(x) = b$.

Důkaz: Mějme dáno okolí $U(b)$ bodu b a hledejme k němu prstencové okolí bodu x_0, na kterém platí $(g\circ f)(x) \in U(b)$. Z definice limity funkce g existuje prstencové okolí $P(a)$ bodu a takové, že pro každé $y \in P(a)$ je $g(y) \in U(b)$. Označme $U(a)$ okolí bodu a, které vznikne přidáním bodu a k jeho prstencovému okolí $P(a)$. Z definice limity funkce f nyní existuje k $U(a)$ prstencové okolí $\widetilde{P}(x_0)$, na kterém platí $f(x) \in U(a)$. Pokud je g spojitá v a, pak je $g(y) \in U(b)$ na celém $U(a)$, takže $g(f(x)) \in U(b)$ pro každé $x \in \widetilde{P}(x_0)$. A pokud $f(x) \ne a$ na nějakém $P(x_0)$, pak pro $x \in \widetilde{P}(x_0) \cap P(x_0)$ je $f(x) \in P(a)$, a tedy také $g(f(x)) \in U(b)$. $\square$

Poznámka: Pokud je vnitřní funkce f **prostá**, pak je podmínka a) ve větě o limitě složené funkce vždy splněna. Funkce f totiž nabývá hodnoty a nejvýše v jednom bodě, a ten nemůže ležet ve všech $P(x_0)$.

Poznámka: Pokud by bylo jako ve větě o limitě složené funkce $\lim_{x\to x_0} f(x) = a$ a $\lim_{y\to a} g(y) = b$, ale nebyla by splněna ani jedna z podmínek a) a b) věty, nic by nám nezaručilo, že složená funkce $g\circ f$ bude definovaná alespoň na nějakém prstencovém okolí bodu x_0. Vezměme např. funkce $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ a $g(y) = \frac{1}{y^2}$. Platí sice $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ a $\lim\limits_{y\to 0} g(y)$ existuje $(= +\infty)$, tyto funkce ale nesplňují ani jednu z podmínek a), b). Funkce $g\circ f$ není definována na žádném prstencovém okolí bodu $+\infty$, takže $\lim_{x\to+\infty} (g\circ f)(x)$ neexistuje.

Důsledek 3.15 (spojitost složené funkce):

Je-li funkce f spojitá v bodě x_0 a funkce g spojitá v bodě $f(x_0)$, pak je funkce $g\circ f$ spojitá v bodě x_0.

Příklad 3.4: Víte-li, že $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$, ukažte, že $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln x}{x-1} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(x+1)}{x} = 1$.

Řešení: Podle poznámky za větou o aritmetice limit 3.7 máme

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{e^x - 1} = 1,$$

což je totéž jako

$$\lim_{y\to 0} \frac{y}{e^y - 1} = 1.$$

Položíme-li ve Větě 3.14 $f(x) = \ln x = y$ $(y\to 0$ pro $x \to 1)$ a $g(y) = \dfrac{y}{e^y - 1}$ $(e^y = e^{\ln x} = x)$, dostáváme okamžitě

$$\lim_{x\to 1} g(f(x)) = \lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1.$$

(Ve Větě 3.14 je splněna podmínka **a)**, protože vnitřní funkce f je **prostá**.)
Použijeme-li podruhé větu o limitě složené funkce, tentokrát na funkce $f(x) = x+1 = y$ $(y \to 1$ pro $x \to 0,\ y-1 = x)$ a $g(y) = \dfrac{\ln y}{y-1}$, dostaneme

$$\lim_{x\to 0} g(f(x)) = \lim_{x\to 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1.$$

(Jako u předchozí limity můžeme Větu 3.14 použít, protože je vnitřní funkce prostá.)

<u>Funkce typu $h(x) = \big(f(x)\big)^{g(x)}$</u>

<u>Definiční obor</u>: Nebude-li g konstantní, budeme pro jednoduchost vždy brát

$$D(h) = D(g) \cap \{x \in D(f)\,|\, f(x) > 0\}.$$

(To proto, abychom mohli bez problémů používat pravidla pro počítání s mocninami – např. $0 = 0^1 = 0^{(-1)\cdot(-1)} \ne (0^{-1})^{-1}$ nebo $2 = 16^{1/4} = ((-4)^2)^{1/4} \ne (-4)^{1/2}$, protože výrazy vpravo nejsou definovány.)

