HỆ CÓ CẤU TRÚC ĐẶC BIỆT

Bài 1. Giải các hệ phương trình sau

a. $\begin{cases}(x-y)^2 y=2\\ x^3-y^3=19\end{cases}$ $(NNI-2000)(x=ty)$.Điều kiện : t khác 1

$\Leftrightarrow \begin{cases}(t-1)^2 y^3=2\\ y^3\left[(t-1)^3+3t(1-t)\right]=19\end{cases} \Leftrightarrow \dfrac{(t-1)^3+3t(1-t)}{(t-1)^2}=\dfrac{19}{2} \Leftrightarrow 2\left(t^2+t+1-3t\right)=19t(t-1)$

$\Leftrightarrow 17t^2-15t-2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=1\rightarrow \\ t=-\dfrac{2}{17}\end{array}\right.$. Thay lần lượt các giá trị của t vào phương trình (1) :

- t=1: Loại
- t=-2/7 thì x=-2/7y suy ra : $\begin{cases}x=-\dfrac{2}{17}y\\ y^3=\dfrac{2}{\left(-\dfrac{2}{17}-1\right)^2}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=-\dfrac{2}{17}y\\ y=\sqrt[3]{\dfrac{2.17^2}{19^2}}\end{cases}$

b. $\begin{cases}2y\left(x^2-y^2\right)=3x\\ x\left(x^2+y^2\right)=10y\end{cases}$ $(MDC-98)(x=ty)$

$\begin{cases}2y^3\left(t^2-1\right)=3ty\\ ty^3\left(t^2+1\right)=10y\end{cases} \Leftrightarrow \dfrac{2(t-1)(t+1)}{t\left(t^2+1\right)}=\dfrac{3t}{10} \Leftrightarrow 20t^2-20=3t^4+3t^2 \Rightarrow 3t^4-17t^2+20=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=\dfrac{5}{3}\\ t=4\end{array}\right.$

Giống như phần a, thay lần lượt các giá trị t vào một trong hai phương trình của hệ .

c. $\begin{cases}x^2+xy+y^2=19(x-y)^2\\ x^2-xy+y^2=7(x-y)\end{cases}$ $(HH-2001)$

$\begin{cases}x^2+xy+y^2=19(x-y)^2\\ x^2-xy+y^2=7(x-y)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(x-y)^2+3xy=19(x-y)^2\\ (x-y)^2+xy=7(x-y)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}xy=6(x-y)^2\\ (x-y)^2=(x-y)\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases}x-y=0\\ xy=0\end{cases}\\ \begin{cases}x-y=1\\ xy=6\end{cases}\end{array}\right. (*)$

Giải (*) cho ta nghiệm x,y .

d. $\begin{cases}2x+y=\dfrac{3}{x^2}\\ 2y+x=\dfrac{3}{y^2}\end{cases}$ $(TL-2001)$. Đây là hệ đối xứng kiểu 2 đã biết cách giải .

Bài 2. Giải các hệ phương trình sau :

a. $\begin{cases} x^2+y+x^3y+xy^2+xy=-\dfrac{5}{4} \\ x^4+y^2+xy(1+2x)=-\dfrac{5}{4} \end{cases}$ $(KA-2008)$

Hệ viết lại : $\begin{cases} x^2+y+xy\left(x^2+y\right)+xy=-\dfrac{5}{4} \\ \left(x^2+y\right)^2+xy=-\dfrac{5}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u+v+uv=-\dfrac{5}{4} \\ u^2+v=-\dfrac{5}{4} \end{cases}$ $\left(u=x^2+y;v=xy\right)$

Học sinh giải tiếp ta được : $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} u=0 \\ v=-\dfrac{5}{4} \end{cases} \\ \begin{cases} u=-\dfrac{1}{2} \\ v=-\dfrac{3}{2} \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x^2+y=0 \\ xy=-\dfrac{5}{4} \end{cases} \\ \begin{cases} x^2+y=-\dfrac{1}{2} \\ xy=-\dfrac{3}{2} \end{cases} \end{array}\right. ..... \Rightarrow (x;y)=\left(\sqrt[3]{\dfrac{3}{4}};-\sqrt[3]{\dfrac{25}{16}}\right),\left(1;-\dfrac{3}{2}\right)$

b. $\begin{cases} xy+x+1=7y \\ x^2y^2+xy+1=13y^2 \end{cases}$ $(KB-08)$

$\begin{cases} xy+x+1=7y \\ x^2y^2+xy+1=13y^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+\dfrac{x}{y}+\dfrac{1}{y}=7 \\ x^2+\dfrac{x}{y}+\dfrac{1}{y^2}=13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(x+\dfrac{1}{y}\right)+\dfrac{x}{y}=7 \\ \left(x^2+\dfrac{1}{y^2}\right)+\dfrac{x}{y}=13 \end{cases} \Rightarrow \left(x^2+\dfrac{1}{y^2}\right)+7-\left(x+\dfrac{1}{y}\right)=13(*)$

Đặt : $t=x+\dfrac{1}{y} \Rightarrow (*): t^2-3t-20=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=\dfrac{3-\sqrt{89}}{2} \\ t=\dfrac{3+\sqrt{89}}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{cases} x=ty \\ \dfrac{1}{y}=t-ty \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=ty \\ ty^2-ty+1=0 \end{cases} (1)$

Giải (1) tìm được x,y.

