Введение

Существуют объекты, у которых в отсутствие управления желаемый режим работы неустойчив. К подобным объектам можно отнести летательные аппараты, у которых центр давления расположен впереди центра масс. Такие летательные аппараты обладают высокой маневренностью, но при этом являются статически неустойчивыми. Для обеспечения устойчивости используется система управления.

Значительные трудности вызывает обычно задача построения управления объектами, в которых число управляющих воздействий меньше числа степеней свободы. В этом случае про объект говорят, что у него дифицит управляющих воздействий. В англоязычной литературе такой объект управления называют under-actuated object. К таким объектам можно отнести летательные аппараты, автомобили и обратные маятники [Формальский].

Обратный маятник — устройство, представляющее собой маятник, который имеет центр масс выше своей точки опоры, закреплённый на конце, как правило, жёсткого стержня. В то время как нормальный маятник устойчиво висит вниз, обратный маятник по своей природе неустойчивый и должен постоянно балансироваться чтобы оставаться в вертикальном положении, с помощью системы управления. Существует несколько разновидностей обратных маятников. Рассмотрим некоторые из них.

Классическим примером является маятник на подвижной тележке (рис. 1). Задача состоит в том, чтобы, перемещая тележку вдоль продольной оси, обеспечить установленному на неё стержню устойчивое равновесие. Всем известно, что, перемещая ладонь руки в горизонтальной плоскости, можно удерживать от падения стоящую на ней вертикальную палку. Особенно легко это делать, если палка длинная и её масса сосредоточена на верхнем конце. Имеются также вариации с двумя, тремя и более звеньями (рис. 2).

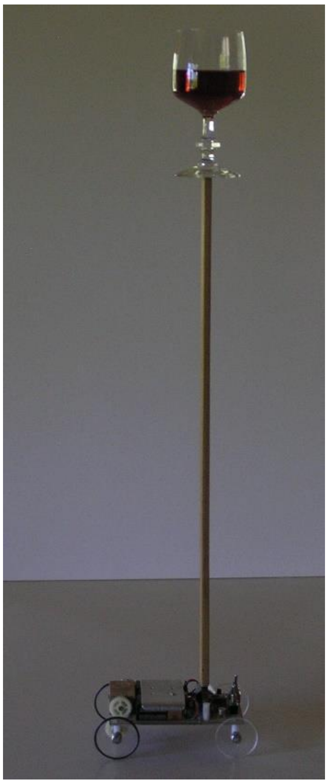

Рисунок 1. Маятник на подвижной тележке.

Другая модель – маятник Фуруты. Здесь устойчивое равновесие обеспечивается путем вращательного движения подвижного основания (рис. 3).

Существуют маятники, у которых основание неподвижно, а управление осуществляется благодаря установленному на конце стержня маховику, приводимому в движение с помощью электродвигателя. Движение такого маятника осуществляется в одно плоскости. Но подобный принцип можно использовать для удержания баланса в нескольких плоскостях. Например, для удержания равновесия подвижного стержня или куба (рис. 4 и 5). Причем такой куб может не только держать равновесие, но и перемещаться в пространстве.

Для наглядности, ниже приведен список ссылок на видеозаписи с демонстрацией работы, описанных маятников:

- линейный обратный маятник https://youtu.be/XWhGjxdug0o?si=kb5AgjxUWUN_GxET
- линейный обратный маятник с тремя звеньями https://youtu.be/meMWfva-Jio?si=fBdEp7RY7XR0lKqa
- маятник Фуруты https://youtu.be/XKzzWe15DEw?si=PdX9CbOycCJdFVeJ
- обратный маятник с маховиком
- балансирующий стержень https://youtu.be/woCdjbsjbPg?si=-d7IMDe7-9cZdVsS
- балансирующий куб https://youtu.be/n_6p-1J551Y?si=TcxH2565jX23d_Uw

