

Amplificatore differenziale, Ponte di Wheatstone e Induzione di Faraday

Filippo Dal Farra Matteo Zandegiacomo Orsolina

Aprile 2018

1 Introduzione

Questa esperienza è stata divisa in tre parti, nelle quali si sono studiati diversi tipi di circuiti che sfruttano l'uso dei transistor BJT.

Nella prima parte si è studiato un amplificatore differenziale a BJT. Questo circuito prevede la possibilità di percepire minime variazioni di tensioni differenziali, sfruttando appunto l'amplificazione che rendono questa differenza più evidente. Lo si è studiato in due configurazioni diverse, nella prima con una resistenza e nella seconda con una sorgente di corrente costante come metodo per imporre la corrente di polarizzazione dei transistor a cui si sommeranno le fluttuazioni dovute al segnale in ingresso. Si può così studiare qual è il guadagno differenziale e modo comune del circuito ottenuto dagli ingressi all'uscita.

Nella seconda parte dell'esperienza è stato costruito un ponte di Wheatstone. Sono state sfruttate diverse resistenze che ci sono state fornite e un trimmer per bilanciare il ponte. Difatti era nostro interesse trovare la posizione del trimmer che più riducesse la differenza di tensione all'uscita del ponte per poi sbilanciarlo variando l'impedenza. Per studiare ciò si è usato l'amplificatore differenziale precedentemente costruito, in quanto le differenze di potenziale risultavano infatti minime e i transistor rispondevano alla necessità di amplificare il segnale che altrimenti era impercettibile dal solo oscilloscopio.

Infine, nell'ultima parte dell'esperienza abbiamo riprodotto l'esperimento di Faraday, studiando l'induzione magnetica tra una bobina sorgente (S) e ricevente (R). Così facendo si è in grado di correlare l'elettricità al magnetismo, determinando una relazione tra corrente elettrica e campo magnetico in funzione della geometria dell'esperimento.

2 Materiali e strumenti

- Transistor BJT BC107
- Resistenze assortite
- Condensatori assortiti
- Trimmer
- Generatore di funzioni d'onda
- Oscilloscopio
- Multimetro digitale (DMM)
- Due breadboard
- Cavi "banana-banana"
- Generatore di tensione variabile
- Due bobine con $N=32$ avvolgimenti
- Tubo PVC per allineamento bobine

3 Procedure di misura

Innanzitutto si è studiato il comportamento di un amplificatore differenziale a BJT. Per fare ciò è stato costruito il circuito in figura 1 con $R_C = 10\text{k}\Omega$, $R_E = 100\Omega$ e $R_1 = 10\text{k}\Omega$ in modo da avere una corrente nominale con valore $i_0 = 0.72\text{mA}$ per ciascuno dei transistor e con le resistenze scelte il guadagno differenziale nominale $G_{diff} = 50$ e un guadagno modo comune $G_{cm} \approx 0.5$. A questo punto si è potuto procedere con le misure, effettuate variando i valori della frequenza da 100Hz a 500kHz. E' stata poi aggiunta una sorgente di corrente come circuito di polarizzazione come rappresentato nella figura 2 impostando la corrente precedente agendo sul trimmer. Sono state poi effettuate nuovamente le misure, ancora variando il valore della frequenza.

In seguito è stato realizzato il ponte di Wheatstone sfruttando diverse resistenze che ci sono state fornite: una nominale calibrata $R_R = 1000\Omega$, un trimmer da $2\text{k}\Omega$ complessivi e una quarta resistenza R_x che funge da valore iniziale a cui aggiungere le variazioni. Una volta costruito lo si è bilanciato al meglio, modificando la suddivisione delle resistenze sul trimmer, che sono state in seguito misurate grazie al DMM a meno delle inevitabili resistenze di contatto. A questo punto si è potuto ricavare il valore della resistenza incognita. Conoscendo ciò si è stati in grado di procedere con le misure e in particolare è stata studiata la risposta del ponte per variazioni δR_x

aggiungendo in parallelo resistenze da $R = 100\text{k}\Omega$, per osservare come si modifica l'equilibrio. Togliendo tutte queste resistenze appena aggiunte si è bilanciato nuovamente il ponte, poiché nel frattempo a causa delle varie sollecitazioni che aveva subito poteva essersi modificata l'uscita. Si è così potuto studiare il comportamento del ponte all'aggiunta di condensatori in parallelo aventi valore $\delta C = 1\text{nF}$.

Nell'ultima parte dell'esperienza è stata innanzitutto costruita una bobina, da utilizzare assieme alla bobina costruita in una precedente esperienza. Le due bobine sono state realizzate allo stesso modo e sono risultate avere lo stesso numero di avvolgimenti, la stessa sezione e lo stesso materiale. Le due bobine, messe una adiacente all'altra, sono state connesse a due circuiti distinti, posti su due breadboard posizionate a decine di centimetri l'una dall'altra. Una di esse è stata alimentata tramite una resistenza $R_{lim} = 47\Omega$ dal generatore di funzioni, mentre l'altra forniva l'ingresso all'amplificatore differenziale realizzato in precedenza con uno degli ingressi opportunamente messo a massa. Si è studiata quindi l'induzione magnetica tra le bobine al variare della frequenza da 1kHz a 200kHz e della distanza da 20mm a 200mm . Per tutte le misure è stata in particolare salvata la forma d'onda data dall'oscilloscopio ai capi di R_{lim} e all'uscita dell'amplificatore.

