



Министерство науки и высшего образования Российской Федерации  
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования  
«Московский государственный технический университет имени  
Н.Э. Баумана  
(национальный исследовательский университет)»  
(МГТУ им. Н.Э. Баумана)

---

ФАКУЛЬТЕТ «Информатика и системы управления»

КАФЕДРА «Программное обеспечение ЭВМ и информационные технологии»

Отчет по лабораторной работе №2 по курсу  
"Математическая статистика"

Тема Интервальные оценки

Студент Вольняга М.Ю.

Группа ИУ7-66Б

Оценка (баллы) \_\_\_\_\_

Преподаватели Саркисян П.С.

Москва — 2024 г.

# Лабораторная работа №2

## 1. Цель работы

Построение доверительных интервалов для математического ожидания и дисперсии нормальной случайной величины.

## 2. Содержание работы

1. Для выборки объема  $n$  из нормальной генеральной совокупности  $X$  реализовать в виде программы на ЭВМ:
  - Вычисление точечных оценок  $\hat{\mu}(\vec{x}_n)$  и  $S^2(\vec{x}_n)$  математического ожидания  $MX$  и дисперсии  $DX$  соответственно;
  - Вычисление нижней и верхней границ  $\underline{\mu}(\vec{x}_n), \bar{\mu}(\vec{x}_n)$  для  $\gamma$ -доверительного интервала для математического ожидания  $MX$ ;
  - Вычисление нижней и верхней границ  $\underline{\sigma}^2(\vec{x}_n), \bar{\sigma}^2(\vec{x}_n)$  для  $\gamma$ -доверительного интервала для дисперсии  $DX$ .
2. Вычислить  $\hat{\mu}$  и  $S^2$  для выборки из индивидуального варианта;
3. Для заданного пользователем уровня доверия  $\gamma$  и  $N$  - объема выборки из индивидуального варианта:
  - На координатной плоскости  $Oyn$  построить прямую  $y = \hat{\mu}(\vec{x}_N)$ , также графики функций  $y = \underline{\mu}(\vec{x}_n), y = \bar{\mu}(\vec{x}_n)$  как функций объема выборки, где  $n$  изменяется от 1 до  $N$ .
  - На другой координатной плоскости  $Ozn$  построить прямую  $z = S^2(\vec{x}_N)$ , также графики функций  $z = \underline{\sigma}^2(\vec{x}_n), z = \bar{\sigma}^2(\vec{x}_n)$  как функций объема выборки, где  $n$  изменяется от 1 до  $N$ .

## 3. Теоретические сведения

Формулы для вычисления некоторых требуемых величин:

- Выборочное среднее:  $\hat{\mu}(\vec{x}) = \bar{x} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n x_i$ ;
- Выборочная дисперсия:  $S^2(\vec{x}) = \frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$ .

### Определение $\gamma$ -доверительного интервала для значения параметра распределения случайной величины

Пусть дана случайная величина  $X$ , закон распределения которой известен с точностью до неизвестного параметра  $\theta$ .

Интервальной оценкой параметра  $\theta$  уровня  $\gamma$  называют пару статистик  $\underline{\theta}(\vec{X})$  и  $\bar{\theta}(\vec{X})$ , таких, что  $P\{\theta \in (\underline{\theta}(\vec{X}); \bar{\theta}(\vec{X}))\} = \gamma$ .

$\underline{\theta}(\vec{X})$  и  $\bar{\theta}(\vec{X})$  называют верхней и нижней границами интервальной оценки соответственно.

$\gamma$ -доверительным интервалом для параметра  $\theta$  называют реализацию (выборочное значение) интервальной оценки уровня  $\gamma$  для этого параметра, т.е. интервал вида  $(\underline{\theta}(\vec{X}); \bar{\theta}(\vec{X}))$  с детерминированными границами.