<u>Limita</u>: Pro $a > 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$ je $a^\alpha = e^{\ln a^\alpha} = e^{\alpha \ln a} = \exp(\alpha \ln a)$, tedy

$$\lim_{x\to x_0} \big(f(x)\big)^{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \exp\big(g(x)\cdot \ln\big(f(x)\big)\big).$$

Důkaz: a) Stačí si pouze uvědomit, že $\big||f(x)|-0\big| = \big||f(x)|\big| = |f(x)| = |f(x)-0|$.

b) V tomto případě využijeme toho, že na základě věty o zachování znaménka, pro x dostatečně blízká x_0 mají $f(x)$ a a stejná znaménka, takže $\big||f(x)|-|a|\big| = \big|f(x)-a\big|$. (V případě, kdy $\lim_{x\to x_0} |f(x)| = |a|$ ovšem o znaménkách $f(x)$ a a nic nevíme, takže tvrzení obrátit nemůžeme.) □

Věta 3.12:

a) Jestliže $f \le g$ na nějakém $P(x_0)$ a $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = b$, pak $a \le b$.

(tzv. **limitní přechod v nerovnosti**)

b) Jestliže $f \le g$ na nějakém $P(x_0)$ a $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty$, pak $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = +\infty$.

Jestliže $f \le g$ na nějakém $P(x_0)$ a $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = -\infty$, pak $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = -\infty$.

c) Jestliže $f \le g \le h$ na nějakém $P(x_0)$ a $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} h(x) = a$, pak $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = a$.

(tzv. **věta o dvou policajtech; o sevření**)

d) Jestliže $|f| \le |g|$ na nějakém $P(x_0)$ a $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$, pak $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$.

Důkaz: a) Důkaz provedeme jen pro vlastní limity, jinak by se postupovalo podobně. Použijeme důkaz sporem. Předpokládejme, že tvrzení neplatí, tedy že $b < a$. Pak z definice limit funkcí f a g v x_0, existují pro $\varepsilon = \frac{a-b}{2}$ prstencová okolí $P_f(x_0), P_g(x_0) \subset P(x_0)$, taková, že na $P_f(x_0)$ platí $|f(x)-a| < \frac{a-b}{2}$ a na $P_g(x_0)$ je $|g(x)-b| < \frac{a-b}{2}$. Tedy na $P_f(x_0) \cap P_g(x_0)$ máme $g(x) < b + \frac{a-b}{2} = \frac{a+b}{2} = a - \frac{a-b}{2} < f(x)$. A to je ve sporu s předpokladem $f \le g$ na $P(x_0)$.

b) Ukážeme například, že platí druhé tvrzení, první by se dokazovalo analogicky. Nechť tedy $f \le g$ na nějakém $P(x_0)$ a $\lim_{x\to x_0} g(x) = -\infty$. K danému $L \in \mathbb{R}$ pak existuje prstencové okolí $\widetilde{P}(x_0) \subset P(x_0)$ bodu x_0, na kterém platí $g(x) < L$. Protože je ale na tomto prstencovém okolí $f \le g$, je na něm také $f(x) < L$.

c) Pokud je $a \in \{\pm\infty\}$, jde o důsledek předchozího tvrzení. Nechť je tedy $a \in \mathbb{R}$. Z definice limit funkcí f a h existují k danému $\varepsilon > 0$ prstencová okolí $P_f(x_0), P_h(x_0) \subset P(x_0)$, taková, že na $P_f(x_0)$ platí $|f(x)-a| < \varepsilon$ a na $P_h(x_0)$ je $|h(x)-a| < \varepsilon$. Využijeme-li ještě toho, že na $P(x_0)$ je $f \le g \le h$, zjistíme, že na $P_f(x_0) \cap P_h(x_0) \big(\subset P(x_0)\big)$ platí $a - \varepsilon < f(x) \le g(x) \le h(x) < a + \varepsilon$, tedy $|g(x)-a| < \varepsilon$.