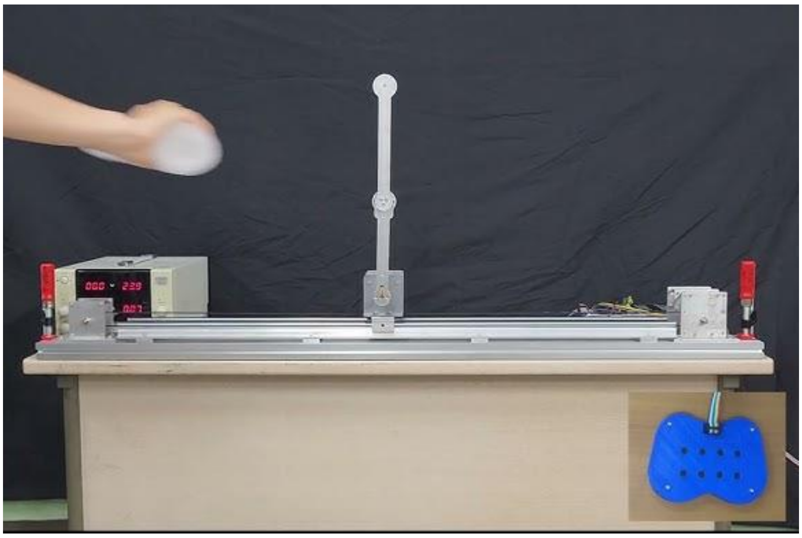

Рисунок 2. Двухзвенный обратный маятник на линейной подвижной платформе

Рисунок 3. Маятник Фуруты.

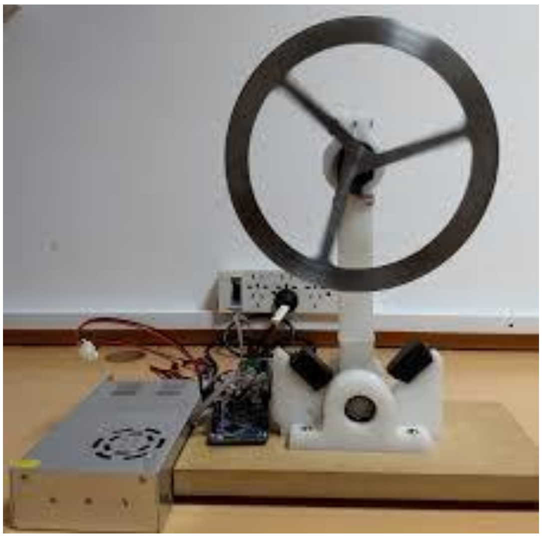

Рисунок 4. Обратный маятник с маховиком.

Рисунок 4. Балансирующий стержень.

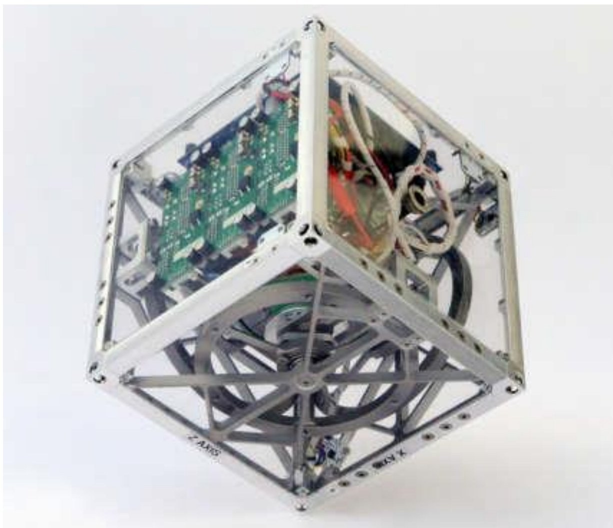

Рисунок 5. Балансирующий куб.

Однако обратные маятник – это не только теоретическая абстракция для отработки различных методов управления. Они также имеют применение в реальном мире. Например, ориентация искусственных спутников земли производится с помощью маховиков, установленных внутри корпуса. Обратные маятники находят применение в транспортных средствах таких, как

Segway, моноколесо и гироскутер. Даже процесс ходьбы можно выразить через модель обратного маятника! При двуногой ходьбе представьте, что стопа опорной ноги является основанием маятника, а корпус – положением центра масс стержня (рис. 7).

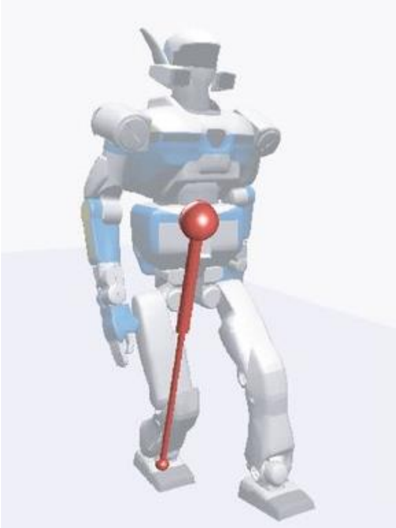

Рисунок 6. Модель трехмерного линейного обратного маятника, используемая в системе управления ходьбы двуногого шагающего робота.

