MỤC LỤC

ĐẠI SỐ

*Sách dùng cho sinh viên trường Đại học xây dựng
và sinh viên các trường Đại học, Cao đẳng kĩ thuật*

Chương 3

Không gian tuyến tính và ánh xạ tuyến tính

3.1 Không gian tuyến tính

3.1.1 Định nghĩa không gian tuyến tính

Định nghĩa 3.1.1 *Cho $V \neq \emptyset$ và K là trường số thực hoặc phức, V được gọi là không gian tuyến tính trên trường K nếu trên V xác định hai phép toán:*

a) Phép cộng là ánh xạ $V \times V \to V$ ứng mỗi cặp $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ với một phần tử duy nhất trong V kí hiệu $\mathbf{x} + \mathbf{y} \in V$ thỏa mãn

- $\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{y} + \mathbf{x}$ *với* $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$
- $(\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \mathbf{z} = \mathbf{x} + (\mathbf{y} + \mathbf{z})$ *với* $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in V$
- *Tồn tại* $\mathbf{0} \in V : \mathbf{x} + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{x} = \mathbf{x}$ *với* $\forall \mathbf{x} \in V$
- $\forall \mathbf{x} \in V$ *đều tồn tại* $(-\mathbf{x}) \in V : (\mathbf{x} + (-\mathbf{x})) = \mathbf{0}$

b) Phép nhân một phần tử của K với một phần tử của V là một ánh xạ $K \times V \to V$ tương ứng mỗi cặp $(\alpha, \mathbf{x})$ với một phần tử duy nhất trong V kí hiệu $\alpha \mathbf{x} \in V$ (hoặc $\alpha \cdot \mathbf{x}$) thỏa mãn

- $(\alpha\beta)\,\mathbf{x} = \alpha(\beta \cdot \mathbf{x}) \quad \forall \alpha, \beta \in K, \forall \mathbf{x} \in V$
- $(\alpha + \beta)\,\mathbf{x} = \alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{x} \quad \forall \alpha, \beta \in K, \forall \mathbf{x} \in V$
- $\alpha(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \alpha\mathbf{x} + \alpha\mathbf{y} \quad \forall \alpha \in K, \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$
- $1 \cdot \mathbf{x} = \mathbf{x} \ \forall \ \mathbf{x} \in V$, *trong đó 1 là phần tử đơn vị của K.*

Mỗi phần tử $\mathbf{x} \in V$ thường được gọi là một *vectơ*. Phần tử $\mathbf{0} \in V$ trong định nghĩa trên được gọi là *vectơ không*, phần tử $(-\mathbf{x}) \in V$ được gọi là phần tử đối của $\mathbf{x}$ hay *vectơ đối* của vectơ $\mathbf{x}$. Không gian tuyến tính trên K còn được gọi là *không gian véctơ* trên trường K.

Nếu K là trường số thực, V trên $\mathbb{R}$ *được gọi là không gian tuyến tính thực*, nếu K là trường số phức, V trên $\mathbb{C}$ *được gọi là không gian tuyến tính phức.*

Ví dụ 3.1.1

1. Tập hợp các véctơ hình học trong không gian, kí hiệu V_3 với phép cộng các véctơ và nhân véctơ với một số thực như đã biết là không gian tuyến tính thực.
   Tập hợp các véctơ hình học trong mặt phẳng, kí hiệu V_2 cũng là không gian tuyến tính thực.

2. Tập hợp các số thực $\mathbb{R}$ trên $\mathbb{R}$ là không gian tuyến tính thực, tập các số phức $\mathbb{C}$ trên $\mathbb{R}$ cũng là không gian tuyến tính thực.
   Tập các số phức $\mathbb{C}$ trên $\mathbb{C}$ là không gian tuyến tính phức.

3. $\mathbb{R}^n = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_n) \mid x_i \in \mathbb{R}\ \forall i = \overline{1,n}\}$ là không gian tuyến tính thực với các phép toán
$$(x_1, x_2, ..., x_n) + (y_1, y_2, ..., y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, ..., x_n + y_n)$$
$$\alpha(x_1, x_2, ..., x_n) = (\alpha x_1, \alpha x_2, ..., \alpha x_n),\ \alpha \in \mathbb{R}.$$

4. Tập hợp các ma trận cùng kiểu $m \times n$
$$M_{m\times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$
   trong đó các phần tử a_{ij} của ma trận là các số thực là không gian tuyến tính trên $\mathbb{R}$ (phép cộng các ma trận và nhân ma trận với một số như đã biết trong chương II).
   Đặc biệt tập hợp các ma trận cột
$$\mathscr{M}_n(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mid x_i \in \mathbb{R}\ \forall i = \overline{0,n} \right\}$$

là không gian tuyến tính thực. Nó được gọi là không gian các véctơ cột n chiều. Tương tự ta có thể nói đến không gian tuyến tính gồm các ma trận hàng $1 \times n$.

