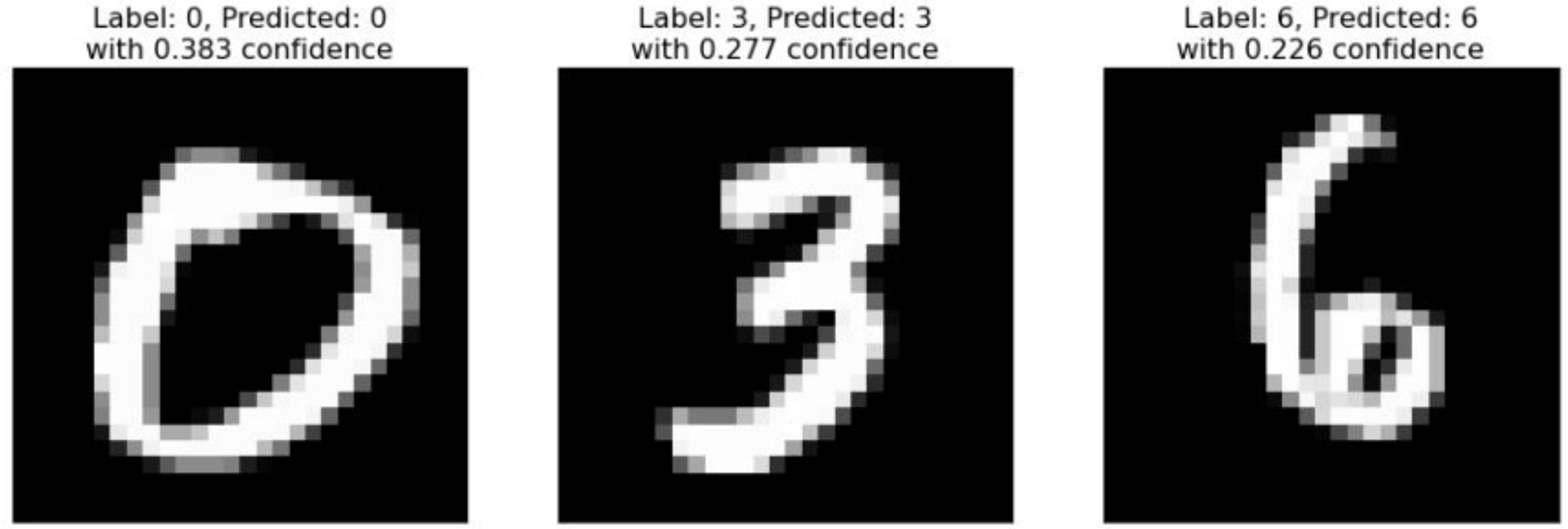
Neuronové sítě a hluboké učení



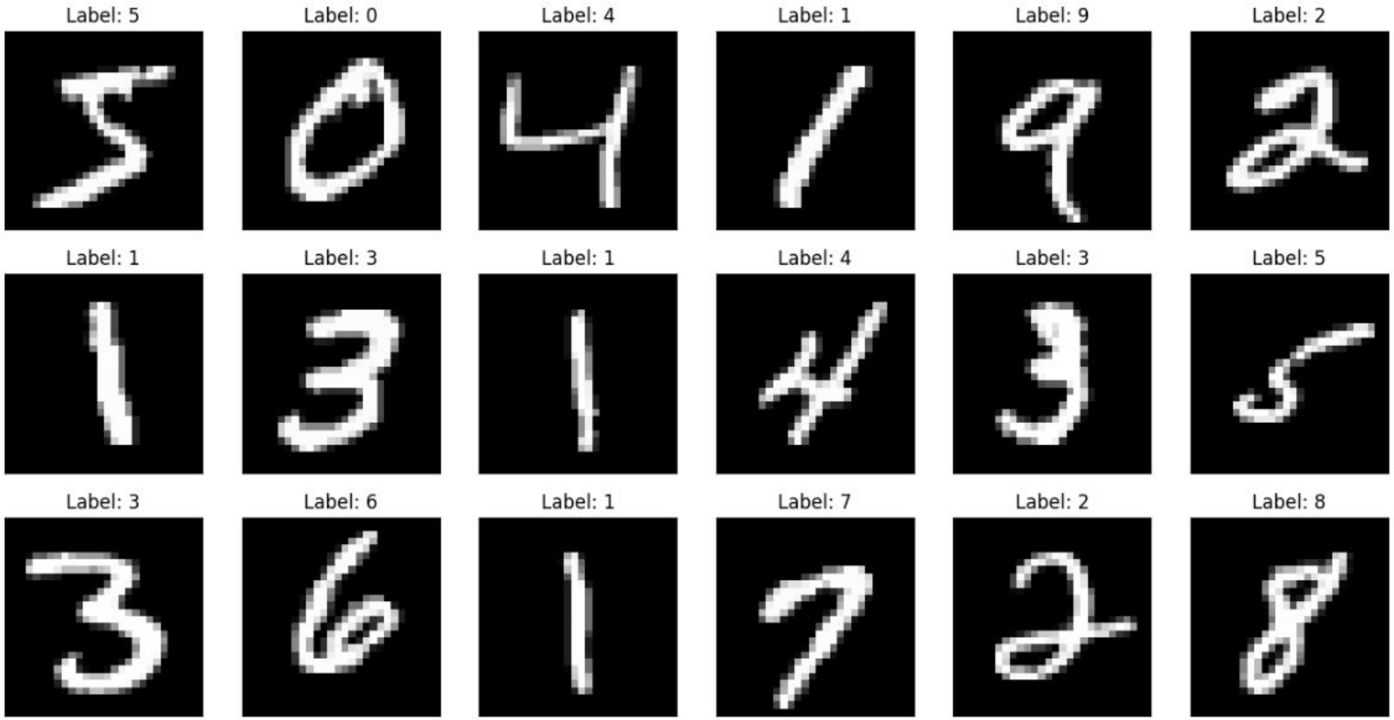
Neuronové sítě a hluboké učení

- Michael N. Nielsen, “**Neural Networks and Deep Learning**”, Determination Press, 2015
- http://neuralnetworksanddeeplearning.com/
- 3blue1brown série videí na YouTube
- pevné základy, ne přehled technik
- příklady v **Pythonu**, bez frameworků

Rozpoznání ručně psaných číslic

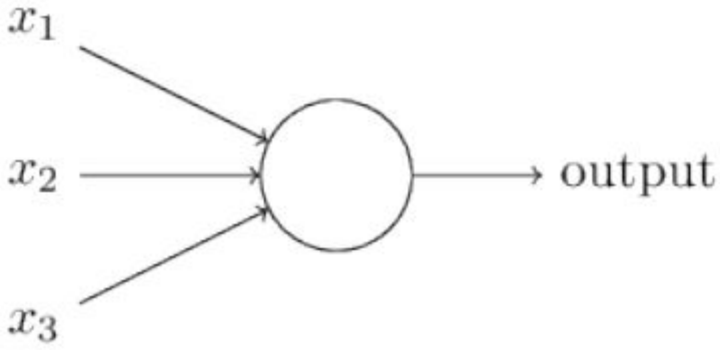
- Standardními technikami hrozně složité
- Zkusíme jiný přístup: udělat program, který se na základě dat “naučí”, jak která číslice vypadá
- Vyjdeme z toho, že existuje nějaká (matematická) funkce, která problém řeší ⇨ budeme ji chtít najít
- **Fitovaní funkce**

Rozpoznání ručně psaných číslic



Model neuronu - perceptron

- *n* binárních vstupů, jeden binární výstup
- váhy, prahová hodnota



Model neuronu - perceptron

$$\text{output} = \begin{cases} 0 & \text{if} \quad \sum_j w_j x_j \leq \text{threshold} \\ 1 & \text{if} \quad \sum_j w_j x_j > \text{threshold} \end{cases}$$