Целью этой практической работы является построение алгоритмов управления маятника с маховиком. Реализуемые желаемые режимы движения – это раскачивание маятника с переводом его в верхнее неустойчивое положение равновесия и его стабилизация в этом положении. Законы изменения управляющего воздействия, при которые реализуется желаемое движение, синтезируются в виде обратной связи.

Устройство маятника с маховиком

На рис. 7 показан однозвенный маятник 1 с маховиком 3. Маятник способен совершать круговые движения в вертикальной плоскости. Его ось вращения расположена на неподвижном основании. В этой оси отсутствует какой-либо привод. Сам маятник 1 также часто называют стержнем.

<фотография маятника>

Рисунок 7. Основные компоненты маятника с маховиком. 1 – стержень, 2 – ось стержня, 3 – маховик, 4 – ось маховика, 5 – электродвигатель.

Ось вращения маховика 4 закреплена на стержне и параллельна его оси вращения. Маховик приводится во вращение бесколлекторным электродвигателем 5.

Электропривод, так же, как и маховик, смонтирован на стержне. Статор двигателя жестко скреплен со стержнем, ось ротора жестко соединена с осью маховика. Плата управления включает в себя микроконтроллер STM32G4, драйвер двигателя и трехфазный усилитель мощности. При управлении используется информация об углах поворота стержня относительно неподвижного основания и маховика относительно стержня. Эти углы измеряются магнитными датчика углового положения AS5600.

Динамика маятника с маховиком

На рис. 8 приведена схема маятника. Стержень OB в точке O шарнирно соединён с неподвижной опорой. Ось шарнира перпендикулярна плоскости качания маятника. Симметричный относительно своей оси вращения маховик смонтирован на маятнике так, что его центр расположен на конце стержня в точке B. Маховик может поворачиваться в ту или иную сторону вокруг проходящей через точку B горизонтальной оси, перпендикулярной плоскости качания стержня. Эта ось параллельна оси шарнира O. Ось вращения маховика является продолжением оси ротора электродвигателя. Все необходимые обозначения и параметры маятника приведены в таблице 1.

Вся система имеет две степени свободы. Единственное, с помощью чего можно управлять системой – это момент, вырабатываемый электродвигателем.

Вращение двигателем осуществляется с помощью алгоритма векторного управления. Для сокращения вычислительной нагрузки на микроконтроллер мы будем использовать квадратурное напряжение, в качестве желаемого значения для системы управления двигателем, имитирующее подаваемое напряжение на обычный DC-мотор. Соответственно, управляющим параметром для системы управления маятником будет это квадратурное напряжение. Для этого в модель маятника нужно будет дополнительно включить модель двигателя.

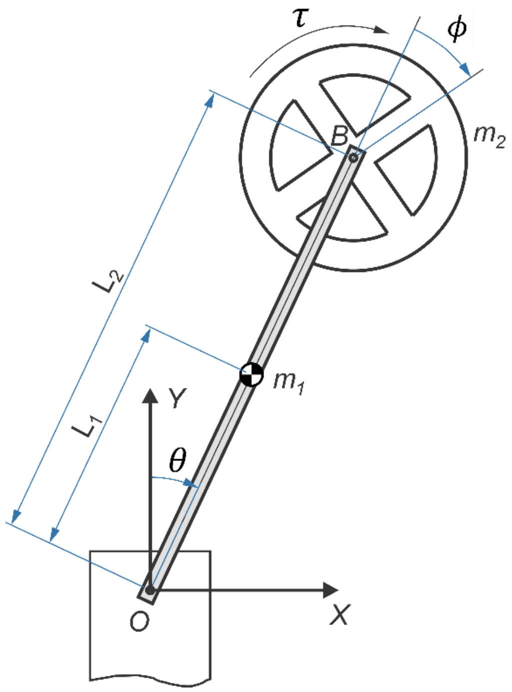

Рисунок 8. Схематичное изображение обратного маятника с маховиком.

