CHƯƠNG V. PHƯƠNG TRÌNH, BẤT PHƯƠNG TRÌNH MŨ VÀ LOGARIT

§1. NHẮC LẠI LOGARIT

1. Định nghĩa. Cho a là một số dương khác 1 và b là một số dương. Số thực α sao cho $a^{\alpha} = b$ được gọi là logarit cơ số a của b và kí hiệu là $\log_a b$ tức là

$$\alpha = \log_a b \Leftrightarrow a^{\alpha} = b.$$

Chú ý.

· Khi viết $\log_a b$ thì phải hiểu là $a > 0, a \neq 1; b > 0.$

· Trường hợp cơ số $a = 10$ thì logarit cơ số 10 của số dương b ta viết là $\lg b$ và đọc là logarit thập phân của b.

· Với $a = e$ thì logarit cơ số e của số dương b ta viết là $\ln b$ và đọc là logarit tự nhiên của b. (Số e là giới hạn $\lim\limits_{x \to +\infty} (1 + \frac{1}{x})^x$ xấp xỉ bằng $2,718281828...$).

Từ định nghĩa ta có một số kết quả sau.

· $\log_a 1 = 0$, $\log_a a = 1;$

· $\log_a a^b = b$

· $a^{\log_a b} = b$

2. Các tính chất của logarit

2.1. Định lý.

$i) \log_a (bc) = \log_a b + \log_a c; 1 \neq a > 0; b, c > 0$

$ii) \log_a \left(\frac{b}{c}\right) = \log_a b - \log_a c; 1 \neq a > 0; b, c > 0$

$iii) \log_a b^{\alpha} = \alpha \log_a b; 1 \neq a > 0; b > 0; \alpha \in \mathbb{R}.$

Chú ý. Trong *iii)* nếu $\alpha = 2k, k \in \mathbb{N}^*$ thì $\log_a b^{2k} = 2k \log_a |b|; 1 \neq a > 0; b \neq 0.$

Hệ quả

$i) \log_a \left(\frac{1}{b}\right) = -\log_a b; 1 \neq a > 0; b > 0$

$ii) \log_a \sqrt[n]{b} = \frac{1}{n} \log_a b; 1 \neq a > 0; b > 0; n \in \mathbb{N}, n \geq 2.$

2.2. Định lý

$\log_b c = \frac{\log_a c}{\log_a b}$ hay $\log_a b . \log_b c = \log_a c; 1 \neq a > 0; 1 \neq b > 0; c > 0.$

Hệ quả

$i) \log_a b = \frac{1}{\log_b a}$ hay $\log_a b . \log_b a = 1; 1 \neq a > 0; 1 \neq b > 0..$

$ii)\log_{a^\alpha} c = \frac{1}{\alpha}\log_a c; 1 \neq a > 0; c > 0; \alpha \neq 0.$

$iii)\ a^{\log_b c} = c^{\log_b a}; 1 \neq b > 0; a, c > 0.$

§2. PHƯƠNG TRÌNH, BẤT PHƯƠNG TRÌNH MŨ

1. Định nghĩa. *Phương trình, bất phương trình mũ* là phương trình, bất phương trình mà ẩn số có mặt ở số mũ của lũy thừa.

Trong một số trường hợp ta xét thêm ẩn số có mặt ở cả cơ số của lũy thừa, khi đó ta phải xét hai trường hợp: cơ số $a > 1$ và $0 < a < 1$.

