Thí dụ a) $\mathcal{A} = \{A : A$ là tập mở trong $\mathbb{R}\}$ là một tôpô trên $\mathbb{R}$ (Theo Mệnh đề 2).

b) $\mathcal{A} = \{\mathbb{R}$ và $\varnothing\}$ là một tôpô trên $\mathbb{R}$. Đây là tôpô tầm thường.

c) $\mathcal{A} = \{A : A$ là tập con của $\mathbb{R}\}$ là một tôpô trên $\mathbb{R}$. Đây là tôpô rời rạc.

d) $\mathcal{A} = \{A : A$ là tập đóng trong $\mathbb{R}\}$ không phải là tôpô trên $\mathbb{R}$ vì (ii) không thỏa mãn.

Tôpô thông dụng nhất trên $\mathbb{R}$ là tôpô trong Thí dụ a) và trong giáo trình ta chỉ nói đến tôpô này.

3.2.2. Lân cận

Định nghĩa *Tập $U \subseteq \mathbb{R}$ được gọi là lân cận của x nếu trong U có một tập mở chứa x.*

Thí dụ $U = \{x : -1 \le x \le 1\}$ là lân cận của điểm O nhưng không phải là lân cận của điểm -1.

Mệnh đề *Tập $A \subseteq \mathbb{R}$ mở khi và chỉ khi mọi điểm của A đều có lân cận nằm trọn trong A.*

Chứng minh Giả thiết A mở. Theo bổ đề , với mọi $x \in A$ ta tìm được $n \ge 1$ sao cho $(x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n}) \subseteq A$. Tập $(x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n})$ là một lân cận của x nằm trọn trong A.

Ngược lại, lấy $x \in A$ bất kỳ. Khi đó có lân cận U của x nằm trọn trong A. Theo định nghĩa U chứa tập mở V để $x \in V$. Theo bổ đề, tồn tại n để

$$(x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n}) \subseteq V \subseteq U \subseteq A.$$

Cũng theo bổ đề trên ta kết luận A mở.

3.2.3. Điểm tụ

Điểm $x \in \mathbb{R}$ gọi là điểm tụ của tập $A \subseteq \mathbb{R}$ nếu mỗi lân cận của x đều chứa điểm của A khác với x.

Thí dụ a) $A = \{ x : x = \frac{1}{n}, n = 1,2... \}$ thì điểm 0 là điểm tụ của A.

b) $A = (1, 2)$ thì mọi điểm x với $1 \le x \le 2$ là điểm tụ của A.

Mệnh đề *Tập $A \subseteq \mathbb{R}$ đóng khi và chỉ khi A chứa mọi điểm tụ của nó.*

Chứng minh Giả thiết A đóng và x là điểm tụ của A. Khi ấy với mỗi $n \ge 1$, ta có $(x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n}) \cap A \ne \varnothing$. Chọn a_n bất kỳ trong tập giao này. Dãy $\{a_n\}$ hội tụ tới x.

Vì A đóng nên $x \in A$. Ngược lại, cho $\{a_n\} \subseteq A$ là dãy bất kỳ hội tụ tới x. Khi ấy, hoặc là x trùng với một trong các phần tử của dãy và suy ra $x \in A$, hoặc là x khác mọi a_n. Trong trường hợp sau mọi lân cận của x đều chứa vô số phần tử của dãy khác x, do đó x là điểm tụ của A. Theo giả thiết $x \in A$ và ta kết luận A đóng.

3.2.4. Cơ sở lân cận

Họ $\mathcal{U}$ các tập mở trong $\mathbb{R}$ được gọi là cơ sở lân cận trong $\mathbb{R}$ nếu với mỗi $x \in \mathbb{R}$ và mỗi lân cận V của x ta có thể tìm được $U \in \mathcal{U}$ sao cho $x \in U \subseteq V$.