Model neuronu - perceptron

- váhy značí důležitost vstupní proměnné
- prahová hodnota jak “těžké” je aktivovat perceptron

$$\text{output} = \begin{cases} 0 & \text{if} \quad \sum_j w_j x_j \leq \text{threshold} \\ 1 & \text{if} \quad \sum_j w_j x_j > \text{threshold} \end{cases}$$

Model neuronu - perceptron

- model rozhodování
- příklad: výběr vysoké školy
    1. dobré uplatnění
    2. vysoká obtížnost
    3. osobní zájem

Model neuronu - perceptron

- model rozhodování
- příklad: výběr vysoké školy
    1. dobré uplatnění
    2. vysoká obtížnost
    3. osobní zájem
- **každý může přiřadit vstupům jinou váhu a má jinou prahovou hodnotu**

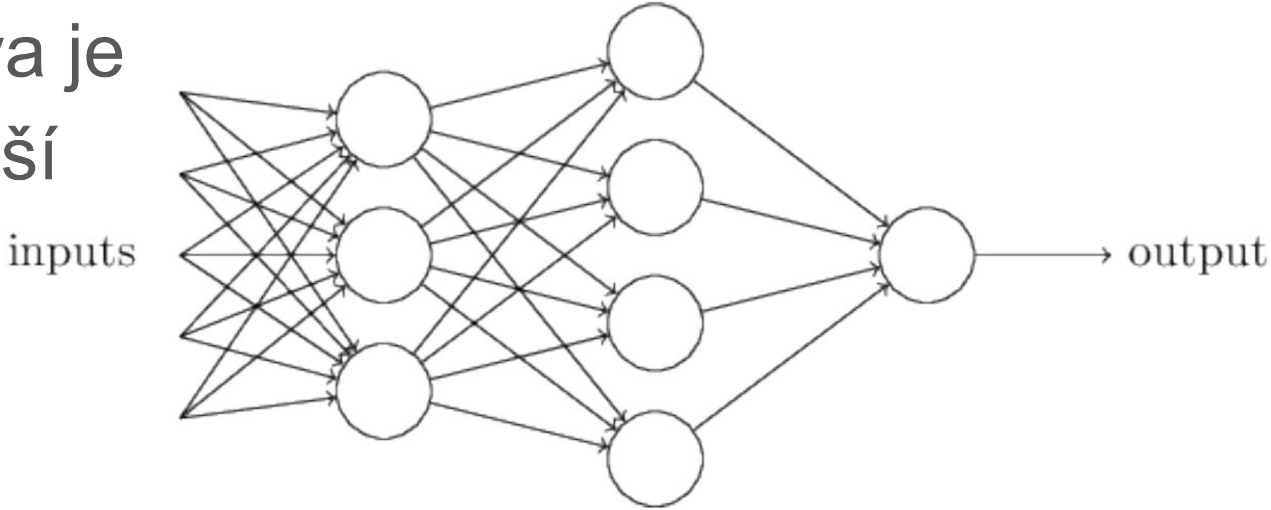
Model neuronu - perceptron

- vhodnější notace: zavedeme tzv. ***bias***
  $b := -threshold$
- skalární součin: $\sum_{i=1}^{n} w_i x_i + b = w^T x + b$

$$\text{output} = \begin{cases} 1 & \dots \text{ pokud } w^T \cdot x + b_i > 0, \\ 0 & \dots \text{ pokud } w^T \cdot x + b_i \leq 0 \end{cases}$$

