CHƯƠNG II: XÁC ĐỊNH ỨNG SUẤT TRONG NỀN ĐẤT

§1. KHÁI NIỆM

Xác định ứng suất trong đất khi có tải trọng ngoài tác dụng, cũng như dưới tác dụng của trọng lượng bản thân của đất là một vấn đề có tác dụng thực tế lớn. Vì không có những hiểu biết và tính toán cụ thể về sự phân bố ứng suất trong đất thuộc phạm vi nghiên cứu, thì không thể giải quyết được những vấn đề mà ngoài thực tế quan tâm như: Nghiên cứu tính ổn định, cường độ chịu tải và tình hình biến dạng của đất nền dưới móng các công trình xây dựng, v.v...

Tuỳ nguyên nhân gây ra ứng suất trong đất mà có thể phân biệt các loại ứng suất sau:

+ Ứng suất trong đất do trọng lượng bản thân của đất gây ra gọi là ứng suất bản thân.

+Tải trọng của công trình tác dụng lên nền đất thường thông qua đế móng mà truyền lên nền đất. Do đó, ứng suất ở mặt tiếp xúc giữa đáy móng và nền đất gọi là ứng suất tiếp xúc.

+ Ứng suất trong nền đất do ứng suất đáy móng gây ra gọi là ứng suất phụ thêm.

Vấn đề nghiên cứu sự phân bố ứng suất trong đất, đã được các nhà khoa học trên thế giới quan tâm giải quyết từ lâu, trên cả lĩnh vực lý thuyết và thực nghiệm. Cho đến nay, trong cơ học đất khi giải quyết các vấn đề phân bố ứng suất trong đất người ta vẫn áp dụng các công thức của lý thuyết đàn hồi. Như chúng ta đã biết, đất không phải là một vật liệu đàn hồi, mà là vật liệu đàn hồi có tính rỗng cao. Cho nên, khi sử dụng lý thuyết đàn hồi để tính ứng suất trong nền đất cần được nhìn nhận một cách thận trọng, luôn chú ý đến những hạn chế lý thuyết (không kể đến đầy đủ những điều kiện thực tế) và luôn xét đến khả năng sai khác của những trị số tính toán theo lý thuyết đàn hồi so với thực tế.

Như đã biết, đất là một vật thể nhiều pha tạo thành, ứng suất trong đất bao giờ cũng bao gồm ứng suất tiếp nhận bởi các hạt rắn (gọi là ứng suất hữu hiệu σ_h) và ứng suất truyền dẫn bởi nước (gọi là ứng suất trung tính - hay là áp lực nước lỗ rỗng U). Trong phần tính toán ứng suất trong chương này, sẽ chỉ đề cập đến ứng suất tổng cộng nói chung mà không phân biệt σ_h và U.

Do đất là một vật liệu rời, giữa các hạt đất có lỗ rỗng. Cho nên khi nói ứng suất của đất tại một điểm, là nói ứng suất trung bình giả định tại điểm đó trên một đơn vị tiết diện của cả hạt đất và lỗ rỗng, chứ thực ra không phải là ứng suất tác dụng lên hạt đất. Ngoài ra cũng cần phải lưu ý rằng, trị số ứng suất sẽ xét trong chương này tương ứng với khi biến dạng của đất đã hoàn toàn ổn định dưới tác dụng của tải trọng.

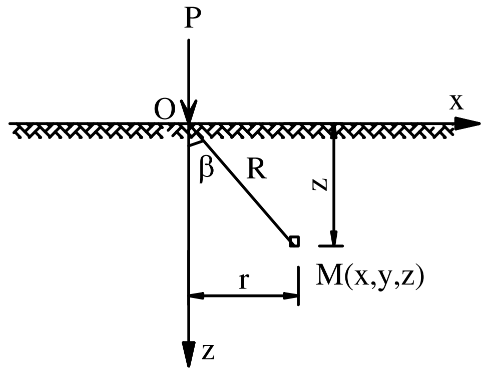
§2 PHÂN BỐ ỨNG SUẤT DO TẢI TRỌNG NGOÀI GÂY RA

2.1 Bài toán cơ bản - Tác dụng của lực tập trung

Trong thực tế, ít khi có thể gặp trường hợp lực tập trung tác dụng trên nền đất. Vì tải trọng tác dụng bao giờ cũng thông qua đáy móng mà truyền đến đất nền trên một diện tích nhất định. Dù vậy, bài toán này vẫn có một ý nghĩa rất cơ bản về mặt lý thuyết và cũng là cơ sở để giải quyết các bài toán ứng suất khi tải trọng phân bố trên những diện tích và hình dạng nhất định. Khi nghiên cứu trạng thái ứng suất của đất dưới tác dụng của lực tập trung có thể phân biệt thành ba trường hợp: Lực tập trung tác dụng thẳng đứng trên mặt đất, lực tập trung tác dụng nằm ngang trên mặt đất và lực tập trung đặt trong đất, cả ba trường hợp trên khi xác định ứng suất và chuyển vị trong đất, đều xem nền đất là một bán không gian biến dạng tuyến tính.

