

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)

Физтех-школа аэрокосмических технологий

Отчёт о выполнении лабораторной работы 1.4.1-В

Изучение экспериментальных погрешностей
на примере физического маятника

Автор:
Волков Никита Алексеевич
Б03-103

Содержание

1	Введение	2
2	Теоретические сведения	2
3	Оборудование и экспериментальные погрешности	4
4	Результаты измерений и обработка данных	5
4.1	Предварительные измерения и расчеты	5
4.2	Определение погрешности измерения времени	5
4.3	Опыт по определению ускорения свободного падения	6
4.4	Опыт по определению приведённой длины маятника	9
5	Выводы и обсуждение результатов	9

1 Введение

Цель работы: 1) на примере измерения периода свободных колебаний физического маятника познакомиться с систематическими и случайными погрешностями, прямыми и косвенными измерениями; 2) проверить справедливость формулы для периода колебаний физического маятника и определить значение ускорения свободного падения; 3) убедиться в справедливости теоремы Гюйгенса об обратимости точек опоры и центра качания маятника; 4) оценить погрешность прямых и косвенных измерений и конечного результата.

В работе используются: металлический стержень с опорной призмой; дополнительный груз; закреплённая на стене консоль; подставка с острой гранью для определения центра масс маятника; секундомер; счётчик колебаний (механический или электронный); линейки металлические различной длины; штангенциркуль; электронные весы; математический маятник (небольшой груз, подвешенный на нитях).

2 Теоретические сведения

Физическим маятником называют твёрдое тело, способное совершать колебания в вертикальной плоскости, будучи подвешено за одну из своих точек в поле тяжести. Основное отличие физического маятника от математического в том, что маятник не является точечным объектом, а представляет собой совокупность жёстко связанных точечных масс. В данной работе в качестве такого маятника используется тонкий однородный металлический стержень, подвешиваемый в некоторой точке с помощью небольшой опорной призмы (см. рис. (1)). Острое ребро призмы, опирающееся на подставку, задаёт ось качания (или вращения) маятника.

Закон, описывающий вращательное движение твёрдого тела вокруг фиксированной оси, аналогичен второму закону Ньютона.

$$M = \frac{dL}{dt}, \quad (1)$$

где M - момент силы, $L = mr^2\omega$ - момент импульса. Величину $J = mr^2$ называют моментом инерции точечного тела. При постоянном J уравнение (1) можно записать как

$$M = J \frac{d\varphi}{dt} \quad (2)$$

В случае твёрдого тела, состоящего из совокупности материальных точек, вращающихся вокруг фиксированной оси, уравнение (2) сохраняет свой вид, но под моментом инерции следует понимать сумму (или интеграл) по всем точкам тела:

$$J = \sum_i m_i r_i^2,$$

где r_i — расстояние от точки массой m_i до оси вращения. Момент инерции тонкого стержня массой m и длиной l , вращающегося вокруг оси, проходящей через центр масс, равен

$$J_C = \frac{ml^2}{12} \quad (3)$$

А момент инерции стержня, подвешенного на расстоянии a от центра масс, может быть вычислен по теореме Гюйгенса–Штейнера:

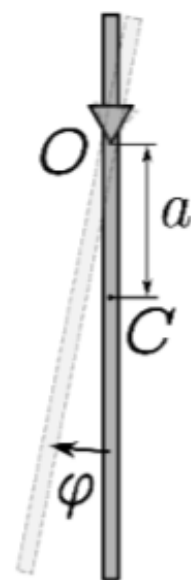


Рис. 1: Стержень как физический маятник

$$J_C = \frac{ml^2}{12} + ma^2 \quad (4)$$

Момент силы тяжести, действующей на стержень, при небольших углах отклонения $\varphi \ll 1$ равен

$$M = -mga \sin \varphi \approx -mga\varphi.$$

Возвращающий момент сил, пропорциональный величине его отклонения от равновесия, поэтому при малых амплитудах отклонения движение свободного физического маятника будет иметь характер гармонических колебаний, аналогично колебаниям груза на пружине или математического маятника. Период колебаний произвольного физического маятника:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{J}{mga}}.$$

Для стержня длиной l , подвешенного на расстоянии a от центра, с учётом (4) получаем:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\frac{l^2}{12} + a^2}{ga}}. \quad (5)$$

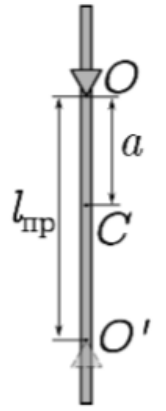
Определим так называемую приведённую длину физического маятника:

$$l_{\text{пр}} = a + \frac{l^2}{12a}. \quad (6)$$

Смысл этой длины в том, что физический маятник длиной l , подвешенный в точке a , имеет тот же период малых колебаний, что и математический маятник длиной $l_{\text{пр}}$.