4 Analisi dei dati

L'esperienza é stata divisa in 3 parti principali, nella prima é stato studiato un'amplificatore differenziale a BJT, nella seconda la sua applicazione al ponte di Wheatstone e nella terza il suo utilizzo per studiare il fenomeno dell'induzione di Faraday.

4.1 Amplificatore differenziale

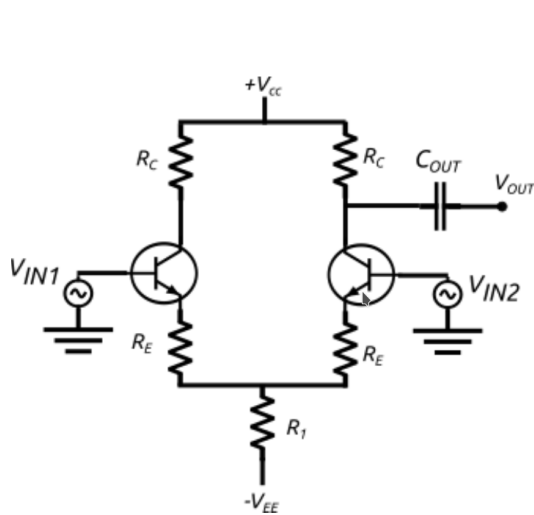


Figure 1: Amplificatore differenziale senza generatore corrente costante

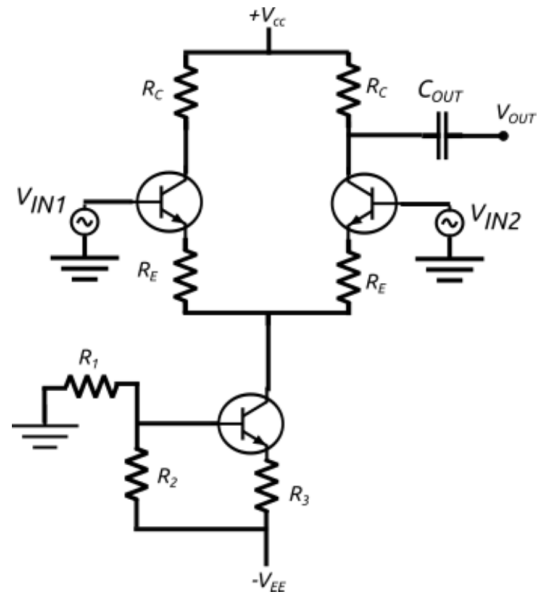


Figure 2: Amplificatore differenziale con generatore corrente costante

Vengono ora mostrati i risultati dei guadagni nelle diverse configurazioni e gli eventuali confronti 3.

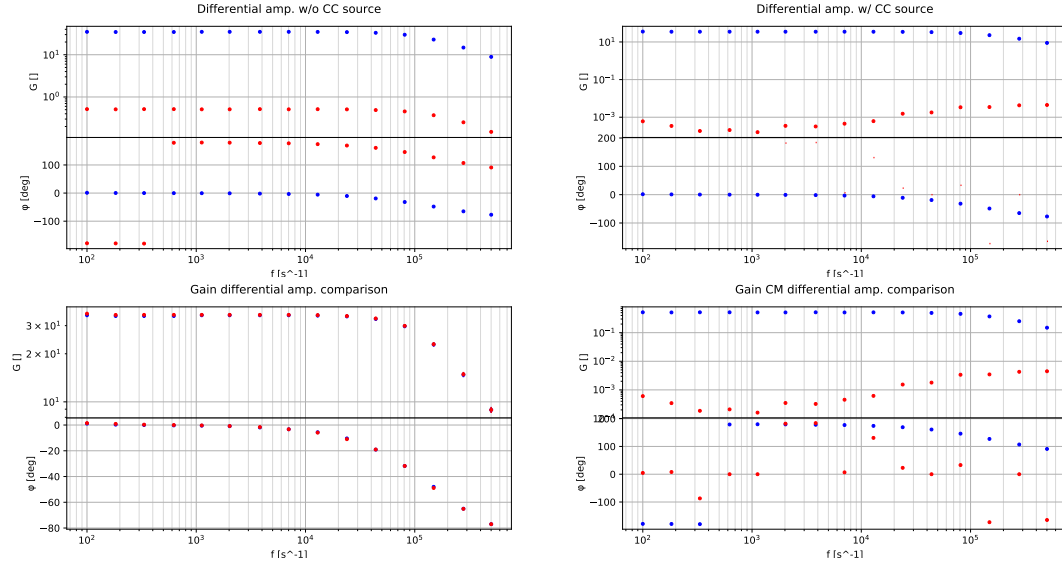


Figure 3: Grafici di Bode dei guadagni, spiegazione nel testo.