d) Podle Věty 3.11, a) je $\lim_{x\to x_0} |g(x)| = 0$, odkud podle věty o aritmetice limit také $\lim_{x\to x_0} (-|g(x)|) = 0$. Protože podle předpokladu na $P(x_0)$ platí $-|g(x)| \le |f(x)| \le |g(x)|$, dostáváme z věty o dvou policajtech, že $\lim_{x\to x_0} |f(x)| = 0$. Nyní již stačí jen znovu použít tvrzení Věty 3.11, a), tentokrát na funkci f. □

Důsledek 3.13:

a) Jestliže $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ a g je <u>zdola omezená</u> na nějakém $P(x_0)$, pak $\lim\limits_{x\to x_0} (f(x)+g(x)) = +\infty$.

Jestliže $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = -\infty$ a g je <u>shora omezená</u> na nějakém $P(x_0)$, pak $\lim\limits_{x\to x_0} (f(x)+g(x)) = -\infty$.

b) Jestliže $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$ a g je <u>omezená</u> na nějakém $P(x_0)$, pak $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\cdot g(x) = 0$.

c) Jestliže $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \pm\infty$ a g je <u>omezená</u> na nějakém $P(x_0)$, pak $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{g(x)}{f(x)} = 0$.

Důkaz: a) Ukážeme například, že platí první tvrzení, druhé by se dokazovalo analogicky. Podle předpokladu je funkce g zdola omezená na $P(x_0)$, tedy existuje $L \in \mathbb{R}$ takové, že pro každé $x \in P(x_0)$ platí $g(x) \ge L$, a tím také $f(x)+g(x) \ge f(x)+L$. Protože $\lim_{x\to x_0} (f(x)+L) = +\infty + L = +\infty$, dostáváme z Věty 3.12, b), že také $\lim_{x\to x_0} (f(x)+g(x)) = +\infty$.

b) Z předpokladů existuje $K > 0$ takové, že na $P(x_0)$ je $|g(x)| < K$. Mějme nyní dáno $\varepsilon > 0$. Z definice limity funkce f v bodě x_0 existuje k číslu $\frac{\varepsilon}{K} > 0$ prstencové okolí $\widetilde{P}(x_0) \subset P(x_0)$ bodu x_0, na kterém je $|f(x)| = |f(x)-0| < \frac{\varepsilon}{K}$. A na tomto prstencovém okolí máme $|f(x)\cdot g(x)| = |f(x)|\cdot|g(x)| < \frac{\varepsilon}{K}\cdot K = \varepsilon$.

c) Podle Věty 3.10, a) a části b) této věty máme $\lim_{x\to x_0} \frac{g(x)}{f(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{1}{f(x)}\cdot g(x) = \langle\!\langle 0\cdot\text{omez.}\rangle\!\rangle = 0$. □

Příklad 3.3: Ukažte, že $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$ a $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sin x}{x} = 0$.

Věta 3.2 (Heineova):

Funkce f má v bodě $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ limitu rovnou a právě tehdy, když pro každou posloupnost $(y_n)_{n=1}^{\infty} \subset D(f) \setminus \{x_0\}$ takovou, že $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = x_0$, platí

$$\lim_{n\to\infty} f(y_n) = a.$$

(Podobná tvrzení platí i pro limity zleva a zprava. Pro limitu zleva uvažujeme posloupnosti $(y_n)_{n=1}^{\infty} \subset D(f) \cap (-\infty, x_0)$, pro limitu zprava posloupnosti $(y_n)_{n=1}^{\infty} \subset D(f) \cap (x_0, \infty)$.)

Příklad 3.2: Ukažte, že funkce $f(x) = \cos\dfrac{1}{x}$, $x \ne 0$, nemá v bodě $x_0 = 0$ limitu zprava ani zleva.