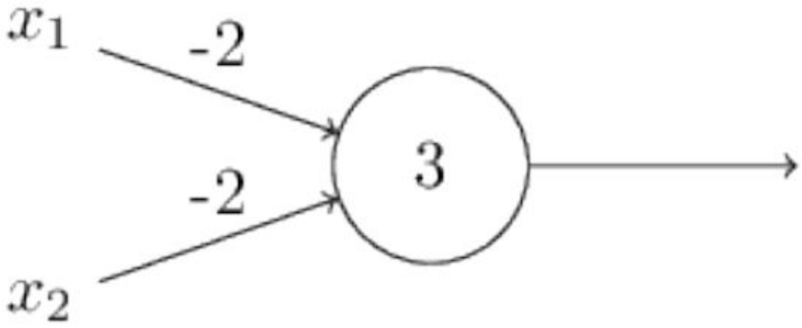
Síť perceptronů

- vrstvy vzájemně “propojených” perceptronů
- komplexní rozhodovací model
- druhá vrstva je abstraktnější



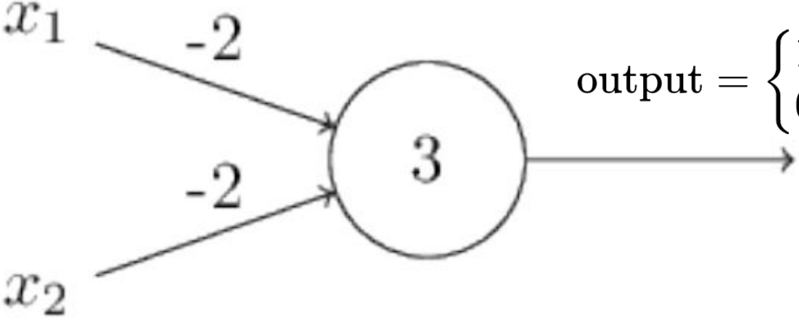
Síť perceptronů

- model jakékoliv logické funkce
- NAND, univerzální logický člen



Síť perceptronů

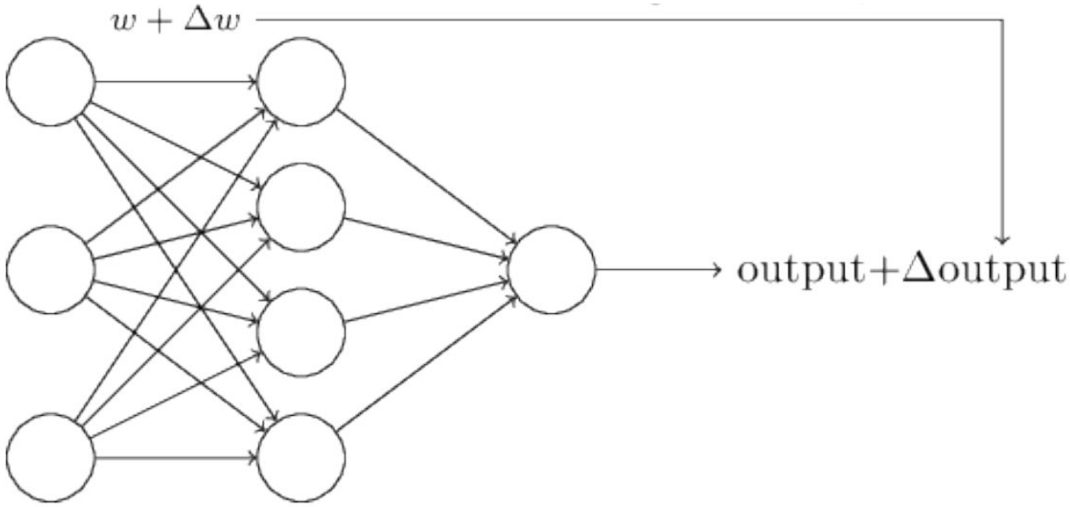
- model jakékoliv logické funkce
- NAND, univerzální logický člen



$$\text{output} = \begin{cases} 1, & \ldots \text{ pokud } (-2 \cdot x_1 - 2 \cdot x_2 + 3) > 0 \\ 0, & \ldots \text{ jinak} \end{cases}$$