2. Một số phương pháp giải phương trình mũ

2.1. Phương pháp logarit hóa

Các dạng cơ bản

· $a^{f(x)} = a^{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \left[\begin{array}{l} a = 1 \\ f(x) = g(x) \end{array}\right. \end{cases}$

· $a^{f(x)} = b \Leftrightarrow f(x) = \log_a b, 1 \neq a > 0; b > 0.$

Ví dụ 1. Giải phương trình

$$2^{x+3} = 5^x \quad (1)$$

Giải. $(1) \Leftrightarrow \log_2 2^{x+3} = \log_2 5^x$

$\Leftrightarrow x + 3 = x\log_2 5$

$\Leftrightarrow 3 = x(\log_2 5 - 1) \Leftrightarrow x = \frac{3}{\log_2 5}.$

Vậy, phương trình đã cho có nghiệm là $x = \frac{3}{\log_2 5 - 1}.$

Ví dụ 2. Giải phương trình

$$2^{x^2-2x}3^x = \frac{3}{2} \quad (1)$$

Giải. $(1) \Leftrightarrow \log_2 2^{x^2-2x}.3^x = \log_2 \frac{3}{2}$

$\Leftrightarrow x^2 - 2x + x\log_2 3 = \log_2 \frac{3}{2}.$

$\Leftrightarrow x^2 + x\left(\log_2 3 - 2\right) + 1 - \log_2 3 = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 1 - \log_2 3 \end{array}\right.$

Vậy, phương trình đã cho có hai nghiệm là $x = 1 \vee x = 1 - \log_2 3.$

2.2. Phương pháp đặt ẩn số phụ

Ví dụ 1. Giải phương trình

$$4^x + 6^x = 9^x \quad (1)$$

Giải.

$(1) \Leftrightarrow \left(\frac{4}{9}\right)^x + \left(\frac{6}{9}\right)^x = 1$

$\Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^{2x} + \left(\frac{2}{3}\right)^x - 1 = 0 \ (1)$

Đặt $t = \left(\frac{2}{3}\right)^x > 0$ (1) trở thành $t^2 + t - 1 = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \\ t = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \end{array}\right.$

Do t > 0 nên ta chọn $t = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$,

suy ra $\left(\frac{2}{3}\right)^x = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \Leftrightarrow x = \log_{\frac{2}{3}} \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

Ví dụ 2. Giải phương trình

$$\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x + \left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x = 4 \quad (1)$$

Giải. Đặt $t = \left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x > 0$ ta có

(1) trở thành $t + \frac{1}{t} = 4$

$\Leftrightarrow t^2 - 4t + 1 = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 2-\sqrt{3} > 0 \\ t = 2+\sqrt{3} > 0 \end{array}\right.$

$+ \ t = 2-\sqrt{3} \Rightarrow \left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x = 2-\sqrt{3}$

$\Leftrightarrow \left(2-\sqrt{3}\right)^{\frac{x}{2}} = 2-\sqrt{3}$

$\Leftrightarrow \frac{x}{2} = 1 \Leftrightarrow x = 2$

$+\ t=2+\sqrt{3}\Rightarrow\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^{x}=2+\sqrt{3}$

$\Leftrightarrow\left(2-\sqrt{3}\right)^{\frac{x}{2}}=2+\sqrt{3}$

$\Leftrightarrow -\dfrac{x}{2}=1\Leftrightarrow x=-2$

Vậy, phương trình đã cho có hai nghiệm là $x=2\vee x=-2.$

Ví dụ 3. Giải phương trình

$$4^{x}+4^{-x}+2^{x}+2^{-x}=10\ \ (1)$$

Giải. Đặt $2^{x}=t>0$

(1) trở thành $t^{2}+\dfrac{1}{t^{2}}+t+\dfrac{1}{t}=10$

$\Leftrightarrow\left(t+\dfrac{1}{t}\right)^{2}-2+\left(t+\dfrac{1}{t}\right)-10=0$

$\Leftrightarrow\left(t+\dfrac{1}{t}\right)^{2}+\left(t+\dfrac{1}{t}\right)-12=0$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} t+\dfrac{1}{t}=-4 \\ t+\dfrac{1}{t}=3. \end{array}\right.$

Vì $t>0,$ nên ta chọn $t+\dfrac{1}{t}=3$

$t+\dfrac{1}{t}=3\Leftrightarrow t^{2}-3t+1=0\ \ \Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} t=\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}>0 \\ t=\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}>0 \end{array}\right.$

