Теория кодирования, д/з по главам 4,7,8

Table of Contents

Весь код для решения задач доступен в открытом репозитории: https://github.com/volhovm/coding-theory-itmo-2017, большая часть алгоритмов реализована в файле `Lib.hs`.

1 Задание 4.2

Был написан код переборного декодирования по максимуму правдоподобия и максимуму апостериорной вероятности. Эксперимент имел входным параметром i (число итераций), код, задаваемый матрицей G (индивидуальная, из главы 2). График построен на 10^6 итерациях, необходимых для обнаружения ошибки в 10^{-5}. Алгоритм генерировал случайные входные вектора, пропускал их через канал, декодировал и считал ошибку. Получившийся результат представлен на графике:

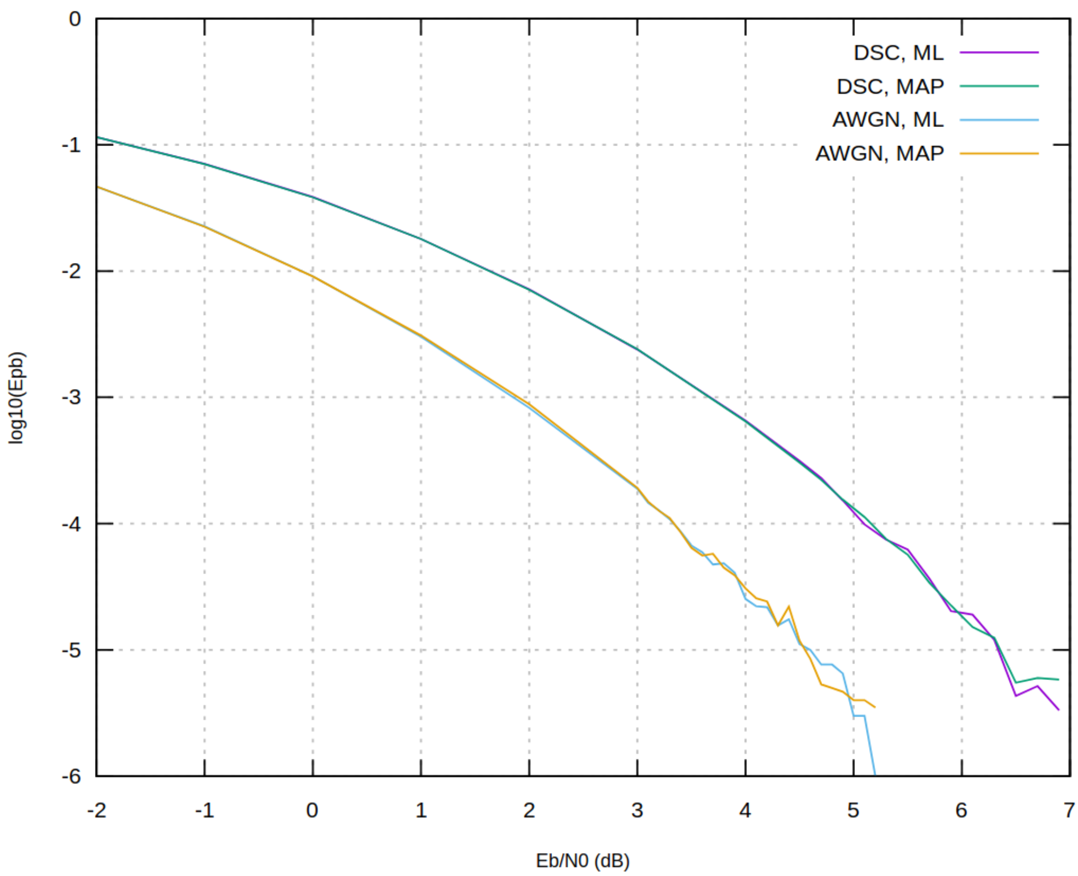


Figure 1: Ошибка на бит для линейного кода

Отметим, что декодирование по МАВ почти не отличается от декодирования по МП. Энергетический выигрыш по сравнению с передачей информации без кодирования при ошибке 10^{-5} составляет $9.6 - 4.5 = 5.1$ дБ, то есть 3.2 раза для декодирования с мягкими решениями (АБГШ) и $9.6 - 6.3 = 3.3$ дБ, то есть 2.1 раз для жестких решений (ДСК). Соответственно, разница с асимптотами декодирования составляет $4.5 + 1.59 = 6.19$ дБ (4.15 раз) для мягких решений и $6.3 - 0.37 = 5.93$ дБ (3.9 раза) для жестких решений.

