Bạt...
Hè 2008

Nguyễn Văn Mậu (*Chủ biên*)

TOÁN RỜI RẠC
VÀ MỘT SỐ VẤN ĐỀ LIÊN QUAN

(Tài liệu bồi dưỡng hè 2007)

HÀ NỘI, 05-14 THÁNG 8 NĂM 2007

Lời nói đầu

Trên bốn mươi năm thực hiện "Chương trình đào tạo và bồi học sinh năng khiếu toán bậc phổ thông" là một chặng đường của một chu trình đặc biệt gắn với sự khởi đầu, trưởng thành và ngày càng hoàn thiện xuất phát từ một mô hình đào tạo năng khiếu Tóan học đặc biệt tại Đại học Tổng hợp Hà Nội. Hướng đào tạo mũi nhọn này mang tính đột phá cao, đã đào tạo ra các thế hệ học sinh có năng khiếu trong lĩnh vực toán học, tin học và khoa học tự nhiên: Vật lý, Hoá học, Sinh học và khoa học sự sống. Trong điều kiện thiếu thốn về vật chất kéo dài qua nhiều thập kỷ và trải qua nhiều thách thức, chúng ta đã tìm ra hướng đi phù hợp, đã đi lên vững chắc và ổn định, đã tìm tòi, tích luỹ kinh nghiệm và có nhiều sáng tạo đáng ghi nhận. Các thế hệ Thầy và Trò đã định hình và tiếp cận với thế giới văn minh tiên tiến và khoa học hiện đại, cập nhật thông tin, sáng tạo phương pháp và tập dượt nghiên cứu. Gắn với việc tích cực đổi mới phương pháp dạy và học, chương trình đào tạo chuyên Toán đang hướng tới xây dựng hệ thống chuyên đề, đang nỗ lực và đã tổ chức thành công Kỳ thi Olympic Toán quốc tế lần thứ 48, năm 2007 tại Việt Nam, được bạn bè quốc tế ca ngợi.

Sau gần nửa thế kỷ hình thành và phát triển, có thể nói, giáo dục mũi nhọn phổ thông (giáo dục năng khiếu) đã thu được những thành tựu rực rỡ, được Nhà nước đầu tư có hiệu quả, được xã hội thừa nhận và bạn bè quốc tế khâm phục. Các đội tuyển quốc gia tham dự các kỳ thi Olympic quốc tế có bề dày thành tích mang tính ổn định và có tính kế thừa. Đặc biệt, năm nay, các Đội tuyển Toán và Tin quốc gia tham dự thi Olympic quốc tế đã đạt được thành tích nổi bật. Đội tuyển Toán Việt Nam đã vươn lên đứng thứ ba (theo sự sắp xếp không chính thức) trong số 95 đội tuyển các nước tham dự IMO48.

Từ nhiều năm nay, các hệ năng khiếu Toán học và các Trường THPT Chuyên thường sử dụng song song các sách giáo khoa đại trà kết hợp với sách giáo khoa chuyên biệt và sách chuyên đề cho các Hệ THPT Chuyên. Học sinh các lớp năng khiếu đã tiếp thu tốt các kiến thức cơ bản theo thời lượng hiện hành do Bộ GD và ĐT ban hành.

Hiện nay, chương trình cải cách giáo dục đang bước vào giai đoạn hoàn chỉnh bộ SGK mới. Thời lượng kiến thức cũng như trật tự kiến thức cơ bản có những thay đổi đáng kể. Các kiến thức này đang được cân nhắc để nó vẫn nằm trong khuôn khổ hiện hành của các kiến thức nâng cao đối với các lớp chuyên toán. Vì lẽ đó, việc tiến hành viết hệ thống các sách chuyên đề cho các lớp năng khiếu cần được tiến hành khẩn trương và được xem xét toàn diện từ phía các chuyên gia giáo dục và các cô giáo, thầy giáo đang trực tiếp giảng dạy các lớp chuyên.

Được sự cho phép của Bộ GD và ĐT, Trường Đại Học Khoa Học Tự Nhiên, ĐHQGHN phối hợp cùng với các chuyên gia, các nhà khoa học, các cô giáo, thầy giáo thuộc ĐHSPHN, ĐHQG TpHCM, Viện Toán Học, Hội Toán Học Hà Nội, Tạp Chí Toán Học và Tuổi Trẻ, các Trường THPT Chuyên, Các Sở GD và ĐT,... tổ chức bồi dưỡng các chuyên đề nghiệp vụ sau đại học nhằm bồi dưỡng học sinh giỏi các môn Toán học và khối kiến thức khoa học tự nhiên như là một tủ sách đặc biệt phục vụ bồi dưỡng học sinh giỏi.

