

0.1 Системы управления с обратной связью

Введение

Цель настоящей лабораторной работы состоит в том, чтобы на примерах регулятора Уатта и электромеханической следящей системы ознакомить студентов с основным принципом построения и методом анализа систем автоматического управления. Эти примеры выбраны потому, что регулятор Уатта представляет собой исторически одну из первых систем автоматического управления с обратной связью, а электромеханические следящие системы широко распространены в настоящее время в технике. С их помощью управляют станками-автоматами, роботами-манипуляторами, кораблями, самолёта, ракетами и т. д.

В методической разработке излагаются принцип обратной связи как основа построения регулятора Уатта и следящей электромеханической системы, структура этих систем, математические модели, основные количественные характеристики и методы анализа. Приведено описание и метод экспериментального анализа электромеханической следящей системы, разработанной в Институте механики МГУ.

Практические работы с макетом следящей системы включают:

1. построение частотных характеристик и идентификация параметров системы,
2. качественный анализ работы системы с обратной связью по положению и скорости.

0.1.1 Роль обратной связи в системе автоматического управления (САУ)

Основным принципом построения традиционных САУ является принцип обратной связи, который заключается в следующем. В процессе работы САУ с помощью специальных датчиков измеряется фактическое положение и (или) скорость управляемого тела. Сигналы этих датчиков передаются вновь на вход САУ и сравниваются с командой (входным сигналом), которая пропорциональна желаемому положению или скорости управляемого тела. В результате такого сравнения (вычитания) образуется сигнал ошибки. Этот сигнал усиливается до уровня, необходимого для управления исполнительным двигателем, который кинематически связан с управляемым телом.

Описанная выше обратная связь называется отрицательной, поскольку в устройстве сравнения сигнал о положении или скорости управляемого тела вычитается из входного сигнала. Использование в системе управления отрицательной обратной связи превращает эту систему в автоматическую, т. е. систему, функционирующую без участия человека.

Устройство и типы датчиков входного сигнала, измерителей положения и скорости управляемого тела — датчиков обратных связей, усилителей, ис-

полнительных двигателей и кинематических связей — могут быть самыми разнообразными в зависимости от условий применения САУ и предъявляемых к ней требований.

0.1.2 Регулятор Уатта

Принцип обратной связи впервые был реализован в регуляторе английского механика Джона Уатта (1784 г.). Этот регулятор предназначался для автоматического поддержания заданной угловой скорости вращения вала паровой машины. Широкое внедрение в тогдашнюю промышленность Англии паровых машин с регуляторами Уатта было одной из составных частей первой промышленной революции в Европе. Созданная впоследствии теория регулятора Уатта стала краеугольным камнем всей теории автоматического управления.

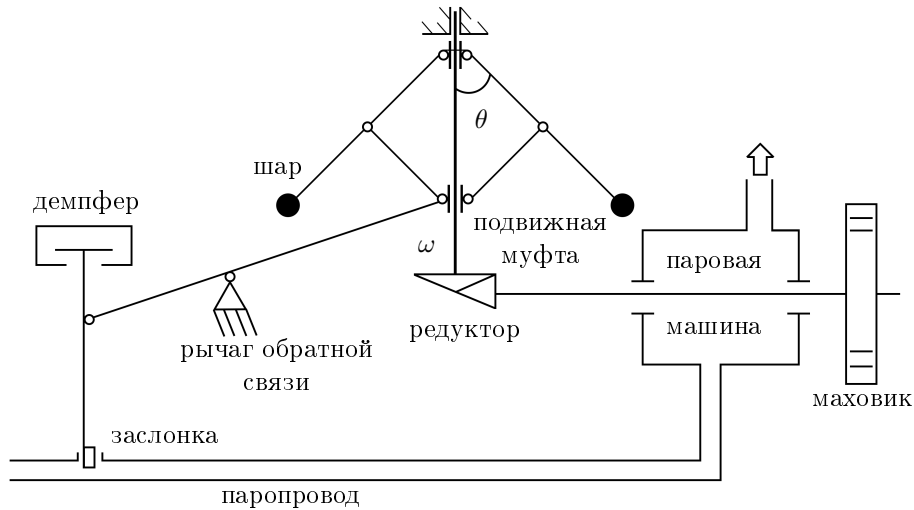


Рис. 1: Схематическое изображение регулятора Уатта.

Регулятор Уатта схематически изображён на рис. 1. Он состоит из четырёхзвенника (параллелограмма Уатта) — центробежного измерителя скорости вращения измерительного вала, кинематически связанного коническим редуктором с валом паровой машины. Для простоты будем считать, что передаточное число редуктора равно единице. Стержни параллелограмма Уатта связаны шарнирами (кружки на рис. с двумя муфтами. Верхняя муфта закреплена на валу и вращается вместе с ним. Нижняя муфта, также вращаясь, может скользить вдоль вала. На удлинённых верхних стержнях параллелограмма укреплены два одинаковых массивных шара массы m каждый. При увеличении угловой скорости ω вала шары под действием центробежных сил расходятся и нижняя муфта поднимается. При уменьшении угловой скорости ω шары сближаются и нижняя муфта опускается.

