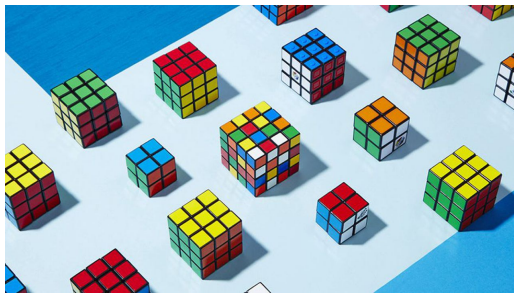


Rubik's cube et la théorie des groupes

Anastasiia Chernetcova, supervisé par Yves Aubry

Mars 2022



Introduction

- ❶ Le cube se compose de 3^3 petits cubes ;
 - ❷ 7 sont fixes :
 - ❶ le cube central ;
 - ❷ le cube au centre des tranches (3).
- et 20 mobiles :
- ❶ Les coins, au nombre de 8 (1) ;
 - ❷ Les arêtes, au nombre de 12 (2).

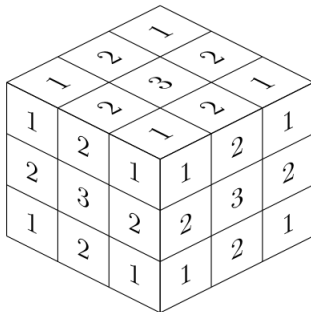


Figure – Les parties fixes et mobiles du cube

Introduction

But du jeu = résoudre le Rubik's cube, ie le ramener dans son état d'origine.

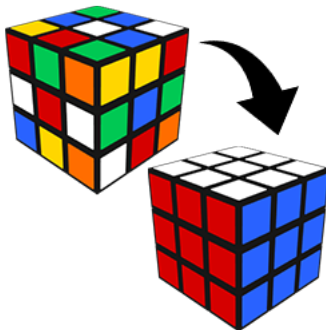


Figure – Résoudre le Rubik's cube

- Tranche du Rubik's cube = partie tournante composée de 9 pièces ;
- On notera les faces U, F, L, R, B, D .
- U, F, L, R, B, D seront aussi les rotations dans le sens des aiguilles d'une montre des mêmes faces. On notera R^{-1} la rotation dans le sens contraire des aiguilles d'une montre.

Groupe du Rubik's cube

On notera les coins comme indiqué dans la figure 3 et les arêtes comme indiqué dans 4.

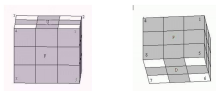


Figure – Numérotation des coins

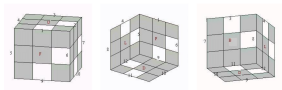


Figure – Numérotation des arêtes

- 1 (Rub, \circ) contient toutes les transformations du Rubik's cube engendrées par les rotations des 6 tranches.
- 2 $Rub =$ groupe de Rubik's cube *légal*, $G \supset Rub =$ groupe du Rubik's cube *illégal* ou élargi.

- 1 Posons G_C le groupe d'action sur les coins et G_A le groupe d'action sur les arêtes. $G \simeq G_C \times G_A$.
- 2 $\text{ord}(G_C) = 8! \times 3^8$.
- 3 $\text{ord}(G_A) = 12! \times 2^{12}$.
- 4 $\text{ord}(G) = \text{ord}(G_C) \times \text{ord}(G_A) = 8! \times 3^8 \times 12! \times 2^{12}$.

Théorème 0.1

Rub est un sous-groupe de G d'indice 12.

Corollaire 1

$$|Rub| = \frac{1}{12} \times 8! \times 3^8 \times 12! \times 2^{12} \simeq 43 \times 10^{18}.$$

Construction du groupe de Rubik's cube

Objectif : montrer que $G \simeq ((\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^8 \rtimes \mathfrak{S}_8) \times ((\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{12} \rtimes \mathfrak{S}_{12})$.

