Trường Đại học Bách khoa tp. Hồ Chí Minh
Bộ môn Toán Ứng dụng

Giải tích hàm nhiều biến

Chương 5: Tích phân đường

- *Giảng viên Ts. Đặng Văn Vinh (4/2008)*

  dangvvinh@hcmut.edu.vn

Nội dung

I –Tích phân đường loại 1

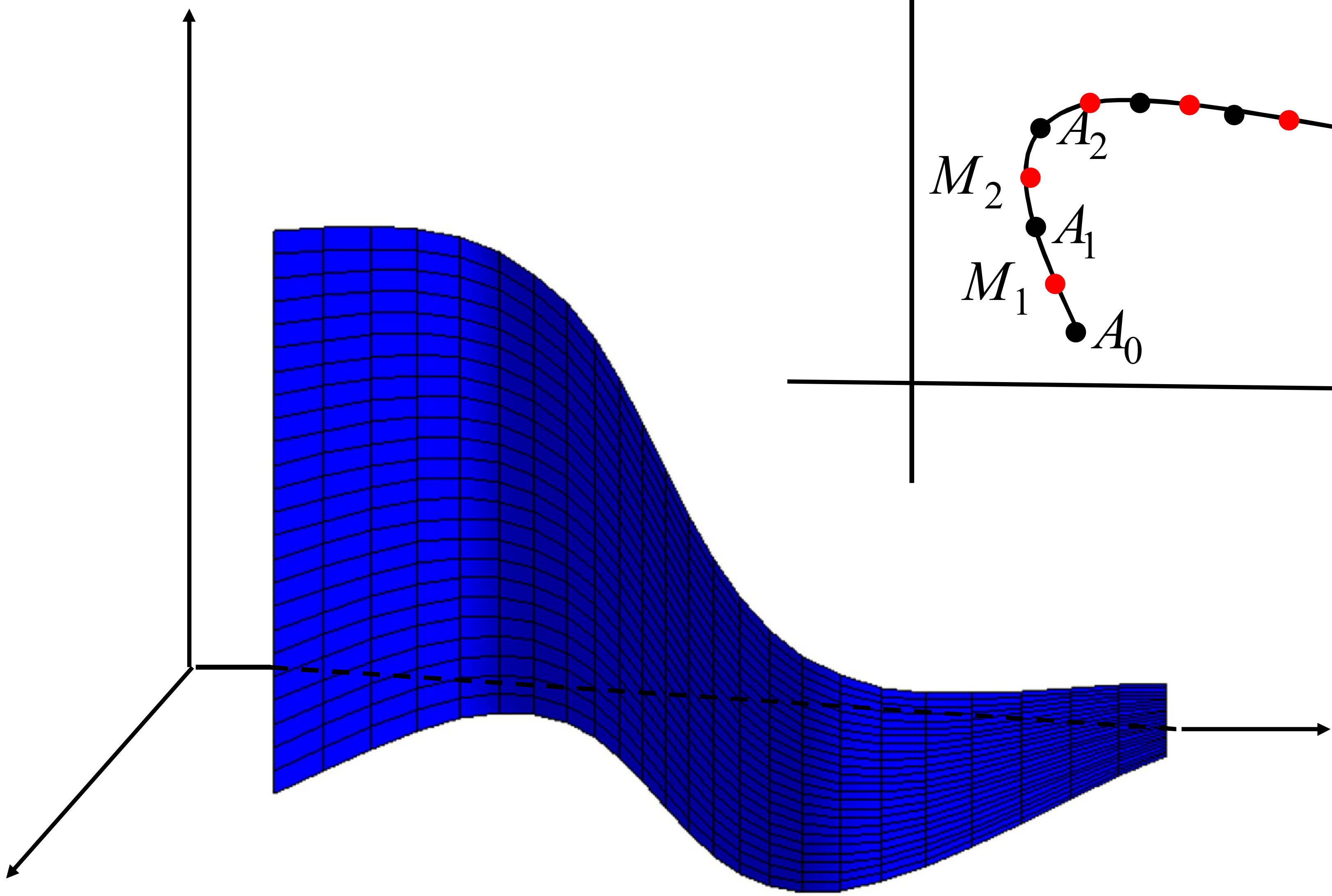
II –Tích phân đường loại hai

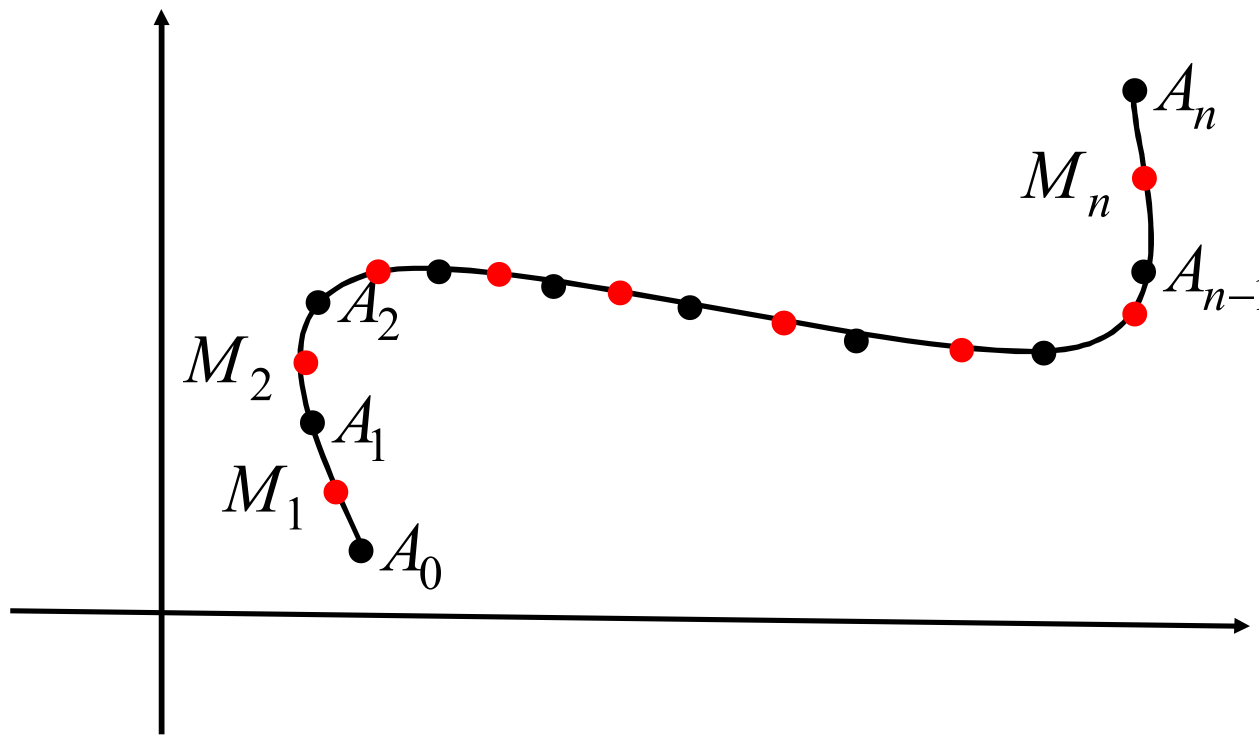
II.1 – Định nghĩa, cách tính

II.2 – Công thức Green

II.3 – Tích phân không phụ thuộc đường đi.

I. Tích phân đường loại một.





I. Tích phân đường loại một.

$f = f(x,y)$ xác định trên đường cong C.

Chia C một cách tùy ý ra n đường cong nhỏ bởi các điểm $A_0, A_1, \ldots, A_n$.

Độ dài tương ứng $L_1, L_2, \ldots, L_n$.

Trên mỗi cung A_iA_{i+1} lấy tuỳ ý một điểm $M_i(\overline{x_i}, \overline{y_i})$.

Lập tổng Riemann: $I_n = \sum_{i=1}^{n} f(M_i) \cdot L_i$

$I = \lim_{n \to +\infty} I_n$, không phụ thuộc cách chia C, và cách lấy điểm M_i

$$I = \int_C f(x,y)\,dl$$

được gọi là tích phân đường loại một của $f=f(x,y)$ trên cung C.

