

File d'attente: définition formelle

Cédric Libert

5 février 2025

Pour définir une file d'attente formellement, mettons-nous d'accord sur le type des éléments qu'elle contient, son **domaine**. Ici, on va décider qu'on travaille avec des entiers.

Une file d'attente va donc être définie comme un **ensemble ordonné** de couples $(naturel, entier)$, dont l'ordre correspond, vulgairement, à « si un élément est là depuis plus longtemps qu'un autre, il est plus petit ». Dans le couple, la première composante indique le « rang » de l'élément (le premier élément ajouté a pour rang zéro, puis le suivant 1 et ainsi de suite) et la seconde composante est la valeur de l'élément lui-même. Ça permet de définir un **ordre** sur les éléments et d'alléger les notations pour se passer d'une relation d'ordre explicite.

On définit d'abord une nouvelle file comme un ensemble vide.

$$new_queue() = \emptyset \quad (1)$$

On définit ensuite la taille de la file comme étant le cardinal de l'ensemble :

$$taille(queue) = |queue| \quad (2)$$

Pour faciliter les fonctions suivantes, je vais définir une fonction maximum et une fonction minimum :

$$maximum(queue) = (a, x) \text{ tq } (a, x) \in queue, \forall (b, y) \in queue, b \leq a \quad (3)$$

$$minimum(queue) = (a, x) \text{ tq } (a, x) \in queue, \forall (b, y) \in queue, b \geq a \quad (4)$$

On peut définir comme suit l'ajout d'un élément dans la file, où on remarque que d'une part on ajoute à notre queue de départ un élément et le rang de l'élément de plus haut rang plus un, d'autre part on modifie la relation d'ordre pour lui ajouter le fait que le nouvel élément est plus grand que tous les autres éléments de l'ensemble :

$$enqueue(element, queue) = (queue \cup \{(a+1, element)\}) \text{ tq } (a, x) = maximum(queue) \quad (5)$$

On peut définir comme suit le retrait du premier élément de la file (celui qui s'y trouve depuis le plus longtemps, celui qui est le plus petit selon notre relation d'ordre) :

$$dequeue(\emptyset) = \text{non défini} \quad (6)$$

$$dequeue(queue) = (x, queue \setminus \{(a, x)\}) \text{ tq } (a, x) = minimum(queue) \quad (7)$$