KAPITOLA 5: Spojitost a derivace na intervalu

5.1 Funkce spojité na intervalu

Věta 5.1 (o nulách spojité funkce):
Je-li f spojitá na uzavřeném intervalu $\langle a,b\rangle$ a $f(a)\cdot f(b)<0$, pak existuje $c\in(a,b)$ tak, že

$$f(c)=0.$$

Metoda půlení intervalu (bisekce) – hledání nulových bodů funkce

Předpoklady: f spojitá na $\langle a,b\rangle$, $f(a)\cdot f(b)<0$.

Cíl: Najít $c\in(a,b)$ takové, že $f(c)=0$ (nebo alespoň jeho aproximaci).

Algoritmus pro $f(a)<0,\ f(b)>0$ (jinak analogicky): Konstruujeme posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ následujícím způsobem, dokud není $f(c_n)=0$ nebo $b_n-a_n<\varepsilon$, kde $\varepsilon>0$ je požadovaná přesnost:

1) $a_0=a,\ b_0=b$
2) pro $n=0,1,\dots$ pokládáme:

$$c_n=\frac{a_n+b_n}{2}$$

$$a_{n+1}=\begin{cases} a_n & \text{pro } f(c_n)>0\\ c_n & \text{pro } f(c_n)<0\end{cases},\qquad b_{n+1}=\begin{cases} c_n & \text{pro } f(c_n)>0\\ b_n & \text{pro } f(c_n)<0\end{cases}$$

Příklad 5.1: Najděte s přesností 10^{-3} hodnotu $\sqrt[3]{10}$.

Řešení: Protože $c=\sqrt[3]{10}$ právě tehdy, když $c^3=10$, budeme hledat nulový bod (spojité) funkce $f(x)=x^3-10$. Víme, že $2^3=8$ (tj. $f(2)<0$) a $3^3=27$ (tj. $f(3)>0$). Tedy c bude ležet v intervalu $(2,3)$. Metoda půlení intervalu nám dává postupně následující hodnoty (podtržena je vždy ta krajní mez intervalu, která se změnila):

$\mathbf{n}$	$\mathbf{f(c_{n-1})}$	$\mathbf{a_n}$	$\mathbf{b_n}$	$\mathbf{b_n-a_n}$	$\mathbf{c_n=\frac{a_n+b_n}{2}}$
0		2	3	1	2.5
1	+5.625	2	<u>2.5</u>	0.5	2.25
2	+1.390625	2	<u>2.25</u>	0.25	2.125
3	−0.404296875	<u>2.125</u>	2.25	0.125	2.1875
4	+0.467529297	2.125	<u>2.1875</u>	0.0625	2.15625
5	+0.025299072	2.125	<u>2.15625</u>	0.03125	2.140625
6	−0.191066742	<u>2.140625</u>	2.15625	0.015625	2.1484375
7	−0.083277225	<u>2.1484375</u>	2.15625	0.0078125	2.15234375
8	−0.029087603	<u>2.15234375</u>	2.15625	0.00390625	2.154296875
9	−0.001918919	<u>2.154296875</u>	2.15625	0.001953125	2.155273438
10	+0.01168391	2.154296875	<u>2.155273438</u>	0.000976563	2.154785156

Zde proces hledání nulového bodu funkce f končí, protože máme $(b_{10}-a_{10})<10^{-3}$. Hodnotu $\sqrt[3]{10}$ tak bude s požadovanou přesností aproximovat libovolné číslo z intervalu (a_{10},b_{10}). Můžeme tedy psát např. $\sqrt[3]{10}\doteq 2.155$.

Důkaz Věty 5.1: Důkaz provedeme pro případ $f(a)<0,\ f(b)>0$, opačný případ by se dokázal analogicky. Jako v metodě bisekce konstruujeme postupně posloupnosti (a_n), (b_n), (c_n), nekontrolujeme ale při tom velikost rozdílu b_n-a_n. Mohou nastat dva případy:
a) <u>Pro nějaké $n_0\in\mathbb{N}$ platí $f(c_{n_0})=0$</u>. V tom případě jsme našli hledaný nulový bod, položíme $c:=c_{n_0}$ a s konstrukcí posloupností končíme.