2 Задание 4.4

Были написаны программы построения решеток (синдромной и через МСФ), полученные решетки для H (синдромная) и G (H интерпретированная как G для МСФ) представлены на изображениях:

Напомним, что матрица H имеет вид:

$$H = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

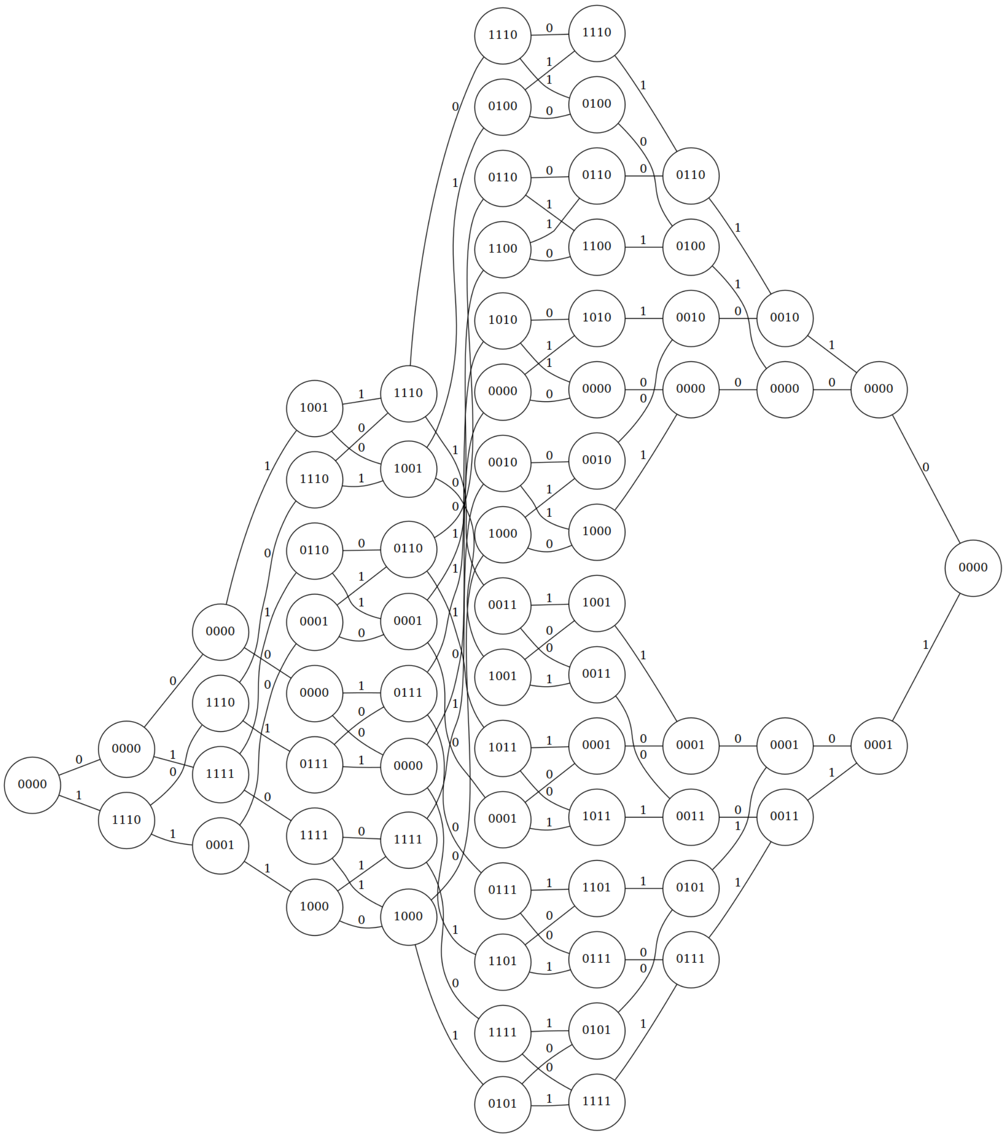


Figure 2: Решетка, построенная по проверочной матрице

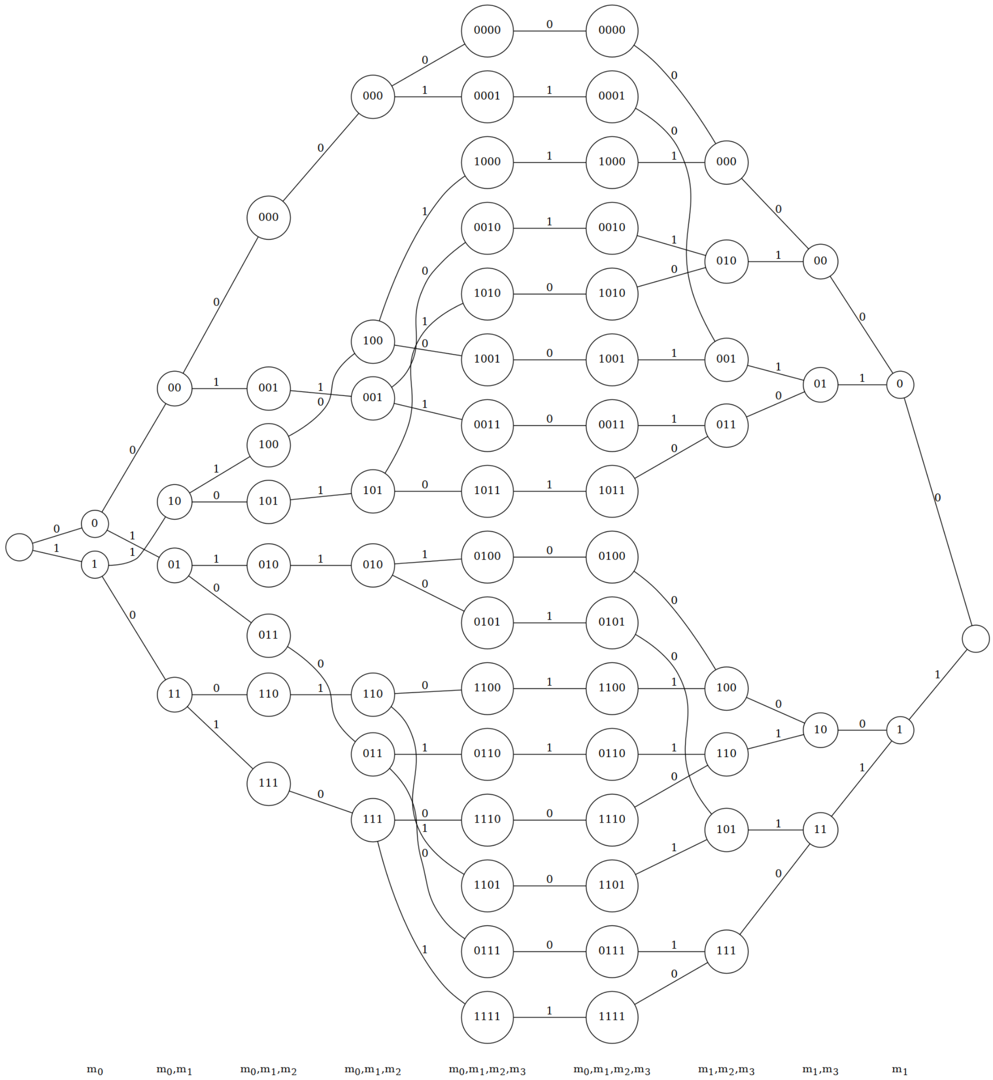


Figure 3: Решетка, построенная по порождающей матрице

3 Задание 7.1

ЛРОС тривиально строится перебором для небольших значений длины заданной последовательности (практически показано, что перебором сложно искать ЛРОС начиная с размера 22).

Найденный ЛРОС имеет первоначальное состояние регистров 110010 и вектор мультипликаторов 001101. Первые 24 бита последовательности (12 заданых и 10 дополнительных): 0100110001111001010110.

