Phương trình (3.14) cũng có thể khai triển như sau

$$\begin{aligned}
F(u,0) &= \sum_{x=0}^{M-1} G(x,0)e^{-2\pi i\frac{ux}{M}},\\
F(u,1) &= \sum_{x=0}^{M-1} G(x,1)e^{-2\pi i\frac{ux}{M}},\\
&\vdots\\
F(u,N-1) &= \sum_{x=0}^{M-1} G(x,N-1)e^{-2\pi i\frac{ux}{M}}.
\end{aligned}$$

Các phương trình trên đưa đến thủ tục FFT hai chiều:

Bước 1. Biến đổi FFT 1D mỗi hàng và lưu trữ vào mảng trung gian.

Bước 2. Chuyển vị mảng trung gian.

Bước 3. Biến đổi FFT 1D mỗi hàng của mảng trung gian. Kết quả cuối cùng là chuyển vị của mảng FFT 2D.

Chúng ta cũng có thể viết lại (3.14) như sau

$$F(u,v) = \frac{1}{MN}\sum_{y=0}^{N-1}\left[\sum_{x=0}^{M-1} f(x,y)e^{-2\pi i\frac{ux}{M}}\right]e^{-2\pi i\frac{vy}{N}}. \tag{3.16}$$

Đặt

$$G(u,y) := \frac{1}{M}\sum_{x=0}^{M-1} f(x,y)e^{-2\pi i\frac{ux}{M}}.$$

Thì

$$F(u,v) = \frac{1}{N}\sum_{y=0}^{N-1} G(u,y)e^{-2\pi i\frac{vy}{N}}.$$

Điều này đưa đến thủ tục FFT hai chiều:

Bước 1. Chuyển vị tập tin ảnh.

Bước 2. Biến đổi FFT 1D mỗi hàng của ảnh được chuyển vị và lưu trữ vào mảng trung gian.

Bước 3. Chuyển vị mảng trung gian.

Bước 4. Biến đổi FFT 1D mỗi hàng của mảng trung gian. Kết quả là FFT 2D.

3.4.2 Biến đổi FFT ngược

Thuật toán biến đổi thuận có thể cải biên để nhận được biến đổi ngược. Thật vậy, lấy liên hợp phức hai vế và chia cho N của

$$f(x) = \sum_{u=0}^{N-1} F(u)e^{2\pi i\frac{ux}{N}}$$

ta được

$$\frac{1}{N}\bar{f}(x) = \frac{1}{N}\sum_{u=0}^{N-1} \bar{F}(u)e^{-2\pi i\frac{ux}{N}}. \tag{3.17}$$

So sánh với

$$F(u) = \frac{1}{N}\sum_{x=0}^{N-1} f(x)e^{-2\pi i\frac{ux}{N}}$$

ta thấy vế phải của (3.17) có dạng của phép biến đổi Fourier thuận. Do đó sử dụng thuật toán này với dữ liệu nhập là $\bar{F}(u)$ để tính $\bar{f}(x)/N$. Từ đó dễ dàng suy ra $f(x)$.

Tương tự cho 2D, từ (3.4) dễ dàng suy ra

$$\frac{1}{MN}\bar{f}(x,y) = \frac{1}{MN}\sum_{u=0}^{M-1}\sum_{v=0}^{N-1} \bar{F}(u,v)e^{-2\pi i\left(\frac{ux}{M}+\frac{vy}{N}\right)}.$$

Biểu thức bên vế phải có dạng biến đổi Fourier 2D thuận. Do đó nhập $\bar{F}(u,v)$ và dùng thuật toán biến đổi thuận ta có $\frac{1}{MN}\bar{f}(x,y)$. Từ đó suy ra $f(x,y)$. Chú ý rằng, nếu f thực thì phép toán liên hợp phức là không cần thiết.

Nhận xét 3.4.1 Thuật toán FFT 2D được trình bày trên liên quan đến bài toán chuyển vị ma trận. Để giảm bớt thời gian thực hiện trong tiến trình này, chúng ta có thể sử dụng phương pháp chuyển vị ma trận của Eklundh (xem [19]).