С понятием «приведённой длины» связана следующая теорема (Гюйгенса). Рассмотрим точку O' , отстоящую от точки опоры O на расстояние $l_{\text{пр}}$ вдоль стержня (эту точку иногда называют центром качания физического маятника). Если маятник подвесить за точку O' , то период его качания не изменится. Иными словами, точка опоры и центр качания маятника взаимно обратимы.

Рис. 2: К теореме Гюйгенса



Также можно учесть влияние подвесной призмы. Формула (5) получена в предположении, что подвес маятника является материальной точкой. На самом же деле маятник подвешивается с помощью треугольной призмы конечного размера, поэтому использование (5) может привести к систематической погрешности результата. Поскольку расстояние $a_{\text{пр}}$ трудно поддаётся непосредственному измерению, можно исключить его, измеряя положение центра масс всей системы. Пусть $x_{\text{ц}}$ — расстояние от центра масс системы до точки подвеса. По определению имеем

$$x_{\text{ц}} = \frac{m_{\text{ст}}a_{\text{ст}} - m_{\text{пр}}a_{\text{пр}}}{m_{\text{ст}}m_{\text{пр}}}$$

(«минус» учитывает положение призмы). Исключая отсюда $a_{\text{пр}}$, получим формулу для периода с нужной нам поправкой:

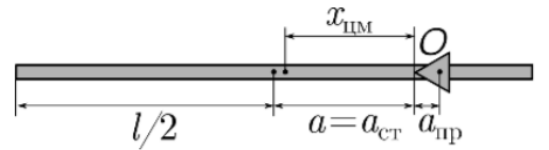


Рис. 3: Смещение центра масс из-за подвесной призмы

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\frac{l^2}{12} + a^2}{g(1 + \frac{m_{\text{пр}}}{m_{\text{ст}}})x_{\text{ц}}}}. \quad (7)$$

Таким образом, для более точного измерения g следует для каждого положения призмы измерять не только величину a — положение призмы относительно центра масс стержня), но и расстояние $x_{\text{ц}}$ — положение центра масс стержня с призмой относительно призмы (см рис. 3)

3 Оборудование и экспериментальные погрешности

Секундомер: $\delta_{\text{с}} = \pm 0,01$ с

Весы: $\delta_{\text{в}} = \pm 0,5$ г

Линейка: $\delta_{\text{лин}} = \pm 0,5$ мм

Штангенциркуль: $\delta_{\text{шт}} = \pm 0,05$ мм

Таблица 1: Первоначальные измерения

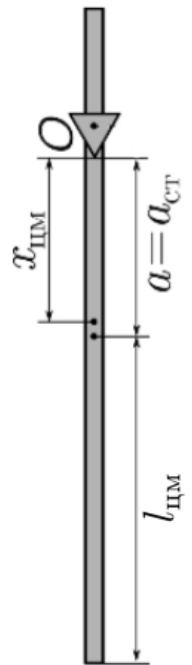
	Измерение	σ ,	ε , %
l , мм	1000	0,5	0,05
$l_{\text{цм}}$, мм	500	0,5	0,10
a , мм	250	0,5	0,20
$x_{\text{ц}}$, мм	231	0,5	0,22
$m_{\text{ст}}$, г	1022,4	0,5	0,05
$m_{\text{пр}}$, г	74,0	0,5	0,68

4 Результаты измерений и обработка данных

4.1 Предварительные измерения и расчеты

Сначала необходимо измерить характеристики установки: длину стержня l , расстояние до центра масс пустого стержня $l_{\text{цм}}$, положение a острия призмы относительно центра масс стержня, положение центра масс конструкции $x_{\text{ц}}$, массу пустого стержня $m_{\text{ст}}$ и массу призмы $m_{\text{пр}}$. Для каждой величины рассчитаем относительную погрешность. Результаты измерений представлены в таблице (1). По данным таблицы период колебаний маятника имеет смысл измерять с относительной погрешностью $\varepsilon_{\text{max}} = 0.22\%$.

