TOÁN CAO CẤP C2 ĐẠI HỌC
(ĐẠI SỐ TUYẾN TÍNH)
PHÂN PHỐI CHƯƠNG TRÌNH
Số tiết: 45

Tài liệu tham khảo

1. Nguyễn Phú Vinh – *Giáo trình Toán cao cấp A2* – ĐH Công nghiệp TP. HCM.
2. Đỗ Công Khanh – *Toán cao cấp A2* – NXB ĐHQG TP. HCM.
3. Nguyễn Viết Đông – *Toán cao cấp A2* – NXB Giáo dục.
4. Lê Sĩ Đồng – *Toán cao cấp Đại số Tuyến tính* – NXB Giáo dục.
5. Bùi Xuân Hải – *Đại số tuyến tính* – ĐHKHTN TP. HCM.
6. Alpha C. Chang, Kevin Wainwright – *Fundamental methods of Mathematical Economics – Third. Edi. Mc.Graw-hill, Int. Edi. 1984.*
7. Khoa Toán Thống kê – *Giáo trình Đại số tuyến tính* – ĐH Kinh tế TP.HCM.

Biên soạn: *ThS. Đoàn Vương Nguyên*

Download Slide bài giảng Toán C2 ĐH tại
dvntailieu.wordpress.com

§1. MA TRẬN
(*Matrix*)

1.1. Các định nghĩa

a) Định nghĩa ma trận

• Ma trận A cấp $m \times n$ trên $\mathbb{R}$ là 1 hệ thống gồm $m \times n$ số $a_{ij} \in \mathbb{R}$ $(i = \overline{1, m};\ j = \overline{1, n})$ và được sắp thành bảng gồm m dòng và n cột:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

• Các số a_{ij} được gọi là các phần tử của A ở dòng thứ i và cột thứ j.

• Cặp số $(m,\ n)$ được gọi là kích thước của A.

• Khi $m = 1$, ta gọi:
$A = (a_{11}\quad a_{12}\quad \dots\quad a_{1n})$ là ma trận dòng.

• Khi $n = 1$, ta gọi $A = \begin{pmatrix} a_{11} \\ \dots \\ a_{m1} \end{pmatrix}$ là ma trận cột.

• Khi $m = n = 1$, ta gọi:
$A = (a_{11})$ là ma trận gồm 1 phần tử.

• Ma trận $O = (0_{ij})_{m \times n}$ có tất cả các phần tử đều bằng 0 được gọi là ma trận *không*.

• Tập hợp các ma trận A trên $\mathbb{R}$ được ký hiệu là $M_{m,n}(\mathbb{R})$, để cho gọn ta viết là $A = (a_{ij})_{m \times n}$.

• **Ma trận vuông**

▪ Khi $m = n$, ta gọi A là ma trận vuông cấp n.
Ký hiệu là $A = (a_{ij})_n$.

▪ Đường chéo chứa các phần tử $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ được gọi là ***đường chéo chính*** của $A = (a_{ij})_n$,
đường chéo còn lại được gọi là ***đường chéo phụ***.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 7 & 6 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

• **Các ma trận vuông đặc biệt**

- Ma trận vuông có tất cả các phần tử nằm ngoài đường chéo chính đều bằng 0 được gọi là ***ma trận chéo*** (*diagonal matrix*).
  Ký hiệu: $diag(a_{11}, a_{22}, ..., a_{nn})$.

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Ma trận chéo cấp n gồm tất cả các phần tử trên đường chéo chính đều bằng 1 được gọi là ***ma trận đơn vị*** cấp n (*Identity matrix*). Ký hiệu là: I_n.

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Ma trận ma trận vuông cấp n có tất cả các phần tử ***nằm phía dưới*** (***trên***) đường chéo chính đều bằng 0 được gọi là ma trận ***tam giác trên*** (***dưới***).

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ -1 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

- Ma trận vuông cấp n có tất cả các cặp phần tử đối xứng nhau qua đường chéo chính bằng nhau ($a_{ij} = a_{ji}$) được gọi là ***ma trận đối xứng***.