Таблица 1. Параметры маятника.

Параметр	Ед. изм.	Описание
L_1	m	Расстояние от точки O до центра масс стержня
L_2	m	Расстояние от точки O до маховика
m_1	kg	Масса стержня
m_2	kg	Масса маховика
θ	rad	Угол поворота стержня
ϕ	rad	Угол поворота маховика
I_1	kg/m^2	Момент инерции стержня
I_2	kg/m^2	Момент инерции маховика
g	m/s^2	Ускорение свободного падения
τ	N m	Момент, вырабатываемый электродвигателем
μ_p	-	Коэффициент вязкого трения в шарнире O
μ_m	-	Коэффициент вязкого трения между статором и ротором двигателя

Динамическую модель будем строить при помощи метода Лагранжа. Метод Лагранжа — это один из классических подходов к получению уравнений движения механических систем с помощью уравнений Лагранжа второго рода. В отличие от метода Ньютона, основанного на прямом применении второго закона Ньютона к каждой массе в системе, метод Лагранжа оперирует с энергетическими величинами: кинетической и потенциальной энергией.

Суть метода заключается в следующем: для системы с n обобщёнными координатами $q_1, q_2, \dots, q_n$ строится так называемый **лагранжиан** $L = T - U$, где T— кинетическая энергия, U – потенциальная энергия системы. Далее, для каждой координаты q_i записывается уравнение Лагранжа второго рода:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_i$$

где Q_i – обобщённая сила.

Алгоритм построения модели:

1. Выбор обобщённых координат: минимальный набор независимых переменных, полностью описывающих положение системы.
2. Вычисление кинетической энергии T: сумма энергий всех подвижных масс, включая вращательное движение.
3. Вычисление потенциальной энергии U: обычно зависит от положения в поле тяжести.
4. Построение лагранжиана $L = T - U$.
5. Применение уравнений Лагранжа второго рода для получения системы дифференциальных уравнений с учетом обобщённых сил Q_i при наличии внешнего управления или трения.

Преимущества метода Лагранжа:

- Позволяет удобно описывать системы с несколькими степенями свободы и сложной кинематикой.
- Автоматически учитывает связи и не требует ручного определения реакций.
- Унифицированный подход как для поступательного, так и для вращательного движения.

Недостатки:

- Метод может стать громоздким для систем с большим числом степеней свободы.
- Требует символьных вычислений, что затрудняет его реализацию вручную.
- Уравнения могут быть неявными и нелинейными, что усложняет численную симуляцию.

Метод Лагранжа является мощным инструментом для моделирования динамики, особенно в задачах, где важны энергетические соотношения и наличие связей между телами.

После построения системы нелинейных дифференциальных уравнений методом Лагранжа, нам будет нужно линеаризовать её, затем представить в пространстве состояний, и наконец перевести дискретную форму. Это вызвано тем, что анализ и синтез управления проще производить, когда динамика системы описана именно в такой форме.

Приступим к построению динамической модели маятника в соответствие с предложенным выше алгоритмом. Сначала в качестве обобщенных координат возьмем θ и ϕ. С их помощью мы можем полностью описать положение системы.

Затем вычислим общую кинетическую маятника энергию путем сложения кинетических энергий каждого звена по формуле:

$$T = \sum_{i=1}^{2} T_i,$$

где $T_i = \frac{1}{2}m_i\dot{x}_i^2 + \frac{1}{2}m_i\dot{y}_i^2 + \frac{1}{2}I_i\dot{\alpha}_i^2$, m_i – масса i-го звена, I_i – момент инерции i-го звена, x_i и y_i – положение центра масс i-го звена вдоль осей X и Y соответственно, α_i – угол поворота i-го звена.

В нашем случае x_i, y_i, α_i:

$$x_1 = L_1\cos\theta\,; \quad y_1 = L_1\sin\theta\,; \quad \alpha_1 = \theta; \tag{1}$$
$$x_2 = L_2\cos\theta\,; \quad y_2 = L_2\sin\theta\,; \quad \alpha_2 = \phi; \tag{2}$$

Их производные по времени примут следующий вид:

$$\dot{x}_1 = -L_1\dot{\theta}\sin\theta\,; \quad \dot{y}_1 = L_1\dot{\theta}\cos\theta\,; \quad \dot{\alpha}_1 = \dot{\theta}; \tag{3}$$
$$\dot{x}_2 = -L_2\dot{\theta}\sin\theta\,; \quad \dot{y}_2 = L_2\dot{\theta}\cos\theta\,; \quad \dot{\alpha}_2 = \dot{\theta} + \dot{\phi}; \tag{4}$$

Выражение $\dot{\alpha}_2 = \dot{\theta} + \dot{\phi}$ получено согласно теореме о сложении скоростей.