2.1.1 Lực tập trung tác dụng thẳng đứng trên mặt đất

Xét một điểm M bất kỳ trong nền đất được xác định trong toạ độ cực là R và β hoặc toạ độ Decac M(x,y,z), khi trên mặt phẳng nửa không gian biến dạng tuyến tính có tác dụng một lực tập trung. Bài toán cơ bản này đã được nhà khoa học Pháp J. Boussinesq giải quyết và rút ra các biểu thức tính toán ứng suất và chuyển vị tại điểm M(x,y,z) từ năm1885 như sau:



Hình II.1
Sơ đồ tác dụng của lực tập trung

Ứng suất pháp tuyến:

$$\sigma_Z = \frac{3P}{2\pi}.\frac{z^3}{R^5} \quad \text{(II-1a)}$$

$$\sigma_y = \frac{3P}{2\pi}\left\{\frac{y^2.z}{R^5} + \frac{1-2\mu}{3}\left[\frac{1}{R(R+z)} - \frac{(2R+z).y^2}{(R+z)^2.R^3} - \frac{z}{R^3}\right]\right\} \quad \text{(II-1b)}$$

$$\sigma_x = \frac{3P}{2\pi}\left\{\frac{x^2.z}{R^5} + \frac{1-2\mu}{3}\left[\frac{1}{R(R+z)} - \frac{(2R+z)x^2}{(R+z)^2.R^3} - \frac{z}{R^3}\right]\right\} \quad \text{(II-1c)}$$

Ứng suất tiếp tuyến

$$\left.\begin{aligned}
\tau_{zy} = \tau_{yz} &= \frac{3P}{2\pi}.\frac{y.z^2}{R^5} \\
\tau_{xz} = \tau_{zx} &= \frac{3P}{2\pi}.\frac{x.z^2}{R^5} \\
\tau_{xy} = \tau_{yx} &= \frac{3P}{2\pi}\left[\frac{xyz}{R^5} - \frac{1-2\mu}{3}.\frac{(2R+z)xy}{(R+z)^2.R^3}\right]
\end{aligned}\right\} \quad \text{(II-2)}$$

Tổng ứng suất chính:

$$\Theta = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = \frac{P}{\pi}(1+\mu)\frac{z}{R^3} \qquad \text{(II - 3)}$$

Các chuyển vị theo chiều của các trục:

$$W(Oz) = \frac{P(1+\mu)}{2.\pi.E_0}\left[\frac{z^2}{R^3} + 2(1-\mu).\frac{1}{R}\right] \qquad \text{(II - 4a)}$$

$$U(Ox) = \frac{P(1+\mu)}{2.\pi.E_0}\left[\frac{x.z}{R^3} - (1-2\mu).\frac{x}{R(R+z)}\right] \qquad \text{(II - 4b)}$$

$$V(Oy) = \frac{P(1+\mu)}{2.\pi.E_0}\left[\frac{y.z}{R^3} - (1-2\mu).\frac{y}{R(R+z)}\right] \qquad \text{(II - 4c)}$$

Trong đó: μ, E_0 - là hệ số nở hông, môđun tổng biến dạng của đất.

$R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, x,y,z - là toạ độ của điểm cần tính .