Этот механический эффект и был использован для регулирования угловой скорости. Нижняя муфта через рычаг связана с заслонкой, регулирующей подачу пара. Изначально регулятор проектируется и настраивается так, чтобы в номинальном режиме шары регулятора и заслонка находились в среднем положении. Под номинальным режимом понимается работа машины с заданной угловой скоростью ω^* и с заданной номинальной нагрузкой M_H . В процессе работы возникают отклонения от номинального режима из-за изменения нагрузки, давления пара в паропроводе и других факторов, в результате возникает отклонение $\Delta\omega = \omega - \omega^*$ текущей угловой скорости от номинальной. Это отклонение парируется за счет обратной связи, реализованной посредством рычага, связывающего нижнюю муфту с заслонкой в паропроводе.

Если под действием уменьшившегося момента M_H угловая скорость возросла ($\Delta\omega > 0$), то угол между стержнями параллелограмма увеличится, подвижная муфта приподнимется, увлекая за собой правый конец рычага. При этом левый конец опустится и немного опустит заслонку, уменьшится сечение паропровода, расход пара уменьшится на некоторую величину $\Delta\mu$. Уменьшение расхода пара приведёт к уменьшению движущего момента и угловой скорости вращения выходного вала. Если же под действием увеличившегося внешнего момента M_H угловая скорость ω вращения вала уменьшится, то угол между стержнями параллелограмма также уменьшится, подвижная муфта опустится, опуская правый конец рычага обратной связи. При этом левый конец рычага поднимается и приподнимает заслонку в паропроводе. Расход пара возрастает, что приводит к увеличению движущего момента M_D и угловой скорости ω вращения выходного вала. Таким образом осуществляется регулирование угловой скорости паровой машины.

Во второй половине XIX века с развитием промышленности возросли мощности паровых машин. В связи с этим для перемещения заслонки в паропроводе увеличили массу шаров регулятора, кроме того, улучшили механическую обработку шарнирных соединений в регуляторе и уменьшили вязкое трение в шарнирах. Эта модернизация неожиданно привела к ухудшению работы регулятора — его неустойчивости.

Возникшую проблему теоретически решил И. А. Вышнеградский [1, 2], создав теорию регуляторов Уатта, которую кратко изложим ниже. Составим и проанализируем уравнения, описывающие процесс регулирования угловой скорости. С учётом приведённой на рис. 2 схемы разложения силы веса шара mg и центробежной силы $ml\omega^2 \sin \theta$ на направление касательной к траектории движения шара в вертикальной плоскости, которая вращается вместе с параллелограммом с угловой скоростью ω , запишем уравнение движения в виде

$$l^2 m \ddot{\theta} = ml^2 \omega^2 \sin \theta \cos \theta - lmg \sin \theta - l^2 b \dot{\theta} \quad (1)$$

где $l^2 b \dot{\theta}$ — момент вязкого трения в шарнирах.

Уравнение моментов для вала паровой машины

$$J \dot{\omega} = M_D - M_H,$$

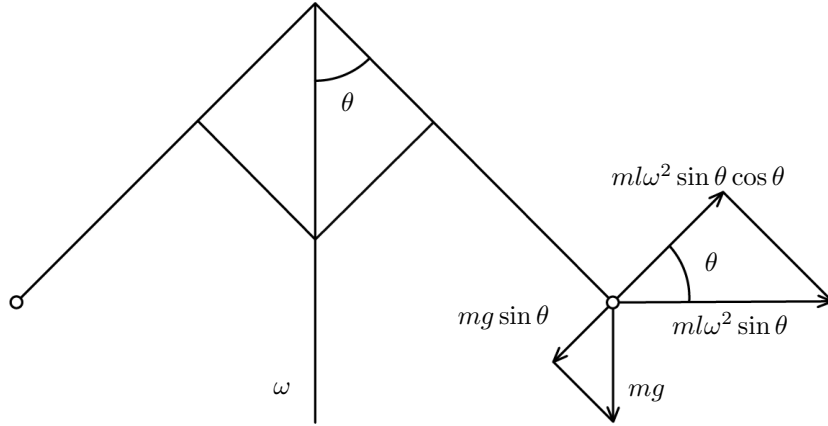


Рис. 2: Схема разложения сил, действующих на шар регулятора Уатта.

где J — момент инерции маховика, M_D — движущий момент, развиваемый паровой машиной, M_H — момент нагрузки. Полагая движущий момент пропорциональным перемещению заслонки, получим

$$J\dot{\omega} = k \cos \theta - M_H \quad (2)$$

Уравнения (1), (2) дают равновесное состояние следующего вида

$$\cos \theta^* = \frac{M_H}{k}, \quad (\omega^*)^2 = \frac{g}{l \cos \theta^*} = \frac{kg}{lM_H}.$$

Если ввести малые отклонения от полученного равновесного режима, положив $\theta = \theta^* + \Delta\theta$, $\omega = \omega^* + \Delta\omega$ то проведя линеаризацию системы (1), (2), получим уравнения малых колебаний относительно равновесного состояния

$$\begin{aligned} \Delta\ddot{\theta} &= \omega^* \sin 2\theta^* \Delta\omega + ((\omega^*)^2 \cos 2\theta^* - \frac{g}{l} \cos \theta^*) \Delta\theta - \frac{b}{m} \Delta\dot{\theta}, \\ \Delta\dot{\omega} &= -\frac{K}{J} \sin \theta^* \Delta\theta. \end{aligned} \quad (3)$$

Применение критерия Гурвица к характеристическому уравнению этой системы даёт следующее условие устойчивости

$$\frac{bJ}{m} > 2\frac{l}{g} K \omega^* \cos^2 \theta^*. \quad (4)$$

Неравенство (4) позволило Вышнеградскому высказать следующие утверждения:

1. Увеличение массы шаров m ухудшает устойчивость.
2. Уменьшение коэффициента трения b ухудшает устойчивость.

