BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM TPHCM

NGUYỄN QUỐC HUY

ĐỘ ĐO VÀ TÍCH PHÂN TRÊN TRƯỜNG SỐ P - ADIC

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

TP. HỒ CHÍ MINH - 2003

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM TPHCM

NGUYỄN QUỐC HUY

ĐỘ ĐO VÀ TÍCH PHÂN TRÊN TRƯỜNG SỐ P-ADIC

Chuyên ngành: Đại số

Mã số: 01.01.03

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Người hướng dẫn khoa học : PGS.TS. MỴ VINH QUANG

TP Hồ Chí Minh - 2003

LỜI CẢM ƠN

Tôi xin chân thành tỏ lòng tôn kính và biết ơn sâu sắc đối với thầy ***PGS.TS. Mỵ Vinh Quang****, thầy đã tận tình giảng dạy, hướng dẫn tôi trong suốt quá trình học tập và thực hiện luận văn.*

Tôi xin bày tỏ lòng biết ơn đối với quý thầy ***PGS.TS. Bùi Tường Trí, PGS.TS. Bùi Xuân Hải, TS. Trần Huyên và TS. Nguyễn Viết Đông****, quý thầy đã trực tiếp trang bị cho tôi kiến thức cơ bản làm nền tảng cho quá trình nghiên cứu, cũng như dành nhiều thời gian quý báu đọc và góp ý cho luận văn.*

Tôi vô cùng cảm ơn Ban Giám Hiệu, quý thầy cô trong Khoa Toán Trường Đại Học Sư Phạm Thành Phố Hồ Chí Minh, quý thầy cô phòng Sau Đại Học Trường Đại Học Sư Phạm Thành Phố Hồ Chí Minh và UBND Tỉnh Cà Mau, quý thầy cô Trường CĐSP Cà Mau đã tạo điều kiện thuận lợi cho tôi được học tập và hoàn thành luận văn.

Tôi rất biết ơn gia đình, quý đồng nghiệp và bạn bè gần xa đã giúp đỡ và hỗ trợ tinh thần cũng như vật chất cho tôi trong thời gian qua.

TP Hồ Chí Minh, tháng 9 năm 2003.

Nguyễn Quốc Huy

MỤC LỤC

BẢNG KÝ HIỆU

N	: Tập các số tự nhiên.
Z	: Tập các số nguyên.
Q	: Tập các số hữu tỷ.
R	: Tập các số thực.
Z_p	: Tập các số nguyên p-adic.
Z_P^*	: Tập các phần tử khả nghịch trong Z_p.
$\| \|$	: Giá trị tuyệt đối thông thường.
Q_p	: Trường số p-adic.
$\| \|_p$	: Giá trị tuyệt đối p-adic.
ord_p a	: số mũ của p trong sự phân tích a thành thừa số nguyên tố.
B(a,r)	: Hình cầu mở tâm a bán kính r trong Q_p.
B[a,r]	: Hình cầu đóng tâm a bán kính r trong Q_p.
D(a,r)	: Mặt cầu tâm a bán kính r trong Q_p.
$a + (p^N)$	: Khoảng trong Q_p.
B_k	: Số Bernoulli thứ k .
$B_k(x)$	: Đa thức Bernoulli thứ k .
[x]	: Phần nguyên của x.
χ_A	: Hàm đặc trưng của tập A.
μ_{Haar}	: Phân phối Haar.
μ_α	: Phân phối Dirac.
μ_{Mazar}	: Phần Phối Mazur.
$\mu_{B,k}$	: Phân phối Bernoulli thứ k .
$\mu_{k,\alpha}$	: Độ đo Bernoulli.
$x_{a,N}$	: Một điểm tùy ý thuộc khoảng $a + (p^N)$.
$S_{N,\{xa,N\}}(f)$	: Tổng Riemann của hàm f.
$\int f\mu$	: Tích phân của hàm, f ứng với độ đo μ.

LỜI NÓI ĐẦU

Nhờ định lý Oxtropxki ta biết rằng trên trường các số hữu tỷ Q chỉ có hai loại chuẩn, đó là giá trị tuyệt đối thông thường | | và chuẩn phi Archimede $| |_P$. Làm đầy đủ trường số hữu tỷ Q theo chuẩn | | ta được trường các số thực R và làm đầy đủ Q theo chuẩn $| |_P$ ta được trường các số p-adic Q_p. Bộ môn toán học nghiên cứu các hàm với biến số là số p-adic gọi là giải tích p-adic. Mục tiêu chính của luận văn là xây dựng độ đo và tích phân trên trường số Q_p . Luận văn gồm 3 chương.