Необходимо провести предварительный опыт по измерению периода колебаний, чтобы убедиться, что маятник качается без помех, призма не проскальзывает, и колебания затухают слабо. Время $n = 10$ полных колебаний маятника $t = 15,32\text{с}$. Вычислим период колебаний $T = t/n = 15,32/10 \approx 1,53$ и по формуле (7) рассчитаем предварительное значение $g \approx 9.9/2$. Оно мало отличается от табличного значения.



4.2 Определение погрешности измерения времени

Для экспериментального определения случайной погрешности измерения времени с помощью секундомера было проведено 10 измерений времени $n = 10$ колебаний. Результаты измерений представлены в таблице 2.

Таблица 2: Измерение времени

N опыта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
t, с	15,34	15	15,41	15,52	15,08	15,33	15,23	15,34	15,45	15,34

Рис. 4:
Измеряемые
длины

В таблице 3 представлены среднее значение полученных результатов $t_{\text{ср}}$, случайная погрешность измерения времени $\sigma_{\text{случ}}$, вычисляемая по формуле:

$$\sigma_{\text{случ}} = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_i (t_i - t_{\text{ср}})^2},$$

а также систематическая погрешность секундомера $\sigma_{\text{сист}}$ и полная погрешность измерения времени $\sigma_{\text{полн}}$. Т.к. $\sigma_{\text{случ}} \gg \sigma_{\text{сист}}$, то $\sigma_{\text{полн}} \approx \sigma_{\text{случ}}$.

Чтобы относительная погрешность измерения периода соответствовала $\varepsilon_{\text{max}} = 0.22\%$ при $\sigma_t = 0.16\text{с}$, необходимо, чтобы количество измерений было

$$n = \frac{\sigma_t}{\varepsilon_T T} = \{\varepsilon_T = \varepsilon_{\text{max}}\} = \frac{0.16}{0.0022 \cdot 1.53} \approx 48$$

Таблица 3: Погрешность измерения времени

$t_{\text{ср}}$	$\sigma_{\text{случ}}$	$\sigma_{\text{сист}}$	$\sigma_{\text{полн}}$
15,30	0,16	0,01	0,16

Таким образом, для достижения требуемой точности достаточно выполнить однократное измерение времени $n \approx 48$ колебаний.

4.3 Опыт по определению ускорения свободного падения

Проведем измерение периода колебаний маятника по $n = 48$ полным колебаниям для 10 положений призмы a . Для каждого измерения рассчитайте значения g по формуле (7). Результаты представлены в таблице 4. Также в таблице представлены абсолютные и относительные погрешности величин.

Таблица 4: Измерение периода колебаний маятника T в зависимости от расстояния a

N	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a , м	0,410	0,371	0,331	0,290	0,301	0,310	0,280	0,270	0,230	0,180
σ_a , м	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005
ε_a	0,0012	0,0013	0,0015	0,0017	0,0017	0,0016	0,0018	0,0019	0,0022	0,0028
$x_{\text{ц}}$, м	0,381	0,345	0,308	0,270	0,279	0,288	0,260	0,251	0,214	0,167
$\sigma_{x_{\text{ц}}}$, м	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005
$\varepsilon_{x_{\text{ц}}}$	0,0013	0,0014	0,0016	0,0019	0,0018	0,0017	0,0019	0,0020	0,0023	0,0030
t_n , с	75,36	74,37	73,47	73,85	73,62	73,32	73,06	73,31	74,05	77,23
σ_{t_n} , с	0,16	0,16	0,16	0,16	0,16	0,16	0,16	0,16	0,16	0,16
ε_{t_n}	0,0021	0,0022	0,0022	0,0022	0,0022	0,0022	0,0022	0,0022	0,0022	0,0021
T , с	1,57	1,55	1,53	1,54	1,53	1,53	1,52	1,53	1,54	1,61
σ_T , с	0,0033	0,0033	0,0033	0,0033	0,0033	0,0033	0,0033	0,0033	0,0033	0,0033
ε_T	0,0021	0,0022	0,0022	0,0022	0,0022	0,0022	0,0022	0,0022	0,0022	0,0021
g , м/с ²	9,85	9,83	9,85	9,66	9,74	9,84	9,88	9,82	9,87	9,86
σ_g , м/с ²	0,0762	0,0765	0,0773	0,0762	0,0768	0,0775	0,0784	0,0779	0,0791	0,0802
ε_g	0,0077	0,0078	0,0079	0,0079	0,0079	0,0079	0,0079	0,0079	0,0080	0,0081