4 Задание 7.6

Я реализиловал необходимые утилиты для построения БЧХ кодов и декодер для БЧХ кодов над F_{2^k}. Декодер реализует алгоритм БЧХ и имеет две версии – в одной полином локаторов ошибок вычисляется напрямую с помощью решения матрицы методом Гаусса, в другой для этого используется алгоритм БМ.

Итак, в упражнении предлагается построить двоичный БЧХ код длины 31, исправляющий 3 ошибки. Для этого нам нужно поле F_{2^5}, которое можно построить как $F_2[x]/(x^6 + x + 1)$, поскольку этот полином простой и имеет степень 6. Генератор поля – $x + 1$. Также, для исправления трех ошибок нам необходимо иметь $d = 7$. Будем строить БЧХ код в узком смысле – искать последовательные степени генератора начиная строго с $b = 1$.

Алгоритм построения БЧХ кода выдает следующие значения. Число циклотомических классов, необходимых для покрытия $\{1 \dots d-1\}$ – три:
$\{\{1, 2, 4, 8, 16, 32\}, \{3, 6, 12, 24, 48, 33\}, \{5, 10, 20, 40, 17, 34\}\}$. Соответствующие минимальные полиномы и порождающий многочлен:

$$
\begin{aligned}
M_1(x) &= 1 + x + x^6 \\
M_3(x) &= 1 + x + x^2 + x^4 + x^6 \\
M_5(x) &= 1 + x + x^2 + x^5 + x^6 \\
g(x) &= 1 + x + x^2 + x^3 + x^6 + x^7 + x^9 + x^{15} + x^{16} + x^{17} + x^{18}
\end{aligned}
$$

Степень порождающего многочлена – 18, соответственно при $n = 30$ имеем $k = 12$. Несложно построить также G и H этого циклического кода, чтобы привести примеры векторов, этому коду принадлежащих. Поскольку кодовые слова достаточно длинные, приведем только один пример – "000000000001111001101000001111".

Если запустить алгоритм ПГЦ на таком векторе, он вернет его же, поскольку обнаружит, что все S_i равны нулю. Сделаем в этом векторе три ошибки в символах с индексами $2, 4, 6$ (нумерация с нуля), заменив их на единицы, и запустим ПГЦ.

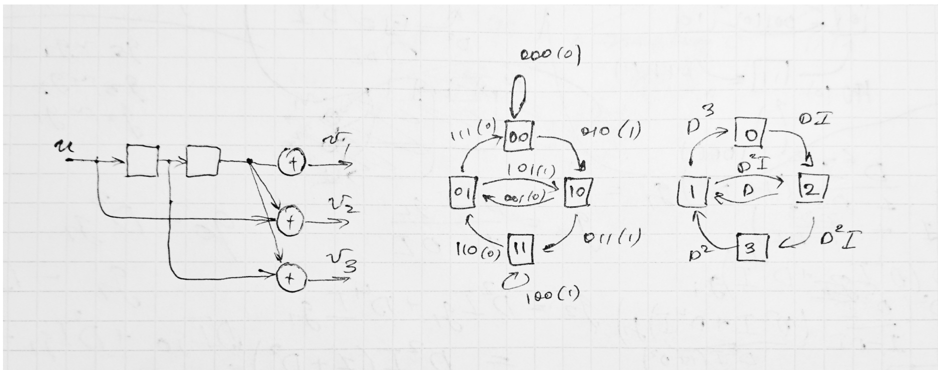
```
task76 = do
    -- ...
    print $ second showVec $
      decodePGZ bchc $ fromStrVec "001010100001111001101000001111"

-- Output: ([7,2,4],"000000000001111001101000001111")
```

Таким образом, ПГЦ нашел все три ошибочных индекса и выдал исправленную строку. Произвольный порядок индексов обусловлен алгоритмом поиска корней полинома локаторов, который не гарантирует никакого конкретного порядка на выходе.