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 4 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

b) Ma trận bằng nhau

Hai ma trận $A = (a_{ij})$ và $B = (b_{ij})$ được gọi là ***bằng nhau***, ký hiệu $A = B$, khi và chỉ khi chúng cùng kích thước và $a_{ij} = b_{ij}, \forall i, j$.

VD 1. Cho $A = \begin{pmatrix} 1 & x & y \\ z & 2 & t \end{pmatrix}$ và $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & u & 3 \end{pmatrix}$.

Ta có:
$A = B \Leftrightarrow x = 0;\ y = -1;\ z = 2;\ u = 2;\ t = 3.$

1.2. Các phép toán trên ma trận

a) Phép cộng và trừ hai ma trận

Cho hai ma trận $A = (a_{ij})_{m\times n}$ và $B = (b_{ij})_{m\times n}$, ta có:

$$\boxed{A \pm B = (a_{ij} \pm b_{ij})_{m\times n}.}$$

VD 2. $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 5 & -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 7 & 0 & -3 \end{pmatrix};$

$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & -4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 5 & -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ -3 & 6 & -5 \end{pmatrix}.$

Nhận xét

Phép cộng ma trận có tính giao hoán và kết hợp.

b) Phép nhân vô hướng

Cho ma trận $A = (a_{ij})_{m\times n}$ và $\lambda \in \mathbb{R}$, ta có:

$$\boxed{\lambda A = (\lambda a_{ij})_{m\times n}.}$$

VD 3. $-3\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 0 \\ 6 & 0 & 12 \end{pmatrix};$

$\begin{pmatrix} 2 & 6 & 4 \\ -4 & 0 & 8 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$

Chú ý

• Phép nhân vô hướng có tính phân phối đối với phép cộng ma trận.
• Ma trận $-1.A = -A$ được gọi là ma trận đối của A.

c) Phép nhân hai ma trận

Cho hai ma trận $A = (a_{ij})_{m\times n}$ và $B = (b_{jk})_{n\times p}$, ta có:

$$\boxed{AB = (c_{ik})_{m\times p}.}$$

Trong đó, $c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk} \quad \left(i = \overline{1, m};\ k = \overline{1, p}\right).$

VD 4. Thực hiện phép nhân $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}.$

VD 5. Thực hiện phép nhân $\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$

VD 6. Tính $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.

Tính chất

Cho các ma trận $A, B, C \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ và số $\lambda \in \mathbb{R}$.
Giả thiết các phép nhân đều thực hiện được, ta có:

1) $(AB)C = A(BC)$;
2) $A(B + C) = AB + AC$;
3) $(A + B)C = AC + BC$;
4) $\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$;
5) $AI_n = A = I_m A$.

VD 7. Cho $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & -3 \end{pmatrix}$ và $B = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 0 & -3 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Thực hiện phép tính: a) AB; b) BA.

VD 8. Thực hiện phép nhân:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -3 & 0 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ -1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Chú ý

• Phép nhân ma trận không có tính giao hoán.

▪ **Lũy thừa ma trận**

Cho ma trận vuông $A \in M_n(\mathbb{R})$.

• Lũy thừa ma trận A được định nghĩa theo quy nạp:

$A^0 = I_n$; $A^0 = A$; $A^{k+1} = A^k.A$, $\forall k \in \mathbb{N}$.

• Nếu $\exists k \in \mathbb{N} \setminus \{0; 1\}$ sao cho $A^k = (0_{ij})_n$ thì A được gọi là ***ma trận lũy linh***.

Số $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$ bé nhất sao cho $A^k = (0_{ij})_n$ được gọi là ***cấp*** của ma trận lũy linh A.

VD 9. Ma trận $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ là lũy linh cấp 3.

Tính chất

1) $(0_n)^k = 0_n$; $(I_n)^k = I_n$, $\forall k \in \mathbb{N}$

2) $A^{k+m} = A^k.A^m$, $\forall A \in M_n(\mathbb{R})$, $\forall k, m \in \mathbb{N}$

3) $A^{km} = (A^k)^m$, $\forall A \in M_n(\mathbb{R})$, $\forall k, m \in \mathbb{N}$.