3. Уменьшение момента инерции J маховика ухудшает устойчивость.

Эти выводы теоретически обосновали необходимость инженерных решений для обеспечения устойчивой работы регуляторов, в частности, введения демпфера (Рис. 1).

С увеличением мощности паровых машин и турбин в регуляторе Уатта появилось принципиальное дополнение. Между рычагом регулятора и заслонкой был установлен гидромотор. Рычаг регулятора перемещает шток золотника гидропривода, а его поршень с необходимым усилием передвигает заслонку в паропроводе высокого давления. Параллелограмм с шаром используется только для измерения угловой скорости ω вала паровой машины и преобразования её в перемещение подвижной муфты. Введение гидропривода в состав системы регулирования угловой скорости выходного вала паровой машины означает разделение функций между измерением скорости и перемещением заслонки в трубопроводе. САУ, в которой эти функции измерения и исполнения разделены, называется системой непрямого регулирования. Примером такой САУ является электромеханическая система, используемая в этой работе.

0.1.3 Схема экспериментальной установки

Структура экспериментальной установки приведена на рис. 3. Она содержит электродвигатель ДВ, усилитель мощности УМ, тахогенератор ТГ, редуктор Р и потенциометр Пт. Тахогенератор и потенциометр являются датчиками угловой скорости и положения, их выходные сигналы являются сигналами обратной связи. Задание программного движения, формирование сигнала обратной связи и управляющего сигнала осуществляется компьютером.

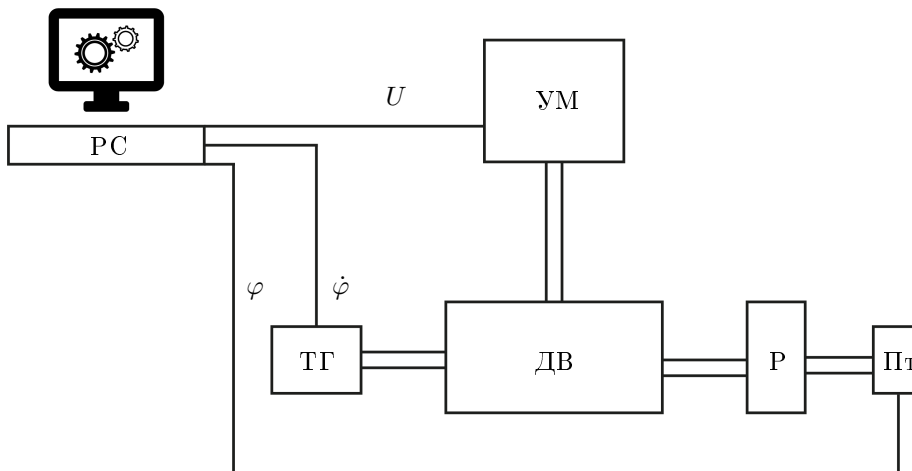


Рис. 3: Структура экспериментальной установки.

Интерфейс между персональным компьютером и усилителем мощности УМ осуществляется с помощью специальных устройств: цифро–аналогового преобразователя (ЦАП) и аналого–цифрового преобразователя (АЦП). С помощью АЦП вводится в компьютер информация о текущих значениях положения и скорости. ЦАП же позволяет компьютеру подавать на УМ управляющее воздействие.

Управление работой всего комплекса производится специальной программой, которая обеспечивает интерфейс комплекса с пользователем, обрабатывает и отображает в графическом виде экспериментальные данные, непосредственно взаимодействует с устройствами АЦП и ЦАП. Если управление u формируется независимо от выходных сигналов $\varphi, \dot{\varphi}$, то получаем разомкнутую систему. Если выходные сигналы используются при формировании управления, то это будет система с обратной связью. А если задача системы с обратной связью состоит в отслеживании программного сигнала, то используется термин «следающая система». При этом программный сигнал может быть константой, заранее заданной функцией времени, или функцией времени, формируемой в зависимости от произвольных внешних факторов, например движения внешнего объекта. Примеры следящих систем и более сложных алгоритмов управления с обратной связью можно найти в [4].

0.1.4 Математическая модель следящей системы

Для качественного и количественного анализа работы следящей системы в зависимости от требований, предъявляемых к ней, строится та или иная математическая модель. Наиболее распространённой моделью является система обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. При построении такой модели исходят из предположения, что следающая система состоит из n соединённых между собой отдельных звеньев, каждое из которых — одномерная система с одной степенью свободы. Переменная, характеризующая положение звена (обобщённая координата), называется выходным сигналом, а воздействие на звено — входным сигналом. Процессы, происходящие в звене, описываются обыкновенным линейным дифференциальным уравнением с постоянными коэффициентами не выше второго порядка, в правой части которого — входной сигнал.