Chúng tôi xin giới thiệu cuốn sách của nhóm các chuyên gia, các thầy giáo với sự tham gia đông đảo của các đồng nghiệp tham dự Trường hè 2007 về chuyên đề "Tóan rời rạc và một số vấn đề liên quan".

Cuốn sách này nhằm cung cấp một số kiến thức chuyên đề bất đẳng thức ở mức độ khó về tóan rời rạc, đại số, số học, và giải tích. Đây cũng là chuyên đề và bài giảng mà các tác giả đã giảng dạy cho học sinh các đội tuyển thi Olympíc Toán học quốc gia và quốc tế.

Chúng tôi cũng xin chân thành cảm ơn các bạn đọc cho những ý kiến đóng góp để cuốn sách ngày càng hoàn chỉnh.

Thay mặt Ban Tổ Chức

GS TSKH Nguyễn Văn Mậu

Mục lục

Đồ thị tô màu và một số bài toán không mẫu mực

Đặng Huy Ruận

Lý thuyết đồ thị nói chung, đặc biệt đồ thị tô màu được vận dụng để giải các *bài toán không mẫu mực* rất hiệu quả.

Để giải toán thông qua đồ thị cần thực hiện theo hai bước:

Đầu tiên xây dựng đồ thị để mô tả các quan hệ, điều kiện được phát biểu trong bài toán. Sau đó căn cứ vào các khẳng định của lý thuyết đồ thị để suy ra đáp án.

Trong phần này chỉ đề cập đến việc thông qua đồ thị tô màu để giải một số dạng *toán không mẫu mực*.

Đối với mỗi dạng *toán không mẫu mực* đều đưa ra khẳng định tương ứng về đồ thị tô màu để có thể vận dụng giải quyết hàng loạt bài toán thuộc dạng được xét.

Đồ thị được gọi là đầy đủ, nếu mỗi cặp đỉnh của nó đều được nối bằng một cạnh. Đồ thị đầy đủ gồm n đỉnh.

Đồ thị đầy đủ gồm 3 đỉnh (4 đỉnh) với các cạnh được tô màu bằng cùng một màu được gọi là tam giác (tứ giác) cùng màu.

1 Dạng 1

1.1 Bài toán

Bài toán 1 *(Đề thi Olympic Toán Quốc tế) Mười bảy nhà bác học viết thư cho nhau. Mỗi người đều viết thư cho tất cả người khác. Các thư chỉ trao đổi về 3 đề tài. Từng cặp nhà bác học chỉ viết thư trao đổi về cùng một đề tài. Chứng minh rằng chỉ có ít nhất 3 nhà bác học viết thư cho nhau trao đổi về cùng một vấn đề.*

Bài toán 2 *Trong một cuộc gặp gỡ quốc tế có 17 nhà ngoại giao tham gia. Mỗi cặp nhà ngoại giao chỉ trao đổi trực tiếp với nhau bằng một trong ba ngôn ngữ: Anh, Pháp, Đức.*

Chứng minh rằng luôn luôn tìm được ba nhà ngoại giao, mà họ có thể trao đổi trực tiếp được bằng một trong ba ngôn ngữ kể trên.

Bài toán 3 *Mỗi cặp đối tượng cho trước chỉ có một trong ba quan hệ: t_1, t_2, t_3. Chứng minh rằng luôn luôn tìm được ba đối tượng, mà mỗi cặp trong bộ ba này cùng có quan hệ t_i $(1 \leqslant i \leqslant 3)$ đã cho.*

1.2 Khẳng định

Sau đây xét lớp đồ thị có chứa tam giác cùng màu.

Với các dãy số nguyên dương:

$$a_1 = 2,\ a_2 = 3, \ldots, a_{n+1} = (n+1).a_n + 1; \quad (1)$$

$$b_2 = 3,\ b_3 = 6, \ldots, b_{n+1} = (b_n - 1).n + 2 \quad (2)$$

có các khẳng định sau đây:

Khẳng định 1 *a) Đồ thị đầy đủ có $a_n + 1$ đỉnh với n màu cạnh luôn luôn có đồ thị con đầy đủ K_3 với cạnh cùng màu (tam giác cùng màu).*
b) Đồ thị đầy đủ có b_{n+1} đỉnh với n màu cạnh luôn luôn có đồ thị con đầy đủ K_3 với cạnh cùng màu.