Model neuronu - spojitý neuron

- sigmoid neuron
- abychom mohli nastavit váhy a biasy, chceme spojitost



Model neuronu - spojitý neuron

- změna váhy/biasu perceptronu může úplně změnit výstup sítě, nebo naopak nezpůsobit nic
- dovolíme $\text{output} = y \in (0,1)$
- aktivační funkce ***sigmoid***

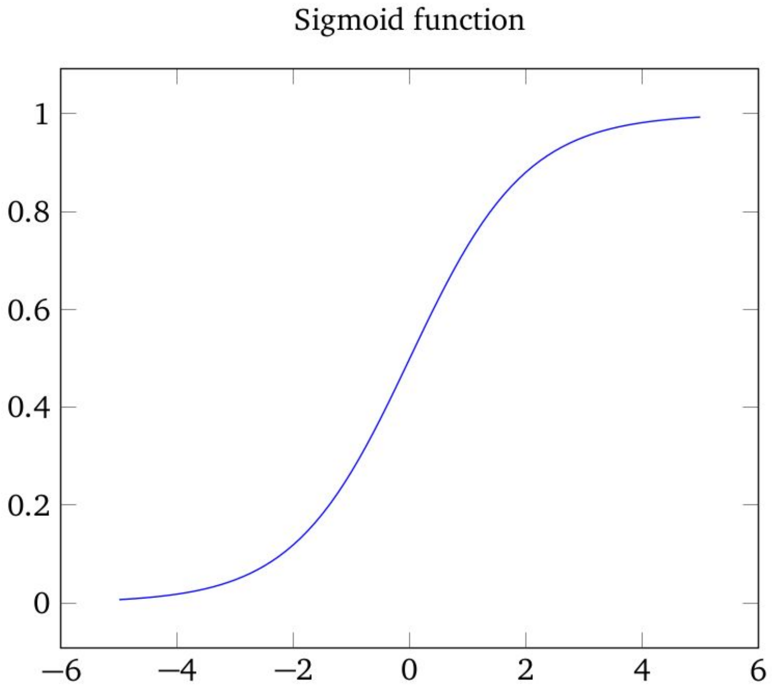
$$\sigma(z) = \frac{1}{1+e^{-z}} = \frac{1}{1+e^{-(\sum_i^n w_i x_i + b)}}$$

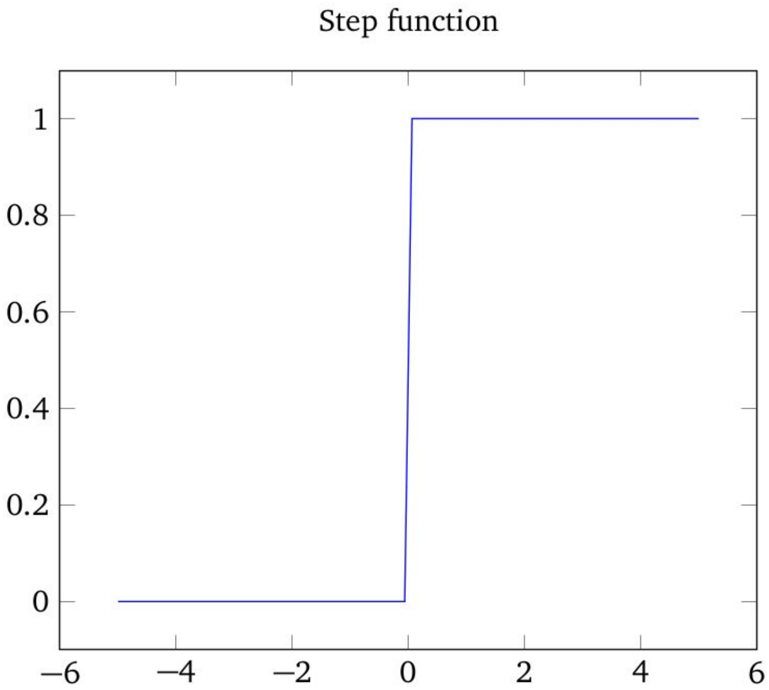
Model neuronu - spojitý neuron

- pokud z velké záporné, output se blíží k 1
- pokud z velké kladné, output se blíží k 0
- v limitách stejné, jako perceptrony