Рассчитаем среднее значение $g_{\text{ср}}$ и ее погрешность.

$$\bar{g} \approx 9,82 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$$

$$\sigma_{\bar{g}} = \sqrt{\frac{1}{N(N-1)} \sum (g_i - \bar{g})^2} \approx 0,02 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$$

Из формулы 7 вычислим значение a_{min} , при котором период колебаний T минимален: $a \approx 288$ мм. Построим график зависимости периода колебаний T от расстояния подвеса a (Рис. (5)). Судя по аппроксимирующей прямой на графике, минимальное значение период колебаний T минимален при $a \approx 310$ мм. Значения сильно отличаются, но и на графике есть выбивающиеся значения, которые связаны с неточностью измерения.

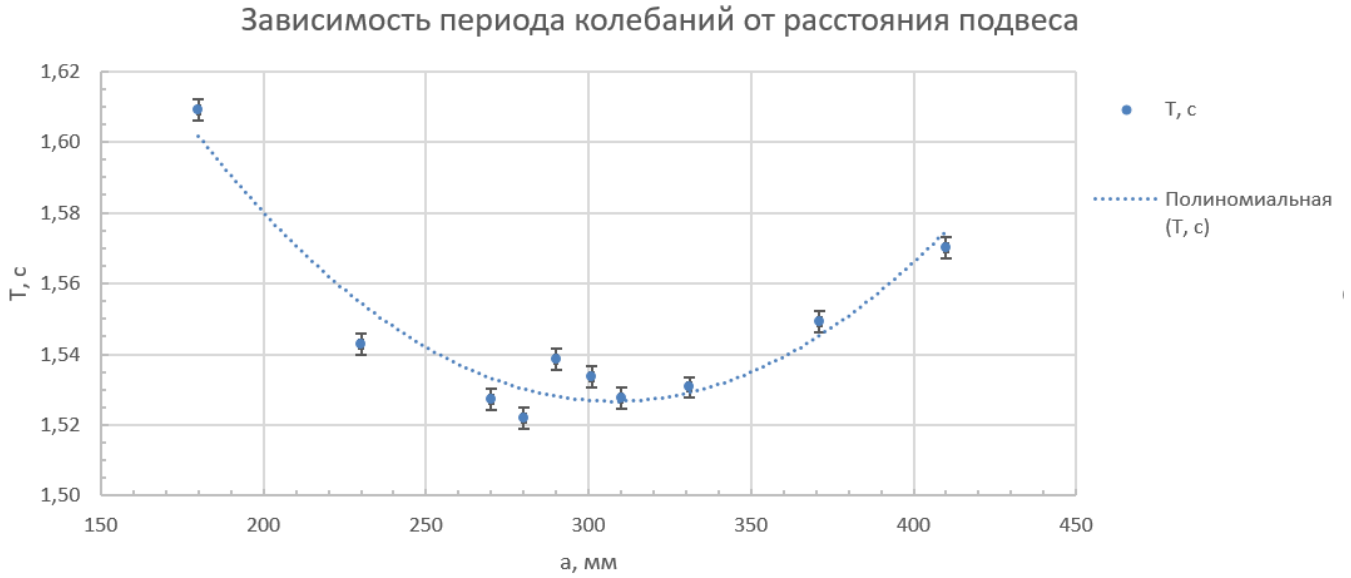


Рис. 5: График зависимости периода колебаний T от расстояния подвеса a

Используя формулу для периода физического маятника (7) получаем следующее соотношение:

$$a^2 = \frac{g}{4\pi^2} T^2 a - \frac{l^2}{12}.$$

Отсюда можно сделать вывод о том, что a^2 линейно зависит от $T^2 x_{\text{ц}}$ (Рис. (6)), поэтому эту зависимость можно представить в виде

$$a^2 = kT^2 a + b,$$

где

$$k = \frac{g}{4\pi^2} \text{ и } b = -\frac{l^2}{12}. \quad (8)$$

Рассчитаем коэффициенты методом наименьших квадратов.

$$k = \frac{\langle uv \rangle - \langle u \rangle \langle v \rangle}{\langle u^2 \rangle - \langle u \rangle^2} \approx 0,267 \frac{\text{м}}{\text{с}^2},$$

$$b = \langle v \rangle - k \langle u \rangle \approx -0,0837 \text{ м},$$

где $v = a^2$, $u = aT^2$.