Thí dụ a) $\mathcal{U} := \{ (x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n})$, $x \in \mathbb{R}$, $n = 1,2,3,... \}$ là cơ sở lân cận trong $\mathbb{R}$. Thật vậy, giả sử $x \in \mathbb{R}$ và V là một lân cận của x trong $\mathbb{R}$. Theo định nghĩa sẽ tìm được tập mở $U \subseteq V$ chứa x. Theo bổ đề tồn tại n sao cho khoảng $\left(x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n}\right) \subseteq U \subseteq V$. Chứng tỏ $\mathcal{U}$ là cơ sở lân cận trong $\mathbb{R}$.

b) $\mathcal{U} := \{ (x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n})$, $x \in \mathbb{Q}$, $n = 1,2,3,... \}$ cũng là cơ sở lân cận trong $\mathbb{R}$. Thật vậy, tương tự như trong thí dụ trên, cho $x \in \mathbb{R}$ và V là một lân cận của x trong $\mathbb{R}$. Theo định nghĩa sẽ tìm được tập mở $U \subseteq V$ chứa x. Theo bổ đề tồn tại n sao cho

$$\left(x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n}\right) \subseteq U \subseteq V .$$

Nếu $x \in \mathbb{Q}$ thì khoảng $\left(x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n}\right)$ là phần tử của họ $\mathcal{U}$. Nếu $x \notin \mathbb{Q}$ theo tính trù mật và do $x < x + \frac{1}{2n}$, tìm được số $c \in \mathbb{Q}$ sao cho $x < c < x + \frac{1}{2n}$. Khi đó đoạn $\left(c - \frac{1}{n}, c + \frac{1}{n}\right) \subseteq U \subseteq V$ và là phần tử của họ $\mathcal{U}$ chứa x. Như vậy $\mathcal{U}$ là cơ sở lân cận trong $\mathbb{R}$.

Mệnh đề *Trong $\mathbb{R}$ tồn tại cơ sở lân cận đếm được.*

Chứng minh Thật vậy, trong Thí dụ b) trên đây ta thấy $\mathbb{Q}$ là tập *đếm được* nên cơ sở lân cận đó *đếm được*.

3.3. Tập Compact

3.3.1. Tập compact

Tập $A \subseteq \mathbb{R}$ gọi là compact nếu mọi dãy trong A đều chứa dãy con hội tụ có giới hạn trong A.

Thí dụ a) Nếu A chứa hữu hạn phần tử, thì A là tập compact. Thật vậy, cho $\{ a_n \}$ là dãy trong A. Vì số phần tử A hữu hạn, sẽ có ít nhất một phần tử $a \in A$ sao cho có vô hạn phần tử trong dãy trùng với nó. Các phần tử này lập thành một *dãy con* hội tụ tới $a \in A$.

b) $A = \{ x : x = \frac{1}{n}, n = 1,2,... \} \cup \{0\}$ là tập compact. Thật vậy, A chứa một *dãy hội tụ* và *điểm giới hạn* của dãy (là $\{0\}$). Cho nên, mọi dãy trong A hoặc là chỉ chứa hữu hạn phần tử của A, hoặc là chứa một *dãy con* của *dãy hội tụ*. Dễ thấy rằng trong cả 2 trường hợp nó đều chứa một dãy con hội tụ đến một phần tử nào đó trong A.

c) $A=\{ x : 0 < x \leq 1 \}$ không compact vì dãy $\{ \frac{1}{n} \}$ hội tụ tới $0 \notin A$.

d) $A=\{ x : x \geq 0 \}$ không compact vì dãy $\{n\}$ không có một dãy con nào hội tụ cả.

3.3.2. Tính chất

Định lý *Tập $A \subseteq \mathbb{R}$ là compact khi và chỉ khi A đóng và giới nội.*

Chứng minh Giả thiết A compact. A phải giới nội vì nếu không sẽ có dãy $\{a_n\} \subseteq A$ với $\lim a_n = \infty$ hoặc $\lim a_n = -\infty$. Trong cả hai trường hợp $\{a_n\}$ không chứa dãy con hội tụ. Tập A đóng vì mọi dãy hội tụ sẽ có giới hạn trong A.

Ngược lại, nếu A giới nội thì mọi dãy trong A đều giới nội và do đó, theo Định lý Bolzano-Weierstrass, sẽ có điểm tụ, tức là có dãy con hội tụ. Nếu A đóng thì giới hạn thuộc A. Do vậy A compact.