$$\sigma(z) = \frac{1}{1 + e^{-z}} = \frac{1}{1 + e^{-(\sum_i^n w_i x_i + b)}}$$

Model neuronu - spojitý neuron





Model neuronu - spojitý neuron

- zafixujeme vstup, neuron je funkce, ve které jsou váhy a bias proměnné
- chceme, aby změna v proměnné byla lineárně proporční změně výstupu - **spojitost**

$$\Delta \mathrm{output} \approx \sum_j \frac{\partial\, \mathrm{output}}{\partial w_j} \Delta w_j + \frac{\partial\, \mathrm{output}}{\partial b} \Delta b$$

Cvičení 1

- Ukažte, že vynásobíme-li všechny váhy a biasy v síti perceptronů kladnou konstantou, chování sítě se nezmění

Cvičení 1

- Ukažte, že vynásobíme-li všechny váhy a biasy v síti perceptronů kladnou konstantou, chování sítě se nezmění
- output jednoho perceptronu:

$$y = \begin{cases} 0 \ldots \text{ pokud } w^T x + b \leq 0, \\ 1 \ldots \text{ pokud } w^T x + b > 0. \end{cases}$$

- rozepíšeme skalární součin
a vynásobíme váhy a bias konstantou *c*:

Cvičení 1

- Ukažte, že vynásobíme-li všechny váhy a biasy v síti perceptronů kladnou konstantou, chování sítě se nezmění
- output jednoho perceptronu:

$$y = \begin{cases} 0 \ldots \text{ pokud } w^T x + b \leq 0, \\ 1 \ldots \text{ pokud } w^T x + b > 0. \end{cases}$$

- rozepíšeme skalární součin
  a vynásobíme váhy a bias konstantou *c*:

$$\sum_{i=1}^{n} c w_i x_i + cb = c \sum_{i=1}^{n} w_i x_i + cb = cwx + cb = c(wx + b)$$

Cvičení 1

$$\sum_{i=1}^{n} c w_i x_i + cb = c \sum_{i=1}^{n} w_i x_i + cb = c w^T x + cb = c(w^T x + b)$$

Cvičení 1

$$\sum_{i=1}^{n} c w_i x_i + cb = c \sum_{i=1}^{n} w_i x_i + cb = c w^T x + cb = c(w^T x + b)$$

- dosadíme do definice perceptronu, můžeme vydělit kladnou konstantou beze změny nerovnosti

Cvičení 1

$$\sum_{i=1}^{n} cw_i x_i + cb = c\sum_{i=1}^{n} w_i x_i + cb = cw^T x + cb = c(w^T x + b)$$

- dosadíme do definice perceptronu, můžeme vydělit kladnou konstantou beze změny nerovnosti

$$y = \begin{cases} 0 \ldots \text{ pokud } c\big(w^T x + b\big) \leq 0 \;\equiv\; w^T x + b \leq 0, \\ 1 \ldots \text{ pokud } c\big(w^T x + b\big) > 0 \;\equiv\; w^T x + b > 0. \end{cases}$$

Cvičení 1

$$\sum_{i=1}^{n} cw_i x_i + cb = c\sum_{i=1}^{n} w_i x_i + cb = cw^T x + cb = c(w^T x + b)$$

- dosadíme do definice perceptronu, můžeme vydělit kladnou konstantou beze změny nerovnosti

$$y = \begin{cases} 0 \ldots \text{ pokud } c\big(w^T x + b\big) \leq 0 \;\equiv\; w^T x + b \leq 0, \\ 1 \ldots \text{ pokud } c\big(w^T x + b\big) > 0 \;\equiv\; w^T x + b > 0. \end{cases}$$

- to platí pro libovolný perceptron, tedy i pro celou síť

Cvičení 2

- Mějme fixní vstup do sítě perceptronů tak, že: $w^T x + b \neq 0$ Zaměňte všechny perceptrony za spojité neurony a vynásobte kladnou konstantou ***c***. Ukažte, že pro $c \to +\infty$ se síť chová stejně jako původní síť perceptronů. Co se stane, pokud pro nějaký neuron neplatí $w^T x + b \neq 0$?