Vị trí của điểm M trên hình (II-1) có thể xác định qua toạ độ z và r của nó, nên $R = \sqrt{z^2 + r^2}$, thay vào biểu thức (II-1a) ta được:

$$\sigma_Z = \frac{3P}{2\pi.Z^2}.\frac{1}{\left[1+\left(\frac{r}{z}\right)^2\right]^{\frac{5}{2}}} \qquad \text{(II - 5)}$$

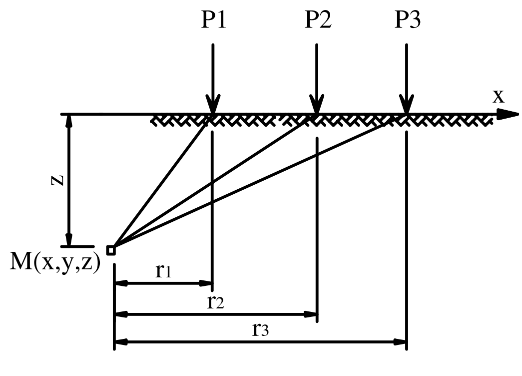
Trong đó: r là khoảng cách tính từ trục Oz đến điểm đang xét

Từ biểu thức (II-5) ta có thể viết:

$$\sigma_z = K.\frac{P}{z^2} \qquad \text{(II - 6)}$$

Trong đó trị số K là hàm số phụ thuộc vào tỷ r/z và sẽ tra ở bảng (II -1).

Từ biểu thức (II - 6) có thể nhận xét rằng, đối với những điểm gần điểm đặt lực tập trung, ứng suất nén σ_z sẽ đạt tới trị số lớn và đất ở trạng thái biến dạng dẻo và đó cũng chính là nhược điểm của phương pháp tính toán này. Do đó đối với những điểm này, người ta coi việc tác dụng của ngoại lực được thay thế bằng những lực bề mặt, về mặt tĩnh học tương đương với lực P.



Hình II-2: Trường hợp có nhiều lưch tâp trung tác dung

Nếu trên mặt đất có nhiều lực tập trung P_1, P_2, P_3, v v... tác dụng như hình (II-

2), thì ứng suất tại một điểm bất kỳ trong nền đất sẽ được tính bằng tổng ứng suất của từng lực gây ra tại điểm đó. Nếu dùng ký hiệu như hình (II - 2) thì ta có biểu thức sau:

$$\sigma_Z = \frac{1}{z^2}.\sum_{i=1}^{n} K_i.P_i \qquad \text{(II - 7)}$$

Ví dụ II-1:

Trên mặt đất tác dụng một lực tập trung thẳng đứng P=60T. Xác định ứng suất thẳng đứng tại điểm A có độ sâu 2m và cách trục đặt lực 1m. (Hình II-3).

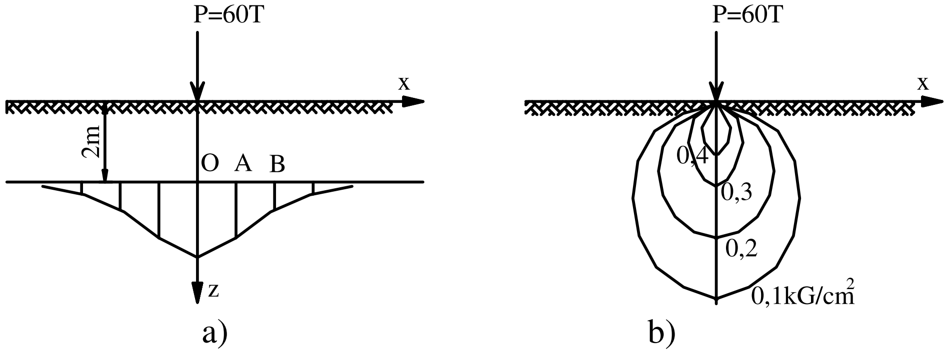
Giải: Cho biết z = 200cm, r = 100cm

Nên ta có: r/z = 100/200 = 0,5, tra theo bảng (II-1) sẽ được trị số của K=0,2733.

Ứng suất nén thẳng đứng tại điểm A sẽ là:

$$\sigma_z = 0{,}2733.\frac{60.000}{200x200} = 0{,}41\,(\text{kG/cm}^2)$$

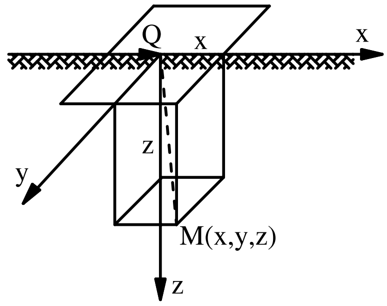
Bằng cách tương tự, xác định ứng suất nén σ_z tại những điểm khác có cùng độ sâu z=200cm thì sẽ có kết quả được trình bày như trên hình (II-3a) theo dạng biểu đồ ứng suất nén thẳng đứng. Dựa vào biểu đồ σ_z ở hình (II-3a) ta có nhận xét rằng, càng xa trục Oz thì trị số ứng suấtσ_z càng giảm dần. Nếu như tính và vẽ biểu đồ phân bố ứng suất nén thẳng đứng σ_z cho nhiều điểm trong nền đất và nối các điểm có cùng trị số σ_z với nhau thì sẽ thu được các đường cong đồng ứng suất hay còn gọi là "đường đẳng áp" như trên hình (II-3b).