b) Pro všechna $n \in \mathbb{N}$ je $f(c_n) \neq 0$. V tomto případě máme zkonstruované neklesající posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ a nerostoucí posloupnost $(b_n)_{n=1}^{\infty}$. Protože monotonní posloupnosti mají limitu, existují $A, B \in \mathbb{R}$ tak, že $a_n \to A$, $b_n \to B$. Přitom $B - A = \lim_{n\to\infty} (b_n - a_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{2^n} = 0$. Tedy $A = B$. Ze spojitosti funkce f existuje $\lim_{x\to A} f(x)$ a je rovna $f(A)$. Z Heineovy věty 3.3 dostáváme

$$f(A) = \begin{cases} \lim_{n\to\infty} \underbrace{f(b_n)}_{>0} \geq 0 \\ \lim_{n\to\infty} \underbrace{f(a_n)}_{<0} \leq 0 \end{cases}$$

To znamená, že $f(A) = 0$, takže můžeme položit $c := A$. $\square$

Důsledek 5.2 (o mezihodnotě):

Jestliže je funkce f spojitá na intervalu I, $a, b \in I$, $a < b$ a platí $f(a) \neq f(b)$, pak pro každé z ležící mezi $f(a)$ a $f(b)$, $\big($tj. $z \in (f(a), f(b))$ pro $f(a) < f(b)$ a $z \in (f(b), f(a))$ pro $f(a) > f(b)\big)$ existuje $c \in (a, b)$ tak, že

$$f(c) = z.$$

(Tj. f má Darbouxovu vlastnost.)

Důkaz: Použijeme Větu 5.1 na funkci $g(x) = f(x) - z$. $\square$

Důsledek 5.3:

Je-li f spojitá na intervalu I, pak nabývá všech hodnot mezi $m = \inf\{f(x) | x \in I\}$ a $M = \sup\{f(x) | x \in I\}$.

Důkaz: Je-li $z \in (m, M)$, pak z definice infima a suprema není dolní ani horní mezí množiny $f(I)$. Tedy existují $\alpha, \beta \in I$ tak, že $f(\alpha) < z < f(\beta)$. Nyní už stačí použít na interval s krajními body α a β větu o mezihodnotě. $\square$

Důsledek 5.4:

Je-li f spojitá na intervalu I, pak $f(I) = \{f(x) | x \in I\}$ je buď jednobodová množina nebo interval.

Důkaz: Tvrzení plyne okamžitě z Důsledku 5.3. $\square$

Věta 5.5 (Weierstrassova):

Je-li f spojitá na uzavřeném intervalu $\langle a, b\rangle$, pak

a) f je omezená na $\langle a, b\rangle$,

b) existují $\alpha, \beta \in \langle a, b\rangle$ tak, že $f(\alpha) \leq f(x) \leq f(\beta)$ pro každé $x \in \langle a, b\rangle$. (Tj. f nabývá na $\langle a, b\rangle$ svého minima a maxima.)

Důkaz: Tvrzení a) je okamžitým důsledkem tvrzení b). Z tvrzení b) dokážeme jen část týkající se maxima, část týkající se minima by se dokazovala analogicky. Označme $M = \sup\{f(x) \,|\, x \in \langle a, b\rangle\}$ a $m = \inf\{f(x) \,|\, x \in \langle a, b\rangle\}$. Pro $n \geq 2$ je $M - \frac{M-m}{n} \in (m, M)$, tedy podle Důsledku 5.3 existuje pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, číslo $\beta_n \in \langle a, b\rangle$ takové, že $f(\beta_n) = M - \frac{M-m}{n}$. Protože pro všechna n je $\beta_n \in \langle a, b\rangle$, je posloupnost $(\beta_n)_{n=1}^{\infty}$ omezená. Dá se dokázat, že z každé omezené posloupnosti lze vybrat konvergentní podposloupnost. Existují tedy rostoucí posloupnost $(k_n)_{n=1}^{\infty}$ a číslo $\beta \in \langle a, b\rangle$ takové, že β je limitou posloupnosti $(\alpha_n)_{n=1}^{\infty}$ se členy $\alpha_n = \beta_{k_n}$. Ze spojitosti funkce f dostáváme $f(\beta) \xleftarrow{n\to\infty} f(\beta_{k_n}) = M - \frac{M-m}{k_n} \xrightarrow{n\to\infty} M$. Z věty o jednoznačnosti limity je tak $f(\beta) = M$, a tedy funkce f své největší hodnoty na intervalu $\langle a, b\rangle$ nabývá, a to v bodě β.

Věta 5.6:

Je-li f spojitá na intervalu I, pak f je prostá na I právě tehdy, když je na I ryze monotonní.