Chú ý

1) Nếu $A = diag(a_{11}, a_{22}, ..., a_{nn}) \in M_n(\mathbb{R})$ thì:

$A^k = diag(a_{11}^k, a_{22}^k, ..., a_{nn}^k)$.

2) Nếu A, $B \in M_n(\mathbb{R})$ thỏa $AB = BA$ (giao hoán) thì các hằng đẳng thức quen thuộc cũng đúng với A, B.
Khi $AB \neq BA$ thì các hằng đẳng thức đó không còn đúng nữa.

VD 10. Cho $f(x) = 2x^3 - 4x^2$ và $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
Tính $f(A) + I_2$.

VD 11. Cho $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, giá trị của $(I_2 - A)^{2011}$ là:

A. $\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; B. $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$; C. $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$; D. $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

VD 12. Tìm ma trận $D = (ABC)^5$, trong đó:

$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

VD 13. Cho ma trận $A(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$.

Hãy tìm ma trận $\left[A(\alpha)\right]^n$, $\forall n \in \mathbb{N}$?

VD 14. Cho $A = (a_{ij})$ là ma trận vuông cấp 40 có các phần tử $a_{ij} = (-1)^{i+j}$. Phần tử a_{25} của A^2 là:

A. $a_{25} = 0$; B. $a_{25} = -40$; C. $a_{25} = 40$; D. $a_{25} = -1$.

VD 15. Cho $A = (a_{ij})$ là ma trận vuông cấp 100 có các phần tử $a_{ij} = (-1)^i.3^j$. Phần tử a_{34} của A^2 là:

A. $a_{34} = \frac{3^5}{4}(1 - 3^{100})$; B. $a_{34} = \frac{3^5}{4}(3^{100} - 1)$;

C. $a_{34} = \frac{3^5}{2}(3^{100} - 1)$; D. $a_{34} = \frac{3^5}{2}(1 - 3^{100})$.

d) Phép chuyển vị (*Transposed matrix*)

Cho ma trận $A = (a_{ij})_{m\times n}$.

Khi đó, $A^T = (a_{ji})_{n\times m}$ được gọi là ma trận chuyển vị của A (nghĩa là chuyển tất cả các dòng thành cột).

VD 16. Cho $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$.

Tính chất

1) $(A+B)^T = A^T + B^T$; 2) $(\lambda A)^T = \lambda.A^T$;

3) $(A^T)^T = A$;

4) $(AB)^T = B^T A^T$;

5) $A^T = A \Leftrightarrow A$ là ma trận đối xứng.

VD 17. $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$.

a) Tính $(AB)^T$.

b) Tính $B^T A^T$ và so sánh kết quả với $(AB)^T$.

1.3. Phép biến đổi sơ cấp trên dòng của ma trận (*Gauss – Jordan*)

Cho ma trận $A = (a_{ij})_{m\times n}$ $(m \geq 2)$. Các phép biến đổi sơ cấp (PBĐSC) dòng e trên A là:

1) (e_1) : Hoán vị hai dòng cho nhau $A \xrightarrow{d_i \leftrightarrow d_k} A'$.

2) (e_2) : Nhân 1 dòng với số $\lambda \neq 0$, $A \xrightarrow{d_i \to \lambda d_i} A''$.

3) (e_3) : Thay 1 dòng bởi tổng của dòng đó với λ lần dòng khác, $A \xrightarrow{d_i \to d_i + \lambda d_k} A'''$.

Chú ý

1) Trong thực hành ta thường làm $A \xrightarrow{d_i \to \mu d_i + \lambda d_k} B$.

2) Tương tự, ta cũng có các phép biến đổi sơ cấp trên cột của ma trận.