Nella riga in alto sono mostrati i guadagni differenziale (in blu) e modo comune (in rosso), senza e con il generatore di corrente costante. Notare innanzitutto che nel diagramma di fase a sinistra il guadagno modo comune passa da -180deg a $+180\text{deg}$ per ciclicità degli angoli. Inoltre la fase modo comune con il generatore di corrente non è stata misurata per impossibilità di una definizione di essa dato il rumore.

Nella riga inferiore sono mostrati i miglioramenti che si ottengono separatamente per i due tipi di guadagno nel caso con (in rosso) e senza (in blu) generatore di corrente costante, come ci aspettiamo il guadagno G_{diff} non risente della circuiteria in più mentre il modo comune migliora (quindi diminuisce) considerevolmente.

Si procede quindi al confronto con un modello di alcune quantità.

Il guadagno G_{diff} può essere calcolato in modo più preciso con la formula:

$$G_{diff} = \frac{R_C}{2(R_E + r_e(i_0))} \quad (1)$$

Quindi sapendo che $G_{diff \max} = 35.65$ si può ottenere il valore di r_e :

$$r_e(i_0) = \frac{R_C - 2G_{diff}R_E}{2G_{diff}} = 40\Omega \quad (2)$$

la quale è in linea con quello che ci aspetteremmo per la resistenza di emettitore di un BJT data la corrente $i_0 = 0.72 \text{ mA}$.

L'impedenza in parallelo al generatore di corrente Z_S può essere estratta dai dati secondo:

$$G_{CM} = -\frac{Z_S}{2R_S} \quad (3)$$

$$Z_S(\omega) = -\frac{R_C}{2G_{CM}} \quad (4)$$

e risulta avere un andamento in funzione della frequenza mostrata in figura 4.1. Nuovamente

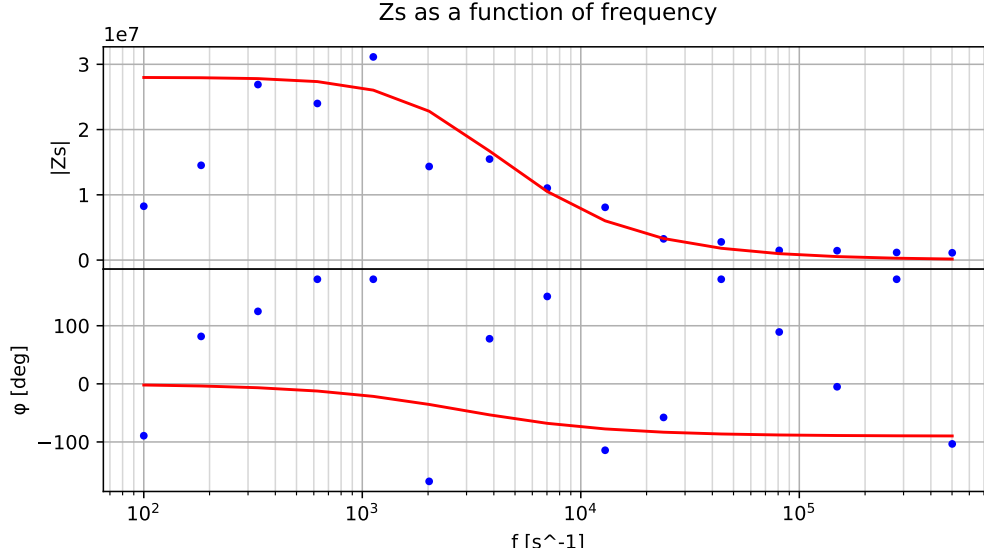


Figure 4: Andamento di Z_S in funzione della frequenza.

la fase misurata di Z_S non é affidabile per via del rumore nella misurazione della fase di G_{CM} , tuttavia il modulo (in blu) segue l'andamento aspettato superati i 30kHz scendendo a 0Ω il quale é compatibile con l'impedenza di un condensatore da 2pF in parallelo ad una resistenza da 28M Ω mostrati in rosso nella figura entrambi nel range di valori che caratterizzano la giunzione PN del transistor.

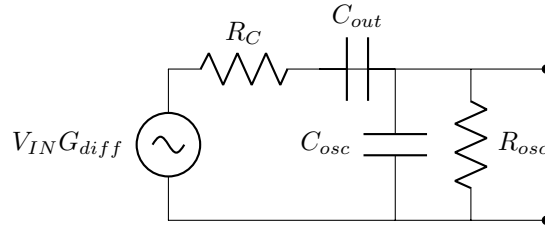


Figure 5: Modello G_{diff} misurata.

La funzione di trasferimento per il guadagno differenziale tenuto conto del circuito di misura 5 é:

$$H = G_{diff} \frac{R_{osc} // \frac{1}{j\omega C_{osc}}}{R_{osc} // \frac{1}{j\omega C_{osc}} + \frac{1}{j\omega C_{out}} + R_C} \quad (5)$$

la quale può essere confrontata, ponendo i valori ottenuti nelle precedenti esperienze per $C_{osc} = 110\text{pF}$ $R_{osc} = 1\text{M}\Omega$ e il condensatore $C_{out} = 100\text{nF}$ posto in uscita, con i dati sperimentali ottenuti in figura 6.