Důkaz: Z definice ryzí monotonie je každá ryze monotonní funkce prostá. Stačí tedy ukázat, že pokud je funkce f na intervalu I prostá a spojitá, je na něm také ryze monotonní. To dokážeme nepřímo. Předpokládejme, že f je na intervalu I spojitá, není na I ale ryze monotonní. Ukážeme, že není ani prostá. Protože f není ryze monotonní, existují v I čísla $x_1 < x_2 < x_3$ taková, že a) $f(x_1) \leq f(x_2) \geq f(x_3)$ nebo b) $f(x_1) \geq f(x_2) \leq f(x_3)$. Podívejme se na případ a). Pokud si jsou některé z funkčních hodnot $f(x_1), f(x_2)$ a $f(x_3)$ rovny, pak funkce f samozřejmě ryze monotonní být nemůže. Můžeme tedy předpokládat, že všechny tři uvažované funkční hodnoty jsou různé, tedy $f(x_1) < f(x_2) > f(x_3)$. Je-li v této situaci navíc $f(x_1) < f(x_3)$, pak $f(x_3) \in (f(x_1), f(x_2))$ a z důsledku o mezihodnotě 5.2 existuje $y \in (x_1, x_2)$ takové, že $f(y) = f(x_3)$. Protože $x_3 > x_2$, je $y \neq x_3$, tedy funkce f není prostá. Pokud je naopak $f(x_1) > f(x_3)$, potom

Nyní už můžeme určit polynom T_3:

$$\underline{T_3(x)} = \frac{3}{0!} + \frac{\frac{1}{2}}{1!}(x-2) + \frac{-\frac{1}{4}}{2!}(x-2)^2 + \frac{\frac{1}{4}}{3!}(x-2)^3 = \underline{3 + \frac{1}{2}(x-2) - \frac{1}{8}(x-2)^2 + \frac{1}{24}(x-2)^3} \,.$$

Zbývá nám ještě odhadnout zbytky. Pro vhodné ξ mezi x a $x_0 = 2$ (pro naše $x > 0$ je zřejmě též $\xi > 0$) máme

$$|R_3(x)| = \left|\frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}(x-2)^4\right| = \left|\frac{-\frac{6}{\xi^4}}{4!}(x-2)^4\right| = \frac{1}{4}\,\frac{|x-2|^4}{\xi^4}\,, \qquad |R_5(x)| = \ldots = \left|\frac{-\frac{120}{\xi^6}}{6!}(x-2)^6\right| = \frac{1}{6}\,\frac{|x-2|^6}{\xi^6}\,.$$

Pokud nyní místo ξ napíšeme vždy nejmenší číslo, které leží mezi x a $x_0 = 2$ (tj. 2 pro $x = 4, 3, \frac{21}{10}$; $\frac{1}{2}$ pro $x = \frac{1}{2}$; 1 pro $x = 1$), jmenovatele zmenšíme a celý zlomek tím zvětšíme. Dostaneme tak pro chyby horní odhady:

x	4	3	$\frac{21}{10}$	$\frac{1}{2}$	1
$\lvert R_3(x)\rvert$	$\leq \frac{1}{4}\cdot\frac{2^4}{2^4} = \frac{1}{4}$	$\leq \frac{1}{4}\cdot\frac{1^4}{2^4} = \frac{1}{64}$	$\leq \frac{1}{4}\cdot\frac{\frac{1}{10^4}}{2^4} = \frac{1}{64\cdot 10^4}$	$\leq \frac{1}{4}\cdot\frac{(\frac{3}{2})^4}{(\frac{1}{2})^4} = \frac{81}{4}$	$\leq \frac{1}{4}\cdot\frac{1^4}{1^4} = \frac{1}{4}$
$\lvert R_5(x)\rvert$	$\leq \frac{1}{6}\cdot\frac{2^6}{2^6} = \frac{1}{6}$	$\leq \frac{1}{6}\cdot\frac{1^6}{2^6} = \frac{1}{384}$	$\leq \frac{1}{6}\cdot\frac{\frac{1}{10^6}}{2^6} = \frac{1}{384\cdot 10^6}$	$\leq \frac{1}{6}\cdot\frac{(\frac{3}{2})^6}{(\frac{1}{2})^6} = \frac{243}{2}$	$\leq \frac{1}{6}\cdot\frac{1^6}{1^6} = \frac{1}{6}$

Všimněte si, že pokud se s x blížíme k x_0, odhad chyby se nám zlepšuje. Nezáleží ovšem jen na vzdálenosti x od x_0, ale také na které straně od x_0 se x nachází. Chyby vlevo jsou vyšší než vpravo. (Proč? Načrtněte si graf funkce, je to jen posunutý logaritmus.)