Устойчивость, динамические и точностные характеристики следящей системы можно определить, изучая решения дифференциальных уравнений, которые описывают изменение электрических напряжений в цепях управления и механические движения системы. Запишем уравнения движения электромеханической системы, изображённой на рис.

1. Уравнение усилителя

$$\tau \frac{du_D}{dt} + u_D = k_y u, \quad (5)$$

2. уравнение баланса напряжений в цепи якоря двигателя

$$L \frac{dI}{dt} + RI + c \frac{d\psi}{dt} = u_D, \quad (6)$$

3. уравнение моментов для двигателя

$$J_D \frac{d^2\psi}{dt^2} = M_D - M_c \quad \text{или} \\ J_D \frac{d^2\psi}{dt^2} = c_M I - s \frac{d\psi}{dt}, \quad (7)$$

где $M_D = c_M I$ — моментная характеристика двигателя, $M_c = s \frac{d\psi}{dt}$ — момент сил вязкого трения, $\varphi = j\psi$ — уравнение редуктора, ψ — угол поворота якоря. Здесь τ , k_y — постоянная времени и коэффициент усиления усилителя; L , R — коэффициент индукции и омическое сопротивление цепи якоря двигателя, [Гн], [Ом]; c — коэффициент с противоэлектродвижущей силы, [В·рад/с]; J_D — приведённый к валу двигателя момент инерции нагрузки, редуктора, тахогенератора в сумме с моментом инерции ротора двигателя, [кгм]; c_M — коэффициенты моментов, [нм/а]; j — передаточное число редуктора.

Среди параметров системы есть труднодоступные для измерения. К таким параметрам относятся коэффициент противоэлектродвижущей силы c , индуктивность цепи якоря L , коэффициент момента сил вязкого трения s и другие. С другой стороны, величины τ , L для рассматриваемого макета малы, что позволяет ими пренебречь. Тогда, выразив из двух первых уравнений (5), (6) ток I через u и подставляя его в последнее уравнение (7), а также учитывая зависимость $\varphi = j\psi$, получаем

$$J_D \cdot j^2 \frac{d^2\varphi}{dt^2} + \left(\frac{cc_M}{R} + s \right) \cdot j \cdot \frac{d\varphi}{dt} = \frac{c_M k_y}{R} u. \quad (8)$$

Введя очевидные переобозначения, приходим к уравнению:

$$J \frac{d^2\varphi}{dt^2} + B \frac{d\varphi}{dt} = u. \quad (9)$$

Учитывая сложность точного вычисления коэффициентов J и B , в работе ставится задача их экспериментального определения (идентификации).

Выполнение задания состоит из двух частей.

1. Целью первой части является знакомство с понятием амплитудно-частотной и фазо-частотной характеристик системы, использование этих функций для идентификации параметров системы, усвоение методики построения частотных характеристик на основе экспериментальных данных. В этом режиме управления в (9) формируется в виде $u = -k\varphi + \tilde{u}$, где k — малый коэффициент для устранения астатизма системы, а второе слагаемое $\tilde{u} = a \sin \omega t$ является принципиальным и

означает периодическое воздействие на входе разомкнутой системы. В результате работа исследуемой электромеханической системы описывается уравнением

$$J\ddot{\varphi} + B\dot{\varphi} + k\varphi = \tilde{u} \quad (10)$$

2. Вторая часть позволяет изучить влияние выбора коэффициентов правой части уравнения

$$J\ddot{\varphi} + B\dot{\varphi} = -k_x(\varphi - \varphi_p) - k_v(\dot{\varphi} - \dot{\varphi}_p) \quad (11)$$

на корни характеристического многочлена и на вид переходного процесса, а также зависимость переходного процесса от вида и частоты входной функции.

0.1.5 Идентификация параметров системы.

Идентификация коэффициентов J и B в уравнении (10) основана на сравнении частотных характеристик реальной механической системы и ее математической модели. Поясним физический смысл частотных характеристик. Если на вход разомкнутой линейной системы подать гармонический сигнал, то через некоторое время на выходе установится также гармонический сигнал той же частоты, но с амплитудой и фазой, зависящей от частоты входного сигнала. Отношение амплитуд выходного и входного сигнала называется амплитудно-частотной характеристикой (АЧХ), а сдвиг фаз - фазо-частотной характеристикой (ФЧХ). Обе характеристики являются функциями частоты и для большинства механических систем, исключая узкий класс неминимально-фазовых систем [3], имеется однозначное соответствие между двумя типами описания — частотным и дифференциальным. Иными словами, по АЧХ можно восстановить дифференциальное уравнение.

С формальной точки зрения, АЧХ и ФЧХ могут определяться несколькими способами с использованием различного математического аппарата. Дадим их краткое описание на примере уравнения (10).