Chứng minh. Khẳng định a) chứng minh bằng quy nạp theo chỉ số n.

1) Cơ sở quy nạp: $n = 1$. Đồ thị đầy đủ tương ứng gồm $a_1 + 1 = 2 + 1 = 3$ đỉnh lập thành một chu trình tam giác. Các cạnh của đồ thị này được tô bằng một màu, nên chu trình tam giác lập nên G_1 cùng màu.

2) Quy nạp: Giả sử khẳng định đã đúng với $n = k$, nghĩa là, đồ thị đầy đủ bất kỳ G_k gồm $a_k + 1$ đỉnh với các cạnh được tô bằng k màu đã có chu trình tam giác cùng màu. Cần chứng tỏ khẳng định đúng với $n = k + 1$.

Xét đồ thị đầy đủ tùy ý G_{k+1} với $a_{k+1} + 1$ đỉnh và các cạnh được tô bằng $k + 1$ màu.

Giả sử P là một đỉnh tùy ý của G_{k+1}. Khi đó P được nối với $a_{k+1} = (k+1)a_k + 1$ đỉnh bởi các cạnh được tô bằng không quá $k + 1$ màu, nên xuất phát từ P phải có ít nhất $a_k + 1$ cạnh được tô bằng cùng một màu. Giả sử màu này là màu đỏ và các cạnh $PA_1, PA_2, \ldots, PA_{a_k+1}$ được tô màu đỏ. Có hai khả năng xảy ra:

1°) Nếu một trong các cạnh nối giữa các đỉnh A_i, A_j $(1 \leqslant i,\ j \leqslant a_k + 1)$ được tô màu đỏ, chẳng hạn cạnh (A_1, A_2) màu đỏ. Khi đó chu trình tam giác A_1PA_2 màu đỏ, nên đồ thị G_{k+1} có chu trình tam giác màu đỏ.

2°) Trường hợp ngược lại, không có cạnh nào trong các cạnh (A_i, A_j) $(1 \leqslant i, j \leqslant a_k{+}1)$ được tô màu đỏ. Khi đó đồ thị con đầy đủ G_k với tập đỉnh $\{A_1, A_2, \ldots, A_{a_k}, A_{a_k+1}\}$ có các cạnh được tô bằng không quá k màu, nên theo giả thiết quy nạp G_k có chu trình tam giác cùng màu. Bởi vậy G_{k+1} có chu trình tam giác cùng màu.

Khẳng định được chứng minh.

Khẳng định b) chứng minh tương tự.

1.3 Giải toán

1°) Xây dựng đồ thị mô tả quan hệ

Các đồ thị tương ứng với ba bài toán đã cho được xây dựng như sau:

a) Đỉnh: Lấy 17 điểm trên mặt phẳng hoặc trong không gian tương ứng với 17 nhà bác học (17 nhà ngoại giao, 17 đối tượng đã cho). Dùng ngay tên các nhà bác học (nhà ngoại giao, đối tượng đã cho) để ghi trên các điểm tương ứng.

b) Cạnh: Dùng

- Cạnh đỏ để nối giữa hai đỉnh tương ứng với Hai nhà bác học trao đổi vấn đề thứ nhất (Hai nhà ngoại giao trao đổi trực tiếp được bằng tiếng Anh; Hai đối tượng có quan hệ t_1);

- Cạnh xanh để nối giữa hai đỉnh tương ứng với Hai nhà bác học trao đổi vấn đề thứ hai (Hai nhà ngoại giao trao đổi trực tiếp được bằng tiếng Pháp; Hai đối tượng có quan hệ t_2);

- Cạnh vàng để nối giữa hai đỉnh tương ứng với Hai nhà bác học trao đổi vấn đề thứ ba (Hai nhà ngoại giao trao đổi trực tiếp được bằng tiếng Đức; Hai đối tượng có quan hệ t_3).

Đồ thị G_i ($1 \leqslant i \leqslant 3$) mô tả toàn bộ quan hệ điều kiện được cho trong bài toán i.

2°) Suy ra đáp án.