Věta 5.13 (Taylorova; pro $x_0 = 0$: Maclaurinova):

Nechť funkce f má vlastní derivaci řádu $n+1$ $(n \geq 0)$ na nějakém okolí $U(x_0)$ bodu x_0 a nechť $x \in U(x_0)$. Pak existuje mezi body x_0 a x bod ξ (tj. $\xi \in (x, x_0)$ pro $x < x_0$, $\xi \in (x_0, x)$ pro $x > x_0$) takový, že

$$f(x) = T_n(x) + R_n(x),$$

kde

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}.$$

Poznámky : **1)** Jestliže je na nějakém $U(x_0)$ $f^{(n+1)}$ omezená, tj. existuje-li takové $K \in \mathbb{R}$, že na $U(x_0)$ platí $|f^{(n+1)}| \leq K$, pak pro všechna $x \in U(x_0)$ máme

$$|R_n(x)| \leq \frac{K}{(n+1)!}|x - x_0|^{n+1}.$$

To ale znamená, že

$$\left|\frac{R_n(x)}{(x-x_0)^n}\right| \leq \frac{K}{(n+1)!}|x - x_0| \overset{x \to x_0}{\longrightarrow} 0,$$

a tedy

$$\lim_{x \to x_0} \frac{R_n(x)}{(x-x_0)^n} = 0.$$

To nám říká, že pro $x \to x_0$ se $R_n(x)$ blíží k nule podstatně rychleji než $(x - x_0)^n$.

2) Funkci $R_n(x)$ nazýváme **zbytkem řádu** n. Tento zbytek lze vyjádřit i v jiných tvarech než ve větě 5.13. Tvar z věty 5.13 se nazývá **Lagrangeův tvar zbytku**.

Příklad 5.5: Najděte Taylorův polynom 4. řádu funkce $g(x) = \mathrm{e}^{-x}\sin x - 5$ v bodě $x_0 = \frac{\pi}{2}$.

Řešení: Postupně dostáváme

$$g(x) = g^{(0)}(x) = \mathrm{e}^{-x}\sin x - 5 \qquad g(\tfrac{\pi}{2}) = \mathrm{e}^{-\frac{\pi}{2}} - 5$$

$$g'(x) = -\mathrm{e}^{-x}\sin x + \mathrm{e}^{-x}\cos x = \mathrm{e}^{-x}(-\sin x + \cos x) \qquad g'(\tfrac{\pi}{2}) = -\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{2}}$$

$$g''(x) = -\mathrm{e}^{-x}(-\sin x + \cos x) + \mathrm{e}^{-x}(-\cos x - \sin x) = \mathrm{e}^{-x}(-2\cos x) \qquad g''(\tfrac{\pi}{2}) = 0$$

$$g'''(x) = -\mathrm{e}^{-x}(-2\cos x) + \mathrm{e}^{-x}(2\sin x) = \mathrm{e}^{-x}(2\cos x + 2\sin x) \qquad g'''(\tfrac{\pi}{2}) = 2\,\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{2}}$$

$$g^{(4)}(x) = -\mathrm{e}^{-x}(2\cos x + 2\sin x) + \mathrm{e}^{-x}(-2\sin x + 2\cos x) = \mathrm{e}^{-x}(-4\sin x) \qquad g^{(4)}(\tfrac{\pi}{2}) = -4\,\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{2}}$$

Odtud

$$\underline{T_4(x)} = \tfrac{\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{2}}-5}{0!}\left(x-\tfrac{\pi}{2}\right)^0 + \tfrac{-\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{2}}}{1!}\left(x-\tfrac{\pi}{2}\right)^1 + \tfrac{0}{2!}\left(x-\tfrac{\pi}{2}\right)^2 + \tfrac{2\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{2}}}{3!}\left(x-\tfrac{\pi}{2}\right)^3 + \tfrac{-4\,\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{2}}}{4!}\left(x-\tfrac{\pi}{2}\right)^4 =$$

$$= \underline{\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{2}} - 5 - \mathrm{e}^{-\frac{\pi}{2}}\left(x-\tfrac{\pi}{2}\right) + \tfrac{\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{2}}}{3}\left(x-\tfrac{\pi}{2}\right)^3 - \tfrac{\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{2}}}{6}\left(x-\tfrac{\pi}{2}\right)^4}\,.$$

Všimněte si, že úprava derivací nám výrazně zjednodušila další derivování i výpočet hodnot derivací v bodě x_0. Kdybychom si nevytkli v každé derivaci e^{-x}, derivovali bychom v posledním kroku místo jednoho součinu součinů osm.