Řešení: Pro posloupnosti $y_n = \frac{1}{2n\pi}$ a $z_n = \frac{1}{(2n+1)\pi}$ platí $(y_n)_{n=1}^{\infty}$, $(z_n)_{n=1}^{\infty} \subset D(f) \cap (0,\infty)$, $y_n \to 0$, $z_n \to 0$ pro $n \to \infty$. Přitom pro každé $n \in \mathbb{N}$ je $f(y_n) = \cos(2n\pi) = 1$, $f(z_n) = \cos((2n+1)\pi) = -1$, takže $\lim_{n\to\infty} f(y_n) = 1$, zatímco $\lim_{n\to\infty} f(z_n) = -1$. Protože $\lim_{n\to\infty} f(y_n) \ne \lim_{n\to\infty} f(z_n)$, podle Heineovy věty 3.2 $\lim_{x\to 0^+} \cos\frac{1}{x}$ neexistuje. Pro limitu zleva stačí u posloupností $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ a $(z_n)_{n=1}^{\infty}$ jen změnit znaménko, tj. uvažovat posloupnosti $y_n = -\frac{1}{2n\pi}$ a $z_n = -\frac{1}{(2n+1)\pi}$. Další postup je stejný jako u limity zprava.

Podobně se dá ukázat, že Dirichletova funkce ($= 1$ pro $x \in \mathbb{Q}$; $= 0$ pro $x \notin \mathbb{Q}$ – viz konec odstavce 2.1) nemá dokonce ani v jednom bodě limitu zprava nebo zleva.

Definice:

Řekneme, že funkce f je **spojitá v bodě** $x_0 \in D(f)$, jestliže pro každé okolí $U(f(x_0))$ hodnoty funkce f v bodě x_0 existuje okolí $U(x_0)$ bodu x_0 takové, že pro všechna $x \in U(x_0) \cap D(f)$ platí

$$f(x) \in U(f(x_0)).$$

Analogicky definujeme také **spojitost zleva** a **spojitost zprava** funkce f **v bodě** $x_0 \in D(f)$. Místo existence okolí $U(x_0)$ jen požadujeme existenci jednostranného okolí $U^-(x_0)$ resp. $U^+(x_0)$ s uvedenou vlastností.

Pozorování: Jestliže je funkce f definovaná (alespoň) na nějakém okolí bodu x_0, pak je v bodě x_0 spojitá právě tehdy, když má v bodě x_0 limitu rovnou $f(x_0)$. Toto analogicky platí i pro spojitost zleva a zprava.

<u>**Spojitost funkce pomocí kvantifikátorů**</u>:

$$\forall U(f(x_0))\ \ \exists U(x_0)\ \ \forall x \in \mathbb{R}:\ \big(x \in U(x_0) \cap D(f) \ \Rightarrow\ f(x) \in U(f(x_0))\big)$$

neboli

$$\forall \varepsilon > 0\ \ \exists \delta > 0\ \ \forall x \in \mathbb{R}:\ \big((x \in D(f)\ \wedge\ |x - x_0| < \delta) \ \Rightarrow\ |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon\big)$$

(Podobně pro spojitost zprava a zleva.)

Definice:

Řekneme, že funkce f je **spojitá na intervalu** I, jestlliže je spojitá v každém jeho vnitřním bodě a spojitá z příslušné strany v těch krajních bodech intervalu I, které k němu patří. Řekneme, že funkce f je **spojitá**, jestliže je spojitá v každém bodě svého definičního oboru.

Platí: Všechny elementární funkce uvedené ve 2. kapitole jsou spojité.

3.2 Věty o limitách (lokální vlastnosti)

(nebude-li dále řečeno jinak, je $x_0, a, b \in \overline{\mathbb{R}}$)

Poznámka: Dále uvedené věty platí analogicky i pro jednostranné limity a limity posloupností (pokud v dané situaci má smysl jednostranné limity nebo limitu posloupnosti zkoumat). Pokud se ve větě mluví o existenci prstencového okolí bodu x_0 (v našem případě $x_0 = \infty$), na kterém má funkce nějakou vlastnost, v případě posloupnosti tomu odpovídá existence indexu $n_1 \in \mathbb{N}$ takového, že odpovídající vlastnost mají všechny členy posloupnosti s indexem n_1 a větším.

Věta 3.3:

Limita funkce je určena jednoznačně.

Tedy: Funkce f v bodě x_0 buď limitu nemá nebo ji tam má právě jednu.