Традиционным является применение методов теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Для уравнения (10) с правой частью $\tilde{u} = a \sin \omega t$ строим частное решение в явном виде $\varphi(t) = D(\omega) \sin(\omega t + \psi(\omega))$ и находим АЧХ как отношение амплитуд выходного и входного сигналов $A(\omega) = D(\omega)/a$, а ФЧХ есть фазовый сдвиг $\psi(\omega)$. Получение конечных формул предлагается студентам в качестве упражнения.

Вариацией традиционного подхода является метод комплексных амплитуд [2]. При этом правая часть (10) заменяется комплексной гармонической функцией $\tilde{u} = ae^{i\omega t}$, находится частное решение вида $\varphi(t) = D(\omega)e^{i\omega t}$, и частотные функции находятся как модуль и аргумент отношения $D(\omega)/a$.

Наравне с дифференциальными уравнениями в качестве математической модели системы в теории автоматического управления широко используется аппарат передаточных функций [3, 5]. Не останавливаясь на

вопросах теоретического обоснования, продемонстрируем применение данной методики в нашем случае. Для уравнения (10) найдём передаточную функцию, заменяя операцию взятия производной оператором дифференцирования p :

$$(Jp^2 + Bp + k)\varphi = u \Rightarrow \varphi = \frac{1}{(Jp^2 + Bp + k)} \cdot u.$$

Функция $W(p) = 1/(Jp^2 + Bp + k)$ переменного p будет передаточной функцией для нашей системы. Легко видеть, что при заданном k она однозначно определяется значениями параметров J и B .

Можно рассматривать W как комплексную функцию действительной переменной ω , если положить $p = i\omega$. $W(i\omega)$ называют частотной передаточной функцией системы (т. к. ω играет роль частоты). Как всякую комплексную функцию $W(i\omega)$ можно представить в каноническом виде:

$$W(i\omega) = A(\omega) \cdot e^{i\psi(\omega)},$$

где $A(\omega)$, $\psi(\omega)$ — обсуждаемые амплитудно-частотная и фазо-частотная характеристики соответственно.

Для нашей системы имеем

$$W(i\omega) = \frac{1}{-J\omega^2 + iB\omega + k} = \frac{(-J\omega^2 + k) - iB\omega}{(-J\omega^2 + k)^2 + (B\omega)^2}$$

Отсюда получаем выражения для амплитудно-частотной и фазо-частотной функций системы:

$$A(\omega) = \frac{1}{\sqrt{(-J\omega^2 + k)^2 + (B\omega)^2}}, \quad (12)$$

$$\psi(\omega) = \operatorname{arccctg} \left(\frac{J\omega^2 - k}{B\omega} \right). \quad (13)$$

Отсюда вытекает метод экспериментального построения частотных характеристик, который заключается в следующем. На вход системы подают сигнал $u(t) = a \sin \omega t$, тогда на выходе устанавливаются вынужденные колебания

$$\varphi(t) = D(\omega) \sin(\omega t + \psi(\omega)).$$

Отношение амплитуд $A(\omega) = D(\omega)/a$ и сдвиг по фазе $\psi(\omega)$ изменяются при изменении частоты ω входного сигнала. Задавая дискретно значения частоты $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$, получают значения $A(\omega_1), A(\omega_2), \dots, A(\omega_n)$ и $\psi(\omega_1), \psi(\omega_2), \dots, \psi(\omega_n)$. Таким образом, возникает набор экспериментальных значений амплитудно-частотной $A(\omega)$ и фазо-частотной характеристик $\psi(\omega)$ системы, который на графиках может быть представлен в виде отдельных точек.

Теперь рассмотрим методику идентификации параметров J и B системы. Необходимо отметить, что теория идентификации — достаточно обширная и серьёзная область, которая содержит огромное количество методов. Мы же, в силу простоты рассматриваемой задачи, воспользуемся простым и наглядным методом, который изложен ниже.

Сначала экспериментально находится амплитудно-частотная и фазо-частотная характеристики системы. При этом исследователь имеет возможность задавать частоту ω и амплитуду входного сигнала; а программа отображает в левой части экрана входной и выходной сигналы, а также находит $A(\omega) = \frac{D(\omega)}{a}$ и $\psi(\omega)$. Величины всех задаваемых и вычисляемых величин отображаются в подменю. Командой PutPoint значения полученных $A(\omega)$ и $\psi(\omega)$ заносятся в специальные массивы соответствующих функций, графики которых отображаются и обновляются в правой части экрана.

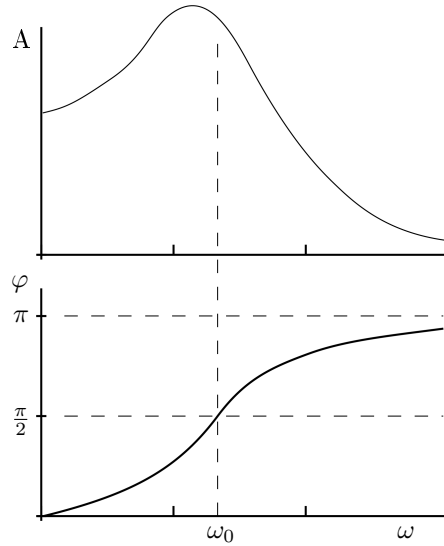


Рис. 4: Графики амплитудно-частотной и фазо-частотной функций системы.