VD 18. Dùng PBĐSC trên dòng để đưa ma trận

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix} \text{ về } B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -7/5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Giải. Ta có:

$$A \xrightarrow{d_1 \leftrightarrow d_2} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[d_3 \to d_3 - 3d_1]{d_2 \to d_2 - 2d_1} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 5 & -7 \\ 0 & 5 & -7 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[d_2 \to \frac{1}{5}d_2]{d_3 \to d_3 - d_2} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -7/5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = B.$$

1.4. Ma trận bậc thang

- Một dòng của ma trận có tất cả các phần tử đều bằng 0 được gọi là dòng bằng 0 (hay ***dòng không***).
- Phần tử khác 0 đầu tiên tính từ trái sang của 1 dòng trong ma trận được gọi là phần tử ***cơ sở*** của dòng đó.
- Ma trận bậc thang là ma trận ***khác không*** cấp $m \times n$ $(m,\ n \geq 2)$ thỏa hai điều kiện:
  1) Các dòng bằng 0 (nếu có) ở phía dưới các dòng khác 0;
  2) Phần tử cơ sở của 1 dòng bất kỳ nằm ***bên phải*** phần tử cơ sở của dòng ở ***phía trên dòng đó***.

VD 19. Các ma trận bậc thang:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Các ma trận không phải là bậc thang:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 & 7 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

▪ **Ma trận bậc thang rút gọn**

Ma trận bậc thang rút gọn là ma trận ***bậc thang*** có phần tử cơ sở của một dòng bất kỳ đều bằng 1 và là phần tử khác 0 ***duy nhất của cột*** chứa phần tử đó.

VD 20. I_n, $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

là các ma trận bậc thang rút gọn.

Ma trận $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ không là bậc thang rút gọn.

1.5. Ma trận khả nghịch

a) Định nghĩa

• Ma trận $A \in M_n(\mathbb{R})$ được gọi là ***khả nghịch*** nếu tồn tại ma trận $B \in M_n(\mathbb{R})$ sao cho:

$$\boxed{AB = BA = I_n.}$$

• Ma trận B được gọi là ma trận ***nghịch đảo*** của A. Ký hiệu $B = A^{-1}$. Khi đó:

$$\boxed{A^{-1}A = AA^{-1} = I_n;\ (A^{-1})^{-1} = A.}$$

Chú ý

Nếu B là ma trận nghịch đảo của A thì B là duy nhất và A cũng là ma trận nghịch đảo của B.

VD 21. $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ và $B = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ là hai ma trận nghịch đảo của nhau vì $AB = BA = I_2$.

VD 22. Cho biết ma trận $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ thỏa:

$A^3 - A^2 - A + I_3 = O_3$. Tìm A^{-1} ?

Chú ý

1) Nếu ma trận A có 1 dòng (hay cột) bằng 0 thì không khả nghịch.

2) $I^{-1} = I;\ (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

3) Nếu $ac - bd \neq 0$ thì:

$$\boxed{\begin{pmatrix} a & b \\ d & c \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ac - bd} \cdot \begin{pmatrix} c & -b \\ -d & d \end{pmatrix}.}$$

VD 23. Cho $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ và $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$.

Thực hiện phép tính: a) $(AB)^{-1}$; b) $B^{-1}A^{-1}$.

VD 24. Cho hai ma trận $A = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$.

Tìm ma trận X thỏa $AX = B$.

b) Tìm ma trận nghịch đảo bằng phép biến đổi sơ cấp trên dòng (tham khảo)

Cho $A \in M_n(\mathbb{R})$ khả nghịch, ta tìm A^{-1} như sau:

Bước 1. Lập ma trận $\left(A \middle| I_n\right)$ (ma trận chia khối) bằng cách ghép ma trận I_n vào bên phải của A.

Bước 2. Dùng phép biến đổi sơ cấp trên dòng để đưa $\left(A \middle| I_n\right)$ về dạng $\left(I_n \middle| B\right)$.

Khi đó: $A^{-1} = B$.