## Формулы для вычисления границ $\gamma$ -доверительного интервала для математического ожидания и дисперсии нормальной случайной величины

Формулы для вычисления границ  $\gamma$ -доверительного интервала для математического ожидания:

$$\underline{\mu}(\vec{x}_n) = \bar{x} - \frac{S(\vec{x}) \cdot t_{\frac{1+\gamma}{2}}}{\sqrt{n}}$$

$$\bar{\mu}(\vec{x}_n) = \bar{x} + \frac{S(\vec{x}) \cdot t_{\frac{1+\gamma}{2}}}{\sqrt{n}}$$

Формулы для вычисления границ  $\gamma$ -доверительного интервала для дисперсии:

$$\underline{\sigma}(\vec{x}_n) = \frac{(n-1) \cdot S^2(\vec{x})}{h_{\frac{1+\gamma}{2}}}$$

$$\bar{\sigma}(\vec{x}_n) = \frac{(n-1) \cdot S^2(\vec{x})}{h_{\frac{1-\gamma}{2}}}$$

Обозначения:

- $\bar{x}$  - точечная оценка математического ожидания;
- $S^2(\vec{x})$  - исправленная точечная оценка дисперсии;
- $n$  - объем выборки;
- $\gamma$  - уровень доверия;
- $t_\alpha$  - квантиль уровня  $\alpha$  распределения Стьюдента с  $n - 1$  степенями свободы ( $\text{St}(n-1)$ );
- $h_\alpha$  - квантиль уровня  $\alpha$  распределения Хи-квадрат с  $n - 1$  степенями свободы ( $\chi^2(n-1)$ ).