Построим уравнение кинетической энергии маятника, подставив в него полученные переменные (3-4):

$$T = \frac{1}{2}m_1L_1^2\dot{\theta}\sin^2\theta + \frac{1}{2}m_1L_1^2\dot{\theta}\cos^2\theta + \frac{1}{2}I_1\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m_2L_2^2\dot{\theta}\sin^2\theta + \frac{1}{2}m_2L_2^2\dot{\theta}\cos^2\theta + \frac{1}{2}I_2\big(\dot{\theta} + \dot{\phi}\big)^2.$$

Упростив выражение, получим:

$$T = \frac{1}{2}(m_1 L_1^2 + m_2 L_2^2 + I_1 + I_2)\dot{\theta}^2 + I_2\dot{\theta}\dot{\phi} + \frac{1}{2}I_2\dot{\phi}^2. \tag{5}$$

Аналогично, потенциальная энергия маятника равняется сумме потенциальных энергий стержня и маховика:

$$U = m_1 g y_1 + m_2 g y_2.$$

Подставим сюда выражения (1-2) и получим:

$$U = (m_1 L_1 + m_2 L_2) g \cos\theta\,. \tag{6}$$

Для простоты дальнейших вычислений произведем замену переменных. Пусть $a = m_1 L_1^2 + m_2 L_2^2 + I_1$ и $b = (m_1 L_1 + m_2 L_2) g$. Тогда уравнения (5) и (6) примут вид:

$$T = \frac{1}{2}(a + I_2)\dot{\theta}^2 + I_2\dot{\theta}\dot{\phi} + \frac{1}{2}I_2\dot{\phi}^2$$

$$U = b\cos\theta.$$

Теперь построим Лагранжиан:

$$L = T - U = \frac{1}{2}(a + I_2)\dot{\theta}^2 + I_2\dot{\theta}\dot{\phi} + \frac{1}{2}I_2\dot{\phi}^2 - b\cos\theta\,. \tag{7}$$

Запишем уравнения Лагранжа второго рода с учетом обобщенных координат θ и ϕ и вектора обобщенных сил $\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} -\mu_p\dot{\theta} & \tau - \mu_m\dot{\phi} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$:

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}\right) - \dfrac{\partial L}{\partial\theta} = -\mu_p\dot{\theta} \\ \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial\dot{\phi}}\right) - \dfrac{\partial L}{\partial\phi} = \tau - \mu_m\dot{\phi} \end{cases} \tag{8}$$

Найдем все необходимые производные лагранжиана (7):

$$\frac{\partial L}{\partial\theta} = b\sin\theta\,; \quad \frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}} = (a + I_2)\dot{\theta} + I_2\dot{\phi}; \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}\right) = (a + I_2)\ddot{\theta} + I_2\ddot{\phi};$$

$$\frac{\partial L}{\partial\phi} = 0; \quad \frac{\partial L}{\partial\dot{\phi}} = I_2\dot{\theta} + I_2\dot{\phi}; \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\phi}}\right) = I_2\ddot{\theta} + I_2\ddot{\phi}.$$

Подставим эти выражения в систему (8):

$$\begin{cases} (a + I_2)\ddot{\theta} + I_2\ddot{\phi} - b\sin\theta = -\mu_p\dot{\theta} \\ I_2\ddot{\theta} + I_2\ddot{\phi} = \tau - \mu_m\dot{\phi}. \end{cases}$$

Преобразуем уравнения в этой системе так, чтобы $\ddot{\theta}$ и $\ddot{\phi}$ оказались с левой стороны:

$$\begin{cases} \ddot{\theta} = -\dfrac{\mu_p}{a}\dot{\theta} + \dfrac{\mu_m}{a}\dot{\phi} + \dfrac{b}{a}\sin\theta - \dfrac{1}{a}\tau \\ \ddot{\phi} = -\dfrac{\mu_m}{I_2}\dot{\phi} + \dfrac{\mu_p}{a}\dot{\theta} - \dfrac{\mu_m}{a}\dot{\phi} - \dfrac{b}{a}\sin\theta + \left(\dfrac{1}{I_2} + \dfrac{1}{a}\right)\tau. \end{cases} \tag{9}$$

Приведенная система дифференциальных уравнений описывает динамику механической части обратного маятника. Как было сказано в начале раздела, сконвертируем прилагаемый двигателем момент в напряжение. Таким образом система управления будет рассматривать текущий двигатель как коллекторный и использовать напряжение в качестве управляющего воздействия.