5. Tập các đa thức bậc không quá $n, n \in \mathbb{N}^*$ là một số tự nhiên cho trước

$$\mathcal{P}_n[x] = \{P = a_o + a_1x + ... + a_nx^n \mid a_i \in \mathbb{R}, i = \overline{0, n}\}$$

với phép cộng đa thức và nhân đa thức với một số thực như đã biết, là không gian tuyến tính thực. Ta gọi là $\mathcal{P}_n[x]$ là không gian các đa thức có bậc $\leqslant n$.

6. Tập hợp tất cả các nghiệm của hệ phương trình tuyến tính thuần nhất $AX = 0$ là không gian tuyến tính thực.
Thật vậy giả sử A là ma trận kiểu $m \times n$, các nghiệm của hệ phương trình tuyến tính thuần nhất $AX = 0$ là các ma trận cột $n \times 1$. Kí hiệu V là tập hợp tất cả các nghiệm của hệ phương trình đó. Nghiệm của hệ phương trình thuần nhất có các tính chất như đã trình bày trong chương trước

$$\forall X_1, X_2 \in V \;\Rightarrow\; X_1 + X_2 \in V$$

$$\forall X_1 \in V, \forall \alpha \in \mathbb{R} \;\Rightarrow\; \alpha X_1 \in V$$

Các phép toán cộng, nhân trên V thực chất là phép cộng hai ma trận, phép nhân ma trận với một số. Do vậy chúng thỏa mãn các yêu cầu trong định nghĩa về không gian tuyến tính. Nói cách khác V là không gian véctơ.
Xét một trường hợp riêng: giao của 2 mặt phẳng (tập hợp các điểm $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ thỏa mãn hệ 2 phương trình)

$$\begin{cases} x + y - 4z = 0 \\ 2x - y + 2z = 0 \end{cases}$$

thực chất là tập nghiệm của hệ 2 phương trình thuần nhất, với cách lập luận trên là không gian véctơ.

7. Bạn đọc có thể tự kiểm tra các khẳng định sau: • Tập hợp $A = \{(x, y) \in$

$\mathbb{R}^2 \mid x > 0, y > 0\}$ không là không gian véctơ thực, với các phép toán như trong ví dụ 2

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$
$$\alpha(x, y) = (\alpha x, \alpha y),\ \ \alpha \in \mathbb{R}$$

• Tập các số thực $\mathbb{R}$ (với phép cộng và phép nhân các số thực đã biết) không là không gian tuyến tính phức.

Các tính chất cơ bản của không gian véctơ

Cho không gian tuyến tính V trên trường K. Chúng có các tính chất cơ bản sau

1. Trong không gian tuyến tính V, véctơ $\mathbf{0}$ là duy nhất. Thật vậy nếu $\mathbf{0}' \in V$ cũng có tính chất $\mathbf{0}' + \mathbf{x} = \mathbf{x}\ \forall \mathbf{x} \in V$ thì
$$\mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{0}' = \mathbf{0}'.$$
2. Với mỗi $\mathbf{b} \in V$ tồn tại duy nhất véctơ đối $(-\mathbf{b}) \in V$.
Thật vậy giả sử tồn tại $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2$ sao cho $\mathbf{b}_1 + \mathbf{b} = \mathbf{0} = \mathbf{b}_2 + \mathbf{b}$. Ta có
$$\mathbf{b}_1 = \mathbf{b}_1 + \mathbf{0} = \mathbf{b}_1 + (\mathbf{b}_2 + \mathbf{b}) = (\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}) + \mathbf{b}_2 = \mathbf{0} + \mathbf{b}_2 = \mathbf{b}_2$$
Vậy $(-\mathbf{b})$ là duy nhất.
3. Với mọi $\alpha \in K,\ \alpha \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}$. Thật vậy
$$\alpha \cdot \mathbf{0} = \alpha(\mathbf{0} + \mathbf{0}) = \alpha \cdot \mathbf{0} + \alpha \cdot \mathbf{0}.$$
Cộng cả 2 vế với véctơ đối $(-\alpha \cdot \mathbf{0})$ ta có $\alpha \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}$.
4. Tương tự $0 \cdot \mathbf{a} = \mathbf{0}$ và $(-1) \cdot \mathbf{a} = (-\mathbf{a})$.
Thật vậy $0 \cdot \mathbf{a} = (0 + 0) \cdot \mathbf{a} = 0 \cdot \mathbf{a} + 0 \cdot \mathbf{a}$. Cộng hai vế với $(-0 \cdot \mathbf{a})$ ta có
$$\mathbf{0} = 0 \cdot \mathbf{a} + 0 \cdot \mathbf{a} + (-0 \cdot \mathbf{a}) = 0 \cdot \mathbf{a}.$$
Để chứng minh $(-1) \cdot \mathbf{a} = (-\mathbf{a})$, xét
$$\mathbf{a} + (-1) \cdot \mathbf{a} = 1 \cdot \mathbf{a} + (-1) \cdot \mathbf{a} = (1 - 1) \cdot \mathbf{a} = 0 \cdot \mathbf{a} = \mathbf{0}.$$
Suy ra $(-1) \cdot \mathbf{a}$ là véctơ đối của $(-\mathbf{a})$.