Hình II-3.a) ứng suất nén trong đất ở độ sâu 2m; b) Các đường đẳng ứng suất

2.1.2 Trường hợp lực tập trung tác dụng nằm ngang trên mặt đất.

Đối với trường hợp lực tập trung nằm ngang tác dụng trên mặt đất có một ý nghĩa rất lớn đối với các công trình thuỷ lợi: Bài toán này đã được các nhà khoa học Trung Quốc (Huang Wen - Hsi) giải quyết với biểu thức tính ứng suất thẳng đứng là:



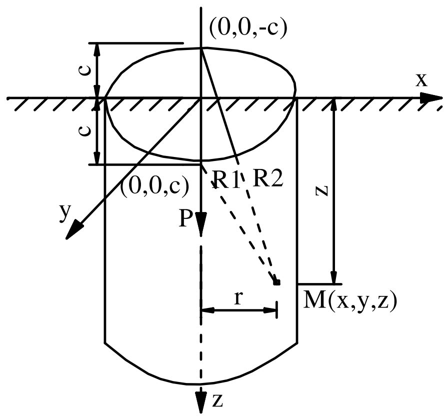
Hình II - 4

$$\sigma_Z = \frac{3Q}{2\pi}\frac{xz^2}{R^5} \qquad \text{(II - 8)}$$

Trong đó: $R^2 = x^2 + y^2 + z^2$

2.1.3 Trường hợp lực tập trung thẳng đứng tác dụng trong nền đất hình (II - 5)

Trong thực tế khi tính toán công trình, có khi cần phải xác định ứng suất và chuyển vị của đất nền dưới tác dụng của lực tập trung đặt ngay trong nền đất (ví dụ: Khi phân tích các thí nghiệm nén sâu, khi nghiên cứu sự làm việc của cọc, v v ...) . Bài toán này đã được R.Midlin giải. Với các ký hiệu như hình (II - 5), biểu thức tính ứng suất nén thẳng đứng σ_z và chuyển vị thẳng đứng W sẽ tính là:



Hình II-5

$$\sigma_Z = \frac{P}{8\pi.(1-\mu)}[-\frac{(1-2\mu)(z-c)}{R_1^3} + \frac{(1-2\mu)(z-c)}{R_2^3} - \frac{3(z-c)^3}{R_1^5} -$$

$$-\frac{3(3-4\mu)z(z+c)^2 - 3c(z+c)(5z-c)}{R_2^5} - \frac{30c.z(z+c)^3}{R_2^7}] \qquad \text{(II - 9)}$$

$$W = \frac{P}{16\pi.G(1-\mu)}[\frac{(3-4\mu)}{R_1} + \frac{8(1-\mu)^2 - (3-4\mu)}{R_2} + \frac{(z-c)^2}{R_1^3} +$$

$$+\frac{(3-4\mu)(z+c)^2 - 2cz}{R_2^3} + \frac{6c.z(z+c)}{R_2^5}] \qquad \text{(II - 10)}$$

Trong đó: c - là chiều sâu đặt lực tập trung.

$G = \dfrac{E_0}{2(1-\mu)}$ là môđun trượt.

$R_1 = \sqrt{r^2 + (z-c)^2}, R_2 = \sqrt{r^2 + (z+c)^2}$

E_o,μ - Mô đun biến dạng và hệ số nở hông của đất.

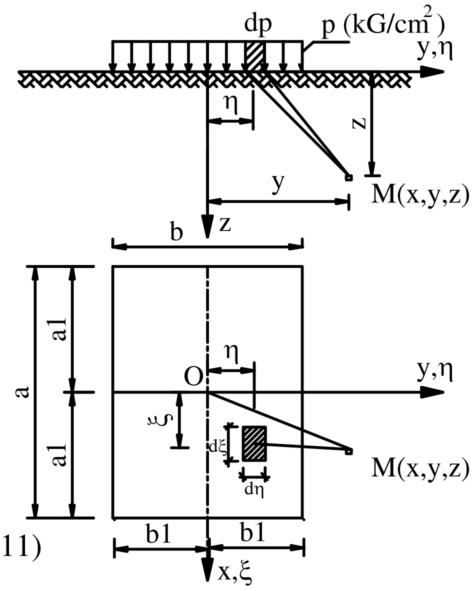
r - Khoảng cách từ trục tác dụng của lực tập trung đến điểm đang xét.

z- Toạ độ điểm đang xét.