I. Tích phân đường loại một

Tính chất của tích phân đường loại một

1) Hàm liên tục trên cung C, bị chặn, trơn từng khúc thì khả tích trên C.

2) $L(C) = \int_C 1dl$ 3) $\int_C \alpha \cdot f dl = \alpha \cdot \int_C f dl$ 4) $\int_C (f+g) dl = \int_C f dl + \int_C g dl$

5) Tích phân đường loại một không phụ thuộc chiều lấy tích phân trên C.

6) Nếu C được chia làm hai cung C_1 và C_2 không dẫm lên nhau:

$$\int_C f dl = \int_{C_1} f dl + \int_{C_2} f dl$$

7) $\forall (x,y) \in C, f(x,y) \le g(x,y) \Rightarrow \int_C f dl \le \int_C g dl$

8) Định lý giá trị trung bình. Nếu f(x,y) liên tục trên cung trơn C có độ dài L. Khi đó tồn tại điểm M_0 thuộc cung C, sao cho

$$\int_C f dl = f(M_0) \cdot L$$

Cách tính tích phân đường loại một

Cung C cho bởi phương trình tham số: x = x(t), y = y(t), $t_1 \le t \le t_2$

$$\int_C f(x,y)dl = \lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{i=1}^{n} f(M_i)\cdot L_i\right)$$

L_i là độ dài cung nhỏ A_iA_{i+1}:

$$L_i = \int_{t_i}^{t_{i+1}} \sqrt{\left(x'(t)\right)^2 + \left(y'(t)\right)^2}\,dt = \sqrt{\left(x'(\bar{t}_i)\right)^2 + \left(y'(\bar{t}_i)\right)^2}\cdot \Delta t_i \qquad t_i \le \bar{t}_i \le t_{i+1}$$

Chọn điểm trung gian M_i có tọa độ $\left(x(\bar{t}_i), y(\bar{t}_i)\right)$

$$\int_C f(x,y)dl = \lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{i=1}^{n} f\left(x(\bar{t}_i), y(\bar{t}_i)\right)\cdot\sqrt{\left(x'(\bar{t}_i)\right)^2 + \left(y'(\bar{t}_i)\right)^2}\cdot \Delta t_i\right)$$

$$\boxed{\int_C f(x,y)dl = \int_{t_1}^{t_2} f(x(t),y(t))\cdot\sqrt{\left(x'(t)\right)^2 + \left(y'(t)\right)^2}\cdot dt}$$

Cách tính tích phân đường loại một

Cung C cho bởi phương trình: y = y(x), $a \le x \le b$

Phương trình tham số của C là :x = x(t), y = y(t), $t_1 \le t \le t_2$

$$\int_C f(x,y)dl = \int_{t_1}^{t_2} f(x(t),y(t)) \cdot \sqrt{\left(x'(t)\right)^2 + \left(y'(t)\right)^2} \cdot dt$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} f(x(t),y(t)) \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{y'(t)}{x'(t)}\right)^2} \cdot x'(t) \cdot dt$$

$$\boxed{\int_C f(x,y)dl = \int_a^b f(x,y(x)) \cdot \sqrt{1 + \left(y'(x)\right)^2} \cdot dx}$$

Tương tự, Cung C cho bởi phương trình: x = x(y), $c \le y \le d$

$$\boxed{\int_C f(x,y)dl = \int_c^d f(x(y),y) \cdot \sqrt{1 + \left(x'(y)\right)^2} \cdot dy}$$

I. Tích phân đường loại một.

Tương tự , ta có định nghĩa tích phân đường trong không gian.

$f = f(x, y, z)$ xác định trên đường cong C trong không gian.

