Из

$$f(\eta) = 0,\ \eta \neq \xi$$

следует, что

$$(\eta - \xi)\ g(\eta) = 0,$$

$$g(\eta) = 0.$$

Если бы поэтому уравнение

$$f(x) = 0$$

имело, по крайней мере, $n + 1$ решение (т. е. бесконечно много или же конечное число $\geq n + 1$), то уравнение

$$g(x) = 0$$

имело бы, по крайней мере, n решений; но это противоречит предположению.

2) Если бы уравнение

$$f(x) = 0$$

обладало системой из $n + 1$ решений, то, в силу теоремы 156, между каждыми двумя из этих чисел лежало бы, по крайней мере, одно решение уравнения

$$f'(x) = 0$$

Но так как

$$f'(x) = \sum_{v=0}^{n-1} (v+1)\ a_{v+i}x',\ na_v \neq 0,$$

то уравнение

$$f'(x) = 0$$

может иметь, самое большее, n - 1 решений.

Теорема 158. *Если*

$$f(x) = \sum_{v=0}^{n} a_i x',$$

$$n > 1,$$

$$a_n \neq 0$$

и уравнение
(1)
$$f(x) = 0$$
имеет точно n решений, то уравнение
(2)
$$f'(x) = 0$$
имеет точно n - 1 *решений.*

Доказательство. По теореме 156, между любыми двумя соседними решениями уравнения (1) лежит, по крайней мере, одно решение уравнения (2). Следовательно, уравнение (2) имеет, по крайней мере, $n + 1$ решений; но так как

$$f'(x) = \sum_{v=0}^{n-1} (v+1)\, a_{v+i} x', \ na_v \neq 0,$$

то, в силу теоремы 157, уравнение (2) может иметь, самое большее, n - 1 решений; следовательно, их имеется точно n - 1.

Теорема 159. (теорема о среднем значении) *Пусть* $f(x)$ *непрерывна в* $[a,\ b]$ *и* f*'* (x) *существует при* $a < x < b$. *Тогда существует* ξ *такое, что*

$$a < \xi < b, \ \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi).$$

Доказательство. Функция

$$\varphi(x) = f(x) - f(a) - \frac{x - a}{b - a}\,(f(b) - f(a))$$

непрерывна в $[a,\ b]$. При $a < x < b$ имеем

$$\varphi'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f'(a)}{b - a}.$$

Далее,
$$\varphi(a) = 0 = \varphi(b).$$

Следовательно, по теореме 156, существует ξ такое, что

$$a < \xi < b, \ 0 = \varphi'(\xi) = f'(\xi) - \frac{f(b) - f'(a)}{b - a}.$$