

Circuiti RLC

Filippo Dal Farra Matteo Zandegiacomo Orsolina

19 Novembre 2018

1 Introduzione

Questa relazione riassume gli esiti di tre esperienze tutte finalizzate all'adempimento dell'analisi di un circuito RLC svolto durante l'ultima seduta. Per fare ciò si é sfruttato l'uso di un oscilloscopio il quale, da come si vedrá, modifica inevitabilmente le risposte dei circuiti in analisi. A causa di questo é risultato poi necessario derivare i valori delle capacità e delle resistenze parassite che si trovano all'interno dell'oscilloscopio per poi effettuare l'analisi tenendo conto di esse.

Successivamente abbiamo studiato la risposta in frequenza del circuito RC nelle diverse configurazioni di filtro passa alto e filtro passa basso, sempre variando le frequenze di taglio. Così facendo si é riusciti ad ottenere i diagrammi di Bode corrispondenti che associati alle funzioni di trasferimento teoriche associate forniscono i valori dei componenti usati nei vari casi. Inoltre queste misure sono poi state messe a confronto con i risultati ottenuti precedentemente nella carica e scarica del condensatore, per osservare se queste misure erano tra loro compatibili.

Infine abbiamo considerato anche un induttore, consistente in una bobina realizzata precedentemente. Inizialmente abbiamo studiato un circuito RL per trovare il valore dell'induttanza di questo elemento attraverso diversi cicli di carica e scarica del campo magnetico da esso generato. In seguito è stata posta all'interno di un circuito RLC composto dalla bobina e dal condensatore usato precedentemente di cui si sapeva a questo punto il valore. Ciò ci ha permesso di studiare il funzionamento del circuito passa banda e la propria frequenza di risonanza.

2 Materiali e strumenti

- Svariate resistenze da usare a seconda delle necessità
- Un condensatore
- Cavi "banana-banana"
- Breadboard
- Bobina precedentemente realizzata
- Multimetro digitale (DMM)
- Generatore di tensione variabile
- Oscilloscopio
-

3 Procedure di misura

Innanzitutto è stato necessario montare il circuito RC per osservare la scarica del condensatore come suggerito dalla scheda fornita 1. Ad esso andava poi collegato l'oscilloscopio tramite i cavi coassiali all'ingresso ed all'uscita del circuito. Abbiamo noi impostato il generatore di funzioni in modo che producesse lo scalino da ΔV a $0 V$, e in questa configurazione è stato osservato l'andamento in uscita dell'onda nella fase di scarica. Sono stati utilizzati 5 diversi valori di resistenza con lo stesso condensatore in modo da avere tempi caratteristici τ differenti e per ognuno sono state salvate 6 forme d'onda con l'oscilloscopio impostato a 16 averagings. Ciò ha fornito un numero sufficiente di dati per poi poter trovare i parametri relativi ad eventuali componenti parassiti dato che la procedura è stata ripetuta senza il condensatore in esame supplito dalla capacità intrinseca in cavi e ADC dell'oscilloscopio. Tutti i valori di resistenza utilizzati sono stati misurati con il DMM.

Successivamente lo stesso circuito è stato da noi studiato come filtro, analizzando la sua risposta ad un ingresso sinusoidale in funzione della frequenza applicata. Sono stati da noi scelti valori di resistenza che ci dessero valori della frequenza di taglio specifici, il generatore di funzioni è stato impostato da noi a $V_{PP} = 2 V$ con frequenze distribuite esponenzialmente per una decade e $\frac{1}{2}$ prima e dopo la frequenza di taglio. Quindi sono stati da noi trascritti i valori di ampiezza in entrata ed uscita dal circuito assieme allo sfasamento tra i due forniti dall'oscilloscopio tramite le sue funzioni di misura in modo da poter creare il diagramma di Bode. Infine abbiamo noi applicato una resistenza in modo da caricare il circuito ed in queste condizioni è stata misurata l'impedenza in uscita del filtro con due diverse frequenze. La procedura è stata ripetuta con la configurazione passa alto ??, per un unico valore di resistenza.