2.2 Phân bố ứng suất trong trường hợp bài toán không gian

2.2.1 Trường hợp tải trọng phân bố đều trên diện tích hình chữ nhật

Như đã trình bày ở phần trên, trong thực tế không có lực tác dụng tại một điểm, mà chỉ có tải trọng tác dụng cục bộ. Để xác định ứng suất tại một điểm bất kỳ trong nền đất, dưới tác dụng của tải trọng phân bố đều trên diện tích hình chữ nhật như hình (II-6). Có thể giải quyết bài toán này bằng cách, lấy một diện tích chịu tải vô cùng nhỏ dF = dξdη và xem tải trọng tác dụng trên đó như một lực tập trung dp = p.dξdη tác dụng tại trọng tâm của diện chịu tải đó. Áp dụng biểu thức (II-1) của J.Boussinesq để tính ứng suất thành phần σ_Z tại điểm M bất kỳ, rồi tích phân diện tích F sẽ thu được biểu thức tính ứng suất dưới tác dụng của toàn bộ tải trọng hình chữ nhật như sau:



Hình II-6: Trường hợp tải trọng phân bố đều trên diện hình chữ nhật

Hay:

$$\sigma_Z^M = \frac{3pz^3}{2\pi}\int_{-b_1}^{+b_1}\int_{-a_1}^{+a_1}\frac{d\xi.d\eta}{\left[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+z^2\right]^{5/2}} \quad \text{(II-11)}$$

Trong đó: a_1, b_1 - là nửa cạnh chiều dài và nửa cạnh ngắn của hình chữ nhật.

Giải phương trình tích phân (II-11) rất phức tạp, nên không được áp dụng rộng rãi trong thực tế. Dưới đây chỉ giới thiệu các biểu thức V.G Carotkin để xác định ứng suất nén thẳng đứng trong các trường hợp đơn giản là:

Đối với các điểm nằm trên đường thẳng đứng đi qua tâm diện chịu tải hình chữ nhật có cạnh bằng $2a_1$và $2b_1$ (hình II-6) sẽ là:

$$\sigma_Z^0 = \frac{2.p}{\pi}\left[\text{arctg}\frac{b_1.a_1}{z\sqrt{b_1^2+a_1^2+z^2}} + \frac{b_1.a_1.z\left(b_1^2+a_1^2+2.z^2\right)}{\left(b_1^2+z^2\right)\left(a_1^2+z^2\right).\sqrt{b_1^2+a_1^2+z^2}}\right] \quad \text{(II-12)}$$

Đối với các điểm nằm trên đường thẳng đứng đi qua góc diện tích chịu tải hình chữ nhật có cạnh bằng $2a_1$ và $2b_1$:

$$\sigma_Z^g = \frac{2.p}{\pi}\left[\frac{4.a_1.b_1.z\left(4b_1^2+4a_1^2+2z^2\right)}{\left(4.b_1^2+z^2\right)\left(4a_1^2+z^2\right).\sqrt{4.b_1^2+4a_1^2+z^2}} + \text{arctg}\frac{4.a_1.b_1}{z\sqrt{4.b_1^2+4.a_1^2+z^2}}\right] \quad \text{(II-13)}$$

Việc tính toán các trị số ứng suất sẽ đơn giản hơn nhiều, nếu sử dụng các bảng hệ số tỷ lệ giữa ứng suất và cường độ tải trọng tác dụng, lập cho những điểm ở độ sâu khác nhau đối với các diện chịu tải khác nhau. Trong trường hợp này các biểu thức (II-12) và (II-13) có dạng tương ứng như sau:

Đối với các điểm nằm trên trục đi qua tâm tâm diện chịu tải:

$$\sigma_z^0 = K_0.p \quad \text{(II-12')}$$

Đối với các điểm nằm trên trục đi qua góc diện chịu tải:

$$\sigma_z^g = K_g.p \qquad \text{(II-13')}$$

Trong đó: K_0 và K_g - các hệ số phụ thuộc vào a/b và z/b tra theo bảng (II-2) và (II-3).