Соотношение между напряжением и моментов выходного вала двигателя без редуктора описывается с помощью уравнений:

$$V = L_m\frac{di}{dt} + R_m i + K_e\dot{\phi},$$

$$\tau = K_t i.$$

Все параметры и переменные приведены в таблице 2.

Таблица 2. Параметры электродвигателя.

Параметр или переменная	Ед. измерения	Описание
V	В	Подаваемое на двигатель напряжение
i	А	Ток, проходящий через обмотки двигателя

L_m	Гн	Индуктивность обмотки двигателя
R_m	Ом	Сопротивление обмотки двигателя
K_e	рад/с/В	Скоростная постоянная
K_t	Н м/А	Моментная постоянная

Параметры L_m, R_m, K_e, K_t обычно указываются в документации на двигатель, либо находятся экспериментально. Индуктивность обмоток, как правило, намного ниже сопротивления, соответственно мы можем пренебречь переменной L_m. Тогда соотношение между моментом на валу и током можно выразить как:

$$\tau = \frac{K_t\left(V - K_e\dot{\phi}\right)}{R_m}.$$

Подставим это выражение в систему (9):

$$\begin{cases} \ddot{\theta} = \frac{b}{a}\sin\theta - \frac{\mu_p}{a}\dot{\theta} + \frac{R_m\mu_m + K_tK_e}{aR_m}\dot{\phi} - \frac{K_t}{aR_m}V \\ \ddot{\phi} = -\frac{b}{a}\sin\theta + \frac{\mu_p}{a}\dot{\theta} - \frac{a + I_2}{aI_2}\left(\mu_m + \frac{K_tK_e}{R_m}\right)\dot{\phi} - \frac{K_t(a + I_2)}{aI_2R_m}V. \end{cases} \tag{10}$$

Мы получили математическую модель, полностью описывающую поведение обратного маятника. Теперь для синтеза управления и анализа на устойчивость нам необходимо её линеаризовать и привести к форме в пространствах состояния.

Линеаризуем систему (10) в окрестности точки $\theta = 0$. Тогда $\sin\theta = \theta$, и система примет вид:

$$\begin{cases} \ddot{\theta} = \frac{b}{a}\theta - \frac{\mu_p}{a}\dot{\theta} + \frac{R_m\mu_m + K_tK_e}{aR_m}\dot{\phi} - \frac{K_t}{aR_m}V \\ \ddot{\phi} = -\frac{b}{a}\theta + \frac{\mu_p}{a}\dot{\theta} - \frac{a + I_2}{aI_2}\left(\mu_m + \frac{K_tK_e}{R_m}\right)\dot{\phi} - \frac{K_t(a + I_2)}{aI_2R_m}V. \end{cases}$$

Представим теперь эту систему в пространстве состояний матричным уравнением:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}.$$

В качестве вектора состояния выберем $\mathbf{x} = [\theta \quad \dot{\theta} \quad \phi \quad \dot{\phi}]^{\mathrm{T}}$, а в качестве управляющего воздействия возьмем $\mathbf{u} = [V]$. Само уравнение теперь примет вид:

$$\begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \ddot{\theta} \\ \dot{\phi} \\ \ddot{\phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{b}{a} & -\frac{\mu_p}{a} & 0 & \frac{R_m\mu_m + K_tK_e}{aR_m} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{b}{a} & \frac{\mu_p}{a} & 0 & -\frac{a + I_2}{aI_2}\left(\mu_m + \frac{K_tK_e}{R_m}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \\ \phi \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{K_t}{aR_m} \\ 0 \\ -\frac{K_t(a + I_2)}{aI_2R_m} \end{bmatrix} V \tag{11}$$

Теперь переведем уравнение (11) в дискретную форму вида:

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{A}_k\mathbf{x}_k + \mathbf{B}_k\mathbf{u}_k$$

где $\mathbf{x}_k$ – состояние системы на шаге k, $\mathbf{u}_k$ – управляющее воздействие, матрицы $\mathbf{A}_k$ и $\mathbf{B}_k$ описывают динамику системы. Сделаем это при помощи метода Эйлера по формуле:

$$\mathbf{A}_k = \mathbf{I}_n + \mathbf{A}\Delta t,$$

$$\mathbf{B}_k = \mathbf{B}\Delta t,$$

где Δt - шаг дискретизации, $\mathbf{I}_n$ – единичная матрица размером $n \times n$. В итоге уравнение (11) будет выглядеть следующим образом:

$$\begin{bmatrix} \theta_{k+1} \\ \dot{\theta}_{k+1} \\ \phi_{k+1} \\ \dot{\phi}_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \Delta t & 0 & 0 \\ \frac{b}{a}\Delta t & 1 - \frac{\mu_p}{a}\Delta t & 0 & \frac{R_m\mu_m + K_tK_e}{aR_m}\Delta t \\ 0 & 0 & 1 & \Delta t \\ -\frac{b}{a}\Delta t & \frac{\mu_p}{a}\Delta t & 0 & 1 - \frac{a + I_2}{aI_2}\left(\mu_m + \frac{K_tK_e}{R_m}\right)\Delta t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_k \\ \dot{\theta}_k \\ \phi_k \\ \dot{\phi}_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{K_t}{aR_m}\Delta t \\ 0 \\ -\frac{K_t(a + I_2)}{aI_2R_m}\Delta t \end{bmatrix} V_k \tag{12}$$

Стабилизация маятника в верхнем неустойчивом положении равновесия

Рассмотрим задачу стабилизации маятника в верхнем неустойчивом положении равновесия $\theta = 0$, $\dot{\theta} = 0$ в предложении, что в начале процесса стабилизации он уже находится в некоторой окрестности этого желаемого положения. Эта задача может быть решена с помощью регулятора полного состояния. Структурная схема системы управления показана на рисунке 9, где $\mathbf{K}$ – матрица весовых коэффициентов. Отметим, что в такой системе в качестве обратной связи используется весь вектор состояния и управляющее воздействие выглядит как:

$$\mathbf{u} = -\mathbf{K}\mathbf{x} \tag{13}$$

При этом задача сводится к выбору таких коэффициентов обратной связи матрицы $\mathbf{K}$, чтобы система обеспечивала устойчивое вертикальное положение маятника.

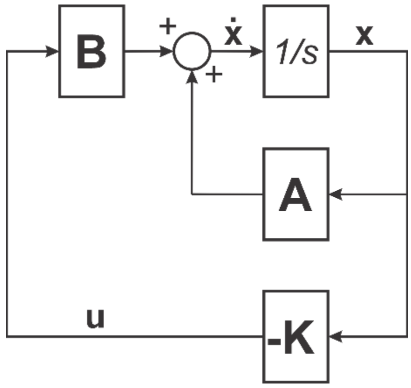

Рисунок 9. Структурная схема системы управления с регулятором полного состояния.

Существует множество способов выбора коэффициентов обратной связи, или, по-другому, *синтеза* управления. В текущей работе мы рассмотрим вариант решения задачи линейно-квадратичного управления. Далее, регулятор, синтезированный с помощью решения этой задачи, будем называть LQR от английского Linear Quadratic Regulator.

LQR – это один из видов оптимальных регуляторов, использующий квадратичный функционал качества, который необходимо минимизировать:

$$J = \int_0^\infty \left(\mathbf{x}^\mathrm{T}\mathbf{Q}\mathbf{x} + \mathbf{u}^\mathrm{T}\mathbf{R}\mathbf{u}\right)\Delta t, \tag{14}$$

где $\mathbf{Q}$ и $\mathbf{R}$ – заданные положительно определенные матрицы весовых коэффициентов. Чем выше члены матрицы $\mathbf{Q}$, тем быстрее система будет стараться уменьшить ошибку управления, а чем выше члены $\mathbf{R}$ – тем плавнее будет поведение системы. И наоборот, чем члены $\mathbf{Q}$ ниже, тем больше статическая ошибка, и чем ниже члены $\mathbf{R}$, тем агрессивнее будет управление. Таким образом, функционал качества выражает компромисс между отклонением от нуля и затратами на управление. Подбор весовых коэффициентов осуществляется по следующим принципам:

- начинать нужно с диагональных единичных матриц:
$$\mathbf{Q} = \mathrm{diag}(q_1, q_2, \dots, q_n), \quad \mathbf{R} = \mathrm{diag}(r_1, r_2, \dots, r_n).$$
- значения q_i увеличивают наказание за отклонение соответствующего состояния x_i от нуля.
- значения r_i увеличивают штраф за управление u_i, приводя к более плавному управлению.