Důkaz: Tvrzení dokážeme sporem. Předpokládejme, že existují čísla $a,\ b \in \overline{\mathbb{R}}$, $a < b$, která jsou obě limitou funkce f v bodě x_0. Uvažujme jejich okolí $U(a)$ a $U(b)$, pro která platí $U(a) \cap U(b) = \emptyset$. Z definice limity k nim existují prstencová okolí $P(x_0)$ a $\widetilde{P}(x_0)$ bodu x_0 taková, že pro všechna $x \in P(x_0)$ je $f(x) \in U(a)$ a pro všechna $x \in \widetilde{P}(x_0)$ je $f(x) \in U(b)$. Pak ovšem pro všechna $x \in P(x_0) \cap \widetilde{P}(x_0)$ je $f(x) \in U(a) \cap U(b)$. Tím jsme došli ke sporu s předpokladem $U(a) \cap U(b) = \emptyset$ a tvrzení věty tak platí. $\square$

Věta 3.4 (o zachování znaménka):

Je-li $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a$, kde $a > 0$ $[\, a < 0 \,]$, pak existuje $P(x_0)$ tak, že

$$f(x) > 0 \quad \forall x \in P(x_0) \qquad [\, f(x) < 0 \quad \forall x \in P(x_0) \,].$$

Důkaz: Je-li $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, pak z definice limity existuje pro $\varepsilon = |a|$ (>0) prstencové okolí $P(x_0)$ bodu x_0 takové, že pro všechna $x \in P(x_0)$ platí $|f(x) - a| < |a|$, neboli $a - |a| < f(x) < a + |a|$. Je-li $a > 0$, pak pro všechna x z tohoto okolí $P(x_0)$ je $0 = a - a = a - |a| < f(x)$, je-li $a < 0$, pak pro všechna $x \in P(x_0)$ platí $f(x) < a + |a| = a + (-a) = 0$. Pro $a = +\infty$ stačí vzít $P(x_0)$ odpovídající podle definice limity $U(a) = (0, \infty)$, pro $a = -\infty$ pak $U(a) = (-\infty, 0)$. $\square$

Věta 3.5:

Má-li funkce v bodě x_0 vlastní limitu, pak je na nějakém prstencovém okolí bodu x_0 omezená.

Důkaz: Předpokládejme, že $\lim_{x\to x_0} f(x) = a \in \mathbb{R}$. Pak z definice limity pro $\varepsilon = 1$ existuje prstencové okolí $P(x_0)$ bodu x_0 takové, že pro všechna $x \in P(x_0)$ je $f(x) \in U_1(a)$, tj. $a - 1 < f(x) < a + 1$. $\square$

Věta 3.6:

Je-li funkce f monotonní na inervalu $(\, a, b \,)$, pak existují $\lim\limits_{x\to a+} f(x)$ a $\lim\limits_{x\to b-} f(x)$.

Důkaz zde uvádět nebudeme. Zmiňme ale, že se v něm ukáže, že v případě neklesající funkce je $\lim_{x\to a+} f(x) = \inf\{f(x) \,|\, x \in (a,b)\}$ a $\lim_{x\to b-} f(x) = \sup\{f(x) \,|\, x \in (a,b)\}$, v případě nerostoucí funkce je to naopak. $\square$

Poznámka: Na základě Věty 3.6 a Heineovy věty 3.2 platí: Jestliže je funkce f monotonní na intervalu (a,b) a pro nějakou posloupnost $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subset (a,b)$ s $\lim_{n\to\infty} x_n = b$ platí $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = B$, pak $\lim_{x\to b-} f(x) = B$. Analogicky pro $\lim_{x\to a+} f(x)$. Pro $b = +\infty$ speciálně platí: Pokud $\lim_{n\to\infty} f(n) = B$, pak $\lim_{x\to+\infty} f(x) = B$.

Věta 3.7 (o aritmetice limit):

Je-li $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = b$, pak

- $\lim\limits_{x\to x_0} (f(x) \pm g(x)) = a \pm b$,
- $\lim\limits_{x\to x_0} (f(x) \cdot g(x)) = a \cdot b$,
- $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{a}{b}$,

kdykoliv je výraz na pravé straně definován.