3.5 Các phép biến đổi khác

Biến đổi Fourier một chiều là một trong những phép biến đổi có dạng

$$T(u) := \sum_{x=0}^{N-1} f(x)g(x,u),$$

trong đó $T(u)$ là phép biến đổi, $g(x,u)$ là *hạt nhân biến đổi thuận* và giá trị u thay đổi trong phạm vi $\{0,1,\dots,N-1\}$. Tương tự, phép biến đổi ngược

$$f(x) = \sum_{u=0}^{N-1} T(u)h(x,u),$$

trong đó $h(x,u)$ là *hạt nhân biến đổi ngược* và giá trị x thay đổi trong phạm vi $\{0,1,\dots,N-1\}$. Các tính chất của hạt nhân biến đổi xác định tính chất của phép biến đổi.

Cặp biến đổi hai chiều rời rạc thuận và ngược tổng quát có dạng

$$\begin{cases} T(u,v) := \displaystyle\sum_{x=0}^{N-1}\sum_{y=0}^{N-1} f(x,y)g(x,y,u,v), \\ f(x,y) := \displaystyle\sum_{u=0}^{N-1}\sum_{v=0}^{N-1} T(u,v)h(x,y,u,v), \end{cases} \tag{3.18}$$

trong đó g,h được gọi là các *hạt nhân biến đổi thuận và ngược*. Các hạt nhân này chỉ phụ thuộc vào x,y,u,v, mà không phụ thuộc vào f và T.

Hạt nhân biến đổi thuận là *tách được* nếu ta có thể viết

$$g(x,y,u,v) = g_1(x,u)g_2(y,v).$$

Hạt nhân biến đổi thuận tách được gọi là *đối xứng* nếu $g_1 \equiv g_2$. Tương tự ta cũng có các khái niệm tách được, đối xứng cho hạt nhân biến đổi ngược.

Biến đổi Fourier 2D là trường hợp đặc biệt có hạt nhân biến đổi

$$g(x,y,u,v) := \frac{1}{NN} e^{-2\pi i\left(\frac{ux}{N}+\frac{vy}{N}\right)}$$

tách được và đối xứng. (Hạt nhân biến đổi Fourier 2D ngược cũng tách được và đối xứng).

Phép biến đổi với nhân tách được có thể được tính thông qua hai bước, mỗi bước sử dụng phép biến đổi 1D như được chỉ ra dưới đây.

Thuật toán

Bước 1. Đầu tiên biến đổi 1D dọc theo mỗi hàng của ảnh f :

$$T(x,v) := \sum_{y=0}^{N-1} f(x,y)g_2(y,v),$$

với $x = 0,1,\dots,N-1, v = 0,1,\dots,N-1$.

Bước 2. Kế tiếp, lấy biến đổi 1D dọc theo mỗi cột của $T(x,v)$ (đã được tính theo Bước 1):

$$T(u,v) := \sum_{x=0}^{N-1} T(x,v) g_1(x,u),$$

với $u = 0, 1, \ldots, N-1, v = 0, 1, \ldots, N-1$.

Ta cũng có thể xác định $T(u,v)$ bằng cách: (1) biến đổi mỗi cột của f để nhận được $T(y,u)$; (2) sau đó biến đổi dọc theo mỗi hàng. Tương tự cho biến đổi ngược nếu h tách được.

Nếu hạt nhân g tách được và đối xứng, thì (3.18) có thể viết lại dưới dạng ma trận

$$T = AfA, \tag{3.19}$$

trong đó f là ma trận ảnh $N \times N$; $A := (a_{ij})$ là ma trận biến đổi đối xứng cấp $N \times N$, với $a_{ij} := g_1(i,j)$; và T là ma trận kết quả.

Để có biến đổi ngược, nhân trước và sau (3.19) với ma trận biến đổi ngược B, ta được

$$BTB = BAFAB. \tag{3.20}$$

Nếu $B = A^{-1}$, thì

$$f = BTB \tag{3.21}$$

cho biết ảnh số f có thể khôi phục hoàn toàn từ biến đổi này. Nếu $B \neq A^{-1}$, ta dùng (3.20) để có một xấp xỉ với f :

$$\hat{f} = BAfAB.$$

Nhiều loại biến đổi (Fourier, Walsh, Hadamard, cosin rời rạc, Haar, Slant) có thể biểu diễn dưới dạng (3.19) và (3.21). Một tính chất quan trọng của các ma trận biến đổi là chúng có thể tách được thành tích các ma trận với ít phần tử khác không hơn ma trận gốc. Kết quả này làm giảm độ dư thừa và số phép tính cần thiết cho biến đổi 2D.