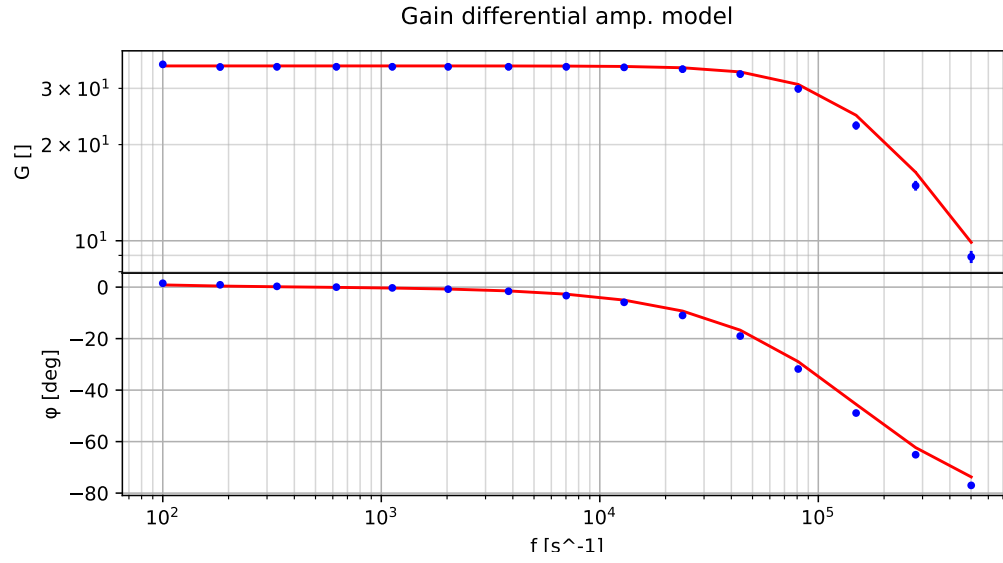


Figure 6: Gain in funzione della frequenza, in blu i punti sperimentali e in rosso la curva del modello.

4.2 Ponte di Wheatstone

Con il ponte "bilanciato" per il valore $R_x = R_{x0}$ si mostrano in figura 7 a titolo di esempio l'output dello "sbilanciamento" che il circuito mostra per diversi valori di $R_{x0} + \delta R_x$ e le misure ripetute sulla stessa configurazione a ponte bilanciato.

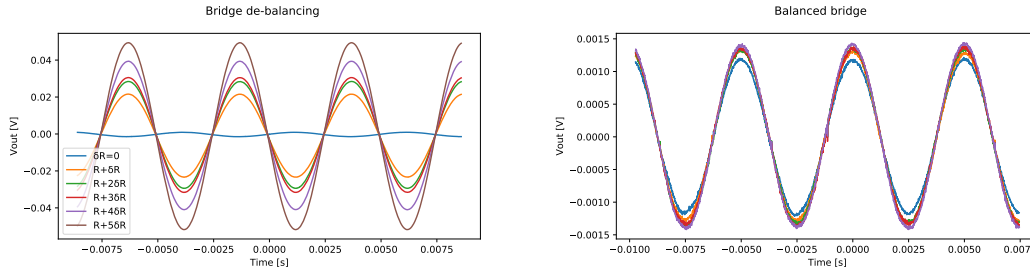


Figure 7: Sbilanciamento allontanandosi da R_{x0} e misure ripetute a ponte bilanciato.

Le forme d'onda salvate utilizzando l'oscilloscopio, in modalità 8 averagings, sono state date in input ad una funzione che esegue il fit sinusoidale alla frequenza che era impostata fornendo in output i parametri A , B e V_0 :

$$V(t) = V_0 + A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t) \quad (6)$$

Tuttavia per l'analisi é comodo che il segnale in ingresso sia un coseno puro in modo che il coefficiente B tenda a zero, per fare questo i tempi vengono quindi traslati di un fattore comune sia in ingresso che in uscita partendo da un fit preliminare eseguito sull'ingresso:

$$\phi = -\arctan(B/A) \quad (7)$$

$$t_0 = -\frac{\phi}{\omega} \quad (8)$$

$$t \rightarrow t - t_0 \quad (9)$$

I coefficienti A e B possono essere riassunti da un unico numero immaginario trascurando il bias DC V_0 in modo che:

$$V_{in}(t) = V_0 \text{ in} + V_{in} \cos(\omega t) \quad (10)$$

$$V_{out}(t) = V_0 \text{ out} + A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t) = V_0 \text{ out} + C \cos(\omega t + \phi) = \quad (11)$$

$$V_0 \text{ out} + C \cos(\phi) \cos(\omega t) - C \sin(\phi) \sin(\omega t)$$

$$\mathbf{Re}[V_{out}] = A = C \cos(\phi) \quad (12)$$

$$\mathbf{Im}[V_{out}] = -B = -C \sin(\phi) \quad (13)$$

$$V_{out} = A - jB \quad (14)$$

Quindi per ogni misurazione effettuata si ottengono due coppie di coefficienti A B , una per l'ingresso e una per l'uscita. Sulle misure ripetute nelle stesse condizioni (5 nel nostro caso) viene eseguita la media aritmetica dei valori e presa come incertezza la deviazione standard diviso $\sqrt{5}$.