Bài 3. Giải các hệ phương trình sau :

a. $\begin{cases} x^4-x^3y+x^2y^2=1(1) \\ x^3y-x^2+xy=-1(2) \end{cases}$ Lấy (1) trừ cho (2) vế với vế ta được phương trình :

$\Leftrightarrow x^4-2x^3y+x^2y^2+\left(x^2-xy-2\right)=0 \Leftrightarrow \left(x^2-xy\right)^2+\left(x^2-xy\right)-2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-xy=1 \\ x^2-xy=-2 \end{array}\right.$

Thay lần lượt vào (2) : $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x^2-xy=1 \\ x^3y=0 \end{cases} \\ \begin{cases} x^2-xy=-2 \\ x^3y=-3 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x^2-xy=1 \\ x^2(xy)=0 \end{cases} \\ \begin{cases} x^2-xy=-2 \\ x^2(xy)=-3 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x^2-xy=1 \\ x^2\left(x^2-1\right)=0 \end{cases} \\ \begin{cases} x^2-xy=-2 \\ x^2\left(x^2+2\right)=-3 \end{cases} \end{array}\right.$

Học sinh giải tiếp

b. $\begin{cases} x^4+2x^3y+x^2y^2=2x+9 \\ x^2+2xy=6x+6 \end{cases}$ $(CD-KB-08)$

$\begin{cases} x^4+2x^3y+x^2y^2=2x+9 \\ x^2+2xy=6x+6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(x^2+xy\right)^2=2x+9 \quad (3) \\ xy=\dfrac{6x-x^2+6}{2} \quad (4) \end{cases}$. Thay (4) vào (3) sau đó rút gọn ta có :

$\Leftrightarrow x^4+12x^3+48x^2+64x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x^3+12x^2+48x+64=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ (x+4)^3=0 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=-4 \end{array}\right.$

X=0 loại . Vậy hệ có nghiệm duy nhấy : $(x;y)=\left(-4;\dfrac{17}{4}\right)$

c. $\begin{cases} x^2+y=y^2+x \\ 2^{x+y}-2^{x-1}=x-y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-y)(x+y-1)=0 \\ 2^{x+y}-2^{x-1}=x-y \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x-y=0 \\ 2^{2x}-2^{x-1}=0 \end{cases} \\ \begin{cases} x+y=1 \\ 2-2^{x-1}=2x-1 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=y \\ 2^{2x}=2^{x-1} \end{cases} \\ \begin{cases} x+y=1 \\ 3-2x=2^{x-1} \end{cases} \end{array}\right.$

- Khi x=y , thì x=-1. Vậy nghiệm của hệ là : (x;y)=(-1;-1)
- Khi x+y=1 , (2) có nghiệm duy nhất : x=1 , do đó hệ có nghiệm : (x;y)=(1;0)

d. $\begin{cases} 2^{\frac{1-x^2}{x^2}}+xy+\dfrac{3}{2}=2^y \quad (1) \\ \left(x^2y+2x\right)^2-2x^2y-4x+1=0 \quad (2) \end{cases}$.

Từ (2) : $\Leftrightarrow \left(x^2y+2x\right)^2-2\left(x^2y+2x\right)+1=0 \Leftrightarrow \left[x^2y+2x-1\right]^2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=\dfrac{1-2x}{x^2} \\ xy=\dfrac{1-2x}{x} \end{array}\right. (*)$

Thay vào phương trình (1): $\Leftrightarrow 2^{\frac{1-x^2}{x^2}}-2^{\frac{1-2x}{x^2}}=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{x}$. Phương trình này đã biết cách giải ở phần phương pháp giải phương trình mũ .

