КРАТЧАЙШИЕ ПУТИ В ГРАФАХ

Постановка задачи

Пусть дан граф $G = (X, \Gamma)$ дугам которого приписаны веса (стоимости), задаваемые матрицей $C = [c_{ij}]$. Задача о кратчайшем пути состоит в нахождении кратчайшего пути от заданной начальной вершины $s \in X$ до заданной конечной вершины $t \in X$, при условии, что такой путь существует, т.е. при условии $t \in R(s)$. Здесь $R(s)$ - множество, достижимое из вершины s. Элементы c_{ij} матрицы весов C могут быть положительными, отрицательными или нулями. Единственное ограничение состоит в том, чтобы в G не было циклов с отрицательным суммарным весом. Если такой цикл все же существует и x_i - некоторая его вершина, то, двигаясь от s к x_i, обходя затем цикл достаточно большое число раз и попадая, наконец, в t, мы получим путь со сколь угодно малым весом, означающим, что кратчайшего пути не существует.

Следующие задачи являются обобщениями сформулированной выше задачи о кратчайшем пути.

1. Для заданной начальной вершины s найти кратчайшие пути между s и всеми другими вершинами $x_i \in X$.
2. Найти кратчайшие пути между всеми парами вершин.

На практике часто требуется найти не только кратчайший путь, но также второй, третий и т.д. кратчайшие пути в графе. Располагая этими результатами, можно решить, какой путь выбрать в качестве наилучшего (указанный подход полезен при использовании таких критериев, которые являются субъективными по своей природе или не могут быть непосредственно включены в алгоритм).

Алгоритм Дейкстры (случай неотрицательной матрицы весов)

Наиболее эффектный алгоритм решения задачи о кратчайшем (s-t)-пути первоначально дал Дейкстра. Этот метод основан на приписывании вершинам временных пометок, причем пометка вершины дает верхнюю границу длины пути от s к этой вершине. Значения пометок постепенно уменьшаются с помощью некоторой итерационной процедуры, и на каждом шаге итерации одна из временных пометок становится постоянной. Последнее указывает на то, что пометка уже не является верхней границей, а дает точную длину кратчайшего пути от s к рассматриваемой вершине.

Описание алгоритма Дейкстра:

Пусть $l(x_i)$ - пометка вершины x_i.

Шаг 1. Положить $l(s)=0$ и считать эту пометку постоянной. Положить $l(x_i)=\infty$ для всех $x_i \neq s$ и считать эти пометки временными. Положить $p=s$.

Шаг 2. Для всех $x_i \in \Gamma(p)$, пометки которых временные, изменить пометки в соответствии со следующим выражением:

$$l(x_i)=\min[l(x_i), l(p)+c(p,x_i)] \qquad (1.1)$$

Шаг 3. Среди всех вершин с временными пометками найти такую, для которой $l(x_i^*)=\min[l(x_i)]$.

Шаг 4. Считать пометку вершины x_i^* постоянной и положить $p=x_i^*$.

Шаг 5.

1. Если $p=t$, то $l(p)$ является длиной кратчайшего пути. Если $p \neq t$, перейти к шагу 2 (для случая поиска пути от s к t.)

2. Если все вершины отмечены как постоянные, то эти пометки дают длины кратчайших путей. Если некоторые пометки являются временными перейти к шагу 2 (для случая поиска путей от s ко всем остальным вершинам).

Как только длины кратчайших путей от s будут найдены, то сами пути можно получить при помощи рекурсивной процедуры с использованием соотношения (1.2). Так как вершина x'_i непосредственно предшествует вершине x_i в кратчайшем пути от s к x_i, то для любой вершины x_i соответствующую вершину x'_i можно найти как одну из оставшихся вершин, для которой

$$l(x'_i)+c(x'_i, x_i)=l(x_i). \qquad (1.2)$$

Если кратчайший путь от s до любой вершины x_i является единственным, то дуги (x'_i, x_i) этого кратчайшего пути образуют ориентированное дерево с корнем s. Если существует несколько "кратчайших" путей от s к какой-либо другой вершине, то при некоторой фиксированной вершине x'_i соотношение (2) будет выполняться для более чем одной вершины x_i. В этом случае выбор может быть либо произвольным (если нужен какой-то один кратчайший путь между s и x_i), либо таким, что рассматриваются все дуги (x'_i, x_i), входящие в какой-либо из кратчайших путей, и при этом совокупность всех таких дуг образует не ориентированное дерево, а общий граф, называемый базой относительно s.