Mệnh đề *Hợp hữu hạn các tập compact là compact; và giao của họ bất kỳ các tập compact là compact.*

Chứng minh Vì hợp hữu hạn các tập *đóng* là đóng và hợp hữu hạn các tập *giới nội* là giới nội, nên áp dụng Định lý 1 ta có ngay kết quả. Đối với giao của họ bất kỳ các tập compact phép chứng minh hòan toàn tương tự.

3.3.3. Phủ

Cho $\mathcal{U}$ là họ bất kỳ các *tập mở* trong $\mathbb{R}$.

Ta nói $\mathcal{U}$ là phủ của tập $A \subseteq \mathbb{R}$ nếu mỗi điểm của A đều nằm trong một phần tử nào đó của $\mathcal{U}$.

Cho $\mathcal{U}$ và $\mathcal{U}'$ là các phủ của A. Nếu $\mathcal{U}' \subseteq \mathcal{U}$, ta nói $\mathcal{U}'$ là *phủ con* của $\mathcal{U}$.

Thí dụ a) Với $A=[0,1]$, họ $\mathcal{U}_1 = \{(-\frac{1}{n}, 1+\frac{1}{n}) : n=1,2,...\}$ là một phủ của A. Họ $\mathcal{U}_2 = \{(-\frac{1}{2n}, 1+\frac{1}{2n}) : n=1,2,...\}$ cũng là phủ của A, đồng thời là phủ con của $\mathcal{U}_1$.

b) Với $A=\mathbb{R}$, họ $\mathcal{U}_1 = \{(-n,n) : n=1,2,...\}$ là phủ của A. Nhưng họ $\mathcal{U}_2 = \{(n,n+1) : n=\pm1,\pm2,...\}$ không phải là phủ của A.

Bổ đề *Nếu $\mathcal{U}$ là phủ bất kỳ của tập $A \subseteq \mathbb{R}$ thì $\mathcal{U}$ có một phủ con đếm được (của A).*

Chứng minh Nếu $\mathcal{U} = \{U_\alpha : \alpha \in I\}$ *hữu hạn* thì đó là phủ đếm được của A. Giả thiết $\mathcal{U}$ vô hạn. Lấy một *cơ sở lân cận* đếm được bất kỳ $\{ V_n : n=1,2,... \}$ trong $\mathbb{R}$. Với mỗi n, lấy $\alpha = \alpha(n) \in I$ sao cho $V_n \subseteq U_{\alpha(n)}$ (nếu có) và ký hiệu I_0 là tập các chỉ số $\alpha(n)$ này. Khi ấy I_0 đếm được và ta chứng minh $\{U_\alpha : \alpha \in I_0\}$ phủ A. Thực vậy, cho $x \in A$, do định nghĩa của phủ ta tìm được $\alpha \in I$ sao cho $x \in U_\alpha$. Theo định nghĩa của cơ sở lân cận thì tồn tại n để $x \in V_n \subseteq U_\alpha$. Điều này có nghĩa là có $\alpha = \alpha(n) \in I_0$ để $V_n \subseteq U_{\alpha(n)}$, do đó $x \in U_{\alpha(n)}$.

Định lý *Tập $A \subseteq \mathbb{R}$ là compact khi và chỉ khi mọi phủ của A đều chứa một phủ con hữu hạn.*

Chứng minh Giả thiết A compact và $\mathcal{U}$ là phủ của A. Nếu $\mathcal{U}$ hữu hạn thì đó là phủ con hữu hạn cần tìm. Nếu $\mathcal{U}$ vô hạn, theo bổ đề ta có thể giả thiết $\mathcal{U}$ đếm được, tức là ta có $\mathcal{U} = \{U_i : i = 1,2,...\}$. Nếu với mọi k, họ $\{U_1,...,U_k\}$ không phủ A thì ta tìm được $x_k \in A \setminus \{\bigcup_{i=1}^{k} U_i\}$. Vì A compact ta trích được dãy con $\{x_{k(n)}\}$ hội tụ tới một phần tử $x_o \in A$. Giả sử U_m chứa x_o. Khi ấy sẽ có N đủ lớn để $x_{k(n)} \in U_m, \forall n > N$. Ngoài ra, do tập điểm $\{x_{k(1)}, x_{k(2)},...x_{k(n)}\}$ là hữu hạn ta tìm được số L đủ lớn để $\{x_{k(1)},..., x_{k(n)}\} \subseteq \bigcup_{i=1}^{L} U_i$. Lấy $M = \max\{L, m\}$ ta sẽ có $\{x_{k(n)}\} \subseteq \bigcup_{i=1}^{M} U_i$. Điều này mâu thuẫn với việc lựa chọn $x_{k(n)}$. Do vậy phải tìm được số k để $\{U_1,...,U_k\}$ phủ A.