Nhận xét rằng do $(-1) \cdot \mathbf{a} = (-\mathbf{a})$, ta có thể nói trong không gian tuyến tính hiệu 2 véctơ $\mathbf{b}$ và $\mathbf{a}$ bằng tổng của $\mathbf{b}$ với véctơ đối của $\mathbf{a}$
$$\mathbf{b} - \mathbf{a} = \mathbf{b} + (-\mathbf{a}).$$

3.1.2 Không gian con

Định nghĩa 3.1.2 *Cho V là không gian véctơ trên trường K. Tập con $U \subset V$ của không gian véctơ V được gọi là không gian con của V, kí hiệu $U \triangleleft V$, nếu U cũng là không gian véctơ trên trường K với các phép toán cộng véctơ và nhân véctơ với một số trên không gian véctơ V.*

Định lí sau là hiển nhiên

Định lí 3.1.1 *Điều kiện cần và đủ để $U \subset V$ là không gian con của không gian véctơ V là*

i) Với mọi $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in U \;\Rightarrow\; \mathbf{a} + \mathbf{b} \in U$

ii) Với mọi $\mathbf{a} \in U$ *và mọi* $\alpha \in K \;\Rightarrow\; \alpha\mathbf{a} \in U.$

Lưu ý rằng các yêu cầu i) và ii) trong định lí trên có thể thay bằng mệnh đề sau:

$$\forall \alpha, \beta \in K, \forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \in U \;\Rightarrow\; \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b} \in U. \quad (*)$$

Thật vậy với $\forall \alpha, \beta \in K, \forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \in U$, từ ii) suy ra

$$\alpha\mathbf{a} \in U,\; \beta\mathbf{b} \in U \overset{\text{do } i)}{\Longrightarrow} \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b} \in U.$$

Ngược lại i) được suy ra từ mệnh đề $(*)$ bằng cách chọn $\alpha = 1, \beta = 1$, ii) được suy ra từ mệnh đề $(*)$ bằng cách chọn $\beta = 0$.

Ví dụ 3.1.2 *(Về các không gian véctơ con)*

1. Tập hợp gồm một véctơ $\mathbf{0}$ hoặc chính không gian véctơ V là hai không gian con tầm thường của không gian véctơ V.

2. Tập hợp các véctơ hình học song song với một mặt phẳng cố định (hoặc song song với một đường thẳng cố định) là không gian con.

3. Áp dụng định lí 3.1.1 ta thấy ngay $V_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x + 3y - 4z = 0\}$ là không gian con của $\mathbb{R}^3$, $V_2 = \{(x, y, z, 0) \mid x, y, z \in \mathbb{R}\}$ là không gian con của $\mathbb{R}^4$.

   Như vậy trong không gian véc tơ thực $\mathbb{R}^3$ với các phép toán thông thường:

$$(x_1, x_2, x_3) + (y_1, y_2, y_3) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3)$$

$$\alpha(x_1, x_2, x_3) = (\alpha x_1, \alpha x_2, \alpha x_3),\ \ \alpha \in \mathbb{R}$$

ngoài các không gian con tầm thường, các đường thẳng đi qua gốc tọa độ và các mặt phẳng đi qua gốc tọa độ là các không gian con của $\mathbb{R}^3$. Đồng thời ta dễ dàng chỉ ra điều ngược lại mọi không gian con bất kì của $\mathbb{R}^3$ chỉ có thể là không gian con tầm thường hoặc các đường thẳng, mặt phẳng đi qua gốc tọa độ.

