Теория информации, решения задач части 3

Table of Contents

1 Задание 3.1

Необходимо доказать, что коды Хэмминга и код Голея (23,12) с $d = 7$ удовлетворяют границе хэмминга с равенством. Это несложно показать.

Граница Хэмминга (в общем виде и для бинарных кодов):

$$M \leq \frac{q^n}{\sum_{i=0}^{t} \binom{n}{i}(q-1)^i} = \frac{2^n}{\sum_{i=0}^{t} \binom{n}{i}}$$

Известно, что для кодов Хэмминга верно $n = 2^r - 1,\ k = 2^r - r - 1,\ d = 3$. $d = 2 + 1$, значит $t = 1$. Подставим эти параметры в уравнение:

$$M \leq \frac{2^n}{\binom{n}{0} + \binom{n}{1}} = \frac{2^{2^r-1}}{\binom{2^r-1}{0} + \binom{2^r-1}{1}} = \frac{2^{2^r-1}}{1 + 2^r - 1} = \frac{2^{2^r-1}}{2^r} = 2^{2^r-r-1} = 2^k$$

Очевидно, что для любого линейного кода $M = 2^k$, отсюда граница Хэмминга точна до равенства.

Аналогичные рассуждения применим к коду Голея (23,12), $t = 3$.

$$M \leq \frac{2^n}{\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{3}} = \frac{2^{23}}{\binom{23}{0} + \binom{23}{1} + \binom{23}{2} + \binom{23}{3}} = \frac{2^{23}}{1 + 23 + 253 + 1771} = \frac{2^{23}}{2^{11}} = 2^{12}$$

Видим, что мы получили $k = 12$, как в определении кода Голея.

2 Задание 3.2

Вариант 87: $n = 25, k = 9, d = 14$.

Зададимся n и d. Оценим $M = 2^k$ через границы Хэмминга и Варшамова-Гилберта (как максимальная и минимальная тривиальная оценки).

Через Хэмминга:

$$M \leq \frac{2^n}{\sum_{i=0}^{t} \binom{n}{i}} = \frac{2^{25}}{\sum_{i=0}^{6} \binom{25}{i}} = 136$$

Таким образом, $k \leq log_2 136 = 7$.

Граница Варшамова-Гилберта для $q = 2$ выглядит следующим образом:

$$2^{n-k} > \sum_{i=0}^{d-2} \binom{n-1}{i}$$

Подставим реальные значения:

$$2^{25-k} > \sum_{i=0}^{12} \binom{24}{i} = 9740686, \quad \frac{2^{25}}{9740686} > 2^k, \quad k < 1.76$$

Таким образом, граница Варшамова-Гилберта дает нижнюю оценку $k \geq 1$, то есть гарантирует существование кода с $k = 1$ при заданных n и d.

Из таблицы кодов с максимальным d видно, что для $n = 25$ и $d = 14$ есть код с $k = 3$, что удовлетворяет полученным результатам.

3 Задание 3.3

Вариант 87: $n = 25, k = 9, d = 14$.

Будем оценивать d через n и k. воспользуемся теми же границами, что и в прошлом задании.

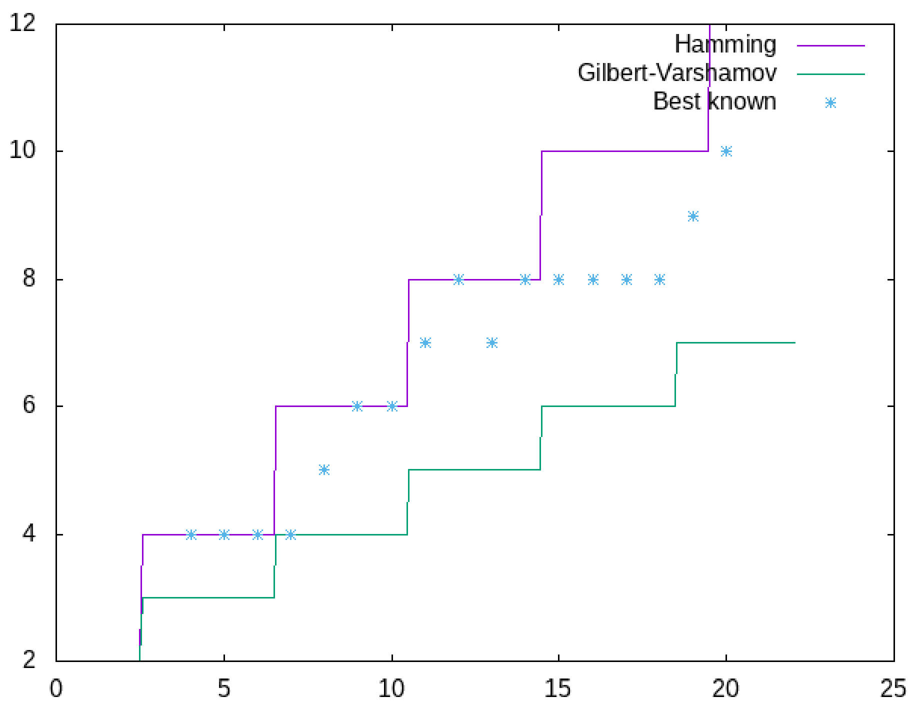
Напишем код, перебирающий d через границу Хэмминга и находящий максимальное t, при котором условие проверки верно. Код находится в приложении. Полученное d (максимальное, удовлетворяющее границе Хэмминга) – 10.