Задавая предполагаемые значения параметров J и B в меню, и строя амплитудно-частотные и фазо-частотные характеристики (команда DRAW), соответствующие этим значениям параметров, добиваются того, чтобы теоретические графики АЧХ и ФЧХ прошли по экспериментальным точкам с минимальной ошибкой, что оценивается визуально. Вид этих функций отображается на экране представлен на рис. 4. При частоте $\omega_0 = \sqrt{k_x/J}$ фазовое запаздывание равно $\frac{\pi}{2}$, а значение амплитудно-частотной функции при малых B близко к максимальному. Эта точка называется резонансной. При $\omega \rightarrow 0$ получаем $A(\omega) \rightarrow \frac{1}{k_x}$, $\varphi(\omega) \rightarrow 0$, а при $\omega \rightarrow \infty$ имеем $A(\omega) \rightarrow 0$, $\varphi(\omega) \rightarrow \pi$.

Итак, задача студентов в части идентификации состоит в том, чтобы в диапазоне от 0.5 до 3 гц получить 7–8 характерных точек $A(\omega_1)$, $A(\omega_2)$, ..., $A(\omega_n)$ и $\psi(\omega_1)$, $\psi(\omega_2)$, ..., $\psi(\omega_n)$, по которым подбором коэффициентов J и B восстановить амплитудно- и фазо-частотную характеристики системы. После этого параметры J и B считаются определёнными и в дальнейшем используются для моделирования поведения экспериментальной установки на персональном компьютере, исследования устойчивости и т. д.

0.1.6 Исследование свойств следящей системы

В режиме следящей системы на макет подаётся управление следующего вида: $u = k_x(\varphi_p - \varphi) + k_v(\dot{\varphi}_p - \dot{\varphi})$ (см. уравнение (11)), где $\varphi_p, \dot{\varphi}_p$ — программный сигнал и его производная по времени, k_x, k_v — коэффициенты обратной связи по положению и скорости соответственно. Собирая в левую часть члены, содержащие переменную φ , преобразуем (11) к виду

$$J\ddot{\varphi} + (B + k_v)\dot{\varphi} + k_x\varphi = k_x\varphi_p + k_v\dot{\varphi}_p \quad (14)$$

Это уравнение моделирует работу следящей системы и позволяет сделать аналитические выводы об изменении характера работы при изменении коэффициентов обратной связи. В частности, если программный сигнал является кусочно- постоянным, то анализ переходных процессов, возникающих при мгновенном скачке программного сигнала, сводится к анализу решений однородного уравнения, получаемого из (14) обнулением правой части, с ненулевыми начальными условиями (Рис. 5).

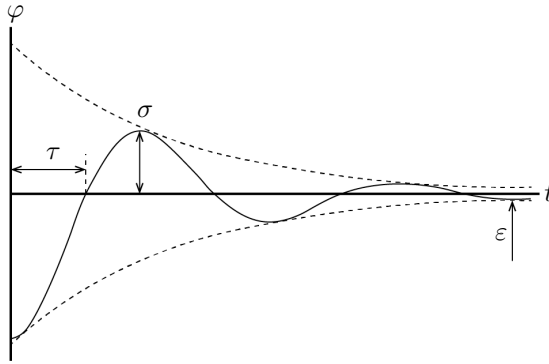


Рис. 5: Переходный процесс.

Следящая система должна быть, во-первых, устойчивой, во-вторых, обеспечивать нужное качество отслеживания и переходных процессов. Известно, что стационарное решение уравнения второго порядка устойчиво тогда и только тогда, когда его коэффициенты положительны: таким образом устойчивость обеспечивается при $k_x > 0, k_v > 0$. При этом корни характеристического уравнения лежат в левой полуплоскости. Для обеспечения надлежащего качества переходных процессов требуются более жёсткие ограничения на расположение корней характеристического уравнения.

Под качеством регулирования обычно подразумевают быстродействие τ , колебательность, перерегулирование σ , а также точность ϵ . Они относятся к прямым показателям качества, определяемым непосредственно по кривой переходного процесса. При этом первые три могут быть оценены теоретически по анализу решений уравнения (14), а точность связана с нелинейными эффектами, не описываемыми рассматриваемой линейной моделью, в

частности, наличием зоны нечувствительности двигателя. В настоящей работе ограничимся рассмотрением указанных показателей качества переходных процессов, задав при этом расположение корней характеристического уравнения в области, показанной на рис. 6. Смысл этого ограничения заключается в следующем. При действительных корнях решение имеет вид