4. Tập hợp các ma trận chéo $n \times n$ là không gian con của không gian véctơ gồm các ma trận vuông cấp n.

3.2 Cơ sở và chiều của không gian tuyến tính

Định nghĩa 3.2.1 *Cho các véctơ* $\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}, ..., \mathbf{u_n}$ *trong không gian véctơ* V*. Ta nói véctơ*

$$\alpha_1\mathbf{u_1} + \alpha_2\mathbf{u_2} + \cdots + \alpha_n\mathbf{u_n},$$

với $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \in K$*, là một tổ hợp tuyến tính của các véctơ* $\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}, ..., \mathbf{u_n}$.

Ví dụ véctơ $2\overrightarrow{\mathbf{a}} + 3\overrightarrow{\mathbf{b}}$ là một tổ hợp tuyến tính của hai véctơ $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ và $\overrightarrow{\mathbf{b}}$. Véc tơ $\overrightarrow{\mathbf{a}} + 3\overrightarrow{\mathbf{b}} - 2\overrightarrow{\mathbf{c}}$ là một tổ hợp tuyến tính của 3 véctơ $\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}}, \overrightarrow{\mathbf{c}}$.
Cho $B = \{\mathbf{b_1}, \mathbf{b_2}, ..., \mathbf{b_k}\}$ là hệ gồm k véctơ trong không gian tuyến tính V. Ta đưa vào kí hiệu $\mathscr{L}(\mathbf{b_1}, \mathbf{b_2}, ..., \mathbf{b_k})$ hay $\mathscr{L}(B)$ là tập hợp toàn bộ các tổ hợp tuyến tính của k véctơ đó

$$\mathscr{L}(B) = \{\alpha_1\mathbf{b_1} + \alpha_2\mathbf{b_2} + \cdots + \alpha_k\mathbf{b_k} \mid \alpha_i \in K,\ \forall i = \overline{1, k}\}$$

Ta sẽ chứng minh định lí sau

Định lí 3.2.1 $\mathscr{L}(B)$ *là không gian con của không gian véctơ* V*.*

Chứng minh. Thật vậy, với $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathscr{L}(B)$

$$\mathbf{x} = \alpha_1\mathbf{b}_1 + \alpha_2\mathbf{b}_2 + \ldots + \alpha_k\mathbf{b}_k$$
$$\mathbf{y} = \beta_1\mathbf{b}_1 + \beta_2\mathbf{b}_2 + \ldots + \beta_k\mathbf{b}_k$$

Khi đó với mọi $\alpha, \beta \in K$, véctơ

$$\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y} = (\alpha\alpha_1 + \beta\beta_1)\mathbf{b}_1 + (\alpha\alpha_2 + \beta\beta_2)\mathbf{b}_2 + \ldots + (\alpha\alpha_k + \beta\beta_k)\mathbf{b}_k$$

cũng là một tổ hợp tuyến tính của các véctơ $\mathbf{b_1}, \mathbf{b_2}, ..., \mathbf{b_k}$. Nói cách khác $\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y} \in \mathscr{L}(B)$, áp dụng định lí 3.1.1 ta có $\mathscr{L}(B)$ là không gian con sinh bởi các véctơ $\mathbf{b_1}, \mathbf{b_2}, ..., \mathbf{b_k}$. ■

Một cách tổng quát gọi $A \subset V$ là tập hợp bất kì các véctơ của không gian véctơ V. Kí hiệu

$$\mathscr{L}(A) = \{\alpha_1\mathbf{u_1} + \alpha_2\mathbf{u_2} + \cdots + \alpha_n\mathbf{u_n} \mid n \in \mathbb{N}, \mathbf{u_i} \in A, \alpha_i \in K \ \forall i = \overline{1, n}\}$$

là tập hợp toàn bộ các tổ hợp tuyến tính của các véctơ trong A. Hoàn toàn tương tự như trên, $\mathscr{L}(A)$ cũng là không gian con của không gian véctơ V.

Ví dụ 3.2.1

1. Trong $\mathbb{R}^3$ xét hệ các véctơ

   $$B = \{\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0), \mathbf{e}_2 = (0, 1, 0), \mathbf{e}_3 = (0, 0, 1)\}.$$

   Mọi véctơ trong $\mathbb{R}^3$ có thể biểu diễn như một tổ hợp tuyến tính của 3 véctơ đó

   $$(x, y, z) = x(1, 0, 0) + y(0, 1, 0) + z(0, 0, 1).$$

   Do vậy $\mathscr{L}(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) = \mathbb{R}^3$.