VD 25. Tìm nghịch đảo của $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

➢ Chương 1. Ma trận – Định thức

Giải. Ta có: $\left(A\middle|I_4\right) = \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$

$$\xrightarrow[\substack{d_2 \to d_3 - d_2 \\ d_1 \to d_1 + d_2 - d_4}]{d_3 \to d_3 - d_4} \left(\underbrace{\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}}_{I_4} \middle| \underbrace{\begin{array}{cccc} 1 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}}_{A^{-1}}\right).$$

➢ Chương 1. Ma trận – Định thức

§2. ĐỊNH THỨC

2.1. Định nghĩa

a) Ma trận con cấp *k*

Cho $A = \left(a_{ij}\right)_n \in M_n(\mathbb{R})$.

- Ma trận vuông cấp k được lập từ các phần tử nằm trên giao của k dòng và k cột của A được gọi là *ma trận con cấp* k của A.
- Ma trận M_{ij} có cấp $n-1$ thu được từ A bằng cách bỏ đi dòng thứ i và cột thứ j được gọi là ma trận con của A ứng với phần tử a_{ij}.

➢ Chương 1. Ma trận – Định thức

VD 1. Ma trận $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ có các ma trận con ứng với các phần tử a_{ij} là:

$$M_{11} = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{pmatrix},\ M_{12} = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{pmatrix},\ M_{13} = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{pmatrix},$$

$$M_{21} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 9 \end{pmatrix},\ M_{22} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 9 \end{pmatrix},\ M_{23} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{pmatrix},$$

$$M_{31} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{pmatrix},\ M_{32} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix},\ M_{33} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

➢ Chương 1. Ma trận – Định thức

b) Định thức (*Determinant*)

Định thức của ma trận vuông $A \in M_n(\mathbb{R})$, ký hiệu $\det A$ hay $|A|$, là 1 số thực được định nghĩa:

- Nếu $A = (a_{11})$ thì $\det A = a_{11}$.
- Nếu $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ thì $\det A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.
- Nếu $A = (a_{ij})_n$ (cấp $n \geq 3$) thì:

$$\det A = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \ldots + a_{1n}A_{1n}$$

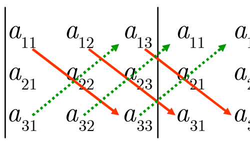
trong đó, $A_{ij} = (-1)^{i+j} \det M_{ij}$ và số thực A_{ij} được gọi là ***phần bù đại số*** của phần tử a_{ij}.

➢ Chương 1. Ma trận – Định thức

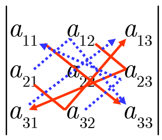
Chú ý

1) $\det I_n = 1,\ \det O_n = 0$.

2) Tính $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$.



hoặc



(Tổng của tích các phần tử trên đường chéo nét liền trừ đi tổng của tích các phần tử trên đường chéo nét đứt).

➢ Chương 1. Ma trận – Định thức

VD 2. Tính định thức của các ma trận sau:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

VD 3. Tính định thức của ma trận:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 & -1 \\ 4 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

2.2. Các tính chất cơ bản của định thức

Cho ma trận vuông $A = \left(a_{ij}\right)_n \in M_n(\mathbb{R})$, ta có các tính chất cơ bản sau:

a) Tính chất 1

$$\boxed{\det\left(A^T\right) = \det A.}$$

VD 4. $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -12.$

b) Tính chất 2

Nếu hoán vị hai dòng (hoặc hai cột) cho nhau thì định thức đổi dấu.

VD 5. $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}.$

Hệ quả. Nếu định thức có ít nhất 2 dòng (hoặc 2 cột) giống nhau thì bằng 0.

VD 6. $\begin{vmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 7 \end{vmatrix} = 0;\qquad \begin{vmatrix} x & x^2 & x^3 \\ 1 & y^2 & y^5 \\ 1 & y^2 & y^5 \end{vmatrix} = 0.$

c) Tính chất 3

Nếu nhân 1 dòng (hoặc 1 cột) với số thực λ thì định thức tăng lên λ lần.