Theo khẳng định 1, trong các đồ thị G_i ($1 \leqslant i \leqslant 3$) đều có tam giác cùng màu. Nếu tam giác này

- Màu đỏ, thì Ba nhà bác học tương ứng trao đổi về vấn đề thứ nhất (Ba nhà ngoại giao tương ứng trao đổi trực tiếp được với nhau bằng tiếng Anh; Ba đối tượng tương ứng có quan hệ t_1);

- Màu xanh, thì Ba nhà bác học tương ứng trao đổi về vấn đề thứ hai (Ba nhà ngoại giao tương ứng trao đổi trực tiếp được với nhau bằng tiếng Pháp; Ba đối tượng tương ứng có quan hệ t_2);

- Màu vàng, thì Ba nhà bác học tương ứng trao đổi về vấn đề thứ ba (Ba nhà ngoại giao tương ứng trao đổi trực tiếp được với nhau bằng tiếng Đức; Ba đối tượng tương ứng có quan hệ t_3).

2 Dạng 2

2.1 Bài toán

Bài toán 1 *Một nhóm gồm 5 thành viên, trong đó mỗi bộ ba đều có 2 người quen nhau và 2 người không quen nhau. Chứng minh rằng có thể xếp cả nhóm ngồi xung quanh một bàn tròn, để mỗi người ngồi giữa hai người mà thành viên đó quen.*

Bài toán 2 *Cho 5 số nguyên dương tùy ý, mà cứ 3 số bất kỳ đề có 2 số có ước chung và 2 số nguyên tố cùng nhau. Chứng minh rằng có thể ghi 5 số trên lên một đường tròn, để mỗi số đều đứng giữa 2 số mà nó có ước chung.*

Bài toán 3 *Cho 5 đối tượng tùy ý, mà cứ ba đối tượng bất kỳ, đều có 2 đối tượng có quan hệ t_1 và 2 đối tượng có quan hệ t_2. Chứng minh rằng có thể xếp tất cả các đối tượng* *đứng trên một đường vòng, để mỗi đối tượng đều đứng giữa 2 đối tượng mà nó có quan hệ t_i $(1 \leqslant i \leqslant 2)$.*

2.2 Khẳng định

Với dãy (2) có khẳng định sau:

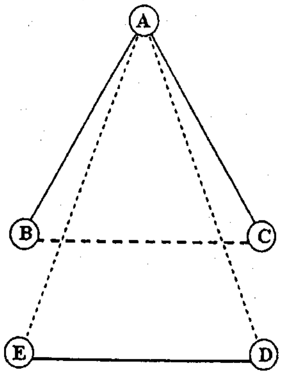
Khẳng định 2 *Đồ thị đầy đủ có $b_{n+1} - 1$ đỉnh $(n \geqslant 2)$ với n màu cạnh (các cạnh được tô bằng n màu), sao cho không tam giác cùng màu nào, luôn luôn có hình 5 cạnh với các cạnh cùng màu và các đường chéo được tô bằng các màu khác.*

Chứng minh. Bằng quy nạp theo n.

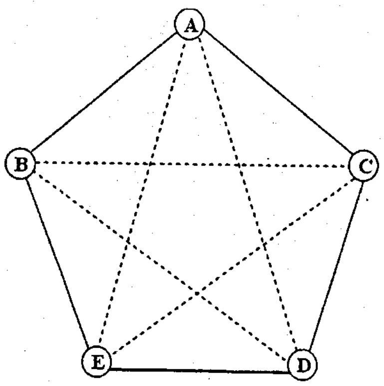
1. Cơ sở quy nạp: Với $n = 2$ đồ thị tương ứng G_2 đầy đủ có $b_3 - 1 = 5$ đỉnh và 2 màu cạnh (xanh, đỏ) không có đồ thị con K_3 cùng màu. Khi đó G_2 có thể biểu diễn ở dạng hình 5 cạnh với cạnh cùng màu đỏ và đường chéo màu xanh.

Thật vậy, do G_2 đầy đủ nên mỗi đỉnh xuất phát đúng 4 cạnh được tô bằng 2 màu. Chính xác hơn, tại từng đỉnh, mỗi màu được tô trên đúng 2 cạnh. Giả sử ngược lại, tại đỉnh A màu đỏ được tô trên 3 cạnh là AB, AC và AD. Khi đó một trong 3 cạnh BC, BD, CD màu đỏ, đồ thị có tam giác đỏ. Ngược lại cả 3 cạnh đều màu xanh, đồ thị có tam giác xanh. Như vậy mẫu thuẫn với giả thiết.

Giả sử tại A có các cạnh đỏ là AB và AC (đường liền nét), còn AD và AE là xanh, (đường nét đứt). Khi đó cạnh BC phải xanh và ED là đỏ (hình 1).