3.5.1 Biến đổi Walsh

Giả sử $N = 2^n, n \in \mathbb{N}$. *Biến đổi Walsh* của hàm rời rạc $f(x,y)$ có hạt nhân biến đổi thuận ngược cho bởi

$$\begin{cases} g(x,y,u,v) := \dfrac{1}{N}\displaystyle\prod_{i=0}^{n-1}(-1)^{[b_i(x)b_{n-1-i}(u)+b_i(y)b_{n-1-i}(v)]}, \\ h(x,y,u,v) := \dfrac{1}{N}\displaystyle\prod_{i=0}^{n-1}(-1)^{[b_i(x)b_{n-1-i}(u)+b_i(y)b_{n-1-i}(v)]}, \end{cases}$$

trong đó $b_k(z)$ là bit thứ k trong biểu diễn nhị phân của z. Chẳng hạn, nếu $n = 3$ và $z = 6 = (110)_2$ thì $b_0(z) = 0, b_1(z) = 1, b_2(z) = 1$.

Biến đổi Walsh thuận ngược

$$\begin{cases} W(u,v) := \dfrac{1}{N}\displaystyle\sum_{x=0}^{N-1}\sum_{y=0}^{N-1} f(x,y)\prod_{i=0}^{n-1}(-1)^{[b_i(x)b_{n-1-i}(u)+b_i(y)b_{n-1-i}(v)]}, \\ f(x,y) := \dfrac{1}{N}\displaystyle\sum_{u=0}^{N-1}\sum_{v=0}^{N-1} W(u,v)\prod_{i=0}^{n-1}(-1)^{[b_i(x)b_{n-1-i}(u)+b_i(y)b_{n-1-i}(v)]}. \end{cases}$$

Nhận xét rằng, hạt nhân biến đổi Walsh là tách được và đối xứng. Do đó $W(u,v)$ và biến đổi ngược của nó có thể được tính bằng thuật toán trình bày trên. Hơn nữa, biến đổi Walsh có thể được tính bằng thuật toán nhanh như FFT. Chỗ khác biệt duy nhất là tất cả các lũy thừa W_N được đặt bằng 1 trong trường hợp FWT.

3.5.2 Biến đổi Hadamard

Hạt nhân biến đổi thuận ngược của *biến đổi Hadamard* cho bởi

$$\begin{cases} g(x,y,u,v) := \dfrac{1}{N}(-1)^{\sum_{i=0}^{n-1}[b_i(x)b_i(u)+b_i(y)b_i(v)]\ \%\ 2}, \\ h(x,y,u,v) := \dfrac{1}{N}(-1)^{\sum_{i=0}^{n-1}[b_i(x)b_i(u)+b_i(y)b_i(v)]\ \%\ 2}. \end{cases}$$

Ta có cặp biến đổi Hadamard 2D

$$\begin{cases} H(u,v) := \dfrac{1}{N}\displaystyle\sum_{x=0}^{N-1}\sum_{y=0}^{N-1} f(x,y)(-1)^{\sum_{i=0}^{n-1}[b_i(x)b_i(u)+b_i(y)b_i(v)]}, \\ f(x,y) := \dfrac{1}{N}\displaystyle\sum_{u=0}^{N-1}\sum_{v=0}^{N-1} H(u,v)(-1)^{\sum_{i=0}^{n-1}[b_i(x)b_i(u)+b_i(y)b_i(v)]}. \end{cases}$$

Từ định nghĩa dễ dàng suy ra hạt nhân biến đổi Hadamard tách được và đối xứng.

Nhận xét 3.5.1 Nếu $N = 2^n$ thì sau một số hoán vị hàng và cột, ta có thể chuyển ma trận biến đổi Walsh về ma trận biến đổi Hadamard. Nếu $N \neq 2^n$ thì có sự khác nhau