Phương pháp điểm góc:

Muốn xác định ứng suất của một điểm bất kỳ trong nền đất, như trên đã trình bày, có thể dùng biểu thức tích phân tổng quát (II-11). Tuy vậy, nếu làm như thế thì việc tính toán sẽ rất phức tạp. Để đơn giản hoá vấn đề tính toán người ta thường dùng phương pháp dựa vào ứng suất của những điểm nằm trên trục đi qua góc diện tích chịu tải hình chữ nhật gọi là phương pháp điểm góc, do D.E.Polsin đề ra đầu tiên (1933). Bản chất của phương pháp này là biến điểm đang xét thành điểm góc chung của các diện chịu tải hình chữ nhật nhỏ được phân chia ra:

Có ba trường hợp cơ bản:

1. Điểm M đang xét nằm trong phạm vi diện chịu tải (hình II-7.a): Ứng suất tại điểm M được tính bằng tổng ứng suất góc do tải trọng tác dụng lên bốn diện chịu tải Mgah, Mhbl, Mlcf và Mfdg và ta có:

$$\sigma_Z^M = \left(K_g^I + K_g^{II} + K_g^{III} + K_g^{IV}\right).p \qquad \text{(II-14)}$$

Trong đó: p - Cường độ tải trọng phân bố đều (kG/cm^2).

$K_g^I, K_g^{II}, K_g^{III}, K_g^{IV}$ -Các hệ số góc xác định theo bảng (II-3), phụ thuộc vào hai tỷ số a/b và z/b, trong đó a và b là chiều dài và chiều rộng hình chữ nhật đang xét tương ứng nói trên, z - Độ sâu điểm đang xét.

2. Điểm M đang xét nằm trên chu vi diện chịu tải (hình II-7.b): Ứng suất tại điểm M bằng tổng ứng suất góc do tải trọng tác dụng trên hai diện chịu tải hình chữ nhật Mabe và Mecd và ta có:

$$\sigma_Z^M = \left(K_g^I + K_g^{II}\right).p \qquad \text{(II-15)}$$

3. Điểm M đang xét nằm ngoài diện chịu tải (hình II7.c): Khi điểm M nằm ngoài diện chịu tải hình chữ nhật abcd, thì cần giả định có những diện tích chịu tải "ảo" như trong hình (II-7.c) và tính trị số σ_Z^M theo biểu thức như sau:

$$\sigma_Z^M = \left(K_g^I + K_g^{II} - K_g^{III} - K_g^{IV}\right).p \qquad \text{(II-16)}$$

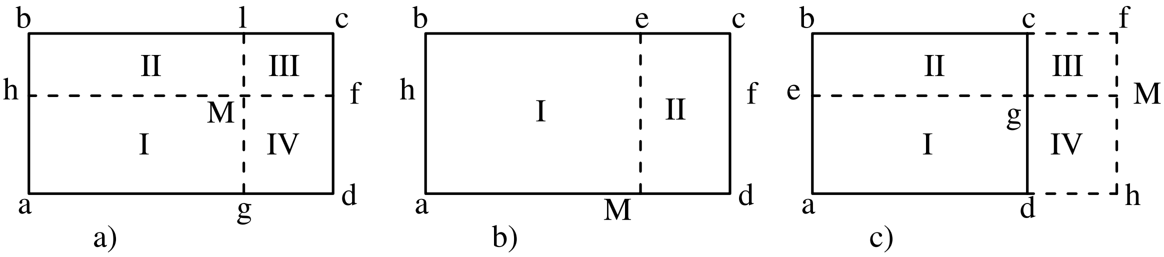
Trong đó:

K_g^I - Hệ số góc tra bảng ứng với hình chữ nhật Mhae

K_g^{II} - Hệ số góc tra bảng ứng với hình chữ nhật Mebf

K_g^{III} - Hệ số góc tra bảng ứng với hình chữ nhật Mgcf

K_g^{IV} - Hệ số góc tra bảng ứng với hình chữ nhật Mgdh



Hình II-7: Sơ đồ phân chia diện chịu tải hình chữ nhật khi xác định ứng suất theo phương pháp điểm góc.

Ví dụ II-2: Có tải trọng p = 4 kG/cm^2 phân bố đều trên một diện tích hình chữ nhật có kích thước: (20 × 10)m^2. Xác định ứng suất phụ thêm σ_z tại những điểm nằm dưới tâm ở các chiều sâu 5 m, 10 m và 15 m.