Příklad 5.6: Najděte Taylorův polynom 3. řádu funkce $f(x) = \ln\left(\dfrac{x}{2}\right) + 3$ v bodě $x_0 = 2$ a odhadněte velikost $R_k(x)$ pro $k = 3,\ 5$ a $x = 4,\ 3,\ \frac{21}{10},\ \frac{1}{2},\ 1$.

Řešení: Funkci f budeme potřebovat derivovat, proto si její předpis nejdřív upravíme na tvar $f(x) = \ln x - \ln 2 + 3$, který je pro derivování výhodnější. Postupně pak dostaneme (viz Příklad 4.9):

k	0	1	2	3	4	5	6
$f^{(k)}(x)$	$\ln x - \ln 2 + 3$	$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$\frac{2}{x^3}$	$-\frac{6}{x^4}$	$\frac{24}{x^5}$	$-\frac{120}{x^6}$
$f^{(k)}(2)$	3	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$			

(čtvrtou a další derivace použijeme jen k odhadu zbytků, nepotřebujeme proto znát jejich hodnoty v bodě $x_0 = 2$).

$f(x_1) \in (f(x_3), f(x_2))$ a jako v prvním případě existuje číslo y, tentokrát v intervalu (x_2, x_3), pro které je $f(y) = f(x_1)$. Protože $x_1 < x_2$, je $y \neq x_1$ a funkce f opět není prostá. V případě b) bychom postupovali analogicky. □

Věta 5.7:

Je-li f spojitá a prostá na <u>intervalu</u> I, pak f_{-1} je spojitá na $f(I)$.

Důkaz: Z předchozí věty víme, že funkce f je na I ryze monotonní. Nechť je například rostoucí. Potom podle prvního odstavce na straně [P2.3] je funkce f_{-1} také rostoucí. Ukážeme, že pokud $y_0 \in f(I) = D(f_{-1})$, pak je f_{-1} v $f_{-1}(y_0)$ spojitá. Protože je $y_0 \in f(I)$, existuje $x_0 \in I$ takové, že $y_0 = f(x_0)$. Předpokládejme pro jednoduchost, že x_0 je vnitřním bodem intervalu I. Mějme dáno $\varepsilon > 0$. Můžeme předpokládat, že ε je tak malé, že $\langle x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon\rangle \subset I$. Položme $\delta_1 = f(x_0) - f(x_0 - \varepsilon) > 0$, $\delta_2 = f(x_0 + \varepsilon) - f(x_0) > 0$ a $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Pak $f(x_0 - \varepsilon) \leq f(x_0) - \delta$ a $f(x_0) + \delta \leq f(x_0 + \varepsilon)$, tedy podle Důsledku 5.2 je $(f(x_0) - \delta, f(x_0) + \delta) \subset f(I) = D(f_{-1})$. Pro $y \in (f(x_0) - \delta, f(x_0) + \delta)$ máme z monotonie funkce f_{-1}

$$\underline{f_{-1}(y_0) - \varepsilon} = x_0 - \varepsilon = f_{-1}(f(x_0 - \varepsilon)) = f_{-1}(f(x_0) - \delta_1) < f_{-1}(f(x_0) - \delta) \underline{< f_{-1}(y) <}$$

$$< f_{-1}(f(x_0) + \delta) < f_{-1}(f(x_0) + \delta_2) = f_{-1}(f(x_0 + \varepsilon)) = x_0 + \varepsilon = \underline{f_{-1}(y_0) + \varepsilon}.$$

Funkce f_{-1} je tedy v y_0 spojitá. □

5.2 <u>Věta o střední hodnotě</u>

Věta 5.8 (Rolleova):

Nechť f je spojitá na $\langle a, b\rangle$, v každém $x \in (a, b)$ existuje $f'(x)$ $(\in \overline{\mathbb{R}})$ a $f(a) = f(b)$. Pak existuje $c \in (a, b)$ tak, že