Důkaz: Dokážeme zde jen část týkající se limity součtu a naznačíme, jak by se postupovalo u limity součinu. Budeme přitom předpokládat, že $x_0, a, b \in \mathbb{R}$.
Limita součtu: Mějme dáno $\varepsilon > 0$. Z definice limity existují k $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{2} > 0$ čísla $\delta_f, \delta_g > 0$ taková, že pro každé x splňující $0 < |x - x_0| < \delta_f$ je $|f(x) - a| < \varepsilon_1$ a pro každé x splňující $0 < |x - x_0| < \delta_g$ je $|g(x) - b| < \varepsilon_1$. Označíme-li nyní $\delta = \min\{\delta_f, \delta_g\}$, pak pro každé x, které splňuje $0 < |x - x_0| < \delta$, dostáváme z trojúhelníkové nerovnosti

$$|(f(x) + g(x)) - (a + b)| = |(f(x) - a) + (g(x) - b)| \le |f(x) - a| + |g(x) - b| < \varepsilon_1 + \varepsilon_1 = \varepsilon.$$

Limita součinu: Protože má funkce g v bodě x_0 konečnou limitu, existují podle Věty 3.5 čísla $\delta_0 > 0$ a $M > 0$ taková, že na $P_{\delta_0}(x_0)$ je $|g| < M$. Mějme nyní dáno $\varepsilon > 0$ a opět položme $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{2}$. Předpokládejme nejdříve, že $a \neq 0$. Použijme-li přepis

$$|f(x) \cdot g(x) - a \cdot b| = |f(x) \cdot g(x) - a \cdot g(x) + a \cdot g(x) - a \cdot b| = |(f(x) - a) g(x) + a\,(g(x) - b)| \le |f(x) - a|\,|g(x)| + |a|\,|g(x) - b|,$$

vidíme, že pokud tentokrát budou δ_f a δ_g taková kladná čísla, že $|f(x) - a| < \frac{\varepsilon_1}{M}$ kdykoliv $0 < |x - x_0| < \delta_f$ a $|g(x) - b| < \frac{\varepsilon_1}{|a|}$ kdykoliv $0 < |x - x_0| < \delta_g$, bude pro všechna $x \in P_\delta(x_0)$, kde $\delta = \min\{\delta_0, \delta_f, \delta_g\}$, platit

$$|f(x) \cdot g(x) - a \cdot b| < \frac{\varepsilon_1}{M} \cdot M + \frac{\varepsilon_1}{|a|} \cdot |a| = \varepsilon_1 + \varepsilon_1 = \varepsilon.$$

Bude-li $a = 0$, pak δ_g nepotřebujeme a stačí položit $\delta = \min\{\delta_0, \delta_f\}$. $\square$

Poznámka: Zřejmě platí:

- $\lim_{x\to x_0} f(x) = a \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{x\to x_0} (f(x) - a) = 0$ (použijeme větu o limitě rozdílu na funkce $f(x)$ a $g(x) = a$)
- $\lim_{x\to x_0} \frac{u(x)}{v(x)} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{x\to x_0} \frac{v(x)}{u(x)} = 1$ (použijeme větu o limitě podílu na funkce $f(x) = 1$ a $g(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$)

Důsledek 3.8:

Nechť $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ neexistuje. Pak platí:

a) Jestliže existuje vlastní $\lim_{x\to x_0} g(x)$, pak neexistují $\lim_{x\to x_0} (f(x) \pm g(x))$.
b) Jestliže existuje vlastní $\lim_{x\to x_0} g(x) \neq 0$, pak neexistují $\lim_{x\to x_0} (f(x) \cdot g(x))$, $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$.

Důkaz: Dokážeme jen část a) pro součet, zbytek by se dokazoval podobně. Označme $\lim_{x\to x_0} g(x) = a$. Dále budeme postupovat sporem. Předpokládejme tedy, že existuje $\lim_{x\to x_0} (f(x) + g(x)) = b$. Protože je limita funkce g vlastní, tj. $a \in \mathbb{R}$, je definován rozdíl $b - a$. Podle věty o limitě rozdílu tak platí

$$b - a = \lim_{x\to x_0} (f(x) + g(x)) - \lim_{x\to x_0} g(x) = \lim_{x\to x_0} \big((f(x) + g(x)) - g(x)\big) = \lim_{x\to x_0} f(x),$$

což je ovšem ve sporu s předpokladem důsledku, že $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ neexistuje. $\square$