Bài 4. Giải các phương trình sau :

a. $\begin{cases} 1+x^3y^3=19x^3 \\ y+xy^2=-6x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{x^3}+y^3=19 \\ \dfrac{y}{x^2}+\dfrac{y^2}{x}=-6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{x^3}+y^3=19 \\ \dfrac{y}{x}\left(\dfrac{1}{x}+y\right)=-6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u^3+v^3=19 \\ u.v(u+v)=-6 \end{cases}$. Với : $u=\dfrac{1}{x};v=y$

Học sinh tự giải tiếp .

b. $\begin{cases} x^3+2xy^2+12y=0 \\ 8y^2+x^2=12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1+2\left(\dfrac{y}{x}\right)^2+12\dfrac{y}{x^3}=0 \\ 8\left(\dfrac{y}{x}\right)^2+1=\dfrac{12}{x^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1+2u^2+12uv=0 \\ 8u^2+1=12v \end{cases}$. Với : $u=\dfrac{y}{x};v=\dfrac{1}{x^2}$

Giải tiếp tìm được u,v , sau đó tìm x,y .

c. $\begin{cases} (x+y)\left(1+\dfrac{1}{xy}\right)=5 \\ \left(x^2+y^2\right)\left(1+\dfrac{1}{x^2y^2}\right)=49 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+\dfrac{1}{x}+y+\dfrac{1}{y}=5 \\ x^2+\dfrac{1}{x^2}+y^2+\dfrac{1}{y^2}=49 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u+v=5 \\ u^2+v^2=53 \end{cases}$.

Với : $u=x+\frac{1}{x};v=y+\frac{1}{y}$. Học sinh giải tiếp .

d. $\begin{cases}2x^2+5xy+2y^2+x+y+1=0\\ x^2+y^2+4xy+12x+12y+10=0\end{cases}$. Lấy (1) trừ cho (2) vế với vế ta có :

$\Leftrightarrow x^2+y^2+xy-11x-11y-9=0\Leftrightarrow (x+y)^2-xy-11(x+y)=9\Rightarrow xy=(x+y)^2-11(x+y)-9(*)$

Phương trình (2) : $\Leftrightarrow (x+y)^2+2xy+12(x+y)+10=0$.

Thay (*) vào ta được :

$\Leftrightarrow 3(x+y)^2-10(x+y)-8=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x+y=-\frac{2}{3}\\ x+y=4\end{array}\right.$

Vậy hệ đã cho : $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x+y=-\frac{2}{3}\\ xy=\left(-\frac{2}{3}\right)^2-11\left(-\frac{2}{3}\right)-9\end{cases}\\ \begin{cases}x+y=4\\ xy=16-11.4-9\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x+y=-\frac{2}{3}\\ xy=-\frac{659}{9}\end{cases}\\ \begin{cases}x+y=4\\ xy=-37\end{cases}\end{array}\right.$. Giải tiếp ta tìm được x,y

Bài 5. Giải các hệ phương trình sau :

a. $\begin{cases}x^2-12xy+20y^2=0\\ \ln(1+x)-\ln(1+y)=x-y\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}(x-2y)(x-10y)=0\\ \ln(1+x)-\ln(1+y)=x-y\end{cases}$

Từ (2) : $\ln(1+x)-x=\ln(1+y)-y\Leftrightarrow f(t)=\ln t+t-1;\ f'(t)=\frac{1}{t}+1>0\vee t>0$. Chứng tỏ hàm số f(t) đồng biến . Cho nên để có (2) thì chỉ xảy ra khi x=y.

- Nếu : $\begin{cases}x=2y\\ x=y\end{cases}\Rightarrow (x;y)=(0;0)$,
- Nếu : $\begin{cases}x=10y\\ x=y\end{cases}\Rightarrow (x;y)=(0;0)$

b. $\begin{cases}x^3-3x^2=y^3-3y-2(1)\\ \log_y\left(\frac{x-2}{y-1}\right)+\log_x\left(\frac{y-1}{x-2}\right)=(x-3)^2(2)\end{cases}\Rightarrow (1)\Leftrightarrow x^3-3x^2+3x-1=y^3-3y+3x-3$

$$\Leftrightarrow (x-1)^3=y^3-3y+3(x-1)\Leftrightarrow (x-1)^3-3(x-1)=y^3-3y(*)$$

Để (*) xảy ra khi và chỉ khi : x-1=y, hay : x=y+1, x-2=y-1 . $\Leftrightarrow \frac{x-2}{y-1}=1$

Thay vào (2) ta có : $\log_y 1+\log_x 1=(x-3)^2\Rightarrow (x-3)^2=0\Leftrightarrow x=3$.Vậy : y=x-1=3-1=2

Do đó nghiệm của hệ phương trình là : (x;y)=(3;2).

c. $\begin{cases}2x^2y+y^3=2x^4+x^6\\ (x+2)\sqrt{y+1}=(x+1)^2\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}2x^2(y-x^2)+y^3-(x^2)^3=0\\ (x+2)\sqrt{y+1}=(x+1)^2\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}(y-x^2)(2x^2+y^2+yx^2+x^4)=0\\ (x+2)\sqrt{y+1}=(x+1)^2\end{cases}$