$$f'(c) = 0.$$

Důkaz: Pokud pro každé $x \in (a, b)$ platí $f(x) = f(a)$, pak je funkce f na (a, b) konstantní, a tedy její derivace je rovna nule v každém bodě intervalu (a, b). Předpokládejme nyní, že existuje bod $x_1 \in (a, b)$, pro který je $f(x_1) > f(a)$. Podle Věty 5.5 nabývá funkce f na $\langle a, b\rangle$ svého maxima v nějakém bodě $\tilde{c} \in \langle a, b\rangle$. Ukážeme, že $\tilde{c}$ má požadované vlastnosti. Protože $f(x_1) > f(a)$, je nutně také $f(\tilde{c}) > f(a) = f(b)$, tedy $\tilde{c} \in (a, b)$. Máme ještě ověřit, že $f'(\tilde{c}) = 0$. Z definice maxima pro všechna $x \in \langle a, b\rangle$ platí $f(\tilde{c}) \geq f(x)$. Tedy pro všechna $x \in (\tilde{c}, b\rangle$ máme $\frac{f(x) - f(\tilde{c})}{x - \tilde{c}} \leq 0$, takže $f'_+(\tilde{c}) \leq 0$ (derivace existuje, protože z předpokladů věty existuje $f'(\tilde{c})$). Analogicky pro všechna $x \in \langle a, \tilde{c})$ platí $\frac{f(x) - f(\tilde{c})}{x - \tilde{c}} \geq 0$, tedy $f'_-(\tilde{c}) \leq 0$. Celkem tak dostáváme $0 \leq f'_-(\tilde{c}) = f'(\tilde{c}) = f'_+(\tilde{c}) \leq 0$, což může platit, jen když $f'(\tilde{c}) = 0$. Pokud nenastává ani jedna z předchozích dvou možností, musí existovat bod $x_2 \in (a, b)$, pro který je $f(x_2) < f(a)$. Pak z analogických důvodů jako výše má funkce f nulovou derivaci v bodě svého minima na intervalu $\langle a, b\rangle$. □

Věta 5.9 (Lagrangeova o střední hodnotě; o přírůstku funkce):

Nechť f je spojitá na $\langle a, b\rangle$ a v každém $x \in (a, b)$ existuje $f'(x)$ $(\in \overline{\mathbb{R}})$. Pak existuje $c \in (a, b)$ tak, že

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}\,.$$

Důkaz: Uvažujem funkci $g(x) = \alpha x + \beta$ takovou, že $f(a) = g(a) = \alpha a + \beta$ a $f(b) = g(b) = \alpha b + \beta$. Vyřešením jednoduché soustavy lineárních rovnic zjistíme, že $\alpha = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$. Snadno nahlédeme, že funkce $h = f - g$ splňuje předpoklady Rolleovy věty. Existuje tedy číslo $c \in (a, b)$ takové, že $h'(c) = 0$. Pro toto c dále platí $0 = h'(c) = f'(c) - g'(c) = f'(c) - \alpha$, takže $f'(c) = \alpha = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$. □

Důsledek 5.10:

Nechť f je spojitá na $\langle a, b\rangle$ a pro každé $x \in (a, b)$ platí $f'(x) = 0$. Pak f je konstantní na $\langle a, b\rangle$.

Důkaz: Zvolme libovolné dva body $x, y \in \langle a, b\rangle$, $x < y$. Aplikací Lagrangeovy věty 5.9 na interval $\langle x, y\rangle$ dostaneme, že existuje $c \in (x, y) \subset (a, b)$ tak, že $\frac{f(y) - f(x)}{y - x} = f'(c)$. Z předpokladu důsledku je $f'(c) = 0$, tedy $f(x) = f(y)$. Protože $x, y \in \langle a, b\rangle$ byly zvoleny libovolně, je funkce f na $\langle a, b\rangle$ konstantní. □

Věta 5.11 (zobecněná o střední hodnotě – Cauchyova):

Nechť f a g jsou funkce spojité na $\langle a, b\rangle$ a v každém $x \in (a, b)$ existuje vlastní nebo nevlastní $f'(x)$ a vlastní $g'(x) \neq 0$. Pak existuje $c \in (a, b)$ tak, že

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}\,.$$

Důkaz: Stačí použít Rolleovu větu na funkci $h(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}\,g(x)$. □

5.3 l'Hospitalovo pravidlo

Věta 5.12 (l'Hospitalovo pravidlo):
Nechť $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ a pro funkce f, g platí:

a) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$ nebo $\lim\limits_{x\to x_0} |g(x)| = +\infty$,

b) existuje $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = A \in \overline{\mathbb{R}}$.

Pak existuje $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ a je rovna A. (Analogicky pro jednostranné limity.)