Poznámka: V předchozím důsledku je podstatný předpoklad existence <u>vlastní</u> limity funkce g. Uvažujme například funkce $f(x) = \sin^2 x$ a $g(x) = x$. Limita $\lim_{x\to\infty} f(x)$ neexistuje. Funkce g v nekonečnu limitu má, ale <u>nevlastní</u> – $\lim_{x\to\infty} g(x) = \infty$. I když funkce f limitu nemá, limita součtu obou funkcí v nekonečnu existuje. Pro každé $K \in \mathbb{R}$ totiž platí $(f(x) + g(x)) = \sin^2 x + x > K$, kdykoliv $x > K$. Tedy $\lim_{x\to\infty} (f(x) + g(x)) = \infty$.

Poznámka: Pokud existuje vlastní nenulová limita b funkce g v bodě x_0 (tj. $\lim_{x\to x_0} g(x) = b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$), pak můžeme psát rovnost

$$\lim_{x\to x_0} f(x) g(x) = b \lim_{x\to x_0} f(x),$$

chápeme-li ji tak, že limita vlevo existuje právě tehdy, když existuje limita vpravo, a pokud limity existují, jsou si rovny. Existuje-li totiž $\lim_{x\to x_0} f(x) = a$, pak je součin $b \cdot a$ definován (protože $b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$) a rovnost platí podle věty o aritmetice limit. Kdyby $\lim_{x\to x_0} f(x)$ neexistovala, pak by podle Důsledku 3.8 neexistovala ani limita vlevo.

Důsledek 3.9:

Jsou-li funkce f, g spojité v bodě x_0, jsou v x_0 spojité i funkce $f + g$, $f - g$, $f \cdot g$. Je-li navíc $g(x_0) \neq 0$, pak je v x_0 spojitá také funkce $\dfrac{f}{g}$.

Věta 3.10:

a) Jestliže $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \pm\infty$, pak $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{1}{f(x)} = 0$.

b) Jestliže $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$ a na nějakém $P(x_0)$ je $f(x) > 0$, pak $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{1}{f(x)} = +\infty$.

Jestliže $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$ a na nějakém $P(x_0)$ je $f(x) < 0$, pak $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{1}{f(x)} = -\infty$.

Důkaz: a) Mohli bychom využít přímo toho, že jsme pro $a \in \mathbb{R}$ definovali $\frac{a}{\pm\infty} = 0$. Místo toho ale k důkazu použijeme definici limity, a tím ukážeme, že definice $\frac{a}{\pm\infty}$ byla rozumná. Předpokládejme, že $\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty$. Mějme dáno $\varepsilon > 0$. Hledáme prstencové okolí bodu x_0, na kterém je $|\frac{1}{f(x)}| = |\frac{1}{f(x)} - 0| < \varepsilon$. Z definice limity funkce f v bodě x_0 existuje prstencové okolí $P(x_0)$ bodu x_0 takové, že $f(x) < -\frac{1}{\varepsilon}\,\big(<0\big)$, kdykoliv $x \in P(x_0)$. To ovšem znamená, že pro všechna $x \in P(x_0)$ platí $0 < \frac{1}{\varepsilon} < -f(x) = |f(x)|$, a tím také $|\frac{1}{f(x)}| < \varepsilon$, což jsme potřebovali. V případě $\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ by se postupovalo podobně.

b) Dokážeme první tvrzení, druhé by se dokázalo analogicky. Nechť tedy $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0$ a na nějakém $P(x_0)$ je $f(x) > 0$. Mějme dáno $K > 0$. Z definice limity funkce f v bodě x_0 existuje prstencové okolí $\widetilde{P}(x_0) \subset P(x_0)$ bodu x_0 takové, že kdykoliv $x \in \widetilde{P}(x_0)$, pak platí $|f(x) - 0| < \frac{1}{K}$, tedy také $K < \frac{1}{|f(x) - 0|} = \frac{1}{f(x)}$. $\square$

Věta 3.11:

a) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$ právě tehdy, když $\lim\limits_{x\to x_0} |f(x)| = 0$.

b) Jestliže $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a$, pak $\lim\limits_{x\to x_0} |f(x)| = |a|$.