In seguito si è considerata una bobina costruita precedentemente e con essa è stato costruito un circuito RL. Per fare ciò la bobina è stata inserita all'interno di una struttura fatta da un materiale ferromagnetico, il quale aveva come ruolo quello di ampliare l'induttanza da esso prodotta. Si è innanzitutto ancora usata un'onda quadra dal generatore di funzioni, con diverse configurazioni di resistenze. Se ne è così studiata la carica e la scarica di questo elemento. Si è poi montato un circuito RLC passa banda, sfruttando come induttore ancora la bobina e come condensatore l'elemento di circuito usato precedentemente. Si è impostato il generatore di funzioni in modo da realizzare un'onda sinusoidale applicata a due diverse configurazioni di valori di resistenza. Si è studiato ciò modificando i valori della frequenza, e la maggior parte di essi sono stati presi in concomitanza della frequenza di risonanza del circuito.

4 Analisi dei dati

Verranno ora analizzati i dati ottenuti per ogni configurazione.

4.1 Scarica condensatore

Il circuito ora preso in considerazione é il seguente:

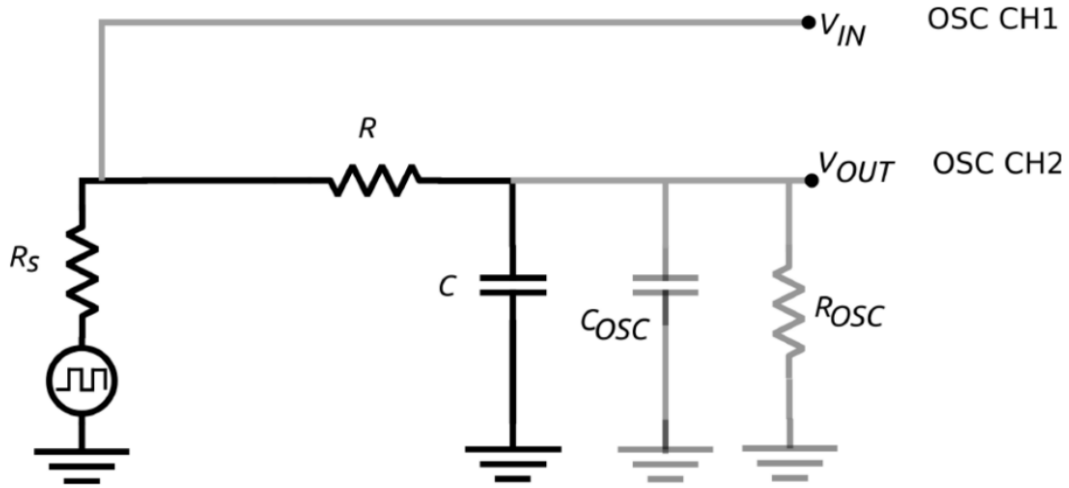


Figure 1: Circuito RC passa basso utilizzato anche per l'analisi della scarica del condensatore

Utilizzando la legge di Kirchhoff per le tensioni e presa la maglia passante per la resistenza R e condensatore C e considerando la relazione tra corrente e tensione ai capi di esso 1 si ottiene l'equazione differenziale 2 che rappresenta una semplificazione di quello che accade nel nostro circuito nell'approssimazione $C_{osc} = 0$ e $R_{osc} = \infty$.

$$i(t) = C \frac{dV_c(t)}{dt} \quad (1)$$

$$V_{in} - i(t)R - V_c(t) = 0 \Rightarrow$$

$$\tau \frac{dV_c(t)}{dt} + V_c(t) = V_{in} \quad \text{con} \quad \tau = RC \quad (2)$$

Date le condizioni iniziali di condensatore carico a $V_c(t=0) = \Delta V$ che é il livello di tensione alta del generatore di funzioni il quale per $t > 0$ fornisce $V_{in} = 0$ si ottiene la forma analitica della scarica del condensatore 3 risolvendo l'equazione differenziale corrispondente.

$$\begin{aligned}\frac{dV_c(t)}{dt} &= -\frac{1}{\tau}V_c(t) \\ V_c(t) &= \Delta V \exp -\frac{t}{\tau}\end{aligned}\quad (3)$$

Tuttavia l'applicazione del circuito di misura, l'oscilloscopio nel nostro caso, e la presenza della resistenza in uscita del generatore provocano inevitabilmente una modifica del caso ideale, in particolare R_{osc} fa un partitore di tensione con R e R_s cos  che il condensatore non   inizialmente carico alla tensione del generatore e la sua scarica avviene anche attraverso R_{osc} . L'equazione 3 si sostituisce quindi con l'equazione 5 che tiene conto dei componenti parassiti.

