KAPITOLA 1: Reálná čísla

1.1. Číselné množiny

Přirozená čísla . . . $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$

nula . . . 0, $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \dots\} = \mathbb{N} \cup \{0\}$

Celá čísla . . . $\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, 3, \dots\}$

Racionální čísla . . . $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \,\middle|\, p\,,\ q \in \mathbb{Z},\ q \neq 0 \right\}$

Věta 1.1 :

Číslo $\sqrt{2}$ není racionální.

Platí : Desetinný rozvoj každého racionálního čísla je **periodický**.

Reálná čísla ... $\mathbb{R}$ – lze je vyjádřit desetinným rozvojem (konečným nebo nekonečným) periodu 9 neuvažujeme

Iracionální čísla ... $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

Věta 1.3 :

Jsou-li a, b reálná čísla, $a < b$, pak v intervalu (a, b) leží alespoň jedno racionální číslo a alespoň jedno číslo iracionální.

Speciálně mezi každými dvěma racionálními čísly leží alespoň jedno číslo iracionální a mezi každými dvěma iracionálními čísly leží alespoň jedno číslo racionální.

Důsledek 1.4 :

Jsou-li a, b reálná čísla, $a < b$, pak v intervalu (a, b) leží nekonečně mnoho racionálních čísel a také nekonečně mnoho čísel iracionálních.

1.2. Reálná čísla

absolutní hodnota čísla $a \in \mathbb{R}$

- $|a| = a$ pro $a \geq 0$
- $|a| = -a$ pro $a \leq 0$

Platí pro všechna $a,\ b,\ c \in \mathbb{R}$:

a) $|a| = |-a|$, $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$, $\left|\dfrac{a}{b}\right| = \dfrac{|a|}{|b|}$ pro $b \neq 0$

!!! b) $|a+b| \leq |a| + |b|$ ... **trojúhelníková nerovnost**

c) $|c-a| \geq |c| - |a|$ (v b) stačí vzít $b = c - a$)

Platí pro $c,\ x,\ \varepsilon \in \mathbb{R},\ \ \varepsilon > 0$:

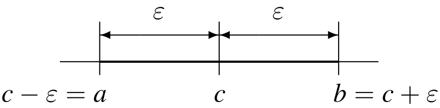
- $|x-c| < \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad c-\varepsilon < x < c+\varepsilon$

  tj. $x \in (c-\varepsilon, c+\varepsilon)$

- $|x-c| \leq \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad c-\varepsilon \leq x \leq c+\varepsilon$

  tj. $x \in \langle c-\varepsilon,\ c+\varepsilon \rangle$

c – střed intervalu
ε – poloměr intervalu



$$c = \frac{a+b}{2}$$

$$\varepsilon = \frac{b-a}{2}$$

Definice :

Okolím bodu $c \in \mathbb{R}$ **o poloměru** $\varepsilon > 0$ nazýváme množinu

$$U_\varepsilon(c) = \{ x \in \mathbb{R} \,\big|\, |x - c| < \varepsilon \}$$

$$\big[\; = \; (c - \varepsilon, c + \varepsilon) \; \big].$$

Prstencovým okolím bodu $c \in \mathbb{R}$ **o poloměru** $\varepsilon > 0$ nazýváme množinu

$$P_\varepsilon(c) = U_\varepsilon(c) \setminus \{c\}$$

$$\big[\; = \; (c - \varepsilon, c) \cup (c, c + \varepsilon) \; \big].$$

Definice :

Pravým (**levým**) **okolím bodu** $c \in \mathbb{R}$ **o poloměru** $\varepsilon > 0$ nazýváme množinu

$$U_\varepsilon^+(c) = \langle c, c+\varepsilon)$$

$$\left(U_\varepsilon^-(c) = (c-\varepsilon, c\rangle \right)$$

Pravým (**levým**) **prstencovým okolím bodu** $c \in \mathbb{R}$ **o poloměru** $\varepsilon > 0$ nazýváme množinu

$$P_\varepsilon^+(c) = (c, c+\varepsilon)$$

$$\left(P_\varepsilon^-(c) = (c-\varepsilon, c) \right)$$

1.3. Supremum a infimum

Definice :

