Chương 6
GIẢI GẦN ĐÚNG PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN THƯỜNG

6.1. MỞ ĐẦU

Nhiều bài toán kỹ thuật qui về việc tìm nghiệm của phương trình vi phân thoả mãn điều kiện nào đó (điều kiện đầu , điều kiện biên ...) nói chung giải đúng là khó nên thường giải gần đúng.

Có 2 phương pháp giải gần đúng :

- phương pháp giải tích : Tìm nghiệm gần đúng dạng biểu thức tuy nhiên phương pháp này thường ít dùng hơn
- Phương pháp số : Ta tìm nghiệm tại các điểm $x_o<x_1,...<x_n \le \overline{x}$ tức là đúng nghiệm ở giá trị trước để tính giá trị sau : $y_k = \phi(y_{k-1},...y_{k-v})$

Có thể có phương pháp 1 bước và phương pháp đa bước : phương pháp 1 bước tính y_k qua y_{k-1} ;phương pháp đa bước tính thông qua $y_{k-1}...y_{k-v}$

Trong phạm vi chương này ta xét 2 loại bài toán :

1 – Bài toán giá trị ban đầu còn gọi là bài toán Côsi :

Tìm y(x) thoả mãn 2 điều kiện : $+y'=f(x,y) \quad x_0 < x < \overline{x}$

$+y(x_0) = y_0$

2 – Bài toán biên tuyến tính : +Biên 2 điểm a , b

$$\begin{cases} y''+p(x)y'+q(x)y = f(x) \\ \alpha_1 y(a)+\beta_1 y'(a) = \gamma_1 \\ \alpha_2 y(b)+\beta_2 y'(b) = \gamma_2 \end{cases}$$

6.2. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TÍCH *(PHƯƠNG PHÁP CHUỖI NGUYÊN)*

Xét bài toán Côsi :

$$y' = f(x,y) \ ; \ x_0 < x < \overline{x} \qquad (7\text{-}1)$$

$$y(x_0) = y_0 \qquad (7\text{-}2)$$

Trong đó hàm f(x,y) giải tích trong lân cận (x_0,y_0) tức là :

$$f(x,y) = \sum_{i,j=0}^{\infty} a_{i,j}(x-x_0)^i(y-y_0)^j$$

Khi đó nghiệm đúng $y^{+(x)}$ có thể khai triển thành chuỗi Taylo

$$y^*(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{y^{+(i)}(x_o)}{i!}(x-x_o)^i$$

Các đạo hàm $y^{+(i)}(x_o)$ có thể tính được dựa vào (7-1) và (7-2)

$$y(x_o) = y_o$$

$$y'(x) = f(x,y) \Rightarrow y'(x_o) = f(x_o,y_o)$$

$$y'' = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}.y'$$

$$y''(x_o) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_o,y_o) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_o,y_o).f(x_o,y_o)$$

Và cứ tiếp tục như vậy .Khi tính như vậy ta sẽ tìm được chuỗi Taylo và đó chính là nghiệm của phương trình vi phân .

<u>Ví dụ :</u>

$$\begin{cases} y' = x.y \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Ta có : $y(0) = 1$

$y'(o) = 0 - 1 = -1$

$y'' = 1 - y' \Rightarrow y''(0) = 2$

$y''' = -y'' \Rightarrow y'''(0) = -2$

Từ đây ta suy ra ; $y^{(k)}(0) = (-1)^k.2$ với $k \geq 2$ Do đó :

$$y^t(x) = 1 - x + 2\sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k x^k}{k!} = 1 - x + 2\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-x)^k}{k!} - 1 + x\right)$$

$$= 2e^{-x} + x - 1 .$$

Đây là nghiệm dạng chuỗi đúng.

<u>Ví dụ 2 :</u>

$$\begin{cases} y' = \dfrac{y}{y+x} \\ y(1) = 2 \end{cases}$$

$y(1) = 2$

$$y'(1) = \frac{2}{1+2} = \frac{2}{3}$$

$$y'' = \left(\frac{y}{x+y}\right)' = \frac{(x+y)y' - y(x+y)'}{(x+y)^2} = \frac{xy' - y}{(x+y)^2}$$

$$y''(1) = \frac{1\frac{2}{3} - 2}{(1+2)^2} = \frac{-4}{27}$$

Tiếp tục ta tính các các đạo hàm bậc cao :

$$y'''(1) = \frac{4}{27} \ \ldots \ \text{vv} .$$

Ta có kết quả :

$$y(x) \approx 2+ \frac{2}{3}(x-1) - \frac{2}{27}(x-1)^2 + \frac{2}{27}(x-1)^2 + \frac{2}{81}(x-3)^3 + \ldots$$