Пример

Рассмотрим граф G, изображенный на рис. 1.1, где каждое неориентированное ребро рассматривается как пара противоположно ориентированных дуг равного веса. Матрица весов C приведена ниже.

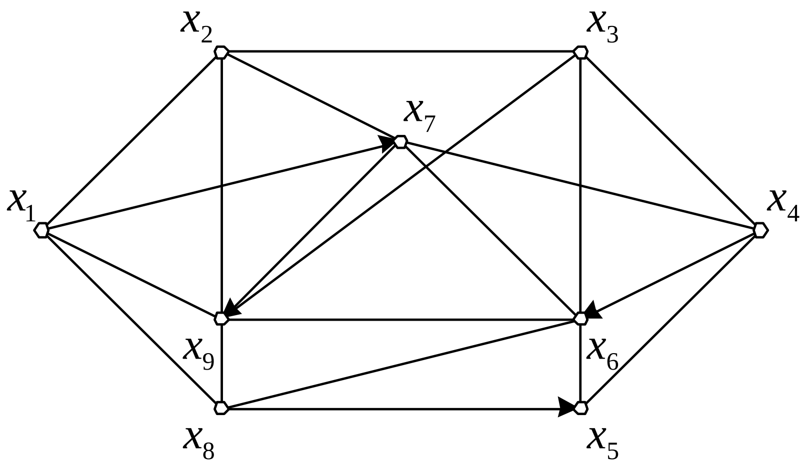


Рис. 1.1. Граф G.

Требуется найти все кратчайшие пути от вершины x_1 ко всем остальным вершинам. Постоянные пометки будем снабжать знаком +, остальные пометки рассматриваются как временные.

$$C = \begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \\ x_9 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 & x_8 & x_9 \end{array} \\ \left\| \begin{array}{ccccccccc} 0 & 12 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 2 & 10 \\ 12 & 0 & 14 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 15 \\ 0 & 14 & 0 & 20 & 0 & 25 & 0 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 20 & 0 & 2 & 15 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 25 & 0 & 8 & 0 & 12 & 11 & 10 \\ 0 & 4 & 0 & 5 & 0 & 12 & 0 & 0 & 22 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 24 & 11 & 0 & 0 & 7 \\ 10 & 15 & 0 & 0 & 0 & 10 & 22 & 7 & 0 \end{array} \right\| \end{array}$$

Воспользуемся алгоритмом Дейкстры.

Шаг 1. $l(x_1)=0^+$, $l(x_i)=\infty\ \forall x_i \neq x_1$, $p=x_1$.

Первая итерация

Шаг 2. $\Gamma(p)=\Gamma(x_1)=\{x_2,x_7,x_8,x_9\}$ - все пометки временные. Возьмем сначала x_2. Из (1.1) получаем

$$l(x_2)=\min[\infty,\,0^+ +12]=12,$$

аналогично $l(x_7)=5$, $l(x_8)=2$, $l(x_9)=10$.

Шаг 3. $\min\left[\underset{x_2}{12},\ \underset{x_7}{5},\ \underset{x_8}{2},\underset{x_9}{10},\ \underset{x_3,x_4,x_5,x_6}{\infty}\right]=2$ соответствует x_8.

Шаг 4. x_8 получает постоянную пометку $l(x_8)=2^+$, $p=x_8$.

Шаг 5. Не все вершины имеют постоянные пометки, поэтому переходим к шагу 2. Пометки в начале следующей итерации показаны на рис. 1.2(а).

Вторая итерация

Шаг 2. $\Gamma(p)=\Gamma(x_8)=\{x_5,x_6,x_9\}$ - все пометки временные. Из соотношения (1.1) имеем

$$l(x_5)=\min[\infty,\,2^+ +24]=26,$$

аналогично $l(x_6)=13$, $l(x_9)=9$. Пометки изображены на рис. 1.2(б).

Шаг 3. $\min\left[\underset{x_2}{12},\underset{x_5}{26},\underset{x_6}{13},\ \underset{x_7}{5},\ \underset{x_9}{9},\ \underset{x_3,x_4}{\infty}\right]=5$ соответствует x_7.