## 4. Текст программы

```
1 function main()
2     pkg load statistics
3
4     X = [-0.45,-0.33,2.92,-1.25,-1.20,0.05,-0.53,...
5          -0.19,1.49,0.67,0.22,1.23,0.50,-0.92,...
6          0.90,-1.52,-0.15,-1.24,-0.47,-0.45,0.18,...
7          -0.05,1.58,1.74,2.37,-0.24,-1.34,1.05,...
8          1.28,1.37,1.18,0.22,0.11,0.28,-0.64,-0.39,...
9          -1.77,-1.61,0.47,0.77,-0.27,-1.19,-0.25,...
10         1.04,-0.16,0.42,0.29,0.10,1.04,0.43,-0.67,...
11         0.41,-0.62,-1.49,1.46,-2.77,2.09,0.88,...
12         -0.36,-0.71,-0.62,1.34,-0.78,-0.15,2.69,0.92,...
13         1.68,-0.12,0.34,0.74,1.72,1.24,0.23,...
14         0.76,0.87,-1.52,0.63,-0.56,0.83,0.31,-0.18,...
15         0.99,-1.01,0.58,1.21,-1.51,0.65,0.35,...
16         -0.37,-0.50,-0.73,0.63,0.33,1.56,-0.98,0.85,...
17         0.56,-1.07,1.47,1.44,1.91,0.24,1.34,...
18         0.99,1.27,0.11,0.22,-0.25,0.35,-0.03,-0.56,...
19         -0.79,2.41,-0.45,-0.44,0.07,0.64,0.69,...
20         0.10,-0.28];
21
22     % Уровень доверия
23     gamma = 0.9;
24     %gamma = input('Введите уровень доверия: ');
25     % Объем выборки
26     N = length(X);
27     % Точечная оценка мат. ожидания
28     M = mean(X);
29     % Точечная оценка дисперсии
30     S2 = var(X);
31     % Нижняя граница доверительного интервала для мат. ожидания
32     M_low = find_m_low(N, M, S2, gamma);
33     % Верхняя граница доверительного интервала для мат. ожидания
34     M_high = find_m_high(N, M, S2, gamma);
35     % Нижняя граница доверительного интервала для дисперсии
36     S2_low = find_S2_low(N, S2, gamma);
37     % Верхняя граница доверительного интервала для дисперсии
38     S2_high = find_S2_high(N, S2, gamma);
39
40     % Вывод полученных ранее значений
41     fprintf('Точечная оценка математического ожидания = %.3f\n', M);
42     fprintf('Точечная оценка дисперсии = %.3f\n', S2);
43     fprintf('Нижняя граница доверительного интервала для математического ожи
44             дания = %.3f\n', M_low);
45     fprintf('Верхняя граница доверительного интервала для математического ож
```

```

45 fprintf('Нижняя граница доверительного интервала для дисперсии = %.3f\n
    ', S2_low);
46 fprintf('Верхняя граница доверительного интервала для дисперсии = %.3f\n
    ', S2_high);
47
48 % Массив точечных оценок для математического ожидания
49 M_array = zeros(1, N)
50 % Массив точечных оценок для дисперсии
51 S2_array = zeros(1, N)
52 % Массивы для нижних и верхних границ для математического ожидания
53 M_low_array = zeros(1, N)
54 M_high_array = zeros(1, N)
55 % Массивы для нижних и верхних границ для дисперсии
56 S2_low_array = zeros(1, N)
57 S2_high_array = zeros(1, N)
58
59 for i = 1 : N
60     temp_m = mean(X(1:i));
61     temp_s2 = var(X(1:i));
62     M_array(i) = temp_m;
63     S2_array(i) = temp_s2;
64     M_low_array(i) = find_m_low(i, temp_m, temp_s2, gamma);
65     M_high_array(i) = find_m_high(i, temp_m, temp_s2, gamma);
66     S2_low_array(i) = find_S2_low(i, temp_s2, gamma);
67     S2_high_array(i) = find_S2_high(i, temp_s2, gamma);
68 end
69
70 % Построение графиков
71 plot(1 : N, [(zeros(1, N) + M) ', M_array ', M_low_array ', M_high_array '])
72 ;
73 xlabel('n');
74 ylabel('y');
75 legend('f1 ', 'f2 ', 'f3 ', 'f4 ');
76 print -djpg p1.jpg
77 figure;
78
79 plot(1 : N, [(zeros(1, N) + S2) ', S2_array ', S2_low_array ',
80     S2_high_array ']);
81 xlabel('n');
82 ylabel('z');
83 ylim([0, 10]);
84 legend('g1 ', 'g2 ', 'g3 ', 'g4 ');
85 print -djpg p2.jpg
86 end
87
88 % Функция поиска нижней границы доверительного интервала для математического
    ожидания
89 function M_low = find_m_low(N, M, S2, gamma)
90     M_low = M - sqrt(S2) * tinv((1 + gamma) / 2, N - 1) / sqrt(N);
91 end

```

```

90 % Функция поиска верхней границы доверительного интервала для математическог
    о ожидания
91 function M_high = find_m_high(N, M, S2, gamma)
92     M_high = M + sqrt(S2) * tinv((1 + gamma) / 2, N - 1) / sqrt(N);
93 end
94 % Функция поиска нижней границы доверительного интервала для дисперсии
95 function S2_low = find_S2_low(N, S2, gamma)
96     S2_low = ((N - 1) * S2) / chi2inv((1 + gamma) / 2, N - 1);
97 end
98 % Функция поиска верхней границы доверительного интервала для дисперсии
99 function S2_high = find_S2_high(N, S2, gamma)
100     S2_high = ((N - 1) * S2) / chi2inv((1 - gamma) / 2, N - 1);
101 end

```

## 5. Результат расчетов и графики для выборки из индивидуального варианта (при построении графиков принять $\gamma = 0.9$ )

- $\hat{\mu}(\vec{x}_N) = 0.232;$
- $S^2(\vec{x}) = 1.041;$
- $\underline{\mu}(\vec{x}_n) = 0.078;$
- $\overline{\mu}(\vec{x}_n) = 0.387;$
- $\underline{\sigma}(\vec{x}_n) = 0.851;$
- $\overline{\sigma}(\vec{x}_n) = 1.306$

Обозначения на графиках:

- f1:  $y(n) = \hat{\mu}(\vec{x}_N);$
- f2:  $y(n) = \underline{\mu}(\vec{x}_n);$
- f3:  $y(n) = \overline{\mu}(\vec{x}_n);$
- f4:  $y(n) = \mu(\vec{x}_n);$
- g1:  $z(n) = S^2(\vec{x}_N);$
- g2:  $z(n) = \underline{\sigma}^2(\vec{x}_n);$
- g3:  $z(n) = \overline{\sigma}^2(\vec{x}_n);$
- g4:  $z(n) = \sigma^2(\vec{x}_n).$

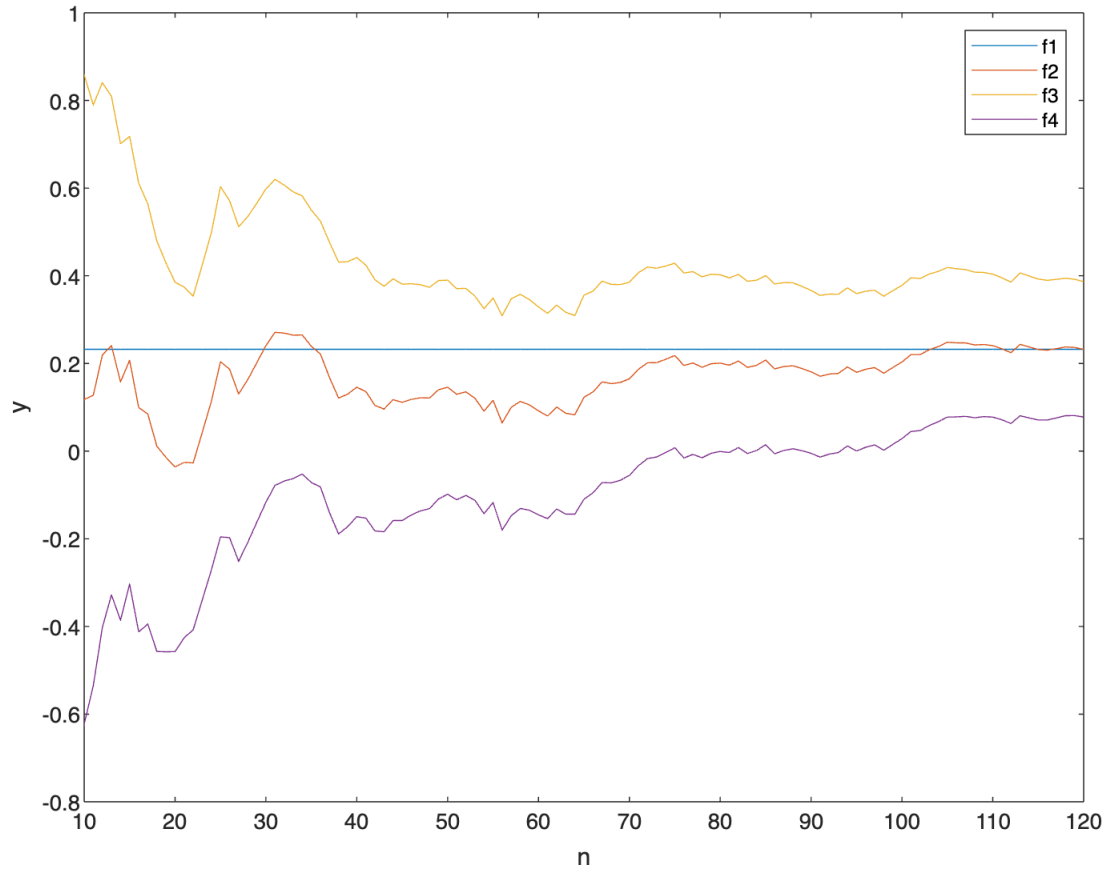


Рис. 5.1: Прямая  $y(n) = \hat{\mu}(\vec{x}_N)$ , а также графики функций  $y(n) = \mu(\vec{x}_n)$ ,  $y(n) = \underline{\mu}(\vec{x}_n)$ ,  $y(n) = \overline{\mu}(\vec{x}_n)$  как функций объема  $n$  выборки, где  $n$  изменяется от 1 до  $N$