Vengono quindi mostrati in figura 8 gli effetti delle piccole variazioni di impedenza sulla risposta del ponte di misura. Si vede dalla figura come l'aggiunta di una componente puramente passiva

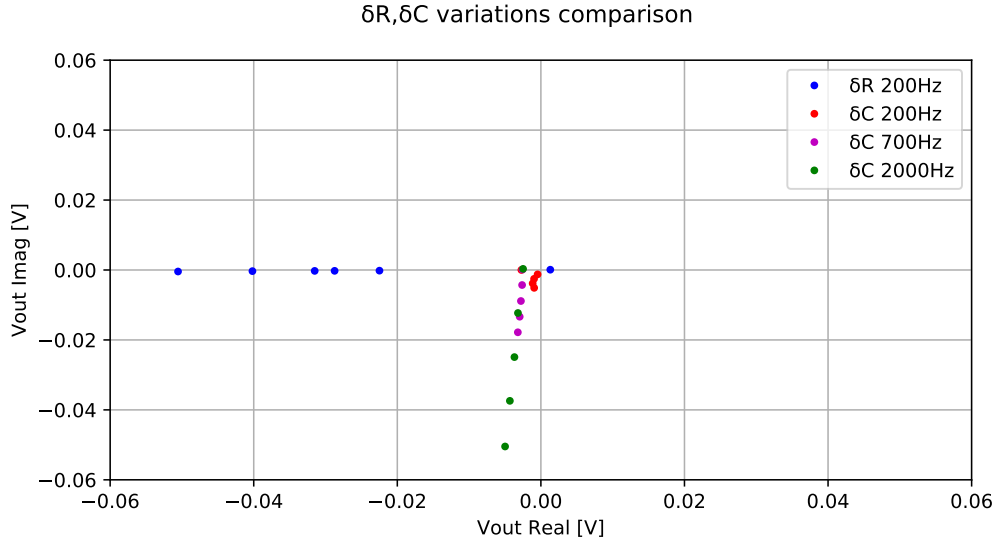


Figure 8: Plot di V_{out} misurata sul piano immaginario.

non modifica sensibilmente la fase in uscita mentre se possiede componenti reattive l'effetto su V_{out} é quello di uno sfasamento rappresentato da componenti immaginarie prominenti rispetto a quelle reali.

Per discriminare ulteriormente gli effetti si procede ad analizzare i vari casi separatamente. Per ogni set di dati si procede ad effettuare una regressione lineare del tipo:

$$\mathbf{Re}[V_{out}] = B\delta R_x \quad \text{or} \quad (15)$$

$$\mathbf{Im}[V_{out}] = B\delta C_x \quad (16)$$

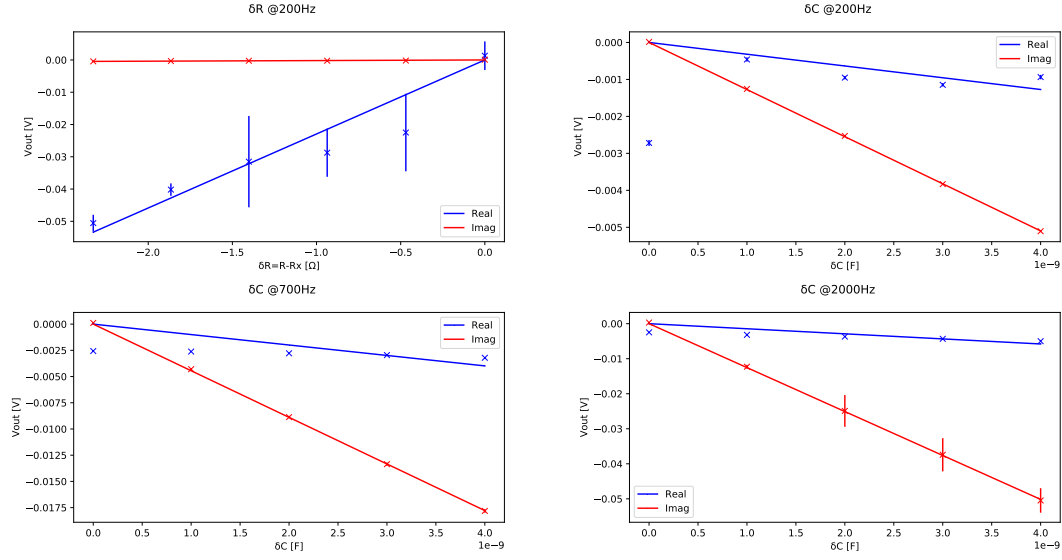


Figure 9: V_{out} in funzione di δZ_x

E si ottengono i risultati seguenti:

$$\frac{\partial \text{Re}[V_{out}]}{\partial \delta R_x} = 0.022934 + / - 0.000013 \text{ A} \quad (17)$$

$$\frac{\partial \text{Im}[V_{out}]}{\partial \delta C_x} = (-1.274 + / - 0.004) \text{ e6 } \text{ V F}^{-1} @ 200 \text{ Hz} \quad (18)$$

$$\frac{\partial \text{Im}[V_{out}]}{\partial \delta C_x} = (-4.4456 + / - 0.0010) \text{ e6 } \text{ V F}^{-1} @ 700 \text{ Hz} \quad (19)$$

$$\frac{\partial \text{Im}[V_{out}]}{\partial \delta C_x} = (-1.25414 + / - 0.00029) \text{ e7 } \text{ V F}^{-1} @ 2000 \text{ Hz} \quad (20)$$