2. Không gian con sinh bởi một véctơ $\mathbf{a} \in V$ là tập hợp các véctơ có dạng

   $$\mathscr{L}(\mathbf{a}) = \{\alpha\,\mathbf{a} \mid \alpha \in K\}.$$

   Cũng như trong hình giải tích, để thuận tiện ta gọi véctơ $\alpha\,\mathbf{a}$ là véctơ *đồng phương* với $\mathbf{a}$.
   Xét không gian các ma trận vuông cấp hai $\mathscr{M}_{2\times2}$, không gian con sinh bởi ma trận $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ là tập hợp các ma trận chéo có dạng

   $$\mathscr{L}(B) = \left\{ \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{R} \right\}$$

Định nghĩa 3.2.2 *Không gian véctơ $\mathscr{L}(A)$ được gọi là không gian sinh bởi A. Tập A được gọi là tập sinh của không gian véctơ $\mathscr{L}(A)$.*
Đặc biệt $\{\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}, ..., \mathbf{u_k} \in V\}$ là tập sinh của không gian véctơ V nếu mọi véctơ trong V đều là một tổ hợp tuyến tính nào đó của các véctơ $\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}, ..., \mathbf{u_k}$

$$\forall\mathbf{u} \in V \ \Rightarrow \ \exists\alpha_i \in K, \ i = \overline{1, k}: \ \mathbf{u} = \alpha_1\mathbf{u_1} + \alpha_2\mathbf{u_2} + \cdots + \alpha_k\mathbf{u_k}.$$

Nếu A là *hệ các véctơ* $A = \{\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}, ..., \mathbf{u_k}\}$ khi đó ta nói A là *hệ sinh* (thay cho cụm từ *tập sinh*) của không gian véctơ $\mathscr{L}(A)$. Chú ý rằng ta cần phân biệt *hệ véctơ* với *tập hợp các véctơ*: các véctơ trong hệ có thể bằng nhau chẳng hạn hệ B gồm n véctơ $\mathbf{a}$

$$B = \{\mathbf{a}, \mathbf{a}, ..., \mathbf{a}\}$$

trong khi tập hợp các véctơ thuộc hệ B chỉ có duy nhất một phần tử.

Ta có nhận xét rằng $\mathscr{L}(A)$ là *không gian con nhỏ nhất* trong V chứa tất cả các véctơ của A. Mỗi không gian véctơ có vô số tập sinh (xem ví dụ 3.2.2). Không gian véctơ V cũng đồng thời là tập sinh của chính nó. Tuy nhiên trong giáo trình này ta thường quan tâm đến các tập sinh hữu hạn phần tử.

Định nghĩa trên về hệ sinh có thể diễn đạt một cách khác

Các véctơ $\{\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}, ..., \mathbf{u_k}\}$ thuộc không gian véc tơ V là hệ sinh của một không gian con U nào đó trong V khi và chỉ khi phương trình

$$x_1\mathbf{u_1} + x_2\mathbf{u_2} + \cdots + x_k\mathbf{u_k} = \mathbf{u}$$

luôn có nghiệm $x_i \in K,\ i = \overline{1,k}$ với mọi $\mathbf{u} \in U$.

Khẳng định trên chứng tỏ $\mathscr{L}(\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}, ..., \mathbf{u_k}) = U$. Người ta thường sử dụng nó để chứng minh một hệ véc tơ nào đó là hệ sinh.

Ví dụ 3.2.2 *(Về hệ sinh của không gian véctơ)*

1. Ba véctơ (tự do) không đồng phẳng $\{\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}}, \overrightarrow{\mathbf{c}}\}$ là hệ sinh của không gian các véctơ hình học. Thật vậy, trong hình học giải tích, chúng ta đã biết mọi véc tơ $\overrightarrow{\mathbf{u}}$ có thể phân tích theo 3 véctơ không đồng phẳng

   $$\overrightarrow{\mathbf{u}} = x\overrightarrow{\mathbf{a}} + y\overrightarrow{\mathbf{b}} + z\overrightarrow{\mathbf{c}}.$$

   Như vậy không gian các véctơ hình học có vô số hệ sinh, bất kì 3 véctơ không đồng phẳng nào đều lập thành hệ sinh.

2. Tập hợp các đa thức $P = \{1, x, x^2, ..., x^n, ...\}$ là tập sinh của không gian gồm tất cả các đa thức hệ số thực. Thật vậy, không gian con sinh bởi P

   $$\mathscr{L}(P) = \{\alpha_0 \cdot 1 + \alpha_1 x + \cdots + \alpha_n x^n \mid n \in \mathbb{N}, \alpha_i \in \mathbb{R}, \forall i = \overline{0,n}\}$$

   gồm tất cả các đa thức hệ số thực.