$\forall g \in G, g = (\pi_C(g), \pi_A(g))$.

- 1 $\pi_C : G \rightarrow G_C$ est la projection canonique de G sur G_C qui laisse fixe A ;
- 2 $\pi_A : G \rightarrow G_A$ est la projection canonique de G sur G_A qui laisse fixe C .

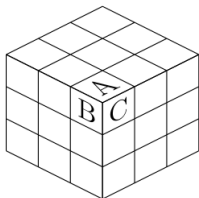


Figure – Les 3 facettes d'un coin

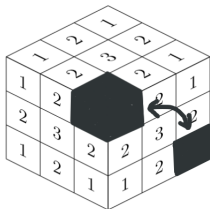


Figure – Les permutations des coins

Si l'on ne regarde que les positions des coins, il existera un morphisme

$$\sigma_C : \begin{array}{ccc} G_C & \longrightarrow & \mathfrak{S}_C \simeq \mathfrak{S}_8 \\ g & \longmapsto & \sigma_C(g) \end{array} .$$

- σ_C surjectif ;
- $\text{Ker}(\sigma_C) = \text{Rot}_C$, le groupe qui contient les rotations des coins.

- $\rho_C : G_C \rightarrow \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}^8$ associe à $g \in G_C$ le pivotement des coins.
- $\rho_C(g) = (n_1, \dots, n_8)$.
- Si g agit sur un coin j , alors g orientera le coin j de n_j tiers de tour dans le sens direct.
- Groupe cyclique d'ordre 3, donc isomorphe à $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$;
- $\text{Rot}_C \simeq (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^C \simeq (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^8$.

F	$(2, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 2)$
D	$(0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$
$F \circ U$	$(2, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 2)$

Table – Les orientations des coins induites par les rotations F , D , $F \circ U$

- $g \in G_C$ se décompose en le produit $\rho_C(g)\sigma_C(g)$ et cette écriture est unique.

Remarque 1

$$hg = \rho_C(h)\sigma_C(h)\rho_C(g)\sigma_C(g) = \underbrace{\rho_C(h)\sigma_C(h)\rho_C(g)\sigma_C(h)^{-1}}_{\rho_C(hg)} \underbrace{\sigma_C(h)\sigma_C(g)}_{\sigma_C(hg)}.$$

- Relation caractéristique d'un produit semi-direct interne.
- $G_C \simeq \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}^8 \rtimes \mathfrak{S}_8$.

- $\forall \rho \in \text{Rot}_C, \rho = (n_x)_{x \in C} \in (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^C$, où chaque coin x subit une rotation de n_x tiers de tour.
- Rotation totale de $g : rt_C(g) := \sum_{x \in C} n_x \in \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$.

Lemme 1

$rt_C : (G_C, \circ) \rightarrow (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}, +)$ est un morphisme de groupes.

Remarque 2

Pour tout $g, h \in G_C$ tels que $\rho_C(g) = (n_x)_{x \in C}$ et $\rho_C(h) = (n'_x)_{x \in C}$, si l'on note $\rho_C(gh) = (n''_x)_{x \in C}$ on a, pour tout $x \in C$:

$$n''_x = n_x + n'_{\sigma^{-1}(g)(x)}.$$

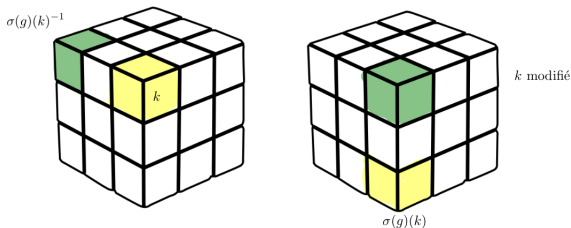


Figure – Schéma explicatif

Démonstration du lemme.

- Soient $g, h \in G_C$, où $g = \rho_C(g)\sigma_C(g)$ et $h = \rho_C(h)\sigma_C(h)$. Notons $gh = \rho_C(gh)\sigma_C(gh)$.