-Trường hợp 1: y=x^2, thay vào (2) :

$(x+2)\sqrt{x^2+1}=(x^2+1+2x)\Leftrightarrow t^2-(x+2)t+2x=0\Rightarrow t=2;t=x$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sqrt{x^2+1}=2 \Rightarrow x^2=3 \leftrightarrow x=\pm\sqrt{3} \\ \sqrt{x^2+1}=x \Rightarrow x\in\varnothing\end{array}\right..$$

-Trường hợp : $2x^2+y^2+yx^2+x^4=0 \Leftrightarrow y^2+yx^2+\left(2x^2+x^4\right)=0$

$\Rightarrow \Delta_y = x^4-4\left(2x^2+x^4\right)=-3x^4-8x^2<0 \vee x\in R \rightarrow \Delta_y<0$

$\Rightarrow f(,y)=2x^2+y^2+yx^2+x^4>0 \vee x,y$. Phương trình vô nghiệm .

Do đó hệ có hai nghiệm : (x;y)=$\left(-\sqrt{3};3\right),\left(\sqrt{3};3\right)$

d.

$$\begin{cases} 2+6y=\dfrac{x}{y}-\sqrt{x-2y} \\ \sqrt{x+\sqrt{x-2y}}=x+3y-2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-2y-y\sqrt{x-2y}-6y^2=0 \\ \sqrt{x+\sqrt{x-2y}}=x+3y-2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(\sqrt{x-2y}+2y\right)\left(\sqrt{x-2y}-3y\right)=0 \\ \sqrt{x+\sqrt{x-2y}}=x+3y-2\end{cases}$$

- Trường hợp 1: $\sqrt{x-2y}=-2y \Leftrightarrow \begin{cases} y\le 0 \\ x-2y=4y^2\end{cases}$.

Thay vào (2) $\Leftrightarrow \sqrt{x-2y}=4y^2+5y-2 \Leftrightarrow -2y=4y^2+5y-2 \Rightarrow 4y^2+7y-2=0$

- Trường hợp : $\sqrt{x-2y}=3y \Rightarrow \begin{cases} y\ge 0 \\ x-2y=9y^2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y\ge 0 \\ x=9y^2+2y\end{cases} (*)$.

Thay vào (2) : $\Leftrightarrow \sqrt{9y^2+2y+3y}=9y^2+2y+3y-2 \Leftrightarrow \sqrt{9y^2+5y}=9y^2+5y-2=0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t=\sqrt{9y^2+5y}\ge 0 \\ t^2-t-2=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t=2 \\ \sqrt{9y^2+5y}=2\end{cases} \Rightarrow 9y^2+5y-4=0 \leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=-1 \\ y=\dfrac{4}{9}\end{array}\right.$$

Thay lần lượt các giá trị của y vào (*) ta tìm được x .

Bài 6. Giải các hệ phương trình sau :

a. $\begin{cases} x^2+y^2+\dfrac{2xy}{x+y}=1(1) \\ \sqrt{x+y}=x^2-y(2)\end{cases}$. Từ (2) viết lại : $\sqrt{x+y}+x+y=x^2+x \Leftrightarrow \left(\sqrt{x+y}\right)^2+\sqrt{x+y}=x^2+x$

Ta xét hàm số f(t)=$t^2+t\left(t\ge 0\right) \Rightarrow f'(t)=2t+1>0 \vee t\ge 0$. Chứng tỏ f(t) là một hàm số đồng biến , cho nên ta có : $\sqrt{x+y}=x \Leftrightarrow y=x^2-x$. (*)

Thay vào (1) :

$$\Leftrightarrow x^2+y^2+\frac{2xy}{x^2}=1 \Leftrightarrow x^2+\left(x^2-x\right)^2+\frac{2x\left(x^2-x\right)}{x^2}=1 \Leftrightarrow x^2-1+x^2\left(x-1\right)^2+2\left(x-1\right)=0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)\left(x+1+x^2\left(x-1\right)+2\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-1=0 \\ x^3-x^2+x+3=0\end{array}\right. (**)$$

Giải (**) ta tìm được x , thay vào (*) tìm được y , từ đó suy ra nghiệm của hệ

b. $\begin{cases} y\sqrt{x^2-y^2}=48 \\ x+y+\sqrt{x^2-y^2}=24\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2y\sqrt{x^2-y^2}=96 \\ y+\sqrt{x^2-y^2}=24-x\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2y\sqrt{x^2-y^2}=96 \quad (3) \\ x^2+2y\sqrt{x^2-y^2}=(24-x)^2 (4)\end{cases}$.