$$\begin{aligned}V_0 &= \Delta V \frac{R_{osc}}{R_{osc} + R + R_s} \\ \tau &= (C_{osc} + C)((R + R_s) // R_{osc})\end{aligned}\quad (4)$$

$$V_{out}(t) = V_c(t) = V_0 \exp -\frac{t}{\tau}\quad (5)$$

A scopo rappresentativo viene quindi mostrata una delle forme campionate:

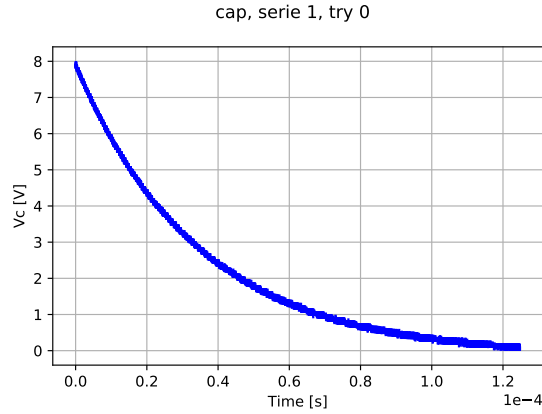


Figure 2: Primo campione preso con il primo valore di resistenza, si nota qualitativamente che la scarica   compatibile con una caduta esponenziale

La relazione 5 che rappresenta la scarica del condensatore in funzione del tempo pu  essere linearizzata in questa variabile se viene preso il logaritmo di V_{out} .

$$\ln V_{out}(t) = \ln \left(V_0 \exp -\frac{t}{\tau} \right) = \ln V_0 + \left(-\frac{1}{\tau} \right) t = A + Bt\quad (6)$$

$$\sigma[\ln V_{out}] = \frac{\sigma[V_{out}]}{V_{out}}\quad (7)$$

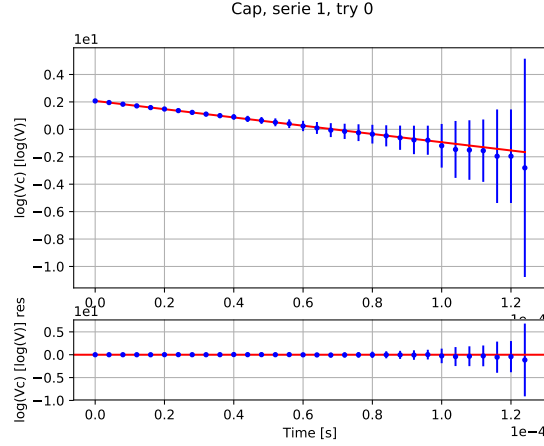


Figure 3: Esempio di fit della scarica del condensatore, in blu i dati misurati, un punto ogni 400 per questioni di chiarezza, ed in rosso il risultato della regressione lineare.

Si può quindi procedere al fit lineare per il calcolo dei parametri A e B e il risultato con il confronto tra modello e campioni è mostrato in figura 3. Come si può vedere, avvicinandosi a $V_c = 0$ i campioni presi mostrano un drift dal modello: questo è molto probabilmente dovuto ad un offset sullo zero dell'oscilloscopio e tale ipotesi viene quindi ora analizzata.

La presenza di un offset δV , assunto fisso, in fase di misura non ci permette di applicare la regressione lineare del caso precedente:

$$\begin{aligned}
 V_m(t) &= V_{out}(t) + \delta V = V_0 \exp -\frac{t}{\tau} + \delta V \\
 \ln V_m(t) &\underset{V_{out} \approx V_m}{=} \ln \left(V_0 \exp -\frac{t}{\tau} \right) + \ln \left(1 + \frac{\delta V}{V_m} \right) = \\
 &\underset{\ln(1+x) = x + o(x)}{=} \ln \left(V_0 \exp -\frac{t}{\tau} \right) + \frac{\delta V}{V_m} = A + Bt + C \frac{1}{V_m} \\
 A &= \ln V_0 \quad B = -\frac{1}{\tau} \quad C = \delta V
 \end{aligned} \tag{8}$$

Si procede quindi ad applicare la regressione generalizzata 8. Dato che per ogni valore di resistenza sono state registrate 6 scariche del condensatore si estraggono poi i tre parametri come funzione della sola resistenza applicata effettuando la media campionaria sui 6 valori ottenuti ed i risultati sono esposti in tabella 4.1.