-

$$\begin{aligned} gh &= \rho_C(g)\sigma_C(g)\rho_C(h)\sigma_C(h) \\ &= \underbrace{\rho_C(g)\sigma_C(g)\rho_C(h)\sigma_C(g)^{-1}}_{\rho_C(gh)} \underbrace{\sigma_C(g)\sigma_C(h)}_{\sigma_C(gh)}. \end{aligned}$$

- $\rho_C(gh) = (n''_x)_{x \in C} = n_x + n'_{\sigma_C(g)(x)-1}$.
- $rt_C(gh) = \sum_{x \in C} (n_x + n'_{\sigma_C(g)(x)-1}) = \sum_{x \in C} (n_x + n'_x)$.





Figure – Les permutations des arêtes

Si l'on ne regarde que les positions des arêtes, il existera un morphisme

$$\sigma_A : \begin{array}{ccc} G_A & \longrightarrow & \mathfrak{S}_A \simeq \mathfrak{S}_{12} \\ g & \longmapsto & \sigma_A(g) \end{array} .$$

- σ_A surjectif ;
- $\text{Ker}(\sigma_A) = \text{Rot}_A$, le groupe qui contient les rotations des arêtes.

- $\rho_A : G_A \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}^{12}$ associe à $g \in G_A$ le pivotement des arêtes.
- $\rho_A(g) = (m_1, \dots, m_{12})$.
- Si g agit sur la j^{e} arête, alors g orientera cette arête de m_j demies de tour.
- Groupe cyclique d'ordre 2, donc isomorphe à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$;
- $\text{Rot}_A \simeq (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^A \simeq (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{12}$.

F	$(1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0)$
D	$(0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 1)$
$F \circ U$	$(1, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0)$

Table – Les pivotements d'arêtes induites par les mouvements élémentaires

- $g \in G_A$ se décompose en le produit $\rho_A(g)\sigma_A(g)$ et cette écriture est unique.
- $G \simeq \text{Rot}_A \rtimes \mathfrak{S}_A$.
- $\forall \rho \in \text{Rot}_A, \rho = (m_y)_{y \in A} \in (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^A$, où chaque arête y subit une rotation de m_y demis de tour.
- Rotation totale de g : $rt_A(g) := \sum_{y \in A} m_y \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Lemme 2

$rt_A : (G_A, \circ) \rightarrow (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, +)$ est un morphisme de groupes.

Théorème fondamental du Rubik's cube

Soit $g \in G$. On écrit

$$g = \rho_C \sigma_C \rho_A \sigma_A, \rho_C \in \text{Rot}_C, \rho_A \in \text{Rot}_A, \sigma_C \in \mathfrak{S}_C, \sigma_A \in \mathfrak{S}_A.$$

Soit $E : g \rightarrow \{\pm 1\}$, $E(g) = \varepsilon(\sigma_A(g))\varepsilon(\sigma_C(g))$.

On a le morphisme suivant

$$\begin{aligned} rt : G &\longrightarrow \{\pm 1\} \times (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \\ g &\longmapsto (E(g), rt_C \circ \pi_C(g), rt_A \circ \pi_A(g)) \end{aligned}$$

$$[G : \text{Ker}(rt)] = 12.$$

Théorème 0.2

$Rub = \text{Ker}(rt)$, ie

$$g \in G \iff \begin{cases} E(g) = 1 \\ \sum_{x \in C} n_x = 0 \text{ [3]} \\ \sum_{y \in A} m_y = 0 \text{ [2]} \end{cases}$$

Montrons l'inclusion $Rub \subset Ker(rt)$.