Thay (3) vào (4) ta có : $x^2+96=x^2-48x+576 \Leftrightarrow x=\dfrac{576-96}{48}=\dfrac{480}{48}=10$

Thay vào (1) : $\Leftrightarrow y\sqrt{100-y^2}=48 \Leftrightarrow y^2\left(100-y^2\right)=48^2 \Leftrightarrow y^4-100y^2+2034=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} y^2=36 \\ y^2=64 \end{array}\right.$

Vậy : (x;y)=(10;-6),(10;6),(10;-8),(10;8)

c. $\begin{cases} 2xy+3x+4y=-6 \\ x^2+4y^2+4x+12y=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2y(x+2)+3(x+2)=0 \\ (x+2)^2+\left(4y^2+12y-7\right)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+2)(2y+3)=0 \\ (x+2)^2+(2y+7)(2y-1)=0 \end{cases}$

-Trường hợp : x+2=0 , thay vào (2) : $\Rightarrow \left[\begin{array}{l} y=-\dfrac{7}{2} \\ y=\dfrac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow (x;y)=\left(-2;-\dfrac{7}{2}\right),\left(-2;\dfrac{1}{2}\right)$

-Trường hợp : 2y+3=0 hay : 2y=-3 , thay vào (2) :

$\Leftrightarrow (x+2)^2+(-3+7)(-3-1)=0 \Leftrightarrow (x+2)^2=4^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=-6 \end{array}\right. \Leftrightarrow (x;y)=\left(2;-\dfrac{3}{2}\right),\left(-6;-\dfrac{3}{2}\right)$

d. $\begin{cases} x-y+\dfrac{2y}{x}=-2 \\ 2xy-2y^2+x=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-y)+\dfrac{2y}{x}=-2 \\ 2y(x-y)=-x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-y)+\dfrac{2y}{x}=-2 \\ \dfrac{2y}{x}(x-y)=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u+v=-2 \\ u.v=-1 \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} u=-1+\sqrt{2} \\ v=-1-\sqrt{2} \end{cases} \\ \begin{cases} u=-1-\sqrt{2} \\ v=-1+\sqrt{2} \end{cases} \end{array}\right.$.

Với u=x-y và v=$\dfrac{2y}{x}$. Học sinh giải tiếp .

Bài 7. Giải các hệ phương trình sau :

a. $\begin{cases} 2x^2+2y^2=1+2x+y(1) \\ 2y^2+2x+y+1=6xy(2) \end{cases}$. Lấy (1) cộng với (2) vế với vế : $x^2-3xy+2y^2=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=2y \\ x=4y \end{array}\right.$

- Với : x=2y thay vào (2) :

  $10y^2-5y-1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=\dfrac{5-3\sqrt{5}}{20} \\ y=\dfrac{5+3\sqrt{5}}{20} \end{array}\right. \Rightarrow (x;y)=\left(\dfrac{5-3\sqrt{5}}{10};\dfrac{5-3\sqrt{5}}{20}\right).\left(\dfrac{5+3\sqrt{5}}{10};\dfrac{5+3\sqrt{5}}{20}\right)$

- Với x=4y, thay vào (2) : $22y^2-9y-1=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} y=\dfrac{1}{11} \\ y=\dfrac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow (x,y)=\left(\dfrac{4}{11};\dfrac{1}{11}\right),\left(2;\dfrac{1}{2}\right)$

b. $\begin{cases} x^2y^2+y^4+1=3y^2\,(1) \\ xy^2+x=2y \qquad (2) \end{cases}$. Học sinh giải theo cách : Đặt x=ty .

Cách khác :

Lấy (1) trừ cho hai sau khi nhân hai vế với x (Khử x^2y^2 ở hai phương trình của hệ) :

$\Leftrightarrow y^4+1-x^2=3y^2-2xy \Leftrightarrow y^4-2y^2+1=x^2-2xy+y^2 \Leftrightarrow \left(y^2-1\right)^2=(x-y)^2$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y^2-1=x-y \leftrightarrow x=y^2+y-1 \\ y^2-1=y-x \leftrightarrow x=y-y^2+1 \end{array}\right.$. Thay vào (2)

- Nếu : $\left(y^2+1\right)\left(y^2+y-1\right)=2y \Leftrightarrow y^4+y^3-y-1=0 \Leftrightarrow (y+1)\left(y^3-1\right)=0$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} y=-1; x=-1 \\ y=1; x=1 \end{array}\right.$$

- Với : x= $y-y^2+1$, thay vào (2) ta được : $(y-1)(y^3+1)=0 \leftrightarrow y=\pm 1$

Vậy nghiệm của hệ là : (x;y)=(-1;-1),(1;1).

c. $\begin{cases} x^2y+y=2 \quad (1) \\ x^2+\dfrac{1}{x^2}+x^2y^2=3(2) \end{cases}$

Cách 1:

Lấy phương trình (2) trừ cho phương trình (1) sau khi nhân hai vế của nó với x^2y, ta được phương trình : $\left(\dfrac{x^2-1}{x}\right)^2=(xy-x)^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \dfrac{x^2-1}{x}=xy-x(a) \\ \dfrac{x^2-1}{x}=x-xy(b) \end{array}\right.$

-Thay a) vào (1) : $y=\dfrac{2}{x^2+1}=\dfrac{x^2-1+x}{x} \Rightarrow (x+1)(x^3-1)=0 \rightarrow x=\pm 1$

-Tương tự thay b) vào (1) . Học sinh tự làm

Cách 2:

Do x=0 không là nghiệm cho chia hai vế phương trình (1) cho $xy \neq 0$.

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{x^2+1}{x}=\dfrac{2}{xy} \\ \left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2+x^2y^2=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+\dfrac{1}{x}=\dfrac{2}{xy} \\ \left(\dfrac{2}{xy}\right)^2+(x^2y^2)=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+\dfrac{1}{x}=\dfrac{2}{xy}(3) \\ (x^2y^2)^2-5x^2y^2+4=0(4) \end{cases}$$

Từ (4) suy ra : $x^2y^2=1 \vee x^2y^2=4$ (loại). Cho nên :

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} xy=1 \\ x+\dfrac{1}{x}=\dfrac{2}{xy}=2 \end{cases} \\ \begin{cases} xy=4 \\ x+\dfrac{1}{x}=\dfrac{2}{xy}=\dfrac{1}{2} \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} xy=1 \\ x^2+2x+1=0 \end{cases} \\ \begin{cases} xy=4 \\ 2x^2-x+2=0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y=-1 \\ x=-1 \end{cases} \\ \begin{cases} xy=1 \\ x\in\varnothing \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} xy=-1 \\ x+\dfrac{1}{x}=\dfrac{2}{xy}=-2 \end{cases} \\ \begin{cases} xy=-4 \\ x+\dfrac{1}{x}=\dfrac{2}{xy}=-\dfrac{1}{2} \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} xy=-1 \\ x^2+2x+1=0 \end{cases} \\ \begin{cases} xy=-4 \\ 2x^2+x+2=0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y=1 \\ x=-1 \end{cases} \\ \begin{cases} xy=-4 \\ x\in\varnothing \end{cases} \end{array}\right.$$

Vậy hệ có nghiệm : (x,y)=(-1;-1),(-1;1)

d. $\begin{cases} \sqrt{x+y}+\sqrt{x+3}=\dfrac{y-3}{x}(1) \\ \sqrt{x+y}+\sqrt{x}=x+3(2) \end{cases}$. Điều kiện : $x>0; x+y\geq 0$

Phương trình (1) : $\dfrac{y-3}{\sqrt{x+y}-\sqrt{x+3}}=\dfrac{y-3}{x}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}y-3=0\\ \sqrt{x+y}-\sqrt{x+3}=x\end{array}\right.$

- Với y=3 , thay vào (1) : $2\sqrt{x+3}=0\to x=-3<0$ (loại)
- Với $y\neq 3\Rightarrow\begin{cases}\sqrt{x+y}-\sqrt{x+3}=x\\ \sqrt{x+y}+\sqrt{x}=x+3\end{cases}\leftrightarrow\sqrt{x}+\sqrt{x+3}=3\Leftrightarrow x=1;y=8$

Bài 8. Giải các hệ phương trình sau :

a. $\begin{cases}\sqrt{x+y}+\sqrt{x-y}=1+\sqrt{x^2-y^2}\,(1)\\ \sqrt{x}+\sqrt{y}=1(2)\end{cases}$. Điều kiện : $x>0,y>0,x>y$

Phương trình (1) $\Leftrightarrow\sqrt{x+y}+\sqrt{x-y}-1-\sqrt{x+y}\sqrt{x-y}=0\Leftrightarrow\left(\sqrt{x-y}-1\right)\left(1-\sqrt{x+y}\right)=0$

- Với : $\begin{cases}\sqrt{x+y}=1\\ \sqrt{x}+\sqrt{y}=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+y=1\\ \sqrt{x}+\sqrt{y}=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+y=1\\ 2\sqrt{xy}=0\end{cases}\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=0;y=1\\ x=1;y=0\end{array}\right.$
- Với : $\begin{cases}\sqrt{x-y}=1\\ \sqrt{x}+\sqrt{y}=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x-y=1\\ x+y+2\sqrt{xy}=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x-y=1\\ 2x+2\sqrt{xy}=2\end{cases}$. Học sinh giải tiếp .

b. $\begin{cases}4xy+4\left(x^2+y^2\right)+\dfrac{3}{(x+y)^2}=7(1)\\ 2x+\dfrac{1}{x+y}=3(2)\end{cases}$. Điều kiện : $x+y\neq 0$