$\Rightarrow\left[\begin{array}{l} 2^{x}=\dfrac{3-\sqrt{5}}{2} \\ 2^{x}=\dfrac{3+\sqrt{5}}{2} \end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x=\log_{2}\dfrac{3-\sqrt{5}}{2} \\ x=\log_{2}\dfrac{3+\sqrt{5}}{2} \end{array}\right.$

Vậy, phương trình đã cho có hai nghiệm là

$\left[\begin{array}{l} x=\log_{2}\dfrac{3-\sqrt{5}}{2} \\ x=\log_{2}\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}. \end{array}\right.$

Ví dụ 4. Giải phương trình

$$2^{3x+1}-7.2^{2x}+7.2^{x}-2=0 \quad (1)$$

Giải.

Đặt $t=2^{x}>0$

(1) trở thành $2t^{3}-7t^{2}+7t-2=0$

$\Leftrightarrow (t-1)\left(2t^{2}-5t+2\right)=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=1 \\ t=2 \\ t=\dfrac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2^{x}=1 \\ 2^{x}=2 \\ 2^{x}=\dfrac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=1 \\ x=-1. \end{array}\right.$$

Vậy, phương trình đã cho có ba nghiệm là $\left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=1 \\ x=-1. \end{array}\right.$

Ví dụ 5. Giải phương trình

$$2.4^{x^{2}+1}+6^{x^{2}+1}=9^{x^{2}+1} \qquad (1)$$

Giải.

$(1)\Leftrightarrow 2.2^{2\left(x^{2}+1\right)}+(2.3)^{x^{2}+1}=3^{2\left(x^{2}+1\right)}$

$\Leftrightarrow 2+\left(\dfrac{3}{2}\right)^{x^{2}+1}=\left(\dfrac{3}{2}\right)^{2\left(x^{2}+1\right)}$

Đặt $t=\left(\dfrac{3}{2}\right)^{x^{2}+1}\geq \dfrac{3}{2}$, ta được phương trình:

$t^{2}-t-2=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=2 \\ t=-1 \end{array}\right.$

Ta nhận $t=2\Rightarrow \left(\dfrac{3}{2}\right)^{x^{2}+1}=2\Leftrightarrow x^{2}+1=\log_{\frac{3}{2}}2$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\sqrt{\log_{\frac{3}{2}}2-1} \\ x=-\sqrt{\log_{\frac{3}{2}}2-1} \end{array}\right.$$

Vậy, phương trình có hai nghiệm là $\left[\begin{array}{l} x=\sqrt{\log_{\frac{3}{2}}2-1} \\ x=-\sqrt{\log_{\frac{3}{2}}2-1} \end{array}\right.$

Ví dụ 6. Giải phương trình

$$2^{2x^{2}+1}-9.2^{x^{2}+x}+2^{2x+2}=0 \qquad (1)$$

Giải.

$(1) \Leftrightarrow 2^{2x^2-2x-1} - 9.2^{x^2-x-2} + 1 = 0$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2}.2^{2x^2-2x} - \frac{9}{4}.2^{x^2-x} + 1 = 0$

$\Leftrightarrow 2.2^{2x^2-2x} - 9.2^{x^2-x} + 4 = 0$

Đặt $t = 2^{x^2-x} > 0,$ ta có phương trình

$2t^2 - 9t + 4 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 4 \\ t = \frac{1}{2} \end{array}\right.$

· $t = 4$ ta có: $2^{x^2-x} = 4 \Leftrightarrow x^2 - x = 2 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 2 \end{array}\right.$

· $t = \frac{1}{2}$ ta có: $2^{x^2-x} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x^2 - x = -1 \Leftrightarrow x^2 - x + 1 = 0 \quad (VN)$

Vậy, phương trình có hai nghiệm $x = -1, x = 2$.

Ví dụ 7. Giải phương trình

$$2^{3x} - 6.2^x - \frac{1}{2^{3.(x-1)}} + \frac{12}{2^x} = 1 \quad (1)$$

Giải.