6.3. PHƯƠNG PHÁP SỐ

6.3.1. Phương pháp cấp 1 – Phương pháp Ơle.

Ta chia đoạn $(x_0, \bar{x})$ thành n đoạn nhỏ bằng nhau bởi các điểm chia x_i, bước các điểm chia là h, h>0

$$h= \frac{\bar{x} - x_0}{n} \;;$$

$$x_i = x_0 + i.h \;;\; i= 0,1,\ldots,n$$

Nếu y(x) là nghiệm đúng của phương trình (7.1),(7.2) ta tìm cách tính gần đúng giá trị y(x) chỉ tại các nút x_i mà thôi, rồi từ đó cho phép ta dùng các giá trị gần đúng đó. Gọi u_i là giá trị gần đúng của $y(x_i)$ là gia trị cần tìm.

Nếu đã biết u_i tại x_i ta tính u_{i+1} tại nút x_{i+1}. Ta khai triển Taylo hàm y(x) tại x_i :

$$y(x) = y(x_i) + y'(x_i).(x-x_i) + \frac{y''(c_i)}{2!}.(x-x_i)^2$$

$$c_i = x_i + \theta (x-x_i) \;;\; 0 < \theta < 1$$

Thay: $x = x_{i+1} = x_i + h$; $y'(x_i) = f(x_i,y(x_i))$ theo (7.1)

Ta có:

$$y(x_{i+1}) = y(x_i) + h.f(x_i,y(x_i)) + \frac{h^2}{2} y''(c_i) \quad (7.3)$$

Khi h bé thì số hạng cuối bé ta bỏ qua khi đó ta thay giá trị $y(x_i) \approx u_i$ đã có thì ta tính được $u_{i+1} \approx y(x_{i+1})$ là:

$$u_{i+1} \approx u_i + h.f(x_i,u_i) \qquad (7.4)$$

Dựa vào điều kiện (7.2) ta chọn $u_0 = y_0$ (7.5) với i=0

Ta dùng (7.4) tính được u_1 và từ đó ta tính được các giá trị khác. Phương pháp tính u_i trên gọi là phương pháp Ơle.

Tóm lại phương pháp Ơle: $u_{i+1} = u_i + h(f(x_i,u_i))$.

$$x_n = x_0 + n.h$$

Sai số cục bộ của phương pháp:

$$R_1(h) = \frac{y''(c_i)}{2} h^2$$

Phương pháp này có độ chính xác thấp.

<u>Ví dụ</u>: $y' = y - \frac{2x}{y}$; $0 < \leq 1$

$y(0) = 1.$

Ta có: $f(x,y) = y - \frac{2x}{y}$; $x_0 = 0$; $\bar{x} = 1$; $y_0 = 1$

Lưới sai phân: $x_i = i.h$; $h = \frac{1}{n}$

Công thức Ơle cho bài toán là:

$$u_{i+1} = u_i + h.(u_i - \frac{2x_i}{u_i})$$

$$u_0 = y_0 = 1$$

Nếu ta chia n =10 thì kết quả tính như bảng sau:

(Trong bảng có cho giá trị đúng y_i vì $y = \sqrt{2x+1}$)

i	x_i	u_i	y_i(nghiệm đúng)	Sai số δ
0	0.0	1	1	
1	0.1	1.1	1.095445	
2	0.2	1.191818	1.183216	
3	0.3	1.277438	1.264911	
4	0.4	1.358213	1.341641	Max 5%
5	0.5	1.435133	1.414214	
6	0.6	1.508966	1.483240	
7	0.7	1.580338	1.549193	
8	0.8	1.649783	1.612452	
9	0.9	1.717779	1.673320	
10	1.0	1.784771	1.732051	0.04 ⇒ 4%

6.4.CÁC PHƯƠNG PHÁP ĐA BƯỚC

Xét bài toán côsi :

$$y' = f(x,y) \qquad x_o \le x \le \bar{x}$$
$$y(x_o) = y_o \qquad (y, f \in R^m)$$

Tích phân 2 vế từ x_n đến x_{n+1} được:

$$y'' = y_n + \int_{x_n}^{x_n+1} y'(x)dx$$

Đặt $\frac{x_n - x}{l_i}$ =t , có :

$$y_{n+1} = y_n + h\int_0^1 y'(x_n + t.h)dt \qquad (*)$$

Áp dụng đa thức nội suy Niutơn lùi cho $y'_{n+1} = y'(x_n+t.h)$ ta có:

$$y'_{n+t} = y'_n + \frac{t}{1!}\Delta y'_{n-1} + \frac{t(t+1)}{2!}\Delta^2 y'_{n-2} + \frac{t(t+1)...(t+q-1)}{q!}\Delta^q y'_{n-q}$$