Řekneme, že $b \in M$ je **největším prvkem** (maximem) množiny $M \subset \mathbb{R}$, jestliže v M neexistuje prvek větší než b. Píšeme

$$b = \max M.$$

Řekneme, že $a \in M$ je **nejmenším prvkem** (minimem) množiny $M \subset \mathbb{R}$, jestliže v M neexistuje prvek menší než a. Píšeme

$$a = \min M.$$

Příklad 1.2:

a) $\min\{3, 57, 25, -2, 8\} = -2,$

$\max\{3, 57, 25, -2, 8\} = 57;$

b) $\min \mathbb{N} = 1,$

$\max \mathbb{N}$ neexistuje;

c) $\min\{1 - \frac{1}{n} \,|\, n \in \mathbb{N}\} = 0 \;\left(= 1 - \frac{1}{1}\right),$

$\max\{1 - \frac{1}{n} \,|\, n \in \mathbb{N}\}$ neexistuje;

d) $\min\{x \,|\, 3 < x \leq 6\}$ neexistuje,

$\max\{x \,|\, 3 < x \leq 6\} = 6.$

Příklad 1.3:

Celá část čísla $x \in \mathbb{R}$: $[x] = \max\{k \in \mathbb{Z} \,|\, k \leq x\} \quad (\in \mathbb{Z})$

Příklad 1.4:

a) $\{\, x \in \mathbb{R} \mid 0 < x \,\}$ ... množina je omezená jen zdola

b) $\{\, x \in \mathbb{R} \mid x \leq -3 \,\}$ ... množina je omezená jen shora

c) $\langle -5,\ 1)$ ... množina je omezená shora i zdola, tj. je omezená

d) $\{\, x \in \mathbb{R} \mid x^2 > 10 \,\}$ ... množina není omezená ani shora ani zdola

(jde o množinu $(-\infty, -\sqrt{10}) \cup (\sqrt{10}, \infty)$).

Definice :

Řekneme, že množina $M \subset \mathbb{R}$ je **shora omezená**, jestliže existuje číslo $K \in \mathbb{R}$ takové, že pro všechna $x \in M$ platí

$$x \leq K.$$

Číslo K nazýváme **horní mezí** množiny M.

Řekneme, že množina $M \subset \mathbb{R}$ je **zdola omezená**, jestliže existuje číslo $L \in \mathbb{R}$ takové, že pro všechna $x \in M$ platí

$$L \leq x.$$

Číslo L nazýváme **dolní mezí** množiny M.

Definice :

Řekneme, že množina $M \subset \mathbb{R}$ je **omezená**, jestliže je omezená shora i zdola.

Množina $M \subset \mathbb{R}$ je **omezená**, právě když existuje $S \in \mathbb{R}$ takové, že pro všechna $x \in M$ platí

$$|x| \leq S \, .$$

Definice :

Řekneme, že číslo $b \in \mathbb{R}$ je **supremem** neprázdné množiny $M \subset \mathbb{R}$, jestliže je nejmenší horní mezí množiny M. Píšeme

$$b = \sup M.$$

Poznámka:

Pro supremum b množiny M platí :

- Každý prvek množiny M je menší nebo roven b (protože b je horní mez).
- Vezmeme-li jakékoliv číslo c menší než b, pak už to není horní mez (b je nejmenší horní mez). Tedy v M najdeme prvek, který je větší než c.

Příklad: Ukažte, že pro $M = \{1 - \frac{1}{n} \,|\, n \in \mathbb{N}\}$ je $\sup M = 1$.

Řešení: • Pro každé $n \in \mathbb{N}$ zřejmě platí $1 - \frac{1}{n} \leq 1$, tedy číslo 1 je horní mezí dané množiny.

• Chceme ukázat, že číslo 1 je nejmenší horní mez. Mějme tedy dáno číslo $K < 1$ (libovolné). Ukažme, že to není horní mez.

Hledáme $n \in \mathbb{N}$ takové, že $1 - \frac{1}{n} = \frac{n-1}{n} > K$.

Postupně dostáváme, že hledané n má splňovat

$$\begin{aligned} \frac{n-1}{n} &> K \\ n-1 &> nK \\ n(1-K) &> 1 \\ n &> \frac{1}{1-K} \end{aligned}$$

Tato nerovnost je splněna např. pro $n = \left[\frac{1}{1-K}\right] + 1$. Prvek množiny M, který odpovídá tomuto n, je větší než K. Tedy číslo K není horní mezí množiny M.

Definice :

Řekneme, že číslo $a \in \mathbb{R}$ je **infimem** neprázdné množiny $M \subset \mathbb{R}$, jestliže je největší dolní mezí množiny M. Píšeme

$$a = \inf M.$$

Poznámka:

Pro infimum a množiny M platí :

- Každý prvek množiny M je větší nebo roven a (protože a je dolní mez).
- Vezmeme-li jakékoliv číslo c větší než a, pak už to není dolní mez (a je největší dolní mez). Tedy v M najdeme prvek, který je menší než c.