Cvičení 2

- Mějme fixní vstup do sítě perceptronů tak, že: $w^T x + b \neq 0$ Zaměňte všechny perceptrony za spojité neurony a vynásobte kladnou konstantou ***c***. Ukažte, že pro $c \rightarrow +\infty$ se síť chová stejně jako původní síť perceptronů. Co se stane, pokud pro nějaký neuron neplatí $w^T x + b \neq 0$?

- opět prozkoumáme chování jednoho neuronu

Cvičení 2

$$y = \sigma(w^T x + b) = \frac{1}{1 + \exp\left(-(w^T x + b)\right)} = \frac{1}{1 + \frac{1}{e^{w^T x + b}}} = \frac{e^{w^T x + b}}{e^{w^T x + b} + 1} = \frac{e^t}{e^t + 1}$$

$$= \frac{e^t + 1 - 1}{e^t + 1} = 1 - \frac{1}{e^t + 1}, \text{ přičemž } t = wx + b$$

Cvičení 2

$$y = \sigma(w^T x + b) = \frac{1}{1 + \exp\left(-(w^T x + b)\right)} = \frac{1}{1 + \frac{1}{e^{w^T x + b}}} = \frac{e^{w^T x + b}}{e^{w^T x + b} + 1} = \frac{e^t}{e^t + 1}$$

$$= \frac{e^t + 1 - 1}{e^t + 1} = 1 - \frac{1}{e^t + 1}, \text{ přičemž } t = wx + b$$

- vynásobíme konstantou $\mathrm{c}{>}0$ a dostaneme $1 - \dfrac{1}{e^{ct} + 1}$.

Cvičení 2

$$y = \sigma(w^T x + b) = \frac{1}{1 + \exp\left(-(w^T x + b)\right)} = \frac{1}{1 + \frac{1}{e^{w^T x + b}}} = \frac{e^{w^T x + b}}{e^{w^T x + b} + 1} = \frac{e^t}{e^t + 1}$$

$$= \frac{e^t + 1 - 1}{e^t + 1} = 1 - \frac{1}{e^t + 1}, \text{ přičemž } t = wx + b$$

- vynásobíme konstantou $\mathrm{c{>}0 \text{ a dostaneme }} 1 - \frac{1}{e^{ct} + 1}.$
- Rozlišíme tři případy:

Cvičení 2

$$y = \sigma(w^T x + b) = \frac{1}{1 + \exp\left(-(w^T x + b)\right)} = \frac{1}{1 + \frac{1}{e^{w^T x + b}}} = \frac{e^{w^T x + b}}{e^{w^T x + b} + 1} = \frac{e^t}{e^t + 1}$$

$$= \frac{e^t + 1 - 1}{e^t + 1} = 1 - \frac{1}{e^t + 1}, \text{ přičemž } t = wx + b$$

- vynásobíme konstantou $\mathrm{c{>}0 \text{ a dostaneme }} 1 - \frac{1}{e^{ct} + 1}.$
- Rozlišíme tři případy:

$$t > 0 :$$

Cvičení 2

$$y = \sigma(w^T x + b) = \frac{1}{1 + \exp\left(-(w^T x + b)\right)} = \frac{1}{1 + \frac{1}{e^{w^T x + b}}} = \frac{e^{w^T x + b}}{e^{w^T x + b} + 1} = \frac{e^t}{e^t + 1}$$

$$= \frac{e^t + 1 - 1}{e^t + 1} = 1 - \frac{1}{e^t + 1}, \text{ přičemž } t = wx + b$$