- Un mouvement élémentaire induit un 4-cycle sur les coins et un 4-cycle sur les arêtes. Ce sont des cycles à support disjoint. Donc $E(g) = 1$ pour tout g produit de mouvements élémentaires.
- F = ensemble des facettes des arêtes. on a $|F| = 24$. Un mouvement élémentaire induit deux 4-cycles sur les facettes des arêtes. Comme c'est un produit de 4-cycles, il est de signature paire.
- On prend deux faces privilégiées U et D par exemple. La rotation U (ou D) ne pivote pas les coins. La rotation F (par exemple) pivote les deux coins $x_{U,F,R}$ et $x_{U,F,L}$ de 1 et de 2 tiers de tour. Leur somme est nulle dans $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$.

- Le groupe G des mouvements du Rubik's cube (y compris illégaux) est isomorphe à

$$((\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^8 \rtimes \mathfrak{S}_8) \times ((\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{12} \rtimes \mathfrak{S}_{12}).$$

- Un élément $g \in G$ se décompose naturellement en $g = \sigma_A(g)\rho_A(g)\sigma_C(g)\rho_A(g)$.

On a le morphisme suivant

$$rt : \begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & \{\pm 1\} \times (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \\ g & \longmapsto & (E(g), rt_C \circ \pi_C(g), rt_A \circ \pi_A(g)) \end{array}.$$

Le sous-groupe Rub de G contient toutes les opérations "légales".

Si g est un mouvement légal, alors g vérifie le théorème suivant :

Théorème 0.3

$$g \in Rub \iff \begin{cases} E(g) = \varepsilon(\sigma_A(g))\varepsilon(\sigma_C(g)) = 1 \\ \sum_{x \in C} n_x = 0 \text{ [3]} \\ \sum_{y \in A} m_y = 0 \text{ [2]} \end{cases}$$

On a montré que $Rub \subset \text{Ker}(rt)$.

Aujourd'hui, on montrera que $\text{Ker}(rt) \subset Rub$. On présentera aussi quelques sous-groupes du groupe Rub , à savoir

- ❶ Le groupe des quaternions ;
- ❷ Le groupe "carré" (square group).

Algorithme de résolution du Rubik's cube

La démonstration de $\text{Ker}(rt) \subset \text{Rub}$ est plutôt constructive. On doit introduire l'algorithme de résolution du Rubik's cube.

Cet algorithme consiste à :

- mettre les arêtes à leur place ;
- les retourner 2 à 2 afin de les orienter correctement ;
- appliquer les 2 étapes précédentes aux coins sans toucher aux arêtes.

Notations

- $y_{\alpha,\beta}$ l'arête commune aux faces α, β ;
- $x_{\alpha,\beta,\gamma}$ le coin commun aux faces α, β, γ .

On notera $g = \sigma_C(g)\rho_C(g)\sigma_A(g)\rho_A(g) = \sigma_C\rho_C\sigma_A\rho_A$,
 $\sigma_C \in \mathfrak{S}_8, \sigma_A \in \mathfrak{S}_{12}, \rho_C \in \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}^8, \rho_A \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}^{12}$.

Pivotement (rotation) des arêtes

Cas spécial : $\sigma_A = id, \sigma_C = id, \rho_C = (0, \dots, 0)$.

$$h = LFR^{-1}F^{-1}L^{-1}U^2RURU^{-1}R^2U^2R$$

pivote $y_{U,F}$ et $y_{U,R}$.

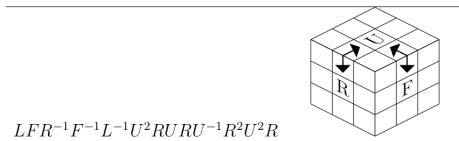


Figure – Le mouvement qui pivote deux arêtes

Pour tout couple d'arêtes (y_1, y_2) , il existe $g \in Rub$ qui envoie y_1 sur $y_{U,F}$ et y_2 sur $y_{U,R}$. Il s'en suit que ghg^{-1} réoriente deux arêtes y_1 et y_2 quelconques.