Hình 1



Hình 2

Hai cạnh BE và CE không thể cùng xanh. Giả sử BE đỏ, thì CE xanh. Suy ra CD đỏ và BD xanh. Vậy ta được hình 5 cạnh với cạnh màu đỏ và đường chéo xanh (hình 2).

2. Quy nạp: Giả sử khẳng định đúng với $n = k$. Xét đồ thị G_{k+1} đầy đủ với $b_{(k+1)+1} - 1$ đỉnh, $k + 1$ màu cạnh và không có đồ thị con K_3 cùng màu.

Mỗi đỉnh của G_{k+1} xuất phát $(b_{k+1} - 1).(k + 1)$ cạnh với $k + 1$ màu, nên phải có ít nhất $b_{k+1} - 1$ cạnh cùng màu. Giả sử tại đỉnh A có $b_{k+1} - 1$ cạnh cùng được tô bởi màu m_1. Khi đó trong các đỉnh đối của A không có cặp đỉnh nào được nối với nhau bởi cạnh màu m_1 (trái lại thì có K_3 cùng màu m_1). Xét đồ thị con đầy đủ G_k lập nên từ $b_{k+1}-1$ đỉnh đối của A có cạnh chỉ tô bởi k màu (trừ màu m_1) và không có K_3 cùng màu, nên theo giả thiết quy nạp, trong G_k có hình 5 cạnh với cạnh cùng một màu và đường chéo là các màu khác (tất cả đều không là màu m_1). Vậy trong G_{k+1} có điều cần khẳng định.

3. Giải toán

1°) *Xây dựng đồ thị mô tả quan hệ*

Các đồ thị tương ứng với 3 bài toán đã cho được xây dựng như sau:

a) Đỉnh: Lấy 5 điểm trên mặt phẳng, không có 3 điểm nào thẳng hàng tương ứng với 5 thành viên (5 số nguyên dương, 5 đối tượng đã chọn ra). Dùng ngay tên các thành viên (các tổ, tên các đối tượng) để ghi trên các điểm tương ứng.

b) Cạnh: Dùng

- Cạnh đỏ để nối giữa hai đỉnh tương ứng với hai người quen nhau (hai số có ước chung, hai đối tượng có quan hệ t_1).

- Cạnh xanh để nối giữa hai đỉnh tương ứng với hai người không quen nhau (hai số nguyên tố cùng nhau, hai đối tượng có quan hệ t_2).

Đồ thị G_i $(1 \leqslant i \leqslant 3)$ mô tả toàn bộ quan hệ điều kiện được cho trong bài toán i, nên trong G_i không có tam giác cùng màu.

2°) *Suy ra đáp án.* Theo khẳng định 2 với $n = 2$ đồ thị G_i là đa giác 5 cạnh với các cạnh màu đỏ và các đường chéo màu xanh hoặc ngược lại. Khi đó dựa theo đường gấp khúc khép kín màu đỏ mà sắp xếp các thành viên (các số; các đối tượng) tương ứng người xung quanh một bàn tròn (lên một đường tròn), thì mỗi thành viên (mỗi số, mỗi đối tượng) sẽ ngồi giữa hai người mà thành viên có quen (đứng giữa hai số mà nó có ước chung; đứng giữa hai đối tượng mà nó có quan hệ t_1).

3 Dạng 3

3.1 Bài toán

Bài toán 1 *Trên mặt phẳng lấy 6 điểm tùy ý, không có 3 điểm nào thẳng hàng và khoảng cách giữa các cặp điểm khác nhau từng đôi một.*

Chứng minh rằng tồn tại ít nhất một cặp điểm mà đoạn thẳng nối giữa chúng là cạnh ngắn nhất của một tam giác nào đó, đồng thời là cạnh dài nhất của một tam giác khác có đỉnh là các điểm đã cho.

Bài toán 2 *Chứng minh rằng trong n $(n \geqslant 6)$ người tùy ý luôn chọn được $n-4$ bộ ba, mà trong mỗi bộ ba này hoặc từng đôi một quen nhau hoặc từng đôi một không quen nhau.*

Bài toán 3 *Chứng minh rằng trong n $(n \geqslant 6)$ số nguyên dương tùy ý luôn luôn chọn được $n-4$ bộ ba, mà trong mỗi bộ ba này từng cặp số có ước chung hoặc nguyên tố cùng nhau.*