Ngược lại, giả thiết điều kiện về phủ của định lý đúng. Ta chứng minh A compact. Trước hết ta chỉ ra rằng A giới nội. Muốn thế, lấy $\{a_n\}$ là dãy tất cả các số hữu tỷ. Khi đó họ $\{U_n = (a_n - 1, a_n + 1) : n = 1,2,...\}$ phủ $\mathbb{R}$, do đó phủ A. Theo điều kiện, sẽ tìm được k để $\{U_1,...,U_k\}$ phủ A. Khi đó A sẽ bị giới nội bởi số $\max\{|a_n| + 1 : n = 1,2,...,k\}$. Theo định lý ở phần trên, ta chỉ còn phải chứng minh A đóng. Bằng phản chứng giả sử A không đóng ta sẽ tìm được dãy $\{x_n\} \subseteq A$ hội tụ tới $x_o \notin A$. Có thể xem như các phần tử của dãy là khác nhau.

Xét họ $\{U_k : k = 1,2,...\}$ trong đó

$$U_k = R \setminus (\{x_n : n = k+1, k+2,...\} \cup \{x_o\}).$$

Đây là họ các tập mở trong $\mathbb{R}$. Họ này là phủ của A. Thật vậy, với $x \in A$ bất kỳ, ta có hoặc $x \notin \{x_n\}$ khi ấy $x \in U_k$ với mọi k, hoặc $x = x_m$ nào đó, khi ấy $x \in U_m$.

Dễ thấy với mọi k, họ $\{U_1,...,U_k\}$ không thể nào phủ A được. Điều này mâu thuẫn với giả thiết. Vậy A đóng. Theo định lý trên, A compact.

3.4. Nguyên lý giao của họ các tập compact

3.4.1. Nguyên lý

Cho $\{A_\alpha : \alpha \in I\}$ là họ bất kỳ các tập khác rỗng trong $\mathbb{R}$.

Ta nói họ này có tính chất giao hữu hạn nếu với mọi bộ hữu hạn chỉ số $\alpha_1,...,\alpha_n \in I$, ta có $\bigcap_{i=1}^{n} A_{\alpha_i} \neq \varnothing$.

Định lý *Cho $\{A_\alpha : \alpha \in I\}$ là họ các tập compact khác rỗng có tính chất giao hữu hạn. Khi đó*

$$\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha \neq \varnothing.$$

Chứng minh Cố định $\alpha_0 \in I$ và đặt $U_\alpha = \mathbb{R} \setminus A_\alpha$. Giả sử $\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha \neq \varnothing$, khi đó $\{U_\alpha : \alpha \in I\}$ là phủ của $\mathbb{R}$ vì U_α mở và

$$\bigcup_{\alpha\in I} U_\alpha = \bigcup_{\alpha\in I} (\mathbb{R} \setminus A_\alpha) = \mathbb{R} \setminus (\bigcap_{\alpha\in I} A_\alpha) = \mathbb{R}.$$

Do vậy $\{U_\alpha : \alpha \in I\}$ phủ A_{α_0}. Theo định lý phủ tập compact, ta có thể trích được hữu hạn phần tử $U_{\alpha 1},...,U_{\alpha k}$ để tạo thành phủ A_{α_0}. Như vậy

$$A_{\alpha_0} \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} U_{\alpha_i} = \bigcup_{\alpha=1}^{k} (\mathbb{R} \setminus A_{\alpha_i}) = \mathbb{R} \setminus (\bigcap_{i=1}^{k} A_{\alpha_i}).$$

Nghĩa là $A_{\alpha_0} \cap A_{\alpha_1} \cap ... \cap A_{\alpha_k} = \varnothing$. Điều này là mâu thuẫn với tính chất giao hữu hạn của họ $\{A_\alpha : \alpha \in I\}$. Vậy $\bigcap_{\alpha\in I} A_\alpha \neq \varnothing$.