Per estrarre il valore della capacità in esame si procede all'analisi del parametro B nei due casi che risulta avere la seguente relazione, in cui $R_s = 50 \, \Omega$ è l'impedenza in uscita dal generatore di funzioni in serie con la resistenza R .

R [Ω]	Con condensatore		
	A [$\log(V)$]	B [s^{-1}]	C [V]
998.2	2.07683 ± 0.00011	-28986 ± 6	-0.09284 ± 0.00024
9917.0	2.07150 ± 0.00009	-3068.8 ± 0.6	-0.09144 ± 0.00012
99660.0	1.9875 ± 0.0005	-336.58 ± 0.20	-0.0640 ± 0.0006
29820.0	2.04916 ± 0.00010	-1044.13 ± 0.24	-0.08552 ± 0.00019
373200.0	1.7690 ± 0.0004	-114.31 ± 0.09	-0.0307 ± 0.0005

R [Ω]	Senza condensatore		
	A [$\log(V)$]	B [s^{-1}]	C [V]
998.2	2.1503 ± 0.0012	$(-6.840 \pm 0.012) e6$	-0.1958 ± 0.0022
9917	2.0561 ± 0.0009	$(-7.5257 \pm 0.0031) e5$	-0.0733 ± 0.0007
99660	1.95850 ± 0.00021	-80567 ± 18	-0.08907 ± 0.00016
29820	2.0384 ± 0.0006	$(-2.5736 \pm 0.0007) e5$	-0.0877 ± 0.0005
373200	1.73688 ± 0.00023	-27803 ± 28	-0.03462 ± 0.00016

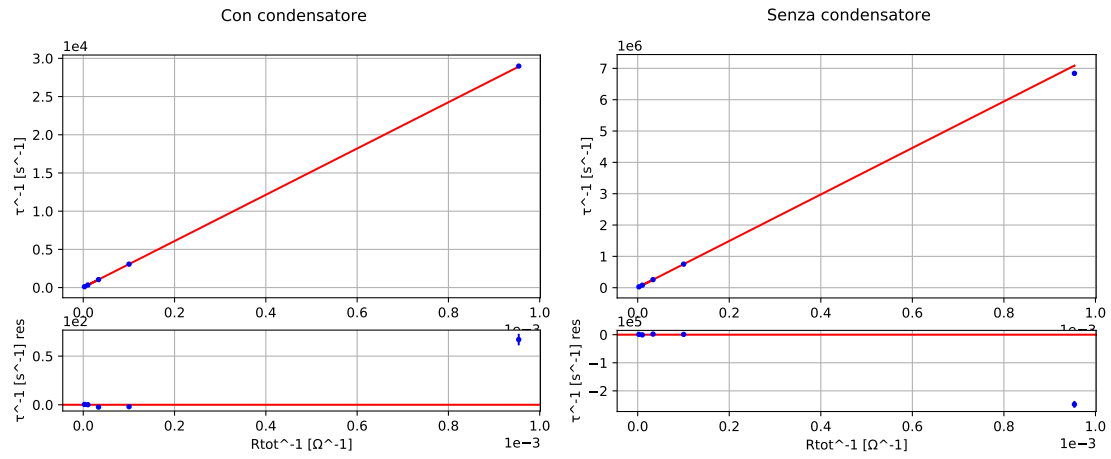
$$-B = \frac{1}{\tau} = \frac{1}{C} \left(\frac{1}{R + R_s} + \frac{1}{R_{osc}} \right) = \gamma + \lambda \frac{1}{R + R_s} \quad (9)$$

Si effettua un plot 4.1 per mostrare la relazione tra $1/\tau$ in funzione della conduttanza $1/R_{tot}$ applicata nei casi con e senza condensatore incognito assieme alla corrispondente regressione lineare con i parametri γ e λ poi tabulati.