В нашем случае используется дискретная система (12) и функционал качества, соответственно, будет иметь вид:

$$J = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\mathbf{x}_k^\mathrm{T}\mathbf{Q}\mathbf{x}_k + \mathbf{u}_k^\mathrm{T}\mathbf{R}\mathbf{u}_k\right)\Delta t.$$

Закон управления по отрицательной обратной связи (13) минимизирует этот функционал. Матрица $\mathbf{K}$ вычисляется как:

$$\mathbf{K} = \left(\mathbf{R} + \mathbf{B}^\mathrm{T}\mathbf{P}\mathbf{B}\right)^{-1}\mathbf{B}^\mathrm{T}\mathbf{P}\mathbf{A},$$

где $\mathbf{P}$ – положительно определенная матрица, являющаяся решением дискретного алгебраического уравнения Риккати:

$$\mathbf{P} = \mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\mathbf{A} - \mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\mathbf{B}\left(\mathbf{R} + \mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\mathbf{B}\right)^{-1}\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\mathbf{A} + \mathbf{Q}$$

Это уравнение имеет единственное решение $\mathbf{P}$, если система управляема, а матрицы $\mathbf{Q}$ и $\mathbf{R}$ – положительно определенные.

Система называется *управляемой*, если существует такое допустимое управление u, которое бы переводило начальное состояние $\mathbf{x}_0(t_0)$ в конечное состояние $\mathbf{x}_k(t_f)$ за конечный интервал времени $[t_0, t_f]$.

Критерий управляемости линейных стационарных систем. Линейный стационарный объект управляем тогда и только тогда, когда матрица управляемости

$$\mathbf{C} = [\mathbf{B} \quad \mathbf{AB} \quad \mathbf{A}^2\mathbf{B} \quad \dots \quad \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}]$$

имеет максимальный ранг, т.е. когда её ранг равен n.

Напомним, что ранг матрицы равен числу независимых строк, числу независимых столбцов и порядку отличного от нуля минора максимальной размерности.

Перевод маятника из нижнего положения равновесия в верхнее

Изначально маятник покоится в нижнем положении равновесия. Для перехода в верхнее положение равновесия его нужно сначала раскачать, а затем поймав в верхнем положении, стабилизировать.

При раскачивании маятника ему нужно сообщить энергию, достаточную для перевода в верхнее положение равновесия. Полная энергия маятника E, без учета вращения относительно него маховика, описывается выражением:

$$E = \frac{1}{2}(m_1 L_1^2 + m_2 L_2^2 + I_1 + I_2)\dot{\theta}^2 + (m_1 L_1 + m_2 L_2) g \cos\theta.$$

Энергия E^* маятника, покоящегося в верхнем положении равновесия, равна $(m_1 L_1 + m_2 L_2)g$. Закон управления, который будет обеспечивать раскачивание маятника до тех пор, пока его энергия не достигнет величины E^* выглядит как:

$$u = k(E^* - E)\,\mathrm{sign}\,\dot{\theta}, \qquad (15)$$

где $k > 0$ – коэффициент обратной связи. Такой метод называется *управлением с формированием энергии*. В иностранной литературе его обычно называют Energy Shaping Control.

Слежение за заданным значением E^* энергии в соответствии с законом управления (15) прекращается, когда система попадает в некоторую область притяжения. После этого включается закон управления (13), который уже доводит маятник в желаемое верхнее положение равновесия и стабилизирует его в этом положении.

Дополнительно можно отметить, что если необходимо перевести маятник в нижнее положение равновесия с последующим торможением, то можно использовать этот же подход. В этом случае заданное значение энергии нужно взять с обратным знаком:

$$E^* = (m_1 L_1 + m_2 L_2)g.$$

Задания для самостоятельной работы