Pivotement (rotation) des arêtes

- $\text{Ker}(\sigma_A \circ \pi_A)$ contient $g \in \text{Rub}$ qui laissent invariantes les positions des arêtes, mais qui peuvent éventuellement modifier leur orientation.
- $\text{Rot}_A^0 \subset \text{Rot}_A =$ les éléments de rotation totale nulle.

Lemme 3

$\pi_A : \text{Ker}(\sigma_A \circ \pi_A) \cap \text{Rub} \rightarrow \text{Rot}_A^0$ est surjective.

Démonstration.

- $\forall y_1, y_2 \in A$, il existe $g \in Rub$ tel que ghg^{-1} retourne y_1 et y_2 sans toucher aux autres arêtes.
- $Rub \cap \text{Ker}(\sigma_A \circ \pi_A)$ contient les rotations d'arêtes légales.
- $\pi_A(Rub \cap \text{Ker}(\sigma_A \circ \pi_A))$ contient les retournements d'arêtes quelconques. Les éléments de cet ensemble engendrent Rot_A^0 , car tout $r \in Rot_A^0$ est composé d'un nombre **pair** de retournements d'arêtes (théorème fondamental).



$$\sigma_A = id, \sigma_C = id, \rho_A = (0, \dots, 0).$$

$$\gamma = (R^{-1}D^2RB^{-1}U^2B)^2$$

tourne $x_{U,F,R}$ d'un tiers de tour et $x_{B,D,L}$ de deux tiers de tour.

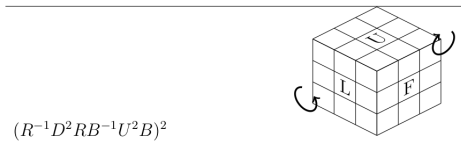


Figure – Le mouvement pivotant $x_{U,F,R}$ et $x_{B,D,L}$

Pour tout couple x_1, x_2 de coins, il existe $g \in Rub$ qui envoie x_1 sur $x_{U,F,R}$ et x_2 sur $x_{B,D,L}$. Il s'en suit que $g\gamma g^{-1}$ réoriente x_1 et x_2 sans déranger les autres coins.

- $Rot_C^0 \subset Rot_C =$ les mouvements de rotation totale nulle.

Lemme 4

$\pi_C : Rub \cap Ker(\sigma_C \circ \pi_C) \rightarrow Rot_C^0$ est surjective.

Démonstration.

La démonstration est identique que pour le pivotement des arêtes. □

- Le mouvement

$$U^{-1}FULU^{-1}L^{-1}F^{-1} \quad (1)$$

permuté deux arêtes de la face U .

- Par conjugaison de 1, on peut transposer deux arêtes de A .
- Les transpositions engendrent \mathfrak{S}_A . Cela prouve qu'il existe un élément de Rub qui envoie les arêtes à leur emplacements respectifs.

Permutation des coins

- Une fois les arêtes mises en place, on sait que la permutation opérant sur les coins doit être paire.
- Le groupe alterné \mathfrak{A}_C est engendré par les 3-cycles.
- On montre qu'il existe un 3-cycle agissant sur un triplet de coins quelconque.

$$\mu = RB^{-1}RF^2R^{-1}BRF^2R^2$$

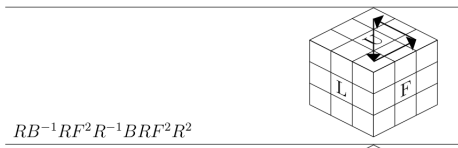


Figure – Le mouvement μ

Ce mouvement agit par 3-cycle sur les coins $x_{U,F,L}$, $x_{U,F,R}$, $x_{U,B,R}$. Pour tout $x \in C$, il existe $g \in \text{Rub}$ qui envoie x sur la position d'un de ces 3 coins. On peut ainsi construire un 3-cycle sur n'importe quel triplet de coins.