	Con condensatore	Senza condensatore
$C_{tot} = 1/\lambda$	$(3.3026 \pm 0.0004) e-8$	$(1.34727 \pm 0.00034) e-10$
$R_{osc} = \lambda/\gamma$	$(9.22 \pm 0.08) e5$	$(1.0946 \pm 0.0008) e6$
$\chi^2_{r,3dof}$	85.15	13.78 e6

Come é evidente, il valore del χ^2 ottenuto mostra un'incompatibilitá con tra le misure ottenute e il modello teorico. Questo potrebbe essere spiegato dal fatto che ci siano degli effetti che non sono stati presi in considerazione. Scegliamo quindi di considerare veritiera la legge teorica e conseguentemente scalare le incertezze di conseguenza, le quali erano quindi state sottostimate, in modo da imporre $\chi^2_r = 1$.

	Con condensatore	Senza condensatore
$C_{tot} = 1/\lambda$	$(3.303 \pm 0.004) e8$	$(1.3 \pm 1.3) e-10$
$R_{osc} = \lambda/\gamma$	$(9.22 \pm 0.25) e5$	$(1.09 \pm 0.05) e6$



Otteniamo quindi i parametri del circuito in esame, considerando nel caso delle due R_{osc} la media dei due valori con incertezza corrispondente alla loro deviazione standard:

$$C = (3.289 \pm 0.013) e8$$

$$C_{osc} = (1.3 \pm 1.3) e-10$$

$$R_{osc} = (1.01 \pm 0.08) e6$$

(10)

4.2 Filtri RC

Si analizza ora la risposta in frequenza del circuito 4.2 e del circuito ??.

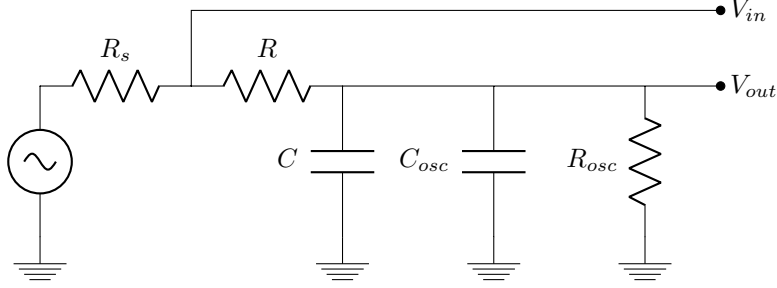


Figure 4: Circuito RC Low Pass

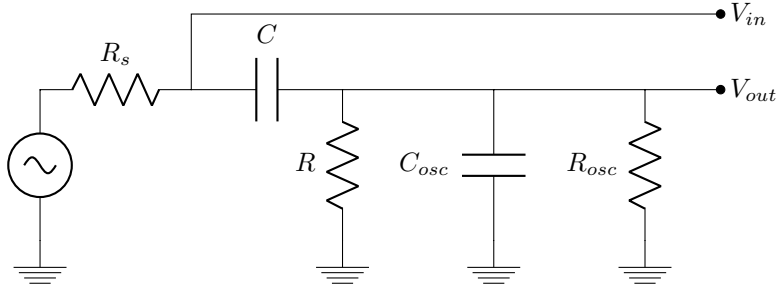


Figure 5: Circuito RC High Pass

Le funzioni di trasferimento senza il contributo di C_{osc} e R_{osc} , in prima analisi trascurabili, risultano essere:

$$H(\omega) = \frac{V_{out}}{V_{in}} = \frac{1}{1 + j\omega\tau} \quad \tau = RC \quad (11)$$

$$H(\omega) = \frac{j\omega\tau}{1 + j\omega\tau} \quad \tau = RC \quad (12)$$

Dove $C = (3.289 \pm 0.013) \text{ e8}$ é il condensatore utilizzato nell'analisi precedente.

Vengono quindi graficati modulo e fase dei dati misurati a confronto con la risposta teorica per i tre valori di frequenza di taglio scelti:

Come si vede dai grafici 6 e 7 il modello teorico mostra una notevole compatibilità con i dati raccolti a meno di effetti di ordine superiore che causano deviazioni comunque minime dovute probabilmente al non aver considerato le capacità parassite R_{osc} e C_{osc} per il calcolo della funzione di trasferimento. Un'eccezione si vede sul grafico corrispondente a $R = 99.56\Omega$ il