5 Задания 8.6-8.7

Мой вариант (87) предполагает работу со сверточным кодом $(4, 5, 6)$, с параметрами, соответственно, $k = 1$ и $n = 3$. Полиномы в полном виде: D^2, $D^2 + 1$, $D^2 + x$. Схема кодера, а также диаграмма состояния кода представлены на следующем изображении:



Полная система для нахождения расширенной производящей функции кода $T(D, I)$ выглядит так:

$$
\begin{aligned}
g_0 &= D^3 g_1 \\
g_1 &= D g_2 + D^2 g_3 \\
g_2 &= D^2 I g_1 + DI \\
g_3 &= DI g_3 + D^2 I g_2
\end{aligned}
$$

Система решается подстановкой g_3 и g_2 в g_1, а затем g_1 в g_0. В итоге производящая функция и ее производная $F(D)|_{I=1}$ имеют следующий вид:

$$
T(D,I) = -\frac{D^5 I(1 - DI + D^3 I)}{-1 + DI + D^3 I - D^4 I^2 + D^6 I^2}
$$

$$
F(D) = \frac{-D^9 + 2D^8 + D^7 - 2D^6 + D^5}{(D^6 - D^4 + D^3 + D - 1)^2}
$$

Также сразу приложим вычисления необходимые для задания 8.7. Нам предлагается построить графики оценки вероятности ошибки для кода со спектром, равным усеченному $T(D,I)$. Для этого представим $T(D,I)$4 в виде ряда (по возрастающей степени I) и возьмем из него 10 и 5 элементов соответственно:

$$
\begin{aligned}
T(D,I) = &D^5 I + 2D^8 I^2 + D^9 I^3 + D^{10} I^4 + D^{11} I^3 (I^2 + 3) + \\
&D^{12} I^4 (I^2 + 2) + D^{13} I^5 (I^2 + 2) + D^{14} I^4 (I^4 + 2I^2 + 5) + O(D^{15})
\end{aligned}
$$

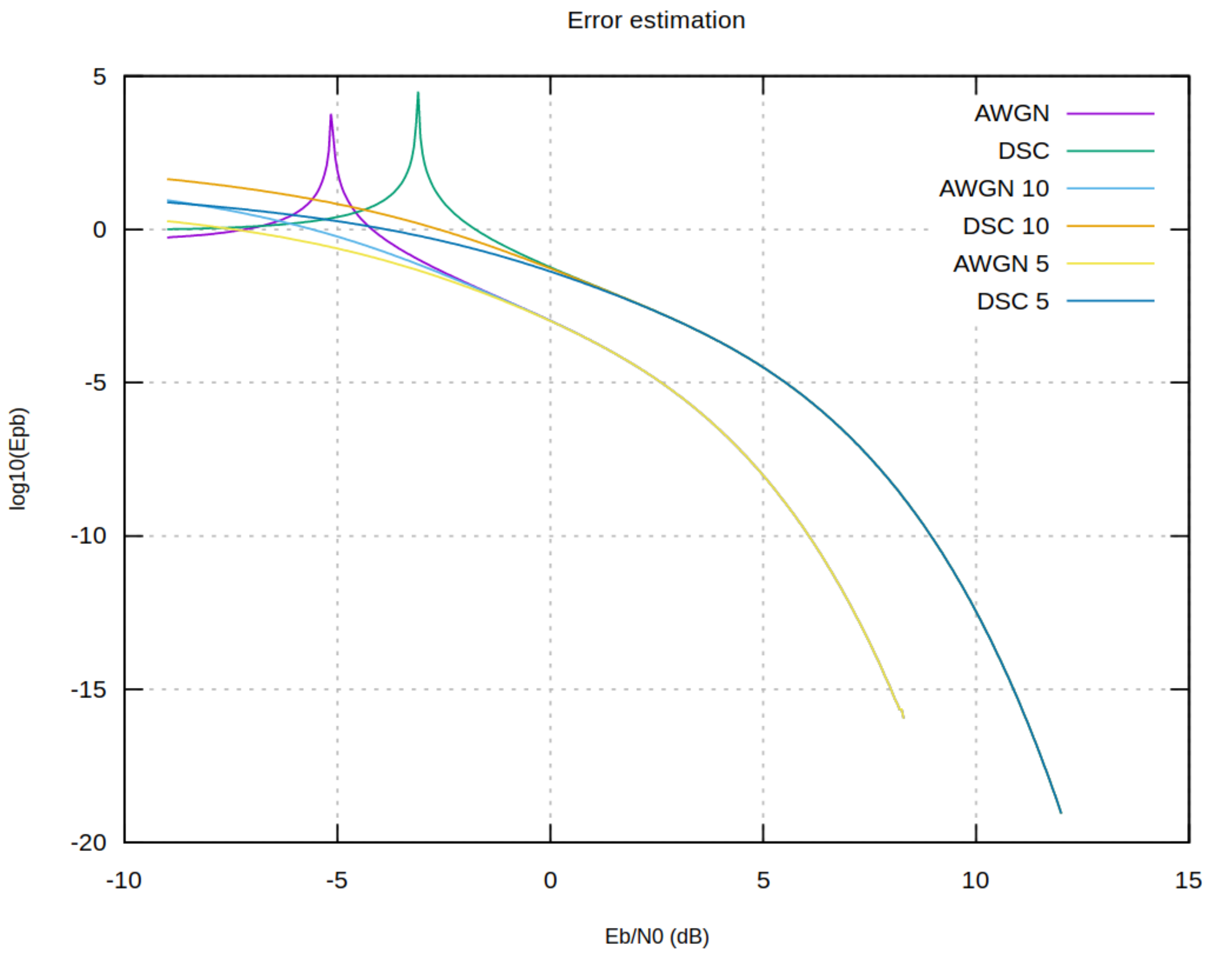
Как видим, разложение соответствует диаграмме – несложно обнаружить один путь веса 5, два пути веса 8, и так далее. Усеченные производящие функции кода имеют вид:

$$
\begin{aligned}
T_5(D,I) &= D^5 I + 2D^8 I^2 + D^9 I^3 + D^{10} I^4 + 3D^{11} I^5 \\
T_{10}(D,I) &= D^5 I + 2D^8 I^2 + D^9 I^3 + D^{10} I^4 + D^{11} I^3 (I^2 + 3) + D^{12} I^4 (I^2 + 2) + D^{13} I^5 (I^2 + 2)
\end{aligned}
$$

Проинтегрировав $T_5(D,I)$ и $T_{10}(D,I)$ и приняв $I = 1$, получаем:

$$
\begin{aligned}
F_5(D) &= D^5 + 4D^8 + 3D^9 + 4D^{10} + 14D^{11} \\
F_{10}(D) &= D^5 + 4D^8 + 3D^9 + 4D^{10} + 14D^{11} + 14D^{12} + 17D^{13} + 40D^{14} + 48D^{15} + 62D^{16}
\end{aligned}
$$

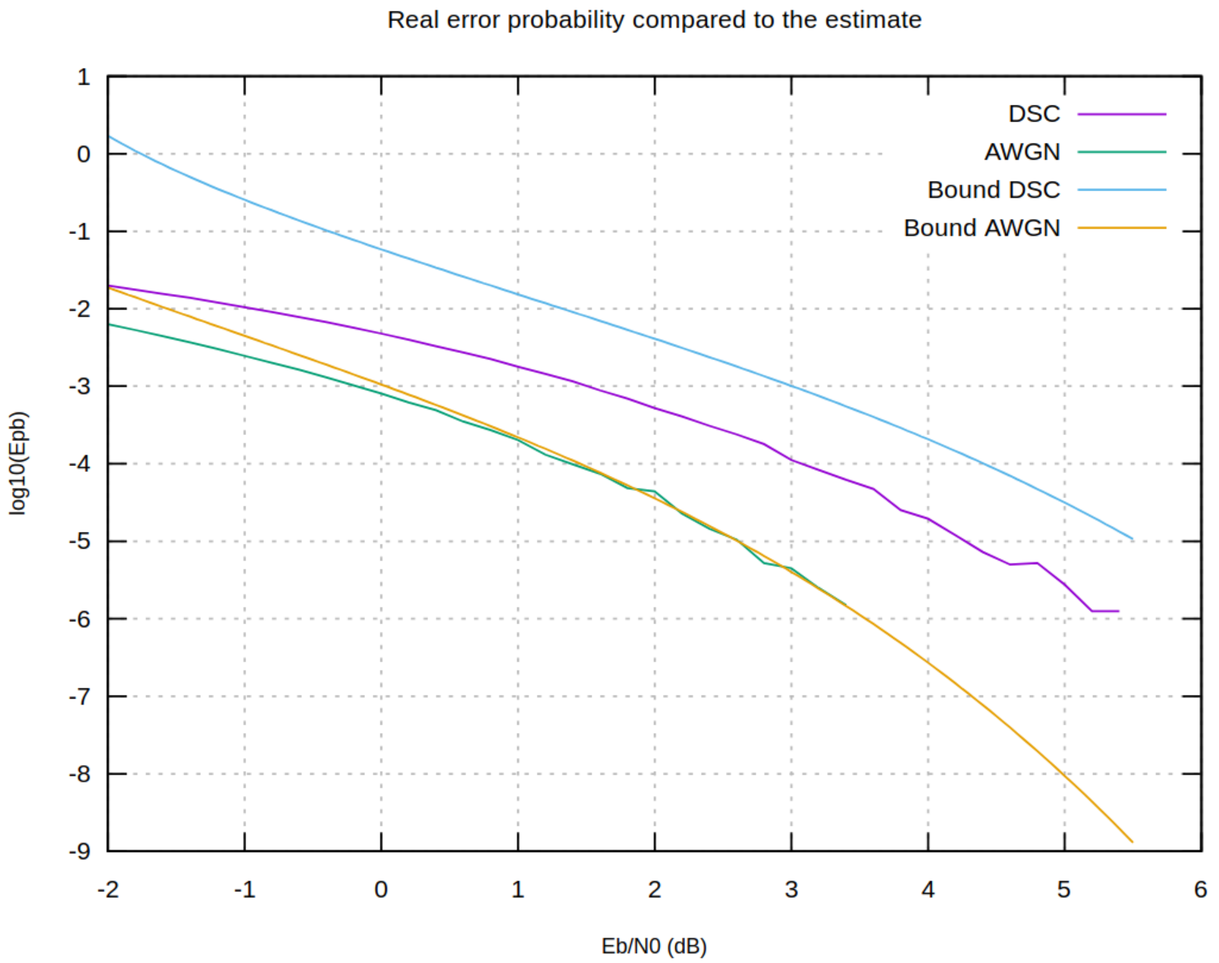
Далее, построим графики оценок вероятностей ошибки для соответственно $F(D), F_5(D), F_{10}(D)$. Для ДСК как обычно принимаем $p_0 = Q(\sqrt{2E/N_0})$ и следовуем выкладкам параграфа 8.3 учебника. В результате получаем следующий график:



На графике показана зависимость оценки вероятности ошибки на бит (ее логарифм, показаны показатели степени по основанию 10) от отношения сигнал/шум на сигнал (в дБ). Оценке вероятности на ДСК соответствуют функции DSC (discrete stationary channel), на АБГШ – AWGN (abstract white gaussian noise). Цифрам 5 и 10 соответствуют усеченные спектры кода. Как можно видеть из графика, оригинальные значения имеют выраженный спайк, а менее точные приближения (с точки зрения наличия меньшего количества элементов разложения) сглажены в этом месте. Кроме того, верхняя граница на вероятность ошибки у АБГШ существенно меньше – впрочем, это не вызывает удивления (такой же результат был получен и в (4.2)).

6 Задание 8.8

В этом задании я реализовал декодер максимального правдоподобия для усеченного сверточного кода – референс реализация через перебор всех кодовых слов и декодер Витерби (который работает, ожидаемо, быстрее). Далее экспериментальная ошибка на бит при декодировании была построена на графике для сравнения с экспериментальной верхней границей, полученной в предыдущем упражнении.



Как видим, верхняя граница действительно выше экспериментальных данных. Более того, граница при декодировании с АБГШ ближе к реальным данным, что и было предсказуемо ("…при высоких отношениях сигнал/шум…аддитивные оценки дают вполне приемлимые по точности результаты", стр. 239 учебника). В подсчетах я использовал усеченную решетку длины $L = 5$ (кодирую последовательности длины 4, к ним добавляется два нуля, кодовые слова имеют длину $3 * 6 = 18$) – экспериментально удостоверился, что графики для более высоких значений L почти не отличаются, но с которткими решетками существенно быстрее работает кодирование и декодирование. Также экспериментально был проверен факт $d_f = 5$ – код гарантировано исправляет любые две ошибки.

Author: Волхов Михаил, M4139

Created: 2018-06-20 Wed 16:19