$(1) \Leftrightarrow \left(2^{3x} - \frac{2^3}{2^{3x}}\right) - 6\left(2^x - \frac{2}{2^x}\right) = 1$

Đặt $t = 2^x - \frac{2}{2^x}$ ta có $2^{3x} - \frac{2^3}{2^{3x}} = \left(2^x - \frac{2}{2^x}\right)^3 + 3.2^x.\frac{2}{2^x}\left(2^x - \frac{2}{2^x}\right) = t^3 + 6t$

Khi đó ta có phương trình: $t^3 + 6t - 6t = 1 \Leftrightarrow t = 1$

Suy ra $2^x - \frac{2}{2^x} = 1 \Leftrightarrow \left(2^x\right)^2 - 2^x - 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2^x = -1 \\ 2^x = 2 \end{array}\right.$

Ta chọn $2^x = 2 \Leftrightarrow x = 1$

Vậy, phương trình có một nghiệm duy nhất $x = 1$.

Ví dụ 8. Giải phương trình

$$\sqrt{1 + \sqrt{1 - 2^{2x}}} = \left(1 + 2\sqrt{1 - 2^{2x}}\right)2^x$$

Giải.

Điều kiện: $1 - 2^{2x} \geq 0 \Leftrightarrow 2^{2x} \leq 1 \Leftrightarrow x \leq 0$

Như vậy ta có $0 < 2^x \leq 1$, do đó đặt $2^x = \sin t$ với $t \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right]$.

Phương trình trở thành

$\sqrt{1 + \sqrt{1 - \sin^2 t}} = \sin t\left(1 + 2\sqrt{1 - \sin^2 t}\right)$

$\Leftrightarrow \sqrt{1 + cost} = \sin t\,(1 + 2cost)$

$\Leftrightarrow \sqrt{2}.\cos\frac{t}{2} = \sin t + \sin 2t$

$\Leftrightarrow \sqrt{2}.\cos\frac{t}{2} = 2\sin\frac{3t}{2}.\cos\frac{t}{2}$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2}.\cos\frac{t}{2}\left(1-\sqrt{2}\sin\frac{3t}{2}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos\frac{t}{2}=0 \\ \sin\frac{3t}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2} \end{array}\right.$$

do $t\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right]$ nên ta chỉ nhận $\sin\frac{3t}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ từ đó ta được

$$\left[\begin{array}{l} t=\frac{\pi}{6} \\ t=\frac{\pi}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2^x=\frac{1}{2} \\ 2^x=1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=0 \end{array}\right.$$

Vậy, phương trình có hai nghiệm $x=-1; x=0.$

2.3. Phương pháp sử dụng tính chất đơn điệu của hàm số

Sử dụng tính chất đơn điệu của hàm số để giải phương trình là cách giải khá quen thuộc. Ta có ba hướng áp dụng như sau.

1. Biến đổi phương trình về dạng

$$f(x)=k\ (1)$$

với k là hằng số.

Nếu hàm số $f(x)$ đồng biến (nghịch biến) trên khoảng $(a;b)$ thì phương trình (1) có nhiều nhất một nghiệm trên khoảng $(a;b)$. Do đó nếu tìm được x_0 thuộc khoảng $(a;b)$ sao cho $f(x_0)=k$ thì x_0 là nghiệm duy nhất của phương trình.

2. Biến đổi phương trình về dạng

$$f(x)=g(x)\ (2)$$

Nếu hàm số $y=f(x)$ đồng biến (nghịch biến) trên khoảng $(a;b)$, nhưng hàm số $y=g(x)$ nghịch biến (đồng biến) cũng trên khoảng đó thì phương trình (2) có nhiều nhất một nghiệm trên khoảng $(a;b)$. Do đó, nếu tìm được x_0 thuộc khoảng $(a;b)$ sao cho $f(x_0)=g(x_0)$ thì x_0 là nghiệm duy nhất của phương trình.