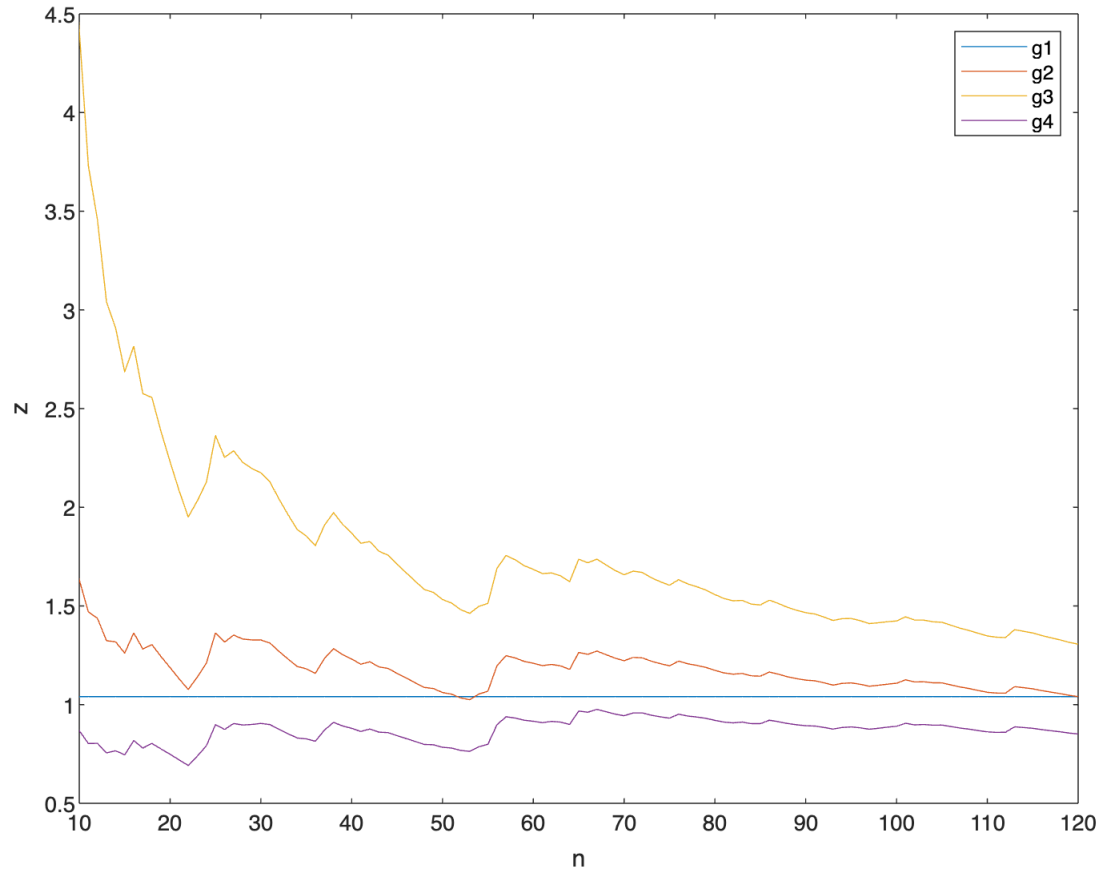


Рис. 5.2: Прямая  $z(n) = S^2(\vec{x}_N)$ , а также графики функций  $z(n) = S^2(\vec{x}_n)$ ,  $z(n) = \underline{\sigma}^2(\vec{x}_n)$ ,  $z(n) = \overline{\sigma}^2(\vec{x}_n)$  как функций объема  $n$  выборки, где  $n$  изменяется от 10 до  $N$