Случайные погрешности вычисления k и b можно найти по следующим формулам:

$$\sigma_k^{\text{сл}} = \sqrt{\frac{1}{n} \left(\frac{\langle v^2 \rangle - \langle v \rangle^2}{\langle u^2 \rangle - \langle u \rangle^2} - k^2 \right)} \approx 3 \cdot 10^{-3} \frac{\text{м}}{\text{с}^2},$$

$$\sigma_b^{\text{сл}} = \sigma_k^{\text{сл}} \sqrt{\langle u^2 \rangle - \langle u \rangle^2} \approx 4 \cdot 10^{-4} \text{ м}.$$

Систематическая погрешность вычисления коэффициентов определяется следующим соотношением:

$$\sigma_k^{\text{сист}} = k \sqrt{(\varepsilon_{T^2 x_{\text{ц}}})^2 + (\varepsilon_{a^2})^2} \approx 0,0014 \frac{\text{м}}{\text{с}^2},$$

$$\sigma_b^{\text{сист}} = b \sqrt{(\varepsilon_{T^2 x_{\text{ц}}})^2 + (\varepsilon_{a^2})^2} \approx 0,0004 \text{ м}.$$

Тогда полную погрешность вычисления коэффициентов подсчитываем по следующей формуле:

$$\sigma_k = \sqrt{(\sigma_k^{\text{сл}})^2 + (\sigma_k^{\text{сист}})^2} \approx 0,003 \frac{\text{м}}{\text{с}^2},$$

$$\sigma_b = \sqrt{(\sigma_b^{\text{сл}})^2 + (\sigma_b^{\text{сист}})^2} \approx 0,0006 \text{ м}.$$

Таким образом, получаем:

- $k = (0,267 \pm 0,003) \frac{\text{м}}{\text{с}^2}, \varepsilon_k \approx 1,1\%$
- $b = (-0,0837 \pm 0,0006) \text{ м}, \varepsilon_b \approx 0,7\%$

Учитывая формулу (8), вычисляем g :

$$g = 4\pi^2 k \approx 10,54 \frac{\text{м}}{\text{с}^2},$$

$$\sigma_g = g \cdot \varepsilon_k \approx 0,12 \frac{\text{м}}{\text{с}^2},$$

В итоге имеем следующие результаты:

- $g = (10,54 \pm 0,12) \frac{\text{м}}{\text{с}^2}, \varepsilon_g = 1,1\%$ (по методу наименьших квадратов)
- $\bar{g} = (9,82 \pm 0,02) \frac{\text{м}}{\text{с}^2}, \varepsilon_g = 0,2\%$ (среднее значение)

Точнее вычислить g удалось, посчитав значение среднего арифметического. Большое отклонение значения g , рассчитанного методом наименьших квадратов связано с выбивающимися точками, которые видны на рис. 5.