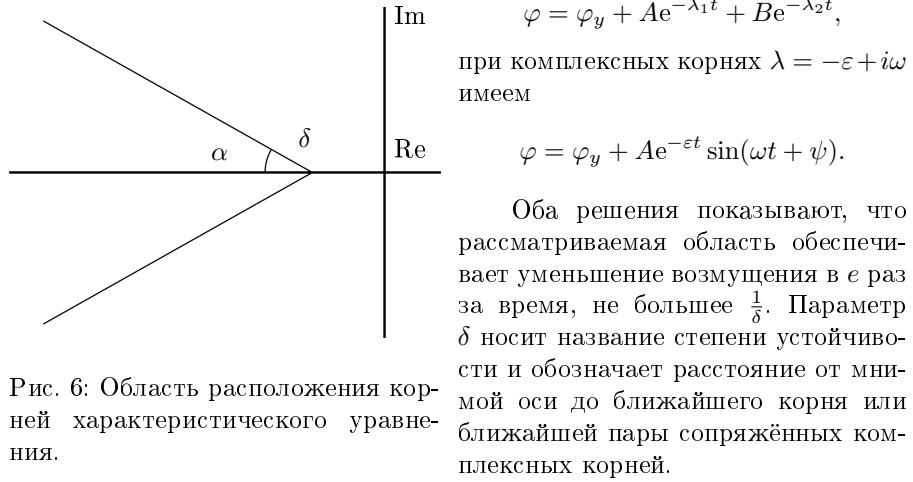


Рис. 6: Область расположения корней характеристического уравнения.

Смысл параметра α состоит в следующем. Рассмотрим уменьшение амплитуды за период собственных колебаний, т. е. за $T = \frac{2\pi}{\omega}$. Это уменьшение равно $e^{-\varepsilon T} = e^{-2\pi \frac{\varepsilon}{\omega}} < e^{-\frac{2\pi}{\tan \alpha}}$. Например, при $\alpha \approx 70^\circ$ происходит уменьшение амплитуды возмущений за период в 10 раз.

Проанализируем, к каким ограничениям в пространстве коэффициентов k_x, k_v приводят ограничения, показанные на рис. 6.

Запишем характеристическое уравнение для (??)

$$J\lambda^2 + (B + k_v)\lambda + k_x = 0. \quad (15)$$

Найдём условия, при которых корни этого уравнения лежат на границе рассматриваемой области, т. е.

$$\lambda = -\delta - s \cos \alpha + js \sin \alpha,$$

где s — параметр, принимающий значения от 0 до ∞ . Подставляя λ в (15), выделяя действительную и мнимую части и приравнявая их к нулю, можно получить следующие два условия

$$J\delta^2 - (B + k_v)\delta + k_x = 0, \quad (16)$$

$$k_x = \frac{1}{4J}(1 + \tan^2 \alpha)k_v^2 + \frac{B + (B - 2J\delta) \tan^2 \alpha}{2J}k_v + \frac{B^2 + (B - 2J\delta)^2 \tan^2 \alpha}{4J}. \quad (17)$$

Кривые (16), (17) изображены на рис. 7 с номерами соответственно (1), (2). Можно показать, что кривая кратных корней (3) находится между ними. Таким образом, область между (1) и (2) является отображением области, приведённой на рис. 6, в плоскости коэффициентов k_x , k_v , причём область между кривыми (1) и (3) соответствует действительным корням, а область между (2) и (3) — комплексно сопряжённым корням характеристического уравнения (15).

Перейдём к рассмотрению режима исследования свойств следящей системы (иконка SERVOSYSTEM). Здесь исследователь имеет возможность

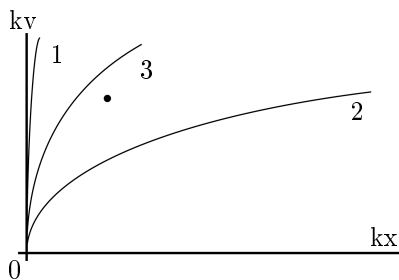


Рис. 7: Область коэффициентов обратной связи

определить зависимость между тем или иным выбором параметров k_x , k_v следящей системы и корнями характеристического уравнения λ_1 , λ_2 . Для этого в левой части экрана изображена плоскость корней характеристического уравнения ($\text{Re}\lambda$, $\text{Im}\lambda$) (вверху) и плоскость коэффициентов системы (k_x , k_v) внизу. На каждом из рисунков высвечивается точка, представляющая текущее значение параметров системы (и коэффициентов характеристического уравнения).

Смена текущего значения параметров (или корней) может производиться как с помощью подменю, так и указанием с помощью «мышки» соответствующей точки на одном из рисунков. При этом изменение обеих пар параметров производится согласованно и изменение изображающей точки на одном рисунке автоматически приводит к изменению изображающей точки на другом.

Исследователь также имеет возможность наложить ограничения на корни характеристического уравнения, обеспечивающие необходимое качество следящей системы. Рассматриваются ограничения следующего вида: $\text{Re}\lambda \leq -\delta$, $\arctg(\text{Im}\lambda/\text{Re}\lambda) \leq \alpha$, где δ и α — заданные числа. Т. е. область допустимых корней характеристического уравнения сужается до угла, изображённого на рис.

Эти ограничения отображаются и на плоскости (k_x , k_v) в виде ряда соответствующих кривых (рис. Кроме того, на ней ограничена область, соответствующая действительным корням характеристического уравнения.

Второй вопрос, который можно изучить в этом режиме — это исследование влияния выбора тех или иных параметров следящей системы на характер и качество переходных процессов. С помощью команд правого подменю «StartModel» или «StartDevice» вы можете наблюдать в правой части экрана в одних осях координат входной и выходной сигналы. В этом же подменю вы можете выбрать вид входного сигнала — гармоническая функция (синус), треугольник и ступенчатое воздействие (меандр), задать их амплитуду и частоту.