VD 7. $\begin{vmatrix} 3.1 & 0 & 3.(-1) \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & 7 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & 7 \end{vmatrix};$

$$\begin{vmatrix} x+1 & x & x^3 \\ x+1 & y & y^3 \\ x+1 & z & z^3 \end{vmatrix} = (x+1)\begin{vmatrix} 1 & x & x^3 \\ 1 & y & y^3 \\ 1 & z & z^3 \end{vmatrix}.$$

Hệ quả

1) Nếu định thức có ít nhất 1 dòng (hoặc 1 cột) bằng 0 thì bằng 0.

2) Nếu định thức có 2 dòng (hoặc 2 cột) tỉ lệ với nhau thì bằng 0.

VD 8. $\begin{vmatrix} x & 0 & 1 \\ x^2 & 0 & y \\ x^3 & 0 & y^2 \end{vmatrix} = 0;\qquad \begin{vmatrix} 6 & -6 & -9 \\ 2 & 2 & -3 \\ -8 & -3 & 12 \end{vmatrix} = 0.$

d) Tính chất 4

Nếu định thức có 1 dòng (hoặc 1 cột) mà mỗi phần tử là tổng của 2 số hạng thì ta có thể tách thành tổng 2 định thức.

VD 9. $\begin{vmatrix} x+1 & x-1 & x \\ x & y & y^3 \\ 1 & z & z^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ x & y & y^3 \\ 1 & z & z^3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & x & x \\ x & y & y^3 \\ 1 & z & z^3 \end{vmatrix};$

$$\begin{vmatrix} \cos^2 x & 2 & 3 \\ \sin^2 x & 5 & 6 \\ \sin^2 x & 8 & 9 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sin^2 x & 2 & 3 \\ \cos^2 x & 5 & 6 \\ \cos^2 x & 8 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 5 & 6 \\ 1 & 8 & 9 \end{vmatrix}.$$

e) Tính chất 5

Định thức sẽ không đổi nếu ta cộng vào 1 dòng (hoặc 1 cột) với λ lần dòng (hoặc cột) khác.

VD 10. Sử dụng tính chất 5 để đưa định thức sau về dạng bậc thang: $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}.$

VD 11. Sử dụng tính chất 5 để tính $\Delta = \begin{vmatrix} x & 2 & 2 \\ 2 & x & 2 \\ 2 & 2 & x \end{vmatrix}.$

➢ Chương 1. Ma trận – Định thức

2.3. Định lý (*khai triển Laplace*)

Cho ma trận vuông $A = \left(a_{ij}\right)_n \in M_n(\mathbb{R})$, ta có các khai triển Laplace của định thức A:

a) Khai triển theo dòng thứ *i*

$$\boxed{\det A = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{in}A_{in} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij}.}$$

Trong đó, $A_{ij} = (-1)^{i+j}\det(M_{ij})$.

b) Khai triển theo cột thứ *j*

$$\boxed{\det A = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \ldots + a_{nj}A_{nj} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ij}.}$$

➢ Chương 1. Ma trận – Định thức

VD 12. Tính định thức $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}$ bằng hai cách khai triển theo dòng 1 và khai triển theo cột 2.

VD 13. Áp dụng tính chất và định lý Laplace, hãy tính định thức $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ 3 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$.

➢ Chương 1. Ma trận – Định thức

Các kết quả đặc biệt cần nhớ

1) Dạng tam giác

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \ldots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\ldots a_{nn}.$$

2) Dạng tích: $\boxed{\det(AB) = \det A.\det B.}$

3) Dạng chia khối

$$\begin{vmatrix} A & \vdots & B \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ O_n & \vdots & C \end{vmatrix} = \det A.\det C, \text{ với } A,\ B,\ C \in M_n(\mathbb{R}).$$

➢ Chương 1. Ma trận – Định thức

VD 14. Tính định thức:

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -2 & 7 & 19 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}.$$

VD 15. Tính định thức:

$$\det B = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 3 & 4 \\ 3 & -2 & 7 & 19 \\ 1 & 2 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 8 & -1 \end{vmatrix}.$$

VD 16. Tính $\det C = \left|\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}\right|$.

➢ Chương 1. Ma trận – Định thức

VD 17. Tính $\det D = \left|\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}^T\right|$.