Platí : Má-li množina M největší (nejmenší) prvek, pak je tento prvek i supremem (infimem) množiny M .

Příklad 1.5: (srovnejte s Příkladem 1.2.)

a) $M = \{3, 57, 25, -2, 8\} \quad \dots$

$$\dots \quad \inf M = \min M = -2, \quad \sup M = \max M = 57;$$

b) $M = \mathbb{N} \quad \dots \quad \inf M = \min M = 1, \quad \sup M = ??;$

c) $M = \{\, 1 - \frac{1}{n} \,|\, n \in \mathbb{N} \,\} \quad \dots \quad \inf M = \min M = 0, \quad \sup M = 1;$

d) $M = \{\, x \,|\, 3 < x \leq 6 \} \quad \dots \quad \inf M = 3, \quad \sup M = \max M = 6.$

Věta 1.2 (o supremu a infimu) :

Nechť $M \subset \mathbb{R}$ je neprázdná množina.

Je-li M shora omezená, pak existuje $\sup M \in \mathbb{R}$.

Je-li M zdola omezená, pak existuje $\inf M \in \mathbb{R}$.

1.4. Rozšíření množiny reálných čísel

nevlastní čísla (hodnoty) $\ldots$ $(+)\infty,\ -\infty$

$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ $\ldots$ **rozšířená reálná osa**

Uspořádání na $\overline{\mathbb{R}}$ – stejné jako na $\mathbb{R}$, jen navíc přidáváme

- $-\infty < +\infty$,
- $-\infty < a, \quad a < +\infty$ pro každé $a \in \mathbb{R}$

Okolí bodů $+\infty, \ -\infty \qquad (K,\ L \in \mathbb{R})$

- $U_K(+\infty) = U_K^-(+\infty) = P_K(+\infty) = P_K^-(+\infty) = (K, +\infty)$
- $U_L(-\infty) = U_L^+(-\infty) = P_L(-\infty) = P_L^+(-\infty) = (-\infty, L)$

Všechny intervaly i okolí, které uvažujeme, obsahují pouze reálná (tj. konečná) čísla.

Aritmetické operace s nevlastními hodnotami $(a \in \mathbb{R})$

Definujeme:

- $a + \infty = a - (-\infty) = \infty$
  $a - \infty = a + (-\infty) = -\infty$

- $\infty + \infty = \infty \quad (= \infty - (-\infty))$
  $-\infty - \infty = -\infty \quad (= -\infty + (-\infty))$

- $$a \cdot \infty = \begin{cases} \infty & \text{pro } a > 0 \\ -\infty & \text{pro } a < 0 \end{cases}$$

  $$a \cdot (-\infty) = \begin{cases} -\infty & \text{pro } a > 0 \\ \infty & \text{pro } a < 0 \end{cases}$$

- $$\infty \cdot \infty = (-\infty) \cdot (-\infty) = \infty$$

  $$\infty \cdot (-\infty) = -\infty$$

- $$\frac{\pm\infty}{a} = (\pm\infty) \cdot a^{-1} \quad \text{pro } a \neq 0, \qquad \frac{a}{\pm\infty} = 0$$

Nedefinujeme:

- $\infty - \infty, \quad \infty + (-\infty)$
- $(\pm\infty) \cdot 0$
- $\dfrac{\pm\infty}{\pm\infty}, \qquad \dfrac{\pm\infty}{0}, \qquad \dfrac{a}{0}$

Definice :

Nechť $M \subset \mathbb{R}$ je neprázdná množina. Je-li M shora neomezená, pak pokládáme

$$\sup M = +\infty,$$

je-li M zdola neomezená, pokládáme

$$\inf M = -\infty.$$

Příklad 1.5:

a) $M = \{3, 57, 25, -2, 8\}$ $\ldots$

$\ldots$ $\inf M = \min M = -2,\ \sup M = \max M = 57;$

b) $M = \mathbb{N}$ $\ldots$ $\inf M = \min M = 1,\ \sup M = +\infty;$

c) $M = \{\, 1 - \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N} \,\}$ $\ldots$ $\inf M = \min M = 0,\ \sup M = 1;$

d) $M = \{\, x \mid 3 < x \leq 6 \}$ $\ldots$ $\inf M = 3,\ \sup M = \max M = 6.$