Phương trình (1) : $3\left(x^2+y^2\right)+6xy+\left(x^2+y^2\right)-2xy+\dfrac{3}{(x+y)^2}=7$

$\Leftrightarrow 3(x+y)^2+\dfrac{3}{(x+y)^2}+(x-y)^2=7$

Phương trình (2) : $(x+y)+\dfrac{1}{x+y}+(x-y)=3$

Vậy : Đặt $x+y+\dfrac{1}{x+y}=u;v=x-y\Rightarrow u^2-2=(x+y)^2+\dfrac{1}{(x+y)^2}$

Hệ trở thành : $\begin{cases}3\left(u^2-2\right)+v^2=7\\ u+v=3\end{cases}\Rightarrow 3u^2+(3-u)^2-13=0\Leftrightarrow 4u^2-6u-4=0\leftrightarrow\left[\begin{array}{l}u=-\dfrac{1}{2},v=\dfrac{7}{2}\\ u=2;v=1\end{array}\right.$

$\Leftrightarrow\begin{cases}x+y+\dfrac{1}{x+y}=-\dfrac{1}{2}\\ x-y=\dfrac{7}{2}\end{cases}$. Hệ vô nghiệm . $\Leftrightarrow\begin{cases}x+y+\dfrac{1}{x+y}=2\\ x-y=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=y+1\\ (2y)^2=0\end{cases}\leftrightarrow x=1;y=0$

c. $\begin{cases}x^2y+2y+x=4xy\\ \dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{xy}+\dfrac{x}{y}=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{y}=4\\ \dfrac{1}{x^2}+\dfrac{x}{x}+\dfrac{1}{xy}+\dfrac{x}{y}=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left(x+\dfrac{1}{x}\right)+\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\right)=4\\ \left(x+\dfrac{1}{x}\right)\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\right)=4\end{cases}\Leftrightarrow$

- Trường hợp : $\begin{cases} x+\dfrac{1}{x}=2 \\ x+\dfrac{1}{y}=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-2x+1=0 \\ y=\dfrac{1}{2-x} \end{cases} \Leftrightarrow (x;y)=(1;1)$

d. $\begin{cases} x+\dfrac{2xy}{\sqrt[3]{x^2-2x+9}}=x^2+y(1) \\ y+\dfrac{2xy}{\sqrt[3]{y^2-2y+9}}=y^2+x(2) \end{cases}$.

Lấy (1) cộng với (2) vế với vế , ta được : $\Leftrightarrow \dfrac{2xy}{\sqrt[3]{(x-1)^2+8}}+\dfrac{2xy}{\sqrt[3]{(y-1)^2+8}}=x^2+y^2\,(3)$

Do : $\begin{cases} \sqrt[3]{(x-1)^2+8}\ge\sqrt[3]{8}=2 \\ \sqrt[3]{(y-1)^2+8}\ge\sqrt[3]{8}=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{2xy}{\sqrt[3]{x^2-2x+9}}\le xy \\ \dfrac{2xy}{\sqrt[3]{y^2-2y+9}}\le xy \end{cases} \Leftrightarrow VT\le 2xy\,;VP=x^2+y^2\ge 2xy$

Cho nên để xảy ra đẳng thức khi và chỉ khi : VT=VP=2xy và : x=y=1. Do đó hệ có nghiệm duy nhất : (x,y)=(1;1).

Bài 9. Giải các hệ phương trình sau :

a. $\begin{cases} x+y+xy(2x+y)=5xy \\ x+y+xy(3x-y)=4xy \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{x}+2x+y=5(1) \\ \dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{x}+3x-y=4(2) \end{cases} \Rightarrow 5-2x-y=4+y-3x \Leftrightarrow x=2y-1$

Thay vào (2) : $2y-1+y+y(2y-1)(5y-3)=4(2y-1) \Leftrightarrow 10y^3-19y^2+10y-1=0$

$$\Leftrightarrow (y-1)(10y^2-9y+1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=1 \\ y=\dfrac{9+\sqrt{41}}{20} \vee y=\dfrac{9-\sqrt{41}}{20} \end{array}\right.$$

b. $\begin{cases} x^4+y^4+6x^2y^2=41 \\ xy(x^2+y^2)=10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^4+y^4+6x^2y^2=41 \\ 4xy(x^2+y^2)=40 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^4+y^4+6x^2y^2=41 \\ (x+y)^4=81 \end{cases}$.