VD 18. Phương trình $\begin{vmatrix} x & 1 & 0 & 0 \\ 1 & x & 0 & 0 \\ 2 & x & x & -2 \\ 3 & 8 & 2 & x \end{vmatrix} = 0$ có nghiệm

là: A. $x = \pm 1$; B. $x = 1$; C. $x = -1$; D. $\left[\begin{array}{l} x = \pm 1 \\ x = \pm 2 \end{array}\right.$.

➢ Chương 1. Ma trận – Định thức

2.4. Ứng dụng định thức tìm ma trận nghịch đảo

a) Định lý

Ma trận vuông A khả nghịch khi và chỉ khi: $\boxed{\det A \neq 0.}$

VD 19. Giá trị của tham số m để ma trận

$$A = \left[\begin{pmatrix} m & 1 \\ 0 & m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} m & 0 \\ 1 & m-1 \end{pmatrix}\right]^T \begin{pmatrix} m-1 & 0 \\ 1 & m^2 \end{pmatrix}$$

khả nghịch là:

A. $\left[\begin{array}{l} m = 0 \\ m = 1 \end{array}\right.$; B. $\begin{cases} m \neq 0 \\ m \neq 1 \end{cases}$; C. $m \neq 0$; D. $m \neq 1$.

b) Thuật toán tìm A^{-1}

- ***Bước* 1.** Tính $\det A$. Nếu $\det A = 0$ thì kết luận A không khả nghịch. Ngược lại, ta làm tiếp bước 2.
- ***Bước* 2.** Lập ma trận $\left(A_{ij}\right)_n$, $A_{ij} = (-1)^{i+j}\det M_{ij}$.

Suy ra ma trận ***phụ hợp*** (*adjunct matrix*) của A là:

$$\boxed{adjA = \left[\left(A_{ij}\right)_n\right]^T.}$$

- ***Bước* 3.** Ma trận nghịch đảo của A là:

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{\det A}.adjA.}$$

VD 20. Tìm ma trận nghịch đảo (nếu có) của:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & 5 & 4 \end{pmatrix}.$$

VD 21. Cho ma trận $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. Tìm A^{-1}.

Giải. Ta có: $\det A = 2 \neq 0 \Rightarrow A$ khả nghịch.

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 1,\ A_{12} = -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 1,\ A_{13} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -1,$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -4,\ A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 2,\ A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 0,$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1,\ A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1,\ A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

$$\Rightarrow adjA = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -4 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2.5. Hạng của ma trận

a) Định thức con cấp *k*

Cho ma trận $A = \left(a_{ij}\right)_{m\times n}$. Định thức của ma trận con cấp k của A được gọi là *định thức con cấp* k của A.

Định lý

Nếu ma trận A có tất cả các định thức con cấp k đều bằng 0 thì các định thức con cấp $k+1$ cũng bằng 0.

b) Hạng của ma trận (*rank of matrix*)

Cấp cao nhất của định thức con khác 0 của ma trận A được gọi là ***hạng*** của ma trận A.
Ký hiệu là $r(A)$.

Chú ý

- Nếu $A = \left(a_{ij}\right)_{m\times n}$ khác 0 thì $1 \le r(A) \le \min\{m, n\}$.
- Nếu A là *ma trận không* thì ta quy ước $r(A) = 0$.

c) Thuật toán tìm hạng của ma trận

- **Bước 1.** Đưa ma trận cần tìm hạng về bậc thang.
- **Bước 2.** Số dòng khác 0 của ma trận bậc thang chính là hạng của ma trận đã cho.
- **Đặc biệt**

Nếu A là ma vuông cấp n thì:

$$\boxed{r(A) = n \Leftrightarrow \det A \neq 0.}$$

VD 22. Điều kiện của tham số m để ma trận

$$A = \begin{pmatrix} m & -1 & -2 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$ có hạng bằng 3 là:

A. $m \neq 1$; B. $m \neq -1$; C. $m \neq \pm 1$; D. $m \neq 0$.

VD 23. Cho ma trận:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 & 2 \\ 2 & -5 & 1 & 4 \\ 3 & -8 & 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

Tìm $r(A)$.