Исследование вы можете проводить как с реальной следящей системой, связанной с помощью АЦП–ЦАП интерфейса с персональным компьютером, так и с её математической моделью. В последнем случае выходной сигнал получается в результате численного решения соответствующей системы дифференциальных уравнений. Включение и выключение следящей системы осуществляется выбором иконок «StartDevice» и «Stop» соответственно.

Порядок выполнения работы

Работа программного комплекса начинается с основного меню. Основное меню включает четыре «иконки»: IDENTIFICATION — включение режима идентификации параметров J и B системы (?); SERVOSYSTEM — включение режима исследования свойств следящей системы; HELP — получение информации о задаче и программно-методическом комплексе; EXIT — завершение работы.

1. Произвести идентификацию параметров системы.

- (a) Выбрать пункт Identification основного меню.
- (b) Меняя частоту Freq, получить выборку точек (A_i, ω_i) , (ψ_i, ω_i) , достаточно плотно покрывающих искомые графики амплитудно- и фазо-частотных функций системы. Для этого:
 - i. после каждой смены частоты Freq включать режим StartDevice (или StartModel, если работа производится без использования натурального макета следящей системы);
 - ii. наблюдать на экране временную развёртку входного и выходного сигналов системы;
 - iii. убедиться, что вычисленные компьютером отношения амплитуд A и сдвиг по фазе ψ согласуются с наблюдаемыми на экране графиками;
 - iv. для остановки работы макета следящей системы использовать режим Stop;
 - v. произвести регистрацию полученных значений (A_i, ω_i) , (ψ_i, ω_i) с помощью режима PutPoint; при этом, полученные пары значений записываются в соответствующие массивы и отображаются на графиках амплитудно- и фазо-частотных функций в правой части экрана;
 - vi. удаление неудачно выбранных пар значений (A_i, ω_i) , (ψ_i, ω_i) производится включением режима RemovePoint правого подменю; удаление всех зарегистрированных пар осуществляется включением режима ClearPoints;
 - vii. переход из левого подменю в правое задаётся пиктограммой «→», обратный переход обозначен пиктограммой «←»;

- (с) Перейти в правое подменю и включением режима Draw получить АЧХ и ФЧХ, соответствующие математической модели с параметрами J , B , k , указанными в меню.
 - (d) Меняя J и B , добиться плавной аппроксимации данных, полученных в ходе выполнения пункта (1b). Найденные J и B определяют математическую модель макета следящей системы и в дальнейшем используются для математического моделирования работы следящей системы, а также для исследования устойчивости системы.
 - (е) Командой Exit выйти из режима идентификации в основное меню.
2. Произвести исследование свойств следящей системы и её устойчивости в зависимости от значений коэффициентов обратной связи k_x , k_v .
- (a) Выбрать пункт ServoSystem основного меню.
 - (b) Указать параметры следящей системы k_x , k_v , или соответствующие им корни характеристического уравнения. При этом, изменения параметров в левом подменю отображаются на графиках включением режима Draw. Если же указать новые значения параметров системы на рисунке с помощью мыши, то на другом рисунке и в меню соответствующие значения отображаются автоматически.
 - (с) Перейти в правое подменю. Для этого воспользоваться пиктограммой «→».
 - (d) Выбрать, пользуясь клавишами «Gray+», «Gray-» или мышью, тип входного сигнала, частоту и амплитуду входного сигнала.
 - (е) Наблюдать развёртки входного и выходного сигналов, включив режим StartDevice (или StartModel).
 - (f) Изменяя параметры k_x , k_v следящей системы, изучить зависимость качества отслеживания входного сигнала от их значений.
 - (g) Изменить тип входного сигнала и повторить пункты (2d–2f).

Вопросы для защиты работы

1. Доказать, что общее однородное решение уравнения (10), считая при этом, что $J > 0, B > 0, k > 0$
2. Вывести формулу (12) АЧХ и формулу (13) ФЧХ через теорию дифференциальных уравнений
3. Вывести зависимость между (λ_1, λ_2) и (k_x, k_v) в обе стороны
4. Вопрос по регулятору Уатта: доказать, что учет переносных и кариолисовых сил не изменяет динамические уравнения движения.

5. Написать характеристическое уравнение для системы (3) и получить условие (4), используя критерий Гурвица.
6. Написать дифференциальные уравнения для следящей системы с обратной связью по положению и скорости, учитывая запаздывание в системе (уравнение (5)); выписать характеристическое уравнение и найти условия устойчивости.
7. Построить амплитудно-частотную и фазо-частотную характеристики для системы с параметрами, заданными преподавателем.

Литература

- [1] Д.К.Максвелл, И.А.Вышнеградский, А.Стодола. Теория автоматического управления. Изд-во АН СССР, 1949
- [2] Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1974.
- [3] Бесекерский В.А., Попов Е.П. Теория систем автоматического управления. М.: Наука, 1975.
- [4] Александров В.В., Лемак С.С., Парусников Н.А. Лекции по механике управляемых систем. М.: МАКС Пресс, 2012.
- [5] Ройтенберг Я.Н. Автоматическое управление, М., Наука, 1977.