$\Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)^4-4xy(x^2+y^2)=41 \\ x+y=\pm 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4xy\left[(x+y)^2-2xy\right]=81-41=40 \\ x+y=\pm 3 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x^2y^2-9xy+10=0 \\ (x+y)^2=9 \end{array}\right.$

- TH1: $\begin{cases} xy=2 \\ x+y=\pm 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1,y=2\vee x=2,y=1 \\ x=-1,y=-2\vee x=-2,y=-1 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow (x;y)=(-1;-2),(-2;-1)(1;2)(2;1)$$

- TH2. $\begin{cases} xy=\dfrac{5}{2} \\ x+y=\pm 3 \end{cases} \Rightarrow t^2\pm 3t+\dfrac{5}{2}=0 \Rightarrow \Delta=9-4\left(\dfrac{5}{2}\right)=-1<0$ .Hệ vô nghiệm

c. $\begin{cases} x^2+y^2+xy+1=4y \\ y(x+y)^2=2(x^2+1)+7y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x^2}{y}+y+x+\dfrac{1}{y}=4 \\ (x+y)^2=\dfrac{2}{y}(x^2+1)+7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{2}{y}(x^2+1)+2(x+y)=8(3) \\ \dfrac{2}{y}(x^2+1)-(x+y)^2=-7(4) \end{cases}$

$\Rightarrow (x+y)^2+2(x+y)-15=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+y=-5 \\ x+y=3 \end{array}\right.$. Thay lần lượt vào (3) ta có hai hệ :

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x+y=-5 \\ x^2+1=9y \end{cases} \\ \begin{cases} x+y=3 \\ x^2+1=y \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y=-5-x \\ x^2+9x+46=0 \end{cases} \\ \begin{cases} y=3-x \\ x^2+x-3=0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{-1\pm\sqrt{13}}{2} \\ y=3-x \end{cases} \Leftrightarrow (x;y)=\left(\dfrac{-1-\sqrt{13}}{2};\dfrac{7+\sqrt{13}}{2}\right),\left(\dfrac{-1+\sqrt{13}}{2};\dfrac{7-\sqrt{13}}{2}\right)$$

d. $\begin{cases} x^3+4y=y^3+16x(1) \\ 1+y^2=5(x^2+1)(2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(\dfrac{x}{y}\right)^3+4.\dfrac{1}{y^2}=1+16\left(\dfrac{x}{y}\right).\dfrac{1}{y^2} \\ \dfrac{1}{y^2}+1=5\left[\left(\dfrac{x}{y}\right)^2+\dfrac{1}{y^2}\right] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(\dfrac{x}{y}\right)^3+4\dfrac{1}{y^2}\left(1-4\dfrac{x}{y}\right)=1(3) \\ 5\left(\dfrac{x}{y}\right)^2+4\dfrac{1}{y^2}=1(4) \end{cases}$

Đặt : $t=\dfrac{x}{y}$ (*) Từ (3) và (4) : $\Rightarrow t^3+(1-5t^2)(1-4t)=1 \Leftrightarrow 21t^3-5t^2-4t=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=0 \\ 21t^2-5t-4=0 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} t=-\dfrac{1}{3} \\ t=\dfrac{4}{7} \end{array}\right.$. Thay t vào (*) để tính x theo y , sau đó thay vào (1) ta sẽ tìm đượcnghiệm của hệ .(x,y)=(1;-3),(-1;3)

Bài 10. Giải các hệ phương trình sau :

a. $\begin{cases} x^2+y^2+x^2y^2=1+2xy(1) \\ x+x^2y+xy=y+xy^2+1(2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-y)^2+x^2y^2=1 \\ (x-y)+xy(x-y)+xy=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u^2+v^2=1(3) \\ u+v+uv=1(4) \end{cases}$.

Với : u=x-y,v=xy . Từ (3) và (4) , tính uv theo u+v thay vào (3) ta có :

$$\Leftrightarrow (u+v)^2+2(u+v)-3=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} u+v=1 \to uv=0 \\ u+v=-3 \to uv=4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} u=0;v=1 \\ u=1;v=0 \end{cases} \\ \{u,v\in\varnothing \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x-y=0 \\ xy=1 \end{cases} \\ \begin{cases} x-y=1 \\ xy=0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=y=-1 \\ x=y=1 \end{cases} \\ \begin{cases} x=0;y=-1 \\ x=1;y=0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow (x;y)=(-1;-1),(1;1),(0;-1),(1;0)$$

b. $\begin{cases} x^2+2y^2+2x+8y+6=0(1) \\ x^2+xy+y+4x+1=0(2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+2x-2+2(y^2+4y+4)=0 \\ y(x+1)=-x^2-4x-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\dfrac{-(x^2+4x+1)}{x+1}(3) \\ x^2+2x-2+2(y+2)^2(4) \end{cases}$

Từ (3) : $y+2=\dfrac{-(x^2+2x-1)}{x+1}$, thay vào (4) ta được :