3.4.2. Ứng dụng

Hệ quả *Cho trước họ vô hạn các đoạn $\{[a_n, b_n]: n = 1,2,...\}$ lồng nhau (nghĩa là $[a_n, b_n] \subseteq [a_{n-1}, b_{n-1}]$, $n = 2,3,...$). Khi ấy ta có*

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n] \neq \varnothing.$$

Chứng minh Nhận xét rằng họ trên là họ các tập compact. Họ này có tính chất giao hữu hạn vì giao của mọi họ hữu hạn các đoạn này sẽ là đoạn có chỉ số cao nhất (trong họ) và do đó là khác rỗng. Theo nguyên lý giao của họ tập compact suy ra điều cần chứng minh.

Bài tập
Chương 3

1. Tập mở, tập đóng

Bài 1 Cho $E_n = [\frac{1}{2n+1}, \frac{1}{2n}], n = 1,2,\ldots$ Chứng minh rằng $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ là một tập không đóng.

Bài 2 Bao đóng của A là tập gồm các điểm thuộc A và các điểm tụ của nó. Ký hiệu bao đóng của A là $[A]$. Hãy chứng minh:

1) Bao đóng của A là tập đóng nhỏ nhất chứa A.
2) Bao đóng của bao đóng của A là bao đóng của A: $[[A]] = [A]$.
3) Nếu $A \subset B$ thì $[A] \subset [B]$.
4) $[A \cup B] = [A] \cup [B]$.

Bài 3 Giả sử A là tập mở trong $\mathbb{R}$. Chứng minh rằng với mọi B thuộc $\mathbb{R}$ ta đều có bao hàm thức $A \cap [B] \subset [A \cap B]$.

Bài 4 Tìm những ví dụ về hai tập A, B trong $\mathbb{R}$ sao cho cả bốn tập $A \cap [B]$, $[A] \cap B$, $[A] \cap [B]$ và $[A \cap B]$ đều khác nhau.

Bài 5 Tìm ví dụ hai tập A, B trên $\mathbb{R}$, sao cho $A \cap [B]$ không chứa trong $[A \cap B]$.

2. Điểm tụ

Bài 1 Tìm tất cả các điểm tụ của tập $E = \left\{-\frac{1}{n}, n = 1,2,\ldots\right\} \cup (1,2] \cup \{3\}$.

Bài 2 Chứng minh rằng tập $X = \{\frac{1}{2} + \frac{n}{2n+1}; \frac{1}{2} - \frac{n}{2n+1}\}$, $n \in N$ chỉ có hai điểm tụ là 0 và 1.

Bài 3 Dãy $\{x_n\}$ được xác định như sau: $x_1 = a$ là một điểm bất kỳ trong đoạn $[0,1]$ và $x_n = \frac{x_n - 1}{2}$ khi n chẵn và $x_n = \frac{1 + x_{n-1}}{2}$ khi n lẻ. Hỏi dãy $\{x_n\}$ có bao nhiêu điểm tụ ?

Bài 4 Một dãy $\{a_n\}$ thoả mãn điều kiện: $\lim_{n\to\infty}(a_n + a_{n+1}) = 0$. Chứng minh rằng dãy $\{a_n\}$ hoặc có không nhiều hơn 2, hoặc có vô hạn điểm tụ.

Bài 5 Hãy xây dựng một dãy các phần tử khác nhau mà mỗi số hạng của dãy là một điểm tụ. Tập phần tử của một dãy như trên có thể là tập đóng hay không?

Bài 6 Hãy chứng minh tập bao gồm các phần tử của một dãy bất kỳ và các điểm tụ của nó không thể là tập mở.

Bài 7 Khảo sát tính hội tụ của một dãy chỉ có một điểm tụ (xét trường hợp dãy giới nội và trường hợp không giới nội).

Bài 8 Một điểm của một tập được gọi là cô lập nếu tồn tại một lân cận mà trong đó không có điểm nào khác của tập ngoài điểm đã cho. Hãy chứng minh rằng một dãy có vô hạn điểm tụ cô lập không thể giới nội.