- vynásobíme konstantou $\text{c>0 a dostaneme } 1 - \frac{1}{e^{ct} + 1}.$
- Rozlišíme tři případy:

$$t > 0: \quad e^{ct} \xrightarrow{c \to +\infty} +\infty \;\Rightarrow\; \frac{1}{e^{ct} + 1} \xrightarrow{c \to +\infty} 0 \;\Rightarrow\; 1 - \frac{1}{e^{ct} + 1} \xrightarrow{c \to +\infty} 1.$$

Cvičení 2

$$y = \sigma(w^T x + b) = \frac{1}{1 + \exp\left(-(w^T x + b)\right)} = \frac{1}{1 + \frac{1}{e^{w^T x + b}}} = \frac{e^{w^T x + b}}{e^{w^T x + b} + 1} = \frac{e^t}{e^t + 1}$$

$$= \frac{e^t + 1 - 1}{e^t + 1} = 1 - \frac{1}{e^t + 1}, \text{ přičemž } t = wx + b$$

- vynásobíme konstantou $\mathrm{c{>}0 \; a \, dostaneme} \; 1 - \dfrac{1}{e^{ct} + 1}.$
- Rozlišíme tři případy:

$$t > 0: \quad e^{ct} \xrightarrow{c \to +\infty} +\infty \;\Rightarrow\; \frac{1}{e^{ct} + 1} \xrightarrow{c \to +\infty} 0 \;\Rightarrow\; 1 - \frac{1}{e^{ct} + 1} \xrightarrow{c \to +\infty} 1.$$

- zároveň víme, že vynásobením vah a biasu perceptronu nezměníme jeho výstup, sítě se tedy chovají stejně

Cvičení 2

- výstup neuronu: $y = 1 - \dfrac{1}{e^t + 1}$

$$t < 0:$$

Cvičení 2

- výstup neuronu: $y = 1 - \dfrac{1}{e^t + 1}$

$$t < 0: \; e^{ct} \xrightarrow{c \to +\infty} 0 \Rightarrow \frac{1}{e^{ct} + 1} \xrightarrow{c \to +\infty} 1 \Rightarrow 1 - \frac{1}{e^{ct} + 1} \xrightarrow{c \to +\infty} 0$$

Cvičení 2

- výstup neuronu: $y = 1 - \dfrac{1}{e^t + 1}$

$$t < 0: \; e^{ct} \xrightarrow{c \to +\infty} 0 \Rightarrow \frac{1}{e^{ct}+1} \xrightarrow{c \to +\infty} 1 \Rightarrow 1 - \frac{1}{e^{ct}+1} \xrightarrow{c \to +\infty} 0$$

$t = 0:$

- bude existovat neuron, pro který:

Cvičení 2

- výstup neuronu: $y = 1 - \dfrac{1}{e^t + 1}$

$$t < 0 : \; e^{ct} \xrightarrow{c \to +\infty} 0 \Rightarrow \frac{1}{e^{ct} + 1} \xrightarrow{c \to +\infty} 1 \Rightarrow 1 - \frac{1}{e^{ct} + 1} \xrightarrow{c \to +\infty} 0$$

$t = 0 :$

- bude existovat neuron, pro který:

$$1 - \frac{1}{e^{ct} + 1} = 1 - \frac{1}{e^0 + 1} = 1 - \frac{1}{1 + 1} = \frac{1}{2} \xrightarrow{c \to +\infty} \frac{1}{2}$$

Poznámka

- Vstupní vrstvu zakreslujeme jako vrstvu neuronů, byť formálně není, vrstvy mezi vstupem a výstupem nazveme ***skrytými***
- Bavíme se o tzv. ***feedforward*** sítích - tj. zakazujeme smyčky
- Často se těmto sítím říká Multi Layer Perceptron (MLP)

Poznámka