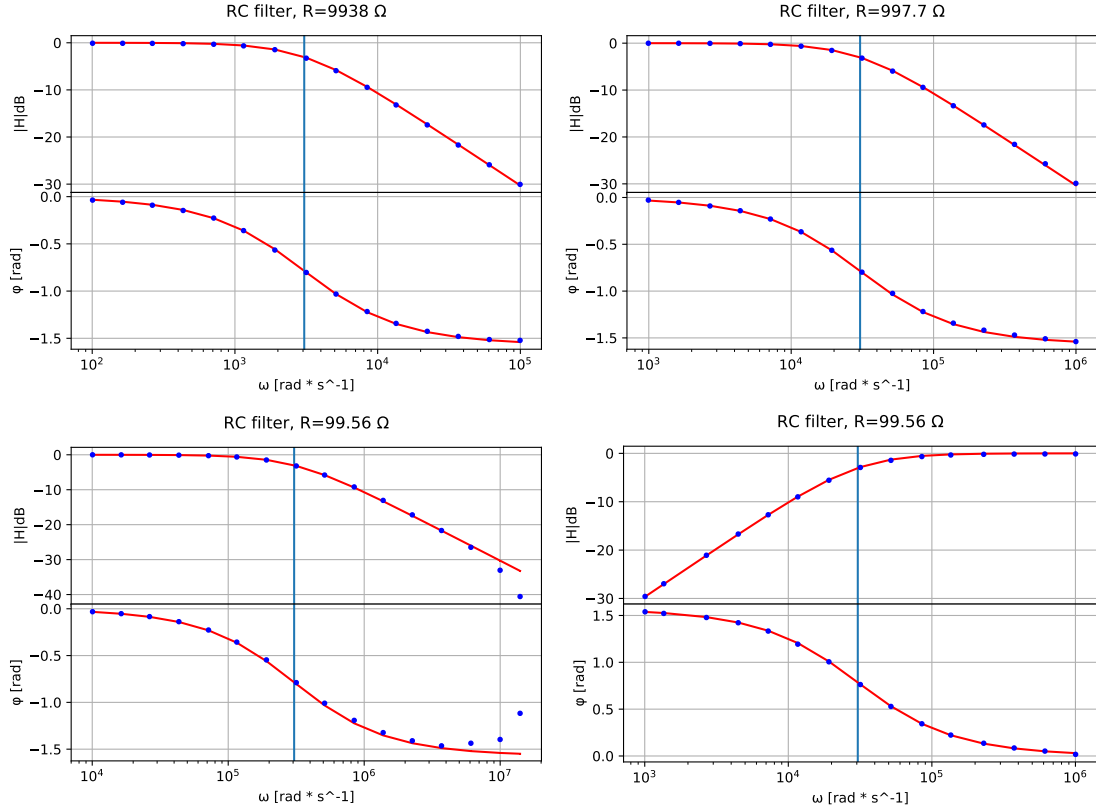


Figure 6: Grafici dei tre filtri Low Pass e del filtro High Pass accostati alle loro previsioni teoriche, la linea verticale azzurra mostra la posizione della frequenza di taglio teorica

quale per frequenze maggiori di $\omega = 3 \text{ Mrads}^{-1}$ mostra una deviazione molto più marcata ma comunque spiegabile dalla presenza di componenti parassiti nel circuito che agiscono solamente a frequenze così alte.