Tuttavia i χ_{red}^2 sono rispettivamente 3343, 0.9, 790 e 22981 i quali non mostrano compatibilità con la teoria se non nel secondo caso, si procede quindi ad assumere una sottostima delle incertezze che vengono quindi ampliate di conseguenza imponendo $\chi_{red}^2 = 1$ come é già stato mostrato nei plot in figura 9. Si ottengono quindi i valori (precedenti) con le nuove incertezze:

$$\frac{\partial \text{Re}[V_{out}]}{\partial \delta R_x} = 0.0229 + / - 0.0007 \text{ A} \quad (21)$$

$$\frac{\partial \text{Im}[V_{out}]}{\partial \delta C_x} = (-1.27 + / - 0.10) \text{ e6 } \text{ V F}^{-1} @ 200 \text{ Hz} \quad (22)$$

$$\frac{\partial \text{Im}[V_{out}]}{\partial \delta C_x} = (-4.4456 + / - 0.0010) \text{ e6 } \text{ V F}^{-1} @ 700 \text{ Hz} \quad (23)$$

$$\frac{\partial \text{Im}[V_{out}]}{\partial \delta C_x} = (-1.25 + / - 0.04) \text{ e7 } \text{ V F}^{-1} @ 2000 \text{ Hz} \quad (24)$$

Si procede ora ad effettuare il calcolo della sensibilità del circuito, ovvero la minima variazione di δZ_x che esso é in grado di risolvere.

$$\sigma_{\delta R} = \frac{\sigma[\mathbf{Re}[V_{out}]]}{\frac{\partial \mathbf{Re}[V_{out}]}{\partial \delta R_x}} = 0.6 \, \Omega \quad (25)$$

$$\sigma_{\delta C} = \frac{\sigma[\mathbf{Im}[V_{out}]]}{\frac{\partial \mathbf{Im}[V_{out}]}{\partial \delta C_x}} = 1 \, \text{e-11} \, \text{F} \, @ \, 200 \, \text{Hz} \quad (26)$$

$$\sigma_{\delta C} = 2 \, \text{e-11} \, \text{F} \, @ \, 700 \, \text{Hz} \quad (27)$$

$$\sigma_{\delta C} = 1.3 \, \text{e-11} \, \text{F} \, @ \, 2000 \, \text{Hz} \quad (28)$$

4.3 Induzione di Faraday

Per l'acquisizione delle forme d'onda vengono prese le medesime accortezze della sezione precedente. Dati i plot dei dati raccolti in figura 10 si può procedere a calcolare il coefficiente di

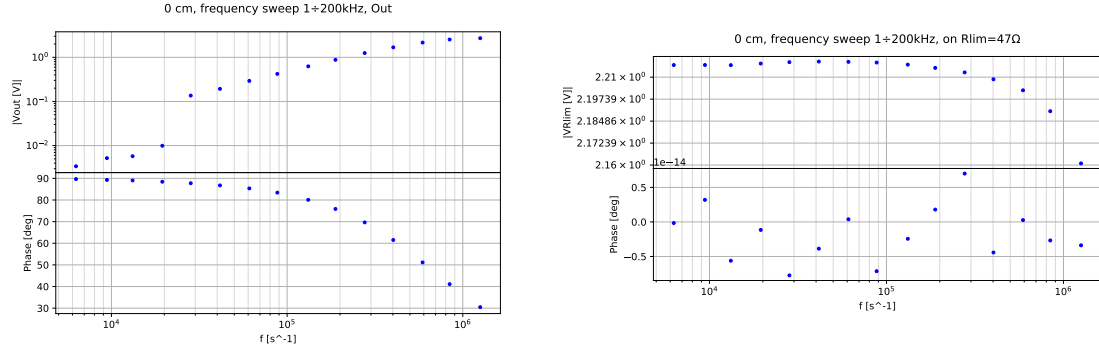


Figure 10: Ampiezza dell'induzione e della corrente sulla sorgente al variare della frequenza.

mutua induzione tra bobina sorgente e ricevente definendo ϵ_R la f.e.m. ai capi della ricevente in ingresso all'amplificatore e i_S la corrente che scorre nella bobina sorgente misurata sapendo la tensione ai capi di R_{lim} :

$$Z_{eff}(\omega) = \frac{\epsilon_R(\omega)}{i_S(\omega)} = \frac{V_{out}(\omega)}{G_{diff}(\omega)i_S(\omega)} \quad (29)$$

$$(30)$$

Supponendo poi che l'accoppiamento sia di tipo induttivo, si può porre:

$$Z_{eff}(\omega) = j\omega M_{RS} \quad (31)$$

$$M_{RS} = \frac{\epsilon_R(\omega)}{\frac{\partial i_S(\omega)}{\partial t} j} = \frac{\epsilon_R(\omega)}{i_S(\omega)\omega j} \quad (32)$$

Viene quindi scelto come valore di M_{RS} la media alle varie frequenze:

$$M_{RS} = 2.088 \text{ e-}6 - j1.049 \text{ e-}7 \text{ H} \quad (33)$$

$$M_{RS,abs} = 2.0916 \text{ e-}6 \text{ H} \quad (34)$$

$$M_{RS,angle} = -2.8758 \text{ deg} \quad (35)$$

Come si può vedere il valore non è puramente reale come ci si aspetterebbe ma a causa della non nulla resistività del filo presenta una parte immaginaria, tuttavia la fase risultante è talmente prossima a zero che non dà un contributo significativo pertanto il risultato è compatibile con una misura di induttanza.