3. Biến đổi phương trình về dạng

$$f(u)=f(v)\ (3)$$

Xét hàm số $y=f(x)$, nếu hàm số này đơn điệu trên khoảng $(a;b)$ thì khi đó phương trình (3) tương đương với $u=v; u,v\in(a;b)$.

Ví dụ 1. Giải phương trình

$$2^x=3^{\frac{x}{2}}+1\ \ (1)$$

Giải.

$$(1)\Leftrightarrow 1=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^x+\left(\frac{1}{2}\right)^x$$

Hàm số $f(x)=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^x+\left(\frac{1}{2}\right)^x$

nghịch biến trên $\mathbb{R}$ nên phương trình nếu có nghiệm thì chỉ có nghiệm duy nhất, ta thử được $x=2$ thỏa phương trình.

Vậy, phương trình đã cho có một nghiệm duy nhất $x=2.$

Ví dụ 2. Giải phương trình

$$3^{2x-3}+(3x-10).3^{x-2}+3-x=0 \ (1)$$

Giải.

Đặt $t=3^{x-2}>0$

Viết lại phương trình (1) dưới dạng $3t^2+(3x-10)t+3-x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=\frac{1}{3} \\ t=3-x \end{array}\right.$

· Với $t=\frac{1}{3}\Rightarrow 3^{x-2}=\frac{1}{3}\Leftrightarrow x-2=-1\Leftrightarrow x=1.$

· Với $t=3-x\Rightarrow 3^{x-2}=3-x.$

Hàm số $y=3^{x-2}$ đồng biến trên toàn trục số, còn hàm số $y=3-x$ luôn luôn nghịch biến và ta thử được $x=2$ thỏa phương trình.

Vậy, phương trình đã cho có hai nghiệm là $x=1,\ x=2.$

Ví dụ 3. Giải phương trình

$$-2^{x^2-x}+2^{x-1}=(x-1)^2 \quad (1)$$

Giải.

Viết lại phương trình (1) dưới dạng $2^{x-1}+x-1=2^{x^2-x}+x^2-x.$

Xét hàm số $f(t)=2^t+t,$ ta có, hàm số này luôn luôn đồng biến trên toàn trục số.

Như vậy, phương trình được viết dưới dạng $f(x-1)=f(x^2-x)\Leftrightarrow x-1=x^2-x\Leftrightarrow x=1.$

Vậy, phương trình đã cho có một nghiệm duy nhất là $x=1.$

Ví dụ 4. Giải phương trình

$$x^3+2^{3x}+3x.2^{2x}+(1+3x^2).2^x+x-2=0 \ (1)$$

Giải. Viết lại phương trình (1) dạng $(2^x+x)^3+(2^x+x)=2$ (2)

Xét hàm số $f(t)=t^3+t,$ hàm số này luôn luôn đồng biến trên toàn trục số và $f(1)=2,$ do đó

(2) $\Leftrightarrow 2^x+x=1\Leftrightarrow 2^x=1-x.$ (3)

Cũng lập luận nhờ tính chất đơn điệu của hàm số thì phương trình (3) chỉ có một nghiệm duy nhất là $x=0.$

Vậy, phương trình đã cho có một nghiệm duy nhất là $x=0.$

Ví dụ 5. Giải phương trình

$$9^x + 2(x-2)3^x + 2x - 5 = 0 \quad (1)$$

Giải.

Đặt $t = 3^x > 0$

(1) trở thành $t^2 + 2(x-2)t + 2x - 5 = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -1 < 0 \\ t = -2x + 5 \end{array}\right.$$

Như vậy, ta có $3^x = -2x + 5$

$\Leftrightarrow 3^x + 2x - 5 = 0$

Hàm số $y = 3^x + 2x - 5$ đồng biến trên $\mathbb{R}$, do đó phương trình có nhiều nhất một nghiệm, thử được $x = 1$ thỏa phương trình.