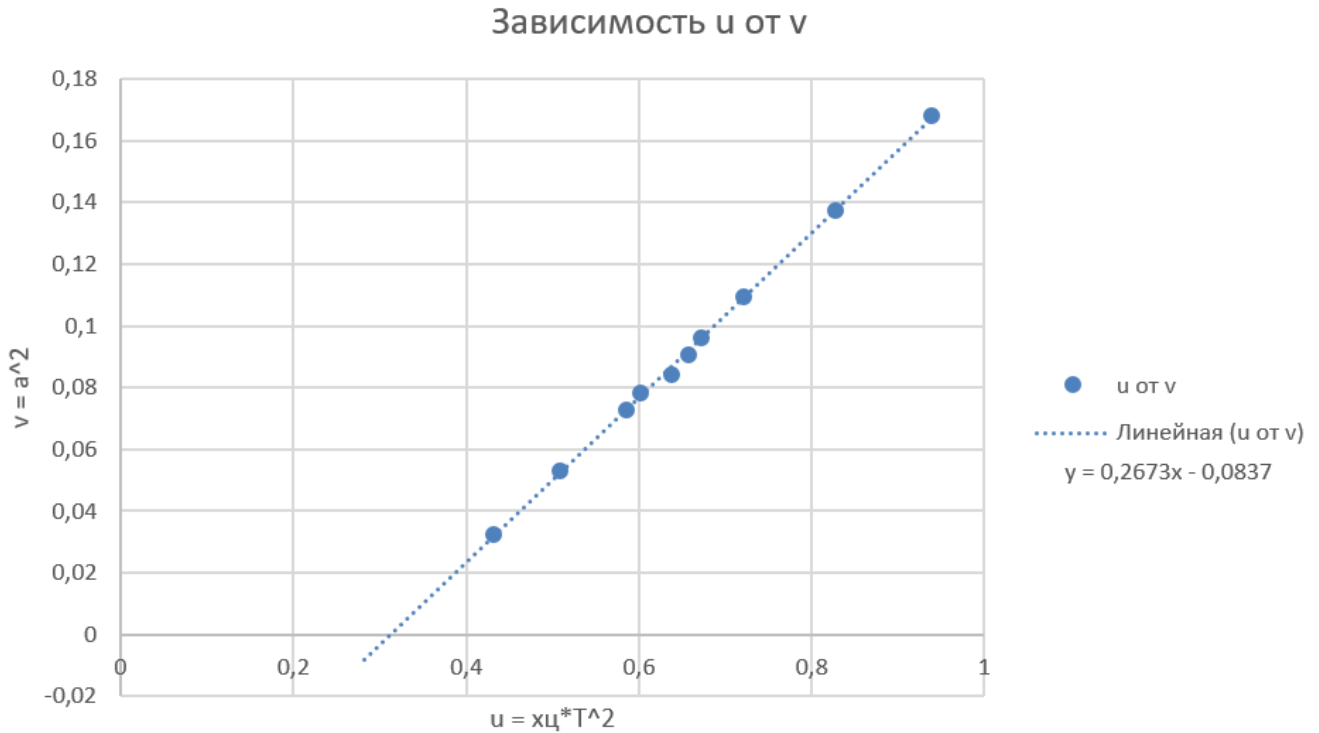


Рис. 6: График зависимости a^2 от $T^2 x_{\text{ц}}$

4.4 Опыт по определению приведённой длины маятника

Для $a = 180$ мм приведенная длина математического маятника, вычисляемая по формуле (6), равна

$$l_{\text{пр}} = a + \frac{l^2}{12a} = 0.18 + \frac{1^2}{12 \cdot 0.18} \approx 643 \text{ мм}$$

При $a = 180$ мм период колебаний физического маятника равен $T = 0,160 \pm 0,003$ с (см. Таблицу (4)).

Для математического маятника длиной $l_{\text{пр}} = 643$ мм, при $n = 20$ колебаний время равно $t = 32,12$ с, $\sigma_t = 0,16$ с, $\varepsilon_t = 0,5\%$. Период равен $T = t/n = 32,12/20 \approx 1,61$ с, $\varepsilon_T = \varepsilon_t = 0,5\%$, $\sigma_T = T\varepsilon_T \approx 0,01$ с.

Для проверки справедливости теоремы Гюгенса, помещаем призму в центр ее качания и измеряем период колебаний. Для $n = 20$ колебаний время равно $t = 32,22$ с, $\sigma_t = 0,16$ с, $\varepsilon_t = 0,5\%$. Период равен $T = t/n = 32,22/20 \approx 1,61$ с.

Значения периода колебаний для физического и математического маятников равны в рамках погрешности. Также период колебаний маятника не изменился в пределах погрешности при переносе призмы в центр качания, значит теорема Гюгенса верна.

5 Выводы и обсуждение результатов

В ходе работы было получено значение ускорения свободного падения с хорошей точностью:

$$g = (9,82 \pm 0,02) \frac{\text{м}}{\text{с}^2}, \varepsilon_g = 0,2\%$$

Также, были экспериментально проверена теория о приведённой длине физического маятника и теорема Гюгенса об обратимости точки подвеса и центра качания. Точность полученных результатов можно повысить, если исключить ошибку при фиксации периода колебаний маятника, которая существует в силу неидеальной реакции экспериментатора. Возможно, стоит использовать цифровой прибор фиксации колебаний и отсчёта времени. Также свою погрешность вносит неточность определения расстояния от точки опоры до центра масс стержня.

На примере измерения периода свободных колебаний физического маятника я познакомился с систематическими и случайными погрешностями, прямыми и косвенными измерениями, оценил погрешность прямых и косвенных измерений и конечного результата.