Résolution du Rubik's cube

- c_0 est une configuration de $\text{Ker}(rt)$.
- On applique à c_0 une suite de mouvements g exposés ci-dessus.
- On aboutit à $c_0 \circ g = 1_{Rub}$.
- $g^{-1} = c_0$, donc $c_0 \in Rub$.
- Ainsi $\text{Ker}(rt) \subset Rub$. A ce stade, on a prouvé que $\text{Ker}(rt) = Rub$.

Quelques sous-groupes remarquables du groupe du Rubik's cube

Le groupe des quaternions

Le groupe des quaternions \mathcal{Q} (muni de la multiplication) est défini ainsi :

$$\mathcal{Q} = \{i, j, k \mid i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1\}.$$

Remarque 3

- 1 i, j, k sont d'ordre 4 dans \mathcal{Q} .
- 2 $i^{-1} = -i, j^{-1} = -j, k^{-1} = -k$.

Le groupe des quaternions

On considère les manoeuvres suivantes :

- 1 $1 := id$;
- 2 $-1 := m_{435}$ qui pivote les arêtes y_{UF} , y_{UL} , y_{UB} , y_{UR} d'une demie de tour dans le sens des aiguilles d'une montre ;
- 3 $i = m_{706}$ qui transpose y_{UR} et y_{UF} en pivotant y_{UR} d'une demie de tour et qui transpose y_{UL} et y_{UB} en pivotant y_{UL} d'une demie de tour ;
- 4 $j = m_{707}$ qui transpose y_{UL} et y_{UF} en pivotant y_{UL} d'une demie de tour et qui transpose y_{UB} et y_{UR} en pivotant y_{UB} d'une demie de tour ;
- 5 $k = m_{710}$ qui transpose y_{UF} et y_{UB} en pivotant y_{UF} d'une demie de tour et qui transpose y_{UL} et y_{UR} en pivotant y_{UL} d'une demie de tour.



Figure – Les mouvements m_{435} et m_{710}

Le groupe des quaternions

On note \mathcal{R} le groupe engendré par $-1 = m_{435}, i = m_{706}, j = m_{707}, k = m_{710}$. On a que (\mathcal{R}, \circ) est un groupe dont les éléments vérifient les propriétés suivantes :

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1, \quad (2)$$

$$ij = -ji = k, jk = -kj = i, ki = -ik = j. \quad (3)$$

On a un isomorphisme de groupes $\varphi : \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{Q}$.

Démonstration.

On peut vérifier par un calcul fastidieux que les éléments de \mathcal{R} vérifient les propriétés du groupe de quaternions. □

Propriétés du groupe des quaternions

Montrons que \mathcal{Q} est d'ordre 8 dont les sous-groupes sont cycliques et distingués dans \mathcal{Q} .

- ❶ $\mathcal{Q} = \{1, -1, i, -i, j, -j, k, -k\}$, donc $|\mathcal{Q}| = 8$.
- ❷ \mathcal{Q} non commutatif, car $ij = -ji$. Le centre $Z(\mathcal{Q})$ vaut $\{1, -1\}$.
- ❸ Les sous-groupes de \mathcal{Q} différents de $\{1\}$ et de \mathcal{Q} sont d'ordre 2 ou 4 par le théorème de Lagrange.
 - ❶ $\langle -1 \rangle$ est le seul sous-groupe d'ordre 2. S'il existait un sous-groupe d'ordre 2 contenant i (ou j , ou k), alors il contiendrait aussi 1 et $-i$, donc 3 éléments (c'est absurde).
 - ❷ Les seuls sous-groupes d'ordre 4 sont $\langle i \rangle, \langle j \rangle, \langle k \rangle$. S'il existait un sous-groupe d'ordre 4 contenant i et j par exemple, alors il contiendrait aussi $-i$ et $-j$ ainsi que 1, donc 5 éléments (absurde).

Donc tous les sous-groupes de \mathcal{Q} sont cycliques.