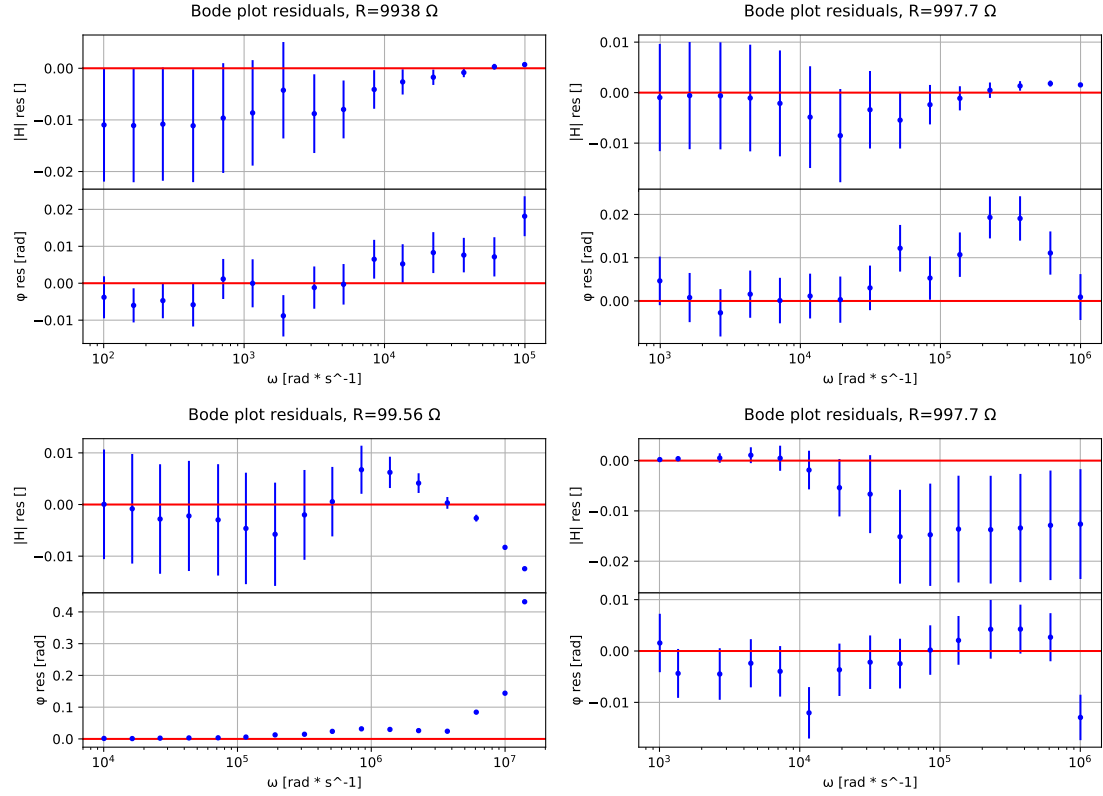
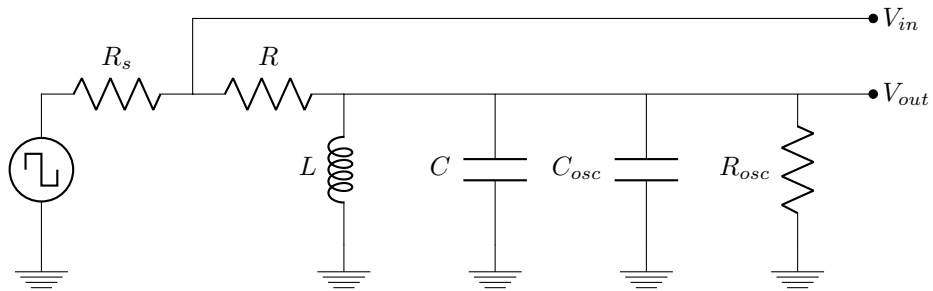


Figure 7: Residui dei grafici di Bode dei filtri passa basso e passa alto

5 Conclusioni

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Ut purus elit, vestibulum ut, placerat ac, adipiscing vitae, felis. Curabitur dictum gravida mauris. Nam arcu libero, nonummy eget, consectetur id, vulputate a, magna. Donec vehicula augue eu neque. Pellentesque habitant morbi tristique senectus et netus et malesuada fames ac turpis egestas. Mauris ut leo. Cras viverra metus rhoncus sem. Nulla et lectus vestibulum urna fringilla ultrices. Phasellus eu tellus sit amet tortor gravida placerat. Integer sapien est, iaculis in, pretium quis, viverra ac, nunc. Praesent eget sem vel leo ultrices bibendum. Aenean faucibus. Morbi dolor nulla, malesuada eu, pulvinar at, mollis ac, nulla. Curabitur auctor semper nulla. Donec varius orci eget risus. Duis nibh mi, congue eu, accumsan eleifend, sagittis quis, diam. Duis eget orci sit amet orci dignissim rutrum.

Nam dui ligula, fringilla a, euismod sodales, sollicitudin vel, wisi. Morbi auctor lorem non justo. Nam lacus libero, pretium at, lobortis vitae, ultricies et, tellus. Donec aliquet, tortor sed accumsan bibendum, erat ligula aliquet magna, vitae ornare odio metus a mi. Morbi ac orci et nisl hendrerit mollis. Suspendisse ut massa. Cras nec ante. Pellentesque a nulla. Cum sociis



natoque penatibus et magnis dis parturient montes, nascetur ridiculus mus. Aliquam tincidunt urna. Nulla ullamcorper vestibulum turpis. Pellentesque cursus luctus mauris. Non funziona un cazzo