Chương 1: XÂY DƯNG TRƯỜNG SỐ P-ADIC Q_p

Trong chương này, chúng tôi trình bày cách xây dựng trường số p-adic và một số tính chất tô pô của nó. Cách xây dựng trường số p-adic đã được nhiều tác giả trình bày bằng nhiều phương pháp khác nhau. Ở đây chúng tôi trình bày cách xây dựng trường số p-adic Q_p bằng phương pháp giải tích của NEAL KOBLITZ. Vì theo chúng tôi đây là cách xây dựng Q_p một cách "tự nhiên" nhất. Sau khi xây dựng trường Q_p chúng tôi đưa ra một số tính chất tô pô cơ bản nhất của Q_p nhằm phục vụ cho chương 2. Các kết quả trình bày trong phần này hầu hết không chứng minh, ở đây chúng tôi chỉ chứng minh một số kết quả cơ bản, quan trọng có liên quan đến các chương chính của luận văn đó là chương 2 và 3.

Chương 2: PHÂN PHỐI P-ADIC

Trong chương này, chúng tôi trình bày một số khái niệm cơ bản như: Định nghĩa hàm hằng địa phương, phân phối p-adic, số Bernoulli và đa thức Bernoulli. Từ đó chúng tôi chứng minh được một số kết quả quan trọng làm cơ sở cho chương 3.

Chương 3: ĐỘ ĐO VÀ TÍCH PHÂN TRÊN TRƯỜNG SỐ P-ADIC

Trong chương này, trước tiên chúng tôi trình bày khái niệm độ đo, từ đó chúng tôi định nghĩa tổng Riemann và định nghĩa tích phân p-adic cho hàm liên tục ứng với độ đo bất kỳ. Trên cơ sở đó, chúng tôi mở rộng tích phân cho một lớp các phân phối rộng hơn độ đo.

Vì thời gian có hạn, luận văn chắc chắn không tránh khỏi những thiếu sót, kính mong quý thầy cô và các bạn đồng nghiệp vui lòng chỉ bảo và lượng thứ.

CHƯƠNG 1: XÂY DỰNG TRƯỜNG SỐ P - ADIC

Trong phần này chúng tôi trình bày cách xây dựng trường số p-adic và một số tính chất tô pô của nó. Cách xây dựng trường số p-adic đã được nhiều tác giả trình bày bằng nhiều phương pháp khác nhau. Ở đây chúng tôi trình bày cách xây dựng trường số p-adic Q_p bằng phương pháp giải tích của N.KOBLITZ. Vì theo chúng tôi đây là cách xây dựng Q_p một cách "tự nhiên" nhất. Sau khi xây dựng trường Q_p chúng tôi đưa ra một số tính chất tô pô cơ bản nhất của Q_p. Các kết quả trình bày trong phần này hầu hết không chứng minh, ở đây chúng tôi chỉ chứng minh một số kết quả cơ bản, quan trọng có liên quan đến chương chính của luận văn đó là chương 2 và 3.

1.1. Các khái niệm cơ bản.

1.1.1. Định nghĩa.

Cho K là một trường. Giá trị tuyệt đối trên K là một ánh xạ (kí hiệu là | |) từ tập K vào tập các số thực không âm thỏa mãn các điều kiện sau:

$$GT_1.\ |x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$$
$$GT_2.\ |xy| = |x||y| \qquad \forall x, y \in K$$
$$GT_2.\ |x+y| \le |x| + |y| \quad \forall x, y \in K$$

Từ định nghĩa ta thấy |1| = |-1| = 1.

1.1.2. Ví dụ về giá trị tuyệt đối trên trường.

Ví dụ 1. Trường các số hữu tỷ Q với giá trị tuyệt đối thông thường thỏa mãn các điều kiện của định nghĩa.

Ví dụ 2. Cho K là một trường tùy ý. Anh xạ

$$|x| = \begin{cases} 1 & nếu\ \ x \ne 0 \\ 0 & nếu\ \ x = 0 \end{cases}$$

là một giá trị tuyệt đối trên trường K và được gọi là giá trị tuyệt đối tầm thường.