C cho bởi phương trình tham số: $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t), \quad t_1 \le t \le t_2 \\ z = z(t) \end{cases}$

$$I = \int_C f(x, y, z)dl$$

$$\boxed{\int_C f(x, y, z)dl = \int_{t_1}^{t_2} f(x(t), y(t), z(t)).\sqrt{\left(x'(t)\right)^2 + \left(y'(t)\right)^2 + \left(z'(t)\right)^2} \cdot dt}$$

Ví dụ

Tính $I = \int_C x^3 dl$, trong đó C là cung parabol $y = \dfrac{x^2}{2}$, $0 \le x \le \sqrt{3}$

$$I = \int_a^b f(x, y(x)) \cdot \sqrt{1 + \left(y'(x)\right)^2} \cdot dx = \int_0^{\sqrt{3}} x^3 \sqrt{1 + (y'(x))^2} dx = \int_0^{\sqrt{3}} x^3 \sqrt{1 + x^2} dx = \frac{58}{15}$$

Ví dụ

Tính $I = \int_C 2x dl$, trong đó $C = C_1 + C_2$, với C_1: $y = x^2$, từ (0,0) đến (1,1) và C_2 là đường thẳng từ (1,1) đến (1,2).

$$I = \int_C 2x dl = \int_{C_1} 2x dl + \int_{C_2} 2x dl = \int_0^1 2x \cdot \sqrt{1 + \left(y'(x)\right)^2} \cdot dx + \int_1^2 2x(y) \cdot \sqrt{1 + \left(x'(y)\right)^2} \cdot dy$$

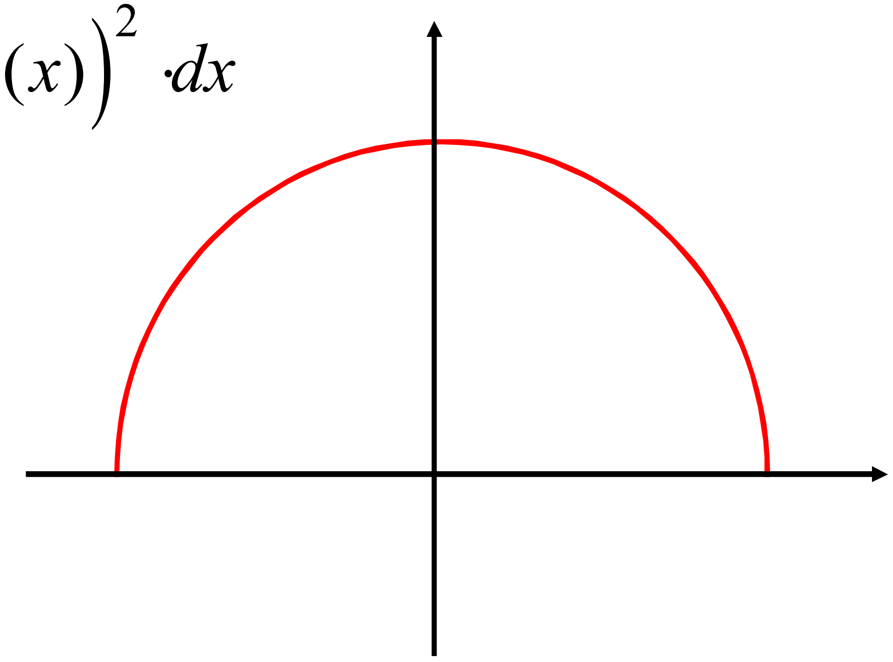
$$= \int_0^1 2x \cdot \sqrt{1 + 4x^2} \cdot dx + \int_1^2 2 \cdot 1 \cdot \sqrt{1 + (0)^2} \cdot dy = \frac{5\sqrt{5} - 1}{6} + 2$$

Ví du

Tính $I = \int_C (2 + x^2 y) dl$, với C là nửa trên đường tròn $x^2 + y^2 = 1$

Có thể dùng công thức $I = \int_a^b f(x, y(x)) \cdot \sqrt{1 + \left(y'(x)\right)^2} \cdot dx$

nhưng việc tính toán phức tạp.



Viết phương trình tham số cung C.

Đặt $x = r\cos t;\ y = r\sin t$

Vì $x^2 + y^2 = 1$, nên $r = 1$.

Phương trình tham số của nửa trên cung tròn: $\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases};\quad 0 \le t \le \pi$

$$I = \int_0^\pi (2 + \cos^2 t \cdot \sin t) \sqrt{\left(x'(t)\right)^2 + \left(y'(t)\right)^2}\, dt = \int_0^\pi (2 + \cos^2 t \cdot \sin t) dt = \frac{2}{3} + 2\pi$$