Vậy, phương trình đã cho có một nghiệm duy nhất $x = 1$.

Ví dụ 6. Cho phương trình

$$5^{x^2+2mx+2} - 5^{2x^2+4mx+m+2} = x^2 + 2mx + m \quad (1)$$

Tìm m để phương trình có nghiệm.

Giải.

Đặt $t = x^2 + 2mx + 2$, phương trình (1) trở thành

$$5^t + t = 5^{2t+m-2} + 2t + m - 2 \ (2)$$

Xét hàm số $f(t) = 5^t + t$, hàm số này đồng biến trên toàn trục số do đó

$(2) \Leftrightarrow f(t) = f(2t + m - 2) \Leftrightarrow t = 2t + m - 2 \Leftrightarrow t + m - 2 = 0$

$\Leftrightarrow x^2 + 2mx + m = 0 \ (3)$

Phương trình đã cho có nghiệm khi và chỉ khi (3) có nghiệm, khi và chỉ khi

$\Delta' = m^2 - m \geq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m \leq 0 \\ m \geq 1. \end{array}\right.$ Vậy, giá trị m cần tìm là $\left[\begin{array}{l} m \leq 0 \\ m \geq 1. \end{array}\right.$

2.4. Một số phương pháp khác

Ví dụ 1. Giải phương trình

$$2^{x^2+x} - 4.2^{x^2-x} - 2^{2x} + 4 = 0 \quad (1)$$

Giải.

$(1) \Leftrightarrow \left(2^{x^2+x} - 2^{2x}\right) - 4\left(2^{x^2-x} - 1\right) = 0$

$\Leftrightarrow 2^{2x}\left(2^{x^2-x} - 1\right) - 4\left(2^{x^2-x} - 1\right) = 0$

$$\Leftrightarrow \left(2^{x^2-x}-1\right)\left(2^{2x}-4\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2^{x^2-x}=1 \\ 2^{2x}=4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-x=0 \\ 2x=2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \vee x=1 \\ x=1. \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow x=0 \vee x=1.$$

Ví dụ 2. Giải phương trình $5^{3x}+9.5^x+27\left(5^{-3x}+5^{-x}\right)=64$ (1)

$$(1) \Leftrightarrow \left(5^x\right)^3+3.5^{2x}.\frac{3}{5^x}+3.5^x.\frac{9}{5^{2x}}+\left(\frac{3}{5^x}\right)^3=4^3$$

$$\Leftrightarrow \left(5^x+\frac{3}{5^x}\right)^3=4^3 \Leftrightarrow 5^x+\frac{3}{5^x}=4$$

$$\Leftrightarrow \left(5^x\right)^2-4.5^x+3=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 5^x=1 \\ 5^x=3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\log_5 3. \end{array}\right.$$

Vậy, phương trình đã cho có hai nghiệm là $x=0 \vee x=\log_5 3$.

Ví dụ 3. Tìm k để phương trình

$$9^x-(k-1)3^x+2k=0 \quad (1)$$

có nghiệm duy nhất.

Giải.

Đặt $t=3^x>0$. (1) trở thành $t^2-(k-1)t+2k=0$ (2)

(1) có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow$ (2) có đúng một nghiệm dương.

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t_1=t_2>0 \\ t_1<0<t_2 \\ t_1=0; t_2>0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \Delta=0 \\ S=t_1+t_2>0 \end{cases} \\ P=t_1.t_2<0 \\ \begin{cases} P=t_1.t_2=0 \\ S=t_1+t_2>0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} (k-2)^2-8k=0 \\ k-1>0 \end{cases} \\ 2k<0 \\ \begin{cases} 2k=0 \\ k-1=0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} k=5+2\sqrt{6} \\ k<0 \end{array}\right.$$

Vậy, giá trị k cần tìm là $\left[\begin{array}{l} k=5+2\sqrt{6} \\ k<0. \end{array}\right.$

Ví dụ 4. Cho phương trình