Důkaz provedeme jen pro případ, kdy $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = 0$. Protože existuje $\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, je podíl $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ definován na nějakém prstencovém okolí $P_\delta(x_0)$ bodu x_0. Na tomto prstencovém okolí tedy mají funkce f a g vlastní derivaci (funkce g dokonce nenulovou), takže tam jsou podle Věty 4.1 spojité. Funkce f a g podle potřeby dodefinujme nebo předefinujme v x_0 jejich limitou, tj. položme $f(x_0) = g(x_0) = 0$. Funkce f a g jsou nyní spojité na celém $U_\delta(x_0)$. Pro každé $x \in P_\delta(x_0)$ jsou tedy na intervalu mezi x a x_0 splněny předpoklady Cauchyovy věty 5.11, takže podle této věty existuje mezi x a x_0 bod $c(x)$ takový, že

$$\frac{f'\big(c(x)\big)}{g'\big(c(x)\big)} = \frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)} = \frac{f(x)}{g(x)}\,.$$

Z věty o dvou policajtech (Věta 3.10,4c) máme $c(x) \to x_0$ pro $x \to x_0$, přičemž $c(x) \neq x_0$ pro všechna $x \in U_\delta(x_0)$. Podle Věty 3.11 o limitě složené funkce tak platí

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'\big(c(x)\big)}{g'\big(c(x)\big)} = \lim_{y\to x_0} \frac{f'(y)}{g'(y)}\,,$$

což jsme potřebovali dokázat. $\square$

Poznámka: Může se stát, že existuje $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$, ale $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ neexistuje. Například pro $f(x) = x^2 \sin\dfrac{1}{x}$, $g(x) = \sin x$, $x_0 = 0$ máme

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2 \sin\frac{1}{x}}{\sin x} = \left\langle\!\!\left\langle \frac{0\cdot \text{omez.}}{0} \right\rangle\!\!\right\rangle = \left\langle\!\!\left\langle \frac{0}{0} \right\rangle\!\!\right\rangle = \lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin x}\cdot\left(x\cdot\sin\frac{1}{x}\right) =$$

$$= \langle\!\langle 1\cdot(0\cdot\text{omez.})\rangle\!\rangle = \langle\!\langle 1\cdot 0\rangle\!\rangle = 0,$$

přitom

$$\lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{2x\sin\frac{1}{x} + x^2\cos\frac{1}{x}\left(-\frac{1}{x^2}\right)}{\cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}}{\cos x} =$$

$$= \left\langle\!\!\left\langle \frac{0\cdot\text{omez.} - \text{neex.}}{1} \right\rangle\!\!\right\rangle = \left\langle\!\!\left\langle \frac{0-\text{neex.}}{1} \right\rangle\!\!\right\rangle = \left\langle\!\!\left\langle \frac{\text{neex.}}{1} \right\rangle\!\!\right\rangle \quad \text{neexistuje.}$$

Jiný příklad: Pro $f(x) = x + \sin x$, $g(x) = x - \sin x$, $x_0 = +\infty$ ($g(x) \neq 0$ na $(0,\infty)$) máme $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} g(x) = \infty$ a

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{x(1+\frac{1}{x}\sin x)}{x(1-\frac{1}{x}\sin x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{1+\frac{1}{x}\sin x}{1-\frac{1}{x}\sin x} = \left\langle\!\!\left\langle \frac{1+0\cdot\text{omez.}}{1-0\cdot\text{omez.}} \right\rangle\!\!\right\rangle = 1\,.$$

Přitom $g'(x) = 1-\cos x$, takže $g'(2k\pi) = 0$ pro každé $k \in \mathbb{N}$, což ale znamená, že podíl $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ není definován na žádném prstencovém okolí bodu $x_0 = \infty$ a nemůže mít tedy v tomto bodě limitu.

Příklad 5.2: $\displaystyle \lim_{x\to\infty} \frac{\ln^2 x}{x^{\frac{1}{2}}} = \left\langle\!\!\left\langle \frac{\infty}{\infty} \right\rangle\!\!\right\rangle \overset{\text{l'H}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{2\ln x\cdot\frac{1}{x}}{\frac{1}{2}\,x^{-\frac{1}{2}}} = \lim_{x\to\infty} \frac{4\ln x}{x^{\frac{1}{2}}} = \left\langle\!\!\left\langle \frac{\infty}{\infty} \right\rangle\!\!\right\rangle \overset{\text{l'H}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{4\,\frac{1}{x}}{\frac{1}{2}\,x^{-\frac{1}{2}}} = \lim_{x\to\infty} \frac{8}{x^{\frac{1}{2}}} = 0.$

Příklad 5.3: $\displaystyle \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x} - \operatorname{cotg} x\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x} - \frac{\cos x}{\sin x}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x\cos x}{x\sin x} = \left\langle\!\!\left\langle \frac{0}{0} \right\rangle\!\!\right\rangle \overset{\text{l'H}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - (\cos x - x\sin x)}{\sin x + x\cos x} =$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x\sin x}{\sin x + x\cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{1+\frac{x}{\sin x}\cos x} = \left\langle\!\!\left\langle \frac{0}{1+1\cdot 1} \right\rangle\!\!\right\rangle = 0$$