3. Tập compact

Bài 1 Cho a và b là hai số dương ($a < b$). Hai dãy số $\{u_n\}$ và $\{v_n\}$ được xác định như sau:

$$u_o = a, v_o = b, u_{n+1} = u_n v_n, v_{n+1} = \frac{v_n + u_n}{2}.$$

Chứng minh rằng

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} v_n.$$

Bài 2 Hãy tìm tất cả các tập compact trong $\mathbb{R}$ khi trang bị cho $\mathbb{R}$ một trong những tôpô sau:

i) Tôpô tầm thường (chỉ có $\mathbb{R}$ và $\varnothing$ là những tập mở);

ii) Tôpô rời rạc (mỗi điểm của $\mathbb{R}$ là tập mở);

iii) Tôpô thông thường (tôpô với cơ sở lân cận là các khoảng).

Bài 3 Nếu hợp vô hạn của các tập compact là tập đóng (hay giới nội) thì tập hợp này có compact không? Giải thích vì sao.

Bài 4 Cho $\{A_n : n = 1,2,\ldots\}$ là họ các tập compact trong $\mathbb{R}$. Giả sử tìm được số $k \geq 3$ để với mọi bộ k số $n_1, n_2, \ldots, n_k$ ta có $\bigcap_{i=1}^{n} A_{n_i} \neq \phi$. Hỏi rằng họ này có điểm chung hay không? Vì sao?

Bài 5 Tìm thí dụ một tập đóng, không giới nội có phủ vô hạn nhưng từ đó không thể trích ra được một phủ con hữu hạn.

Tìm thí dụ một tập không đóng, giới nội có phủ vô hạn nhưng từ đó không thể trích ra được một phủ con hữu hạn.

Bài 6 Hãy chỉ ra vì sao trục số $\mathbb{R}$ (với tôpô thông thường) lại không compact. Nếu như ta mở rộng $\mathbb{R}$ một cách hình thức bằng việc thêm hai điểm, ký hiệu là $-\infty$ và $+\infty$ có tính chất sau: $-\infty < r < +\infty$ với mọi $r \in \mathbb{R}$. Sau đó ta trang bị trên tập mở rộng $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ một tôpô sau đây: cơ sở lân cận của mỗi điểm $r \in \mathbb{R}$ là cơ sở lân cận trong tôpô bình thường; cơ sở lân cận của điểm $-\infty$ gồm các tập con dạng

$$\{r \in \mathbb{R} : r < -n\};$$

Cơ sở lân cận của $+\infty$ gồm các tập con có dạng

$$\{r \in \mathbb{R} : r > -n\}.$$

Hãy chứng minh rằng $\mathbb{R}$ với tôpô vừa nêu trên là tập compact.

CHƯƠNG 4

Hàm số

4.1. Khái niệm hàm số

Cho X và Y là hai tập con khác rỗng của tập số thực $\mathbb{R}$.

Phép ứng f từ X vào Y được gọi là hàm số trên X.

Ta viết $y = f(x)$ có nghĩa y là giá trị (trong Y) ứng với x (trong X).

Người ta gọi x là *biến độc lập* (hay *đối số*) và y là *biến phụ thuộc* hay *giá trị* của hàm số f tại x.

Tập X được gọi là *miền xác định* của hàm số f.

Tập $R_f := \{y \in Y / \exists x \in X : f(x) = y\}$ được gọi là *miền giá trị* (hay *tập ảnh*) của hàm f. Miền giá trị không nhất thiết bằng toàn bộ Y.

Với mỗi $x \in X$ có thể có nhiều giá trị y của Y sao cho $y = f(x)$, khi ấy ta nói f là một *hàm đa trị*. Nếu với mỗi $x \in X$ chỉ có duy nhất một giá trị của $y \in Y$ sao cho $y = f(x)$ thì ta nói f là một *hàm đơn trị*. Trong giáo trình này, nếu không nói gì thêm, ta chỉ xét f là một hàm đơn trị.

4.2. Các phương pháp biểu diễn hàm số

Muốn xác định hàm số ta phải chỉ ra miền xác định $X \subseteq \mathbb{R}$ và quy tắc (phép ứng) f. Hàm số thường được xác định theo một trong ba phương pháp sau đây:

4.2.1. Phương pháp giải tích

Nếu f được cho bởi một biểu thức giải tích thì ta nói hàm số được cho bằng *phương pháp giải tích*. Trong trường hợp này, miền xác định của hàm số là tập tất cả những giá trị của đối số sao cho biểu thức có nghĩa.