Giải: Tính trị số a/b và z/b rồi tra bảng (II-2) để tìm trị số K_0:

$$\frac{a}{b}=\frac{20}{10}=2\text{, Khi}\qquad z=5m;$$

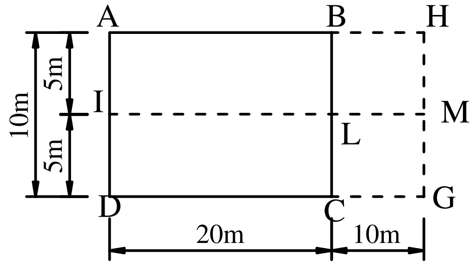
thì : $\dfrac{z}{b}=\dfrac{5}{10}=0{,}5; K_0=0{,}734; \sigma_Z=0{,}734\times 4=2{,}94\,kG/cm^2.$

$$z = 10m;\ \text{thì}:\ \frac{z}{b}=\frac{10}{10}=1{,}0;\ K_0=0{,}470; \sigma_Z=0{,}470\times 4=1{,}88\,kG/cm^2$$

$$z = 15m;\ \text{thì}:\ \frac{z}{b}=\frac{15}{10}=1{,}5; K_0=0{,}288; \sigma_Z=0{,}288\times 4=1{,}15\,kG/cm^2$$

Ví dụ II-3: Tải trọng như ví dụ (II-2) xác định ứng suất phụ thêm tại các điểm L, M ở độ sâu 5 m và có vị trí trên mặt bằng như trên hình (II-8).

Giải: Dùng phương pháp điểm góc ta có:



Hình II-8

Tại điểm L: $\sigma_Z^L=\left[K_{g(LIAB)}+K_{g(LIDC)}\right]p$

do đối xứng nên $K_{g(LIAB)} = K_{g(LIDC)}$

Xét hình chữ nhật LIAB ta có:

$\dfrac{a}{b}=\dfrac{20}{5}=4; \dfrac{z}{b}=\dfrac{5}{5}=1$, Tra bảng (II-3) ta được: $K_{g(LIAB)} = 0{,}204$

Vậy σ_Z^L=2x0.204x4=1,63kG/cm^2

Tại điểm M: $\sigma_Z^M=\left[K_{g(MIAH)}+K_{g(MIDG)}-K_{g(MLBH)}-K_{g(MLCG)}\right]p$

hay $\sigma_Z^M = 2\left[K_{g(MIAH)}-K_{g(MLBH)}\right]p$

Đối với hình chữ nhật MIAH:

$$\frac{a}{b}=\frac{30}{5}=6; \frac{z}{b}=\frac{5}{5}=1; \ K_{g(MIAH)}=0{,}205$$

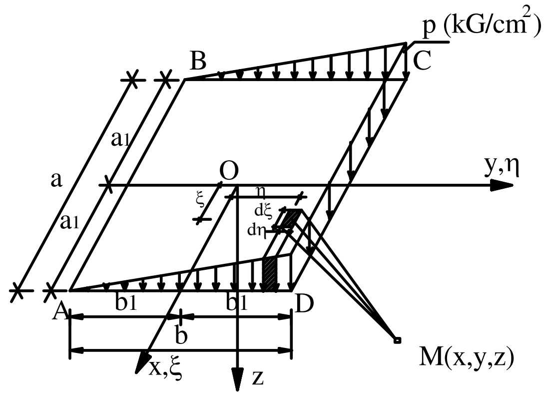
Đối với hình chữ nhật MLBH:

$$\frac{a}{b}=\frac{10}{5}=2; \ \frac{z}{b}=\frac{5}{5}=1; \ K_{g(MLBH)}=0{,}200$$

Vậy $\sigma_Z^M = 2[0{,}205 - 0{,}200].4 = 0{,}04\,\text{kG}/\text{cm}^2$

Qua hai ví dụ trên có thể nhận xét rằng: Càng đi xuống sâu hoặc càng ra xa khỏi tâm diện tích tác dụng của tải trọng thì trị số ứng suất phụ thêm σ_Z càng giảm dần.