Viene quindi mostrato in figura 11 il confronto dell'impedenza di questa induttanza di accoppiamento con la Z_{eff} misurata così da verificare che effettivamente il modello valga. La deviazione

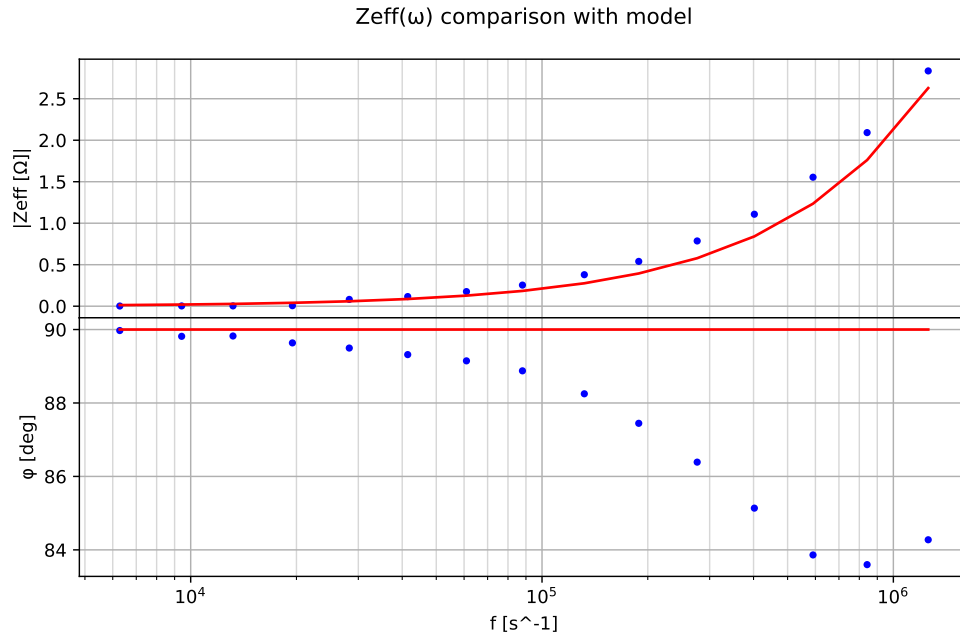


Figure 11: Confronto tra Z_{eff} in blu e l'impedenza del coefficiente di mutua induzione in rosso.

della fase, seppur di pochi gradi, può essere attribuita ad effetti di ordine maggiore qui non presi in considerazione.

Si analizza ora l'andamento dell'induzione all'aumentare della distanza, figura 12.

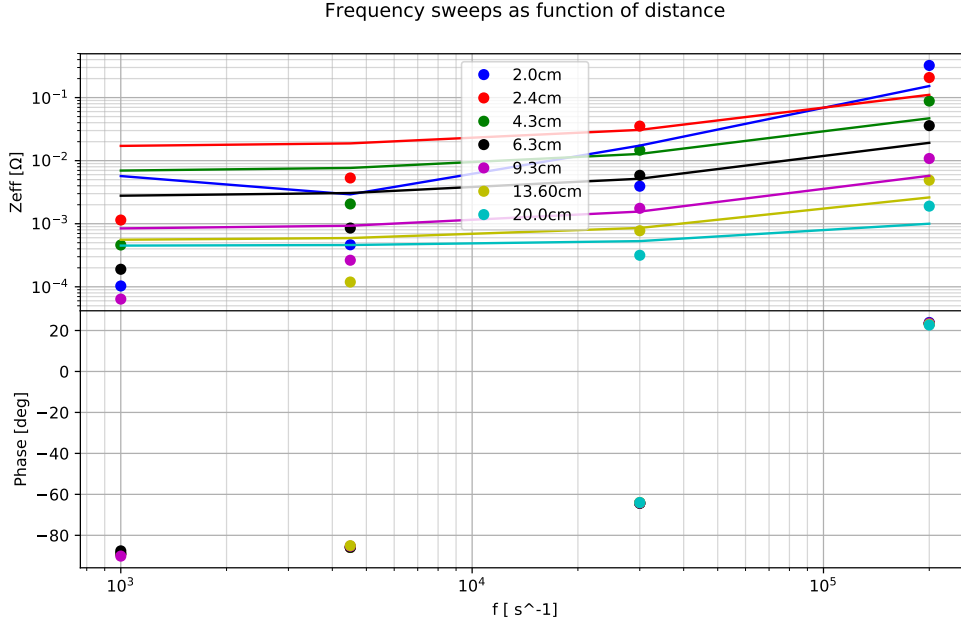


Figure 12: Confronto a varie distanze in funzione della frequenza.