Thí dụ Hàm số $y = \sqrt{x-1} + \dfrac{1}{x-2}$ có miền xác định là

$$\{ x \in \mathbb{R} : x \geq 1,\ x \neq 2\}.$$

Bài toán tìm *miền xác định* của hàm số thường được đưa về việc giải một hay nhiều hệ phương trình và bất phương trình.

Chú ý Đôi khi miền xác định của hàm số được ghép thành từ nhiều khúc, và trên mỗi khúc hàm số được cho bởi một biểu thức giải tích riêng. Những hàm như vậy còn được gọi là hàm xác định từng khúc, hay đơn giản là *hàm từng khúc*.

Thí dụ Hàm dấu $y = sign(x)$ (đôi khi viết là $sgn(x)$, đọc là: signum của x) là một hàm từng khúc, xác định như sau:

$$\text{sign}(x) = \begin{cases} -1 & \text{khi } x < 0 \\ 0 & \text{khi } x = 0 \\ 1 & \text{khi } x > 1 \end{cases}$$

4.2.2. Phương pháp bảng

Trong tự nhiên cũng như trong kỹ thuật, nhiều khi quan hệ hàm giữa hai đại lượng được thiết lập qua thực nghiệm hoặc quan sát tại những thời điểm (hoặc vị trí) nào đó. Thí dụ, số đo nhiệt độ tại một điểm xác định nào đó là một đại lượng phụ thuộc vào thời gian. Những giá trị đo đạc (quan sát) tại những thời điểm (vị trí) khác nhau có thể được xem là hàm phụ thuộc vào thời điểm (vị trí) đo đạc. Ta có thể xác định giá trị của hàm tại bất kỳ thời điểm (vị trí nào) bằng các thiết bị đo đạc sẵn có, nhưng nói chung ta không thể tìm được *biểu thức giải tích* biểu diễn được kết quả đo đạc theo thời gian (vị trí) một cách chính xác, mà thường biểu thị chúng dưới dạng *bảng ghi số liệu*. Khi ấy ta nói *hàm được cho dưới dạng bảng*. Cách cho hàm như vậy, mặc dù thường cho thông tin về hàm không đầy đủ (không tại mọi điểm), nhưng lại rất phổ biến trong thực tiễn. Một trong những lĩnh vực quan trọng của giải tích toán học là nghiên cứu phương pháp "khôi phục" thông tin (tại những điểm không được cho) để biến những hàm loại này thành một hàm mà các công cụ giải tích có thể xử lý được như mọi hàm thông thường khác.

4.2.3. Phương pháp đồ thị

Phương pháp này thực chất là một biến thể của phương pháp bảng. Thay vì cho một bảng số liệu, người ta cho một tập hợp điểm trong mặt phẳng tọa độ vuông góc (tức là mặt phẳng với hệ tọa độ Descartes (đọc là Đề-các)), và hàm số f được xác định bởi phép cho tương ứng *hoành độ* của mỗi điểm (trong tập điểm đã cho) với *tung độ* của nó. Trong trường hợp có *nhiều điểm khác nhau* cùng có chung một *hoành độ* thì phép ứng sẽ là xác định không duy nhất, và khi ấy ta có thể thiết lập hàm *đa trị*, cho tương ứng một hoành độ với *tập các tung độ* của các điểm có chung hoành độ này. Trong khuôn khổ giáo trình này ta thường chỉ xét các hàm đơn trị, và khi ấy phải giả thiết là tập hợp được cho phải thỏa mãn điều kiện là: không có 2 điểm phân biệt nào có cùng hoành độ.

Tập hợp đã cho còn có tên gọi là *đồ thị* của hàm f, và thường được ký hiệu là G_f. Rõ ràng hình chiếu của tập G_f lên trục hoành chính là *miền xác định* của hàm f, và hình chiếu của G_f lên trục tung chính là *miền giá trị* của hàm f. Dễ thấy rằng một hàm số được cho bởi phương pháp bảng hay phương pháp giải tích thì cũng có thể cho được bằng phương pháp đồ thị, khi ta lấy G_f là tập những điểm (x,y), với $x \in X$ và $y=f(x)$.