Použití Věty 5.12 pro limity typu $\langle\!\langle 0\cdot\infty \rangle\!\rangle$

Jestliže $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$ a $\lim\limits_{x\to x_0} |g(x)| = \infty$, pak použijeme jeden z přepisů

$$\lim_{x\to x_0} f(x)\cdot g(x) = \begin{cases} \displaystyle\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}} = \left\langle\!\!\left\langle \frac{0}{0} \right\rangle\!\!\right\rangle \\[2ex] \displaystyle\lim_{x\to x_0} \frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}} = \left\langle\!\!\left\langle \frac{\pm\infty}{\pm\infty} \right\rangle\!\!\right\rangle \end{cases}$$

a můžeme aplikovat Větu 5.12. V druhém případě jsou ∞ limity absolutních hodnot čitatele a jmenovatele.)

Příklad 5.4: $\lim\limits_{x\to 0^+} x\cdot\ln^2 x = 0.$

5.4 Taylorův polynom

Předpokládejme, že funkce f má n−tou derivaci v bodě x_0. Hledáme polynom

$$T_n(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \ldots + a_n(x-x_0)^n$$

tak, aby

$$T_n^{(k)}(x_0) = f^{(k)}(x_0) \qquad \text{pro } k = 0,\ldots,n.$$

Máme

$$\begin{aligned}
T_n^{(0)}(x) &= a_0 + a_1\cdot(x-x_0) + a_2\cdot(x-x_0)^2 + a_3\cdot(x-x_0)^3 + a_4\cdot(x-x_0)^4 + \ldots + a_n\cdot(x-x_0)^n,\\
T_n'(x) &= 1\cdot a_1 + 2\cdot a_2\cdot(x-x_0) + 3\cdot a_3\cdot(x-x_0)^2 + 4\cdot a_4\cdot(x-x_0)^3 + \ldots + n\cdot a_n\cdot(x-x_0)^{n-1},\\
T_n''(x) &= 1\cdot 2\cdot a_2 + 2\cdot 3\cdot a_3\cdot(x-x_0) + 3\cdot 4\cdot a_4\cdot(x-x_0)^2 + \ldots + (n-1)\cdot n\cdot a_n\cdot(x-x_0)^{n-2},\\
T_n'''(x) &= 1\cdot 2\cdot 3\cdot a_3 + 2\cdot 3\cdot 4\cdot a_4\cdot(x-x_0) + \ldots + (n-2)\cdot(n-1)\cdot n\cdot a_n\cdot(x-x_0)^{n-3},\\
T_n^{(4)}(x) &= 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot a_4 + \ldots + (n-3)\cdot(n-2)\cdot(n-1)\cdot n\cdot a_n\cdot(x-x_0)^{n-4},\\
&\;\vdots\\
T_n^{(n)}(x) &= 1\cdot 2\cdot 3\cdots(n-2)\cdot(n-1)\cdot n\cdot a_n.
\end{aligned}$$

Odtud dostáváme, že má platit

$$\begin{aligned}
T_n^{(0)}(x_0) &= a_0 &&= f(x_0)\\
T_n'(x_0) &= a_1 &&= f'(x_0)\\
T_n''(x_0) &= 2\cdot a_2 &&= f''(x_0)\\
T_n'''(x_0) &= 2\cdot 3\cdot a_3 &&= f'''(x_0)\\
T_n^{(4)}(x_0) &= 2\cdot 3\cdot 4\cdot a_4 &&= f^{(4)}(x_0)\\
&\;\vdots\\
T_n^{(n)}(x_0) &= 2\cdot 3\cdots(n-1)\cdot n\cdot a_n &&= f^{(n)}(x_0)
\end{aligned}$$

Tedy pro $k = 0, 1, \ldots, n$ musí být

$$k!\,a_k = f^{(k)}(x_0)\,, \qquad \text{tj.} \qquad a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}\,.$$

Máme tak

$$\underline{T_n(x)} = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{2\cdot 3}(x-x_0)^3 \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k.$$

$\underline{T_n}$ … **Taylorův polynom řádu n (stupně $\leq n$) funkce f v bodě x_0**

(Taylorův polynom zapisujeme ve výše uvedeném tvaru. Členy $(x-x_0)^k$ neroznásobujeme!)