Áp dụng tính chất sai phân và ký hiệu sai phân lùi ta có :

$$\nabla y'_n = \nabla y'_{n-1} = y'_1 - y'_{n-1}$$

$$y'_{n+t} = y'_n + \frac{t}{1!}\nabla y'_n + \frac{t(t+1)}{2!}\nabla^2 y'_n + ... + \frac{t(t+1)...(t+q-1)}{q!}\nabla^q y'_n \qquad (**)$$

$$(\nabla^k y'_n = \nabla^k y'_{n-k})$$

Xuất phát từ x_{n+1} (thay n = n+1 và t = t-1) ta có :

$$y'_{n+t} = y'_{n+1} + \frac{t-1}{1!}\nabla y'_{n+1} + \frac{(t-1)t}{2!}\nabla^2 y'_{n+1} + ... + \frac{t(t-1)...(t+q-2)}{q!}\nabla^q y'_{n+1}$$

Thay (**) vào (*) ta có công thức :

$$y_{n+1} = y_n + h\sum_{i=0}^{q} a_i \nabla^i y'_n \qquad (***)$$

Trong đó $a_o = 1$; $a_i = \int_0^1 \frac{t(t+1)...(t+i-1)}{i!}dt$; ι =1,2,...q .

Tính các hệ số ta có :

$$y_{n+1} = y_n + h[1 + \frac{1}{2}\nabla + \frac{5}{2}\nabla^2 + \frac{3}{8}\nabla^3 + \frac{25!}{720}\nabla^4 + ...]\, y'_n$$

<u>Nếu q = 0 ta có lại công thức Euler :</u>

$$y_{n+1} = y_n + h\, f(x_n,y_n) .$$

Từ công thức (***) ta tính được các giá trị tiếp theo của y tại nút .

Sai số của công thức là :

$$R_q = l_i^{q+2}\int_0^1 \frac{t(t+1)...(t+q)}{(q+1)!}\, y^{(q+2)}(\xi)dt .$$

Hay : $R_q = h^{q+2}y^{(q+2)}(\xi)$

-Phương pháp tiệm cận sai số : Khì (x,y) khả vi , liên tục và y(x) có đạo hàm đến cấp 3 bị chặn thì tồn tại hàm w(x) liên tục không phụ thuộc vào bước h sao cho :

$$u_i - y(x_i) = h.w(x_i) + o(h^2) \qquad (*)$$

Giả sử với cùng bài toán ta tính theo ơle 2 lần: Lần 1 với bước h ta được giá trị gần đúng tại x_i là $u(x_i,\{\frac{h}{2}\})$, lần 2 với bước $\frac{h}{2}$ ta được giá trị gần đúng tại x_i là $u(x_i,\{\frac{h}{2}\})$ theo (*) ta có :

$$u(x_i,\{h\}) - y(x_i) = h\, w(x_i) + o(h^2) \qquad (**)$$

$$u(x_i,\{\frac{h}{2}\}) - y(x_i) = \frac{h}{2}\, w(x_i) + o(h^2) \qquad (***)$$

Ta khử $w(x_i)$ khỏi 2 đẳng thức trên ta có :

$$[2u(x_i, \frac{h}{2}) - u(x_i,h)] - y(x_i) = o(h^2)$$

Vì $o(h^2)$ rất bé , là sai số của phép xác định ta có :

$$y(x_i) = 2u(x_i, \frac{h}{2}) - u(x_i,h) \qquad (***)$$

Ta có nghiệm chính xác hơn

Và như vậy có phương pháp 2 bước (Euler)

Ví dụ : cũng giải bài toán $y' = y - \frac{2x}{y}$; với $0 \le x \le 1$

$$y(0) = 1$$

Ta có bảng kết quả :

x_i	$U(x_i,l_i)$	$U(x_i, \frac{h}{2})$	Y_i (h)	Nghiệm đúng $y(x_i)$
0	1	1	1	1
0.2	1.2	1.191818	1.183636	1.183216
0.4	1.373333	1.358213	1.343093	1.341641
0.6	1.531495	1.508966	1.486437	1.483240
0.8	1.681084	1.649783	1.618482	1.622452
1.0	1.826947	1.784771	1.742595	1.732051