L'andamento della fase non é quello aspettato e dovrebbe essere indagato piú a fondo con nuovi dati ed un nuovo setup, tuttavia mi aspetto che il modulo aumenti con la frequenza come é successo precedentemente.

Viene ora scelta la frequenza di 200 kHz per la quale ho dati a tutte le distanze e viene mostrato in figura 13 il coefficiente di mutua induzione calcolato dalle misure di tensione in entrata ed in uscita comparato all'induzione che un dipolo magnetico esercita su una spira che si muove lungo l'asse di simmetria.

In rosso é mostrato il modello teorico:

$$r = 8.75 \text{ mm} \quad (36)$$

$$\Sigma = \pi r^2 \quad (37)$$

$$m_S = N i_S \Sigma \quad (38)$$

$$B_{asse} = \frac{\mu_0 2 m_S}{4 \pi d^3} \quad (39)$$

$$\Phi_B = N B_{asse} \Sigma \quad (40)$$

$$M_{RS} = \frac{\Phi_B}{i_S} \quad (41)$$

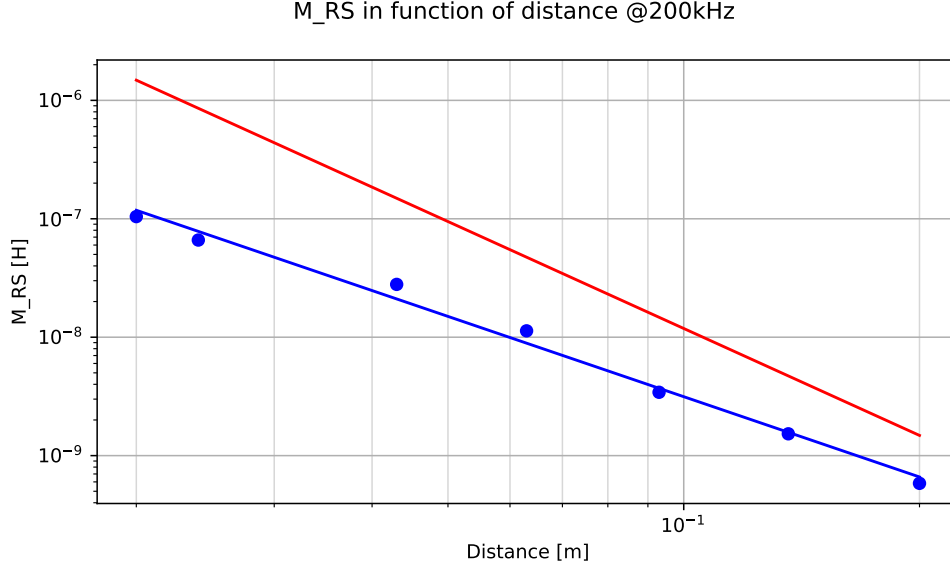


Figure 13: Mutua induzione in funzione della distanza.

In blu si mostrano i punti sperimentali assieme alla loro regressione lineare sulla scala logaritmica:

$$M_{RS,log} = \log(M_{RS}) \quad d_{log} = \log(d) \quad (42)$$

$$M_{RS,log,fit} = A + Bd_{log} \quad (43)$$

$$M_{RS,fit} = \exp(M_{RS,log,fit}) \quad (44)$$

$$A = -24.76 \quad B = -2.25 \quad (45)$$

Come si può vedere non solo i punti sperimentali sono traslati in basso ma il coefficiente B rappresentante l'esponente della distanza è diverso da -3 come compare nella formula teorica sopra esposta, questo provoca un'ulteriore incongruenza. Questo tipo di incongruenze sono dovute al fatto che stiamo usando per il modello l'"approssimazione di dipolo magnetico" la quale è valida solamente su grandi distanze mentre a piccole distanze non segue più una legge di tipo $\propto 1/d^3$. Inoltre la spira ha un certo spessore e parte del flusso entrante al primo giro di essa esce prima di concatenarsi a quelle successive provocando quindi una diminuzione del coefficiente di mutua induzione come mostrato nel grafico. Notare inoltre che all'aumentare della distanza la legge teorica raggiunge la regressione effettuata sui punti sperimentali come ci si aspetta.

5 Conclusioni

L'amplificatore differenziale ci ha permesso di studiare le caratteristiche del ponte di Wheatstone e dell'induzione di Faraday con un'accuratezza che semplicemente non era possibile tramite il solo utilizzo dell'oscilloscopio. Il ponte ha permesso in particolare di misurare minime variazioni di impedenza da un valore nominale e ciò é di enorme utilit  nei circuiti di misura dove si vuole avere una risposta in tensione e fase le quali sono pi  facilmente misurabili rispetto all'impedenza. L'esperienza sull'induzione di Faraday permette invece di sondare il limite dell'approssimazione di dipolo magnetico a piccole distanze la quale   altrimenti pi  che valida per gran parte delle applicazioni che si possono incontrare.