Propriétés du groupe des quaternions

Proposition 1

Tous les sous-groupes de \mathcal{Q} sont distingués dans \mathcal{Q} .

Démonstration.

- 1 Le centre $Z(\mathcal{Q})$, $\langle -1 \rangle$, est distingué dans \mathcal{Q} (abélien).
- 2 Montrons que $\langle i \rangle$ est distingué. On a

$$\begin{aligned} jij^{-1} &= ji(-j) = -jij = ijj = i(-1) = -i, \\ kik^{-1} &= ki(-k) = k(-ik) = kki = -i. \end{aligned}$$

Donc $\langle i \rangle$ est stable par conjugaison, donc distingué.



Remarque 4

On peut définir \mathcal{Q} avec des matrices 2×2 à coefficients dans \mathbb{C}

$$1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, I = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, J = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}, K = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix},$$

Le groupe carré (*square group*)

On pose $S = \langle U^2, F^2, L^2, R^2, D^2, B^2 \rangle$.

Théorème 0.4

Le groupe carré S est d'ordre $2^{13}3^4$.

Démonstration.

S agit sur les arêtes et les coins indépendamment.

On note φ_A l'action du groupe S sur l'ensemble des arêtes. Elle admet trois orbites :

$$\text{Orb}(y_{UF}) = \{y_{UF}, y_{UB}, y_{DB}, y_{DF}\} \quad (4)$$

$$\text{Orb}(y_{UL}) = \{y_{UL}, y_{UR}, y_{DR}, y_{DL}\} \quad (5)$$

$$\text{Orb}(y_{FL}) = \{y_{FL}, y_{FR}, y_{BR}, y_{BL}\} \quad (6)$$

On fait la démonstration pour l'orbite 4



Démonstration.

- ① Montrons que $y_{UF}, y_{UB}, y_{DB}, y_{DF}$ sont bien dans $Orb(y_{UF})$. On applique les mouvements suivants :

$$y_{UF} \xrightarrow{U^2} y_{UB}$$

$$y_{UF} \xrightarrow{F^2} y_{DF}$$

$$y_{UF} \xrightarrow{U^2 B^2} y_{DB}.$$

- ② Montrons qu'aucune autre arête n'est dans $Orb(y_{UF})$. En effet,
- ① Le mouvement U^2 échange l'arête y_{UF} et y_{UB} ;
 - ② Le mouvement F^2 échange y_{UF} et y_{DF} ;
 - ③ Le mouvement B^2 échange y_{UB} et y_{DB} ;
 - ④ Le mouvement D^2 échange y_{DF} et y_{DB} ;
 - ⑤ Les mouvements L^2 et R^2 laissent les 4 arêtes de cette orbite en place.



Le groupe carré

On note φ_C l'action de S sur les coins. Alors

$$\text{Orb}(x_{UFL}) = \{x_{UFL}, x_{UBR}, x_{DFR}, x_{DBL}\} \quad (7)$$

$$\text{Orb}(x_{UFR}) = \{x_{UFR}, x_{ULB}, x_{DRB}, x_{DLF}\}. \quad (8)$$

- On peut placer les arêtes de $(4!)^3$ façons.
- $s \in S$ induit une transposition sur une paire d'arêtes d'une orbite donnée.
- Condition 1 du théorème fondamental \implies la permutation des coins ainsi que la permutation des arêtes doit être paire. Il reste donc $\frac{(4!)^3}{2} = 2^8 3^3$ emplacements possibles pour les arêtes.
- Par le théorème fondamental, la rotation totale des coins doit être nulle. Une fois que l'on a placé 4 coins, il reste 4 positions seulement pour les coins restants.

$$|S| = \frac{(4!)^3}{2} \cdot 4!4 = 2^8 \cdot 3^3 \cdot 2^5 \cdot 3 = 2^{13} \cdot 3^4.$$

**What I
learned
in school**



**What's on
the exam**



**What I
know**



Figure –