2.2.2 Trường hợp tải trọng phân bố trên diện tích hình chữ nhật theo biểu đồ tam giác:



Hình II-9

Trong trường hợp này, cũng như trong trường hợp tải trọng phân bố đều trên diện tích hình chữ nhật. Ta lấy một diện tích chịu tải phân tố vô cùng nhỏ dF = dξ.dη và xem tải trọng đó tác dụng trên phân bố dF như một lực tập trung dp = $p_{(\eta)}$.dξ.dη tác dụng tại trọng tâm của phân tố đó như trên hình (II-9). Áp dụng biểu thức (II-1.a) của J.Boussinesq để tính ứng suất thành phần σ_z tại điểm M(x,y,z) bất kỳ trong nền đất, rồi tích phân diện tích ta sẽ thu được biểu thức tính ứng suất dưới tác dụng của toàn bộ tải trọng phân bố trên diện tích hình chữ nhật theo biểu đồ tam giác như sau:

$$p_{(\eta)} = \frac{p}{2}.\left(1+\frac{\eta}{b_1}\right) \qquad \text{(II-17)}$$

Trong đó: $p_{(\eta)}$ - Cường độ tải trọng tại phân tố có diện tích dF = dξ.dη.

p - Cường độ tải trọng lớn nhất tác dụng trên diện tích hình chữ nhật.

η - Toạ độ của phân tố dF.

b_1 - Nửa cạnh song song với chiều có tải trọng thay đổi.

Như vậy lực tập trung dp tại trọng tâm của phân tố đó sẽ là:

$$dp = \frac{p}{2}.\left(1+\frac{\eta}{b_1}\right).d\xi.d\eta \qquad \text{(II-18)}$$

Biểu thức tổng quát để tính σ_Z trong trường hợp này sẽ là:

$$\sigma_Z^M = \frac{3.p.z^3}{4.\pi}\int_{-a_1}^{+a_1}\int_{-b_1}^{+b_1}\frac{\left(1+\frac{\eta}{b_1}\right).d\xi.d\eta}{\left[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+z^2\right]^{5/2}} \qquad \text{(II-19)}$$

Trong đó: a_1,b_1 - là nửa cạnh chiều dài và nửa cạnh chiều rộng của diện chịu tải hình chữ nhật.

ξ, η - Là toạ độ của điểm đặt lực tập trung dp.

x,y,z - Là toạ độ của điểm M đang xét.

Sau khi tích phân phương trình (II-19) ta sẽ thu được biểu thức tính ứng suất thành phần σ_z cho một điểm có vị trí bất kỳ. Dĩ nhiên, việc thực hiện tính toán với biểu thức trên rất phức tạp, nên người ta không dùng trực tiếp biểu thức đó, mà trong thực tế chỉ giải cho trường hợp đơn giản nhất. Đó là trường hợp, xác định ứng suất nén thẳng đứng của những điểm bất kỳ nằm trên trục thẳng đứng đi qua các điểm góc ở phía có cường độ tải trọng lớn nhất (D) và các điểm góc ở phía có cường độ tải trọng nhỏ nhất (A).

Trường hợp, đối với những điểm nằm trên trục thẳng đứng đi qua góc (A) ta có $x = a_1$ và $y = -b_1$:

$$\sigma_Z^A = \frac{3.p.z^3}{4.\pi}\int_{-a_1}^{+a_1}\int_{-b_1}^{+b_1}\frac{\left(1+\frac{\eta}{b_1}\right).d\xi.d\eta}{\left[(a_1-\xi)^2+(-b_1-\eta)^2+z^2\right]^{5/2}} \qquad \text{(II-20)}$$

Trường hợp đối với những điểm nằm trên trục thẳng đứng đi qua điểm góc D ta có ($x = a_1$; $y = b_1$):

$$\sigma_Z^D = \frac{3.p.z^3}{4.\pi}\int_{-a_1}^{+a_1}\int_{-b_1}^{+b_1}\frac{\left(1+\frac{\eta}{b_1}\right).d\xi.d\eta}{\left[(a_1-\xi)^2+(b_1-\eta)^2+z^2\right]^{5/2}} \qquad \text{(II-21)}$$

Để đơn giản cho việc tính toán các biểu thức trên, người ta đã lập bảng xác định hệ số tỷ lệ, nên các biểu thức (II-20) và (II-21) có thể viết dưới dạng rút gọn như sau:

Đối với những điểm nằm trên trục đi qua góc A:

$$\sigma_Z^A = K_A.p \qquad \text{(II-20a)}$$

Đối với những điểm nằm trên trục đi qua góc D:

$$\delta_Z^D = K_D.p \qquad \text{(II-21a)}$$

Trong đó: K_A và K_D - hệ số phụ thuộc vào hai tỷ số a/b và z/b tra theo bảng (II-4) và (II-5).

p - Trị số tải trọng lớn nhất tác dụng trên diện chịu tải hình chữ nhật (kG/cm^2)