Шаг 4. x_7 получает постоянную пометку $l(x_7)=5^+$, $p=x_7$.

Шаг 5. Перейти к шагу 2.

Третья итерация

Шаг 2. $\Gamma(p)=\Gamma(x_7)=\{x_2,x_4,x_6,x_9\}$ - из соотношения (1.1) получаем

$$l(x_2)=\min[12,\,5^+ +4]=9,$$

и аналогично $l(x_4)=10$, $l(x_6)=13$, $l(x_9)=9$.

Шаг 3. $\min\left[\underset{x_2}{9},\underset{x_4}{10},\underset{x_5}{26},\underset{x_6}{13},\ \underset{x_9}{9},\underset{x_3}{\infty}\right]=9$ соответствует x_2.

Шаг 4. x_2 получает постоянную пометку $l(x_2)=9^+$, $p=x_2$.

Шаг 5. Перейти к шагу 2.

Четвертая итерация

Шаг 2. $\Gamma(p)=\Gamma(x_2)=\{x_3, x_7, x_9\}$ - не все пометки временные, поэтому из соотношения (1.1) получаем

$$l(x_3)=\min[\infty, 9^+ + 14]=23,$$

и аналогично $l(x_9)=9$.

Шаг 3. $\min\left[\underset{x_3}{23},\underset{x_4}{10},\underset{x_5}{26},\underset{x_6}{13},\underset{x_9}{9}\right]=9$ соответствует x_9.

Шаг 4. x_9 получает постоянную пометку $l(x_9)=9^+$, $p=x_9$.

Шаг 5. Перейти к шагу 2.

Пятая итерация

Шаг 2. $\Gamma(p)=\Gamma(x_9)=\{x_2, x_6, x_7, x_8\}$ - не все пометки временные, поэтому из соотношения (1.1) получаем

$$l(x_6)=\min[13, 9^+ + 10]=13.$$

Шаг 3. $\min\left[\underset{x_3}{23},\underset{x_4}{10},\underset{x_5}{26},\underset{x_6}{13}\right]=10$ соответствует x_4.

Шаг 4. x_4 получает постоянную пометку $l(x_4)=10^+$, $p=x_4$.

Шаг 5. Перейти к шагу 2.

Шестая итерация

Шаг 2. $\Gamma(p)=\Gamma(x_4)=\{x_3, x_5, x_6, x_7\}$ - не все пометки временные, из соотношения (1.1) получаем

$$l(x_3)=\min[23, 10^+ + 20]=23,$$

и аналогично $l(x_5)=12$, $l(x_6)=13$.

Шаг 3. $\min\left[\underset{x_3}{23},\underset{x_5}{12},\underset{x_6}{13}\right]=12$ соответствует x_5.

Шаг 4. x_5 получает постоянную пометку $l(x_5)=12^+$, $p=x_5$.

Шаг 5. Перейти к шагу 2.

Седьмая итерация

Шаг 2. $\Gamma(p)=\Gamma(x_5)=\{x_4, x_6\}$ - не все пометки временные, поэтому из соотношения (1.1) получаем

$$l(x_6)=\min[13, 12^+ + 8]=13.$$

Шаг 3. $\min\left[\underset{x_3}{23},\underset{x_6}{13}\right]=13$ соответствует x_6.

Шаг 4. x_6 получает постоянную пометку $l(x_6)=13^+$, $p=x_6$.

Шаг 5. Перейти к шагу 2.

Восьмая итерация

Шаг 2. $\Gamma(p) = \Gamma(x_6) = \{x_3, x_5, x_7, x_8, x_9\}$ - не все пометки временные, поэтому из соотношения (1.1) получаем

$$l(x_3) = \min[23, 13^+ + 25] = 23.$$

Шаг 3. $\min\left[\begin{matrix} 23 \\ x_3 \end{matrix}\right] = 23$ соответствует x_3.

Шаг 4. x_3 получает постоянную пометку $l(x_6) = 23^+$, $p = x_3$.

Шаг 5. Все вершины имеют постоянные пометки. Конец работы алгоритма. Пометки полученные в результате работы алгоритма показаны на рис. 1.2(в).