VD 24. Tìm $r(A)$. Biết:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -4 \end{pmatrix}.$$

➢ Chương 1. Ma trận – Định thức

Chú ý

Ta có thể hoán vị cột của ma trận rồi đưa về bậc thang.

VD 25. Giá trị của tham số m để ma trận $A = \begin{pmatrix} m+1 & 1 & 3 \\ 2 & m+2 & 0 \\ 2m & 1 & 3 \end{pmatrix}$ có $r(A) = 2$ là:

A. $\left[\begin{array}{l} m=-2 \\ m=1 \end{array}\right.$; B. $m = 1$; C. $m = -2$; D. $\left[\begin{array}{l} m=-1 \\ m=0 \end{array}\right.$.

VD 26. Tùy theo giá trị m, tìm hạng của ma trận: $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & -1 & 1 \\ m & -1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & m & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

➢ Chương 2. Hệ phương trình tuyến tính

§1. Hệ phương trình tổng quát
§2. Hệ phương trình thuần nhất

§1. HỆ PHƯƠNG TRÌNH TỔNG QUÁT

1.1. Định nghĩa

Hệ gồm n ẩn x_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ và m phương trình:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \quad (I)$$

trong đó, hệ số $a_{ij}, b_j \in \mathbb{R}$ $(i = 1, \ldots, n;\ j = 1, \ldots, m)$, được gọi là ***hệ phương trình tuyến tính tổng quát***.

➢ Chương 2. Hệ phương trình tuyến tính

Đặt: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} = \left(a_{ij}\right)_{m \times n}$,

$B = \begin{pmatrix} b_1 & \ldots & b_m \end{pmatrix}^T$ và $X = \begin{pmatrix} x_1 & \ldots & x_n \end{pmatrix}^T$

lần lượt là ma trận hệ số, ma trận cột hệ số tự do và ma trận cột ẩn.

Khi đó, hệ (I) trở thành $\boxed{AX = B}$.

- Bộ số $\alpha = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \ldots & \alpha_n \end{pmatrix}^T$ hoặc $\alpha = \left(\alpha_1; \ldots; \alpha_n\right)$ được gọi là nghiệm của (I) nếu $A\alpha = B$.

➢ Chương 2. Hệ phương trình tuyến tính

VD 1. Cho hệ phương trình:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 4 \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 = -3 \\ 2x_2 - 7x_3 = 5. \end{cases}$$

Hệ phương trình được viết lại dưới dạng ma trận:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & -7 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

và $\alpha = (1; -1; -1; 1)$ là 1 nghiệm của hệ.

➢ Chương 2. Hệ phương trình tuyến tính

1.2. Định lý Crocneker – Capelli

Cho hệ phương trình tuyến tính $AX = B$. Gọi ma trận mở rộng là $\overline{A} = \left(A \middle| B\right) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$.

Định lý

Hệ $AX = B$ có nghiệm ***khi và chỉ khi*** $\boxed{r(A) = r(\overline{A})}$.

Trong trường hợp hệ $AX = B$ có nghiệm thì:

- Nếu $r(A) = n$: kết luận ***hệ có nghiệm duy nhất***;
- Nếu $r(A) < n$: kết luận ***hệ có vô số nghiệm*** phụ thuộc vào $n - r$ tham số.

➢ Chương 2. Hệ phương trình tuyến tính

VD 2. Tùy theo điều kiện tham số m, hãy biện luận số nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} x + my - 3z = 0 \\ \quad (1 - m^2)z = m - 1. \end{cases}$$

VD 3. Điều kiện của tham số m để hệ phương trình:

$$\begin{cases} mx \qquad + 8z - 7t = m - 1 \\ 3x + my + 2z + 4t = m \\ \qquad\quad mz + 5t = m^2 - 1 \\ \qquad\quad 5z - mt = 2m + 2 \end{cases}$$

có nghiệm duy nhất là:

A. $m \neq 0$; B. $m \neq 1$; C. $m \neq \pm 1$; D. $m \neq \pm 5$.