Аналогично сделаем для границы Варшамова-Гилберта: $d <= 7$. Таким образом, разумно было бы искать максимальный d в промежутке $[8 \dots 10]$. И, действительно, лучший известный код для таких параметров имеет $d = 8$.

4 Задание 3.5

Пусть $n = 2 * k$. Посмотрим на границы Хэмминга и Варшамова-Гилберта для этих параметров для первых значений k.

Построенный график $d(k)$ (где $n = 2 * k$) иллюстрирует соответствие лучших кодов (взятых из таблице в учебнике, конец главы 3) и двух границ.



Видно, что с увеличением k минимальное расстояние отдаляется от границы Хэмминга. Поскольку вывод границы Хэмминга основана на задаче упаковки пространства размерности n шарами, могу предположить, что задача усложняется с увеличением n.

Цитируя статью с wolfram mathworld[1]:

> The analog of face-centered cubic packing is the densest lattice packing in four and five dimensions. In eight dimensions, the densest lattice packing is made up of two copies of face-centered cubic. In six and seven dimensions, the densest lattice packings are cross sections of the eight-dimensional case. In 24 dimensions, the densest packing appears to be the Leech lattice. For high dimensions (~1000-D), the densest known packings are nonlattice.

И действительно, для пространства 24 существует выделенный хороший код Голея[2]. То есть можно полагать, что сложность достижения d сводится к сложности решения задачи об n-мерной упаковке сфер.

5 Задание 3.8

Реализация метода в приложении. Примеры запуска на разных данных (код генерирует матрицу H):

Код (8,1) с $d = 8$ по границе Варшамова-Гилберта:

```
λ> distance $ buildGilbertVarshamovH 8 1
8
λ> putStrLn $ showM $ buildGilbertVarshamovH 8 1
10000001
11000000
10100000
10010000
10001000
10000100
10000010
```

Код (8,3) с $d = 3$.

```
λ> distance $ buildGilbertVarshamovH 8 3
3
λ> putStrLn $ showM $ buildGilbertVarshamovH 8 3
00000001
11100000
10011000
01010100
11010010
```

Алгоритм работает таким образом. На каждом шаге мы имеем $s < n$ уже построенных столбцов x будущей матрицы H. Мы пытаемся найти такой v, что любые $d - 1$ комбинаций векторов $d : x$ линейно независимы. v мы выбираем, перебирая по всем столбцам высоты r. Оценим стоимость одного перебора – проверки на лнз, проделанной для каждого v. Мы имеем, грубо говоря, d столбцов которые необходимо проверить на лнз. Мы смотрим на все бинарные комбинации этих столбцов (которых 2^d) и для каждого выполняем сумму и проверку на ноль. Сумма выбранных $q < d$ векторов стоит $q * k$ операций сложения. Итого имеем $d * r * 2^d$. $d < n$, поэтому можем оценить одну проверку на ЛНЗ в $n * r * 2^n$. Также каждая проверка совершается для v, всего v, как уже было замечено, 2^r. Всего мы проделываем это для каждого столбца, поэтому домножаем на n. Итоговая оценка алгоритма $O(nr2^n2^r * n) = O(n^2r2^{rn})$.

Перейдем к практическим результатам. Исходя из оценки, я перебирал n при $k = 3$ (так асимптотика максимальна, потому что r больше). Моя программа на (18,3) ($d = 8$) выдает решение за 22 секунды, на (19,3) $d = 9$ работает больше двух. Если же k высоко, то алгоритм работает быстро для больших n (например, для (30,20) почти мгновенно).

6 Приложения

К заданию 3.3 (поиск d через n и k по границам Хэмминга и Варшамова-Гилберта):

```
findDRange :: Integer -> Integer -> (Integer,Integer)
findDRange n k = (lastB hammingCond [1..n], lastB gilbertVarshamovCond [1..n])
  where
    lastB cond = unsafeLast . takeWhile cond
    cast :: (Integral a, Num b) => a -> b
    cast = fromIntegral
    hammingCond :: Integer -> Bool
    hammingCond d =
        let t = (d - 1) `div` 2
        in (2.0^k::Double) <= ((2.0^n) / (cast (sum $ map (combinationsN n) [0..t]) :: Double))
    gilbertVarshamovCond :: Integer -> Bool
    gilbertVarshamovCond d = 2^(n-k) > (sum $ map (combinationsN $ n -1) [0..(d-2)])
```

К заданию 3.8:

```
buildGilbertVarshamovH :: Integer -> Integer -> [BVector]
buildGilbertVarshamovH n k = genVectors (n-1) [initVec]
  where
    genVectors 0 acc = acc
    genVectors l acc =
        let a = fromMaybe (error "couldn't find one") $
                find (\x -> not $ linearDependentSubset (d-1) (x:acc)) (binaryVectors r)
        in genVectors (l-1) (a:acc)

    d = snd $ findDRange n k
    r = n - k
    -- Vector 00..01 of length r
    initVec = True : replicate (fromIntegral $ r-1) False
```

Footnotes:

[1] http://mathworld.wolfram.com/HyperspherePacking.html

[2] https://en.wikipedia.org/wiki/Sphere_packing#Other_spaces

Author: Волхов Михаил, M4139
Created: 2017-11-28 Tue 13:39