Найдем кратчайший путь между вершиной x_2 и начальной вершиной x_1, последовательно используя соотношение (1.2). Таким образом, полагая $x_i = x_2$, находим вершину x'_2, непосредственно предшествующую x_2 в кратчайшем пути от x_1 к x_2: вершина x'_2 должна удовлетворять соотношению

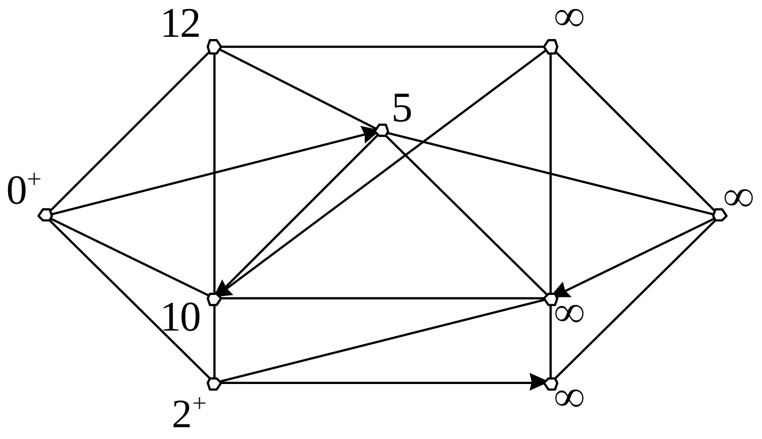
$$l(x'_2) + c(x'_2, x_2) = l(x_2) = 9.$$

Единственной такой вершиной является x_7. Далее, применяем второй раз соотношение (1.2), беря $x_i = x_7$; получаем вершину x'_7, непосредственно предшествующую x_7 в кратчайшем пути от x_1 к x_2. Вершина x'_7 удовлетворяет соотношению

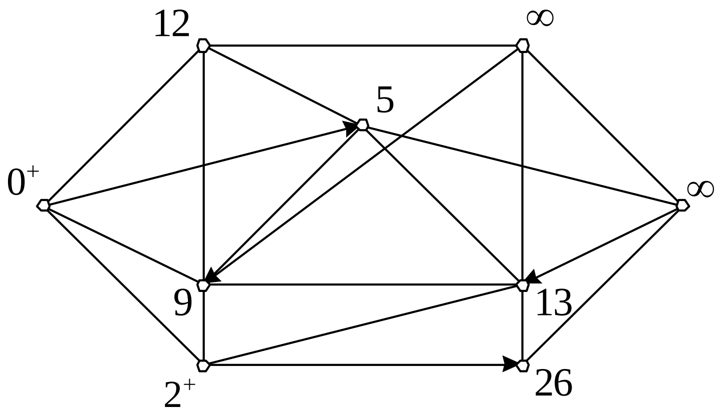
$$l(x'_7) + c(x'_7, x_7) = l(x_7) = 5.$$

Единственной такой вершиной является x_1 и поэтому кратчайший путь от x_1 к x_2 есть (x_1, x_7, x_2).

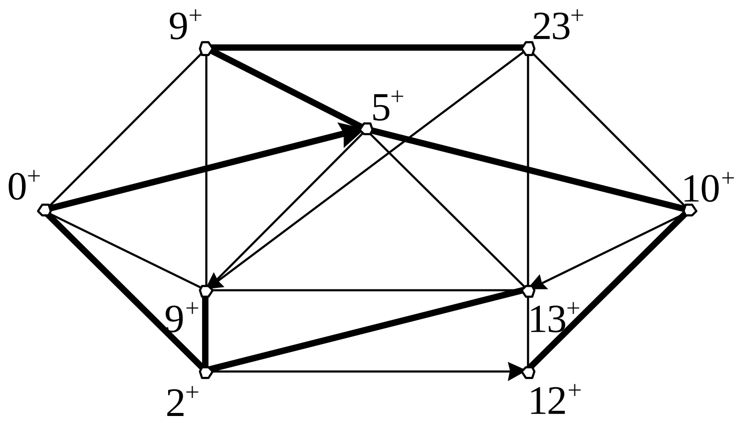
x_1- база, дающая все кратчайшие пути от x_1, представляет собой дерево, изображенное жирными линиями на рис. 1.2 (в).



(а)



(б)



(в)

Рис. 1.2. (а) Пометки в конце 1-й итерации. (б) Пометки в конце шага 2 на 2-й итерации. (в) Окончательные пометки вершин и x_1 - база.