1.1.3. Chú ý.

Giả sử | | là một giá trị tuyệt đối trên trường K. Ta có thể chứng minh hàm d từ K x K vào tập các số thực không âm xác định bởi d(x,y) = |x - y| là một mêtric trên trường K và được gọi là mêtric tương ứng với giá trị tuyệt đối | |. Tô pô sinh bởi mêtric tương ứng được gọi là tô pô tương ứng của giá trị tuyệt đối.

1.1.4. Định nghĩa.

Hai giá trị tuyệt đối $|\ |_1$ và $|\ |_2$ trên trường K được gọi là tương đương nếu tô pô tương ứng của chúng là như nhau. Kí hiệu $|\ |_1 \sim |\ |_2$.

1.1.5. Định lý.

Giả sử $|\ |_1$, $|\ |_2$ là hai giá trị tuyệt đối trên trường K, các mệnh đề sau là tương đương:

1. $|x|_1 < 1 \Leftrightarrow |x|_2 < 1$ với mọi với mọi $x \in K$
2. $|x|_1 \leq 1 \Leftrightarrow |x|_2 \leq 1$ với mọi với mọi $x \in K$.
3. Tồn tại hằng số dương $C > 0$ sao cho $|x|_1 = |x|_2^C$ với mọi $x \in K$.
4. (x_n) là dãy Cauchy đối với $|\ |_1 \Leftrightarrow (x_n)$ là dãy Cauchy đối với $|\ |_2$
5. $|\ |_1 \sim |\ |_2$

Chứng minh.

1) $\Rightarrow$ 2)

Với mọi $x \in K$, giả sử $|x|_1 \leq 1$ ta cần chứng minh $|x|_2 \leq 1$.

Giả sử ngược lại, tức là $|x|_2 > 1$. Ta có

$$\left|\frac{1}{x}\right|_2 |x|_2 = |1|_2 = 1 \Rightarrow \left|\frac{1}{x}\right|_2 = \frac{1}{|x|_2} < 1$$

suy ra

$$\left|\frac{1}{x}\right|_1 < 1 \text{ hay } |x|_1 > 1.$$

Điều này vô lý vì $|x|_1 \leq 1$ .Vậy $|x|_2 \leq 1$.

2) $\Rightarrow$ 1) Chứng minh tương tự như trên.

1) $\Rightarrow$3)

• Nếu chuẩn $|\ |_1$ tầm thường thì chuẩn $|\ |_2$ cũng tầm thường.

Thật vậy, với mọi $x \in K$, $x \neq 0$ ta giả sử $|x|_1 = 1$. Nếu $|x|_2 \neq 1$ thì ta xét hai trường hợp sau

$|x|_2 < 1 \Rightarrow |x|_1 < 1$ (vô lý)

$|x|_2 > 1 \Rightarrow \left|\frac{1}{x}\right|_2 < 1 \Rightarrow \left|\frac{1}{x}\right|_1 < 1$ (vô lý)

Do đó $|x|_2 = 1$ hay chuẩn $|\ |_2$ là tầm thường. Vậy $|\ |_1 \equiv |\ |_2$

• Nếu chuẩn $|\ |_1$ không tầm thường thì tồn tại $x_0 \in K$ sao cho $|x_0|_1 > 1$, do đó $|x0|1 > 1$. Đặt $|x_0|_1 = a$ và $|x_0|_2 = b$.

Khi đó, với mọi $x \in K$ ta viết $|x|_1 = a^\alpha$, $a = \log_\alpha |x|_1$. Ta chứng minh $|x|_2 = b^\alpha$.

Thật vậy, xét $\frac{m}{n} > \alpha$ ta có

$$|x|_1 = a^\alpha < a^{\frac{m}{n}} = |x_0|_1^{\frac{m}{n}} \Rightarrow |x^n|_1 < |x_0|_1^m$$

do đó

$$\left|\frac{x^n}{x_0^m}\right|_1 < 1 \Rightarrow \left|\frac{x^n}{x_0^m}\right|_2 < 1$$

suy ra $|x|_2 < b^{\frac{m}{n}}$.

Khi $\frac{m}{n} \to \alpha$ ta có $|x|_2 \leq b^\alpha$. Tương tự nếu lấy $\alpha > \frac{m}{n}$. Ta có $|x|_2 \geq b^\alpha$.

Vậy $|x|_2 = b^\alpha$. Do đó $|x|_1 = a^\alpha = \left(b^{\log_b a}\right)^\alpha = \left(b^\alpha\right)^{\log_b a} = |x|_2^C$ với $C = \log_b a > 0$

3) ⇒ 4)

Giả sử $\{x_n\}$ là dãy Cauchy đối với chuẩn $|\ |_1$, nghĩa là

$$|x_n - x_m|_1 \to 0 \text{ khi } m,n \to \infty$$

hay

$$|x_n - x_m|_1^{\frac{1}{C}} \to 0 \text{ khi } m,n \to \infty \text{ với } C > 0.$$

Do đó

$$|x_n - x_m|_2 \to 0 \text{ khi } m,n \to \infty$$

Vậy $\{x_n\}$ là dãy Cauchy đối với chuẩn $|\ |_2$.

4) ⇒1)

Giả sử $|x|_1 < 1$ ta cần chứng minh $|x|_2 < 1$.

Từ giả thiết $|x|_1 < 1$ suy ra $x^n \to 0$ đối với chuẩn $|\ |_1$. Do đó $\{x^n\}$ là dãy Cauchy đối với $|\ |_1$ hay là dãy Cauchy đối với $|\ |_2$. Điều này có nghĩa là $x^{n+1} - x^n \to 0$ đối với chuẩn $|\ |_2$ hay $x^n (x - 1) \to 0$ đối với chuẩn $|\ |_2$.

Do đó $|x^n|_2\, |1-x|_2 \to 0$. Mà $|1 - x|_2 \neq 0$ suy ra $|x^n|_2 \to 0$ hay $|x|_2 <1$

3) ⇒ 5)

Giả sử $A \in \tau_1$, với mọi $x \in A$ thì tồn tại $Bx\ (x,r) \subset A$. Lấy

$$
\begin{aligned}
y \in B_1(x,r) &\Leftrightarrow |y-x|_1 < r \\
&\Leftrightarrow |y-x|_1^{1/C} < r^{1/C} \\
&\Leftrightarrow |y-x|_2 < r^{1/C} \\
&\Leftrightarrow y \in B_2\left(x, r^{1/C}\right) \\
&\Leftrightarrow B_1(x,r) = B_2\left(x, r^{1/C}\right)
\end{aligned}
$$

Điều này có nghĩa là tồn tại $B_2\left(x, r^{1/C}\right) \subset A$. Do đó $A \in \tau_2$. Vậy $\tau_1 \equiv \tau_2$.

5) ⇒ 1)

Giả sử $|x|_1 < 1$ suy ra $|x^n|_1 \to 0$. Do $|\ |_1 \sim |\ |_2$ nên $|x^n|_2 \to 0$. Vậy $|x|_2 < 1$. □

1.1.6. Định nghĩa.

Nếu giá trị tuyệt đối | | trên trường K thỏa mãn điều kiện mạnh hơn GT_3 là GT_3: $|x + y| \le \max\{|x|, |y|\}$ thì nó được gọi là giá trị tuyệt đối phi Archimede.

1.1.7. Ví dụ về giá trị tuyệt đối phi Archimede.

Ví dụ 1. Giá trị tuyệt đối tầm thường trên trường K là phi Archimede.

Ví dụ 2. Nếu K là trường hữu hạn thì mọi giá trị tuyệt đối trên K đều tầm thường, vì vậy nó là giá trị tuyệt đối phi Archimede.

1.1.8. Mệnh đề (nguyên lý tam giác cân).

Cho | | là một giá trị tuyệt đối trên trường K. Nếu $|x| \ne |y|$ thì

$$|x + y| = \max\{|x|,|y|\}$$

1.1.9. Mệnh đề.

Cho | | là giá trị tuyệt đối phi Archimede trên trường K.

Nếu dãy $\{x_n\} \to x \ne 0$ thì tồn tại $n_0 \in N$: $\forall n > n_0 \Rightarrow |x_n| = |x|$. Một dãy hội tụ thì dãy các giá trị tuyệt đối tương ứng là dãy dừng.

1.1.10. Định lý.

Cho | | là một giá trị tuyệt đối trên trường K, các mệnh đề sau là tương đương:

1. | | là giá trị tuyệt đối phi Archimede.
2. $|2| \le 1$.
3. $|n| \le 1$, $\forall n \in N$.

1.2. Xây dựng trường số p-adic.

1.2.1. Định nghĩa.

Giả sử p là một số nguyên tố nào đó. Với mỗi $a \in Z$, $a \ne 0$ ta gọi $ord_p a$ là số mũ của p trong sự phân tích a thành các thừa số nguyên tố.