LỜI GIẢI TOÁN CAO CẤP C_2 - ĐỀ THAM KHẢO 1

Câu 1. Ta giải và biện luận hệ phương trình tuyến tính:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 - x_4 = 0; \\ 2x_1 + 7x_2 + 4x_3 = 2; \\ 3x_1 + 8x_2 + 6x_3 = 3; \\ 3x_1 + 11x_2 + 6x_3 + 2x_4 = m. \end{cases}$$

bằng phương pháp Gauss

$$(A \mid B) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 7 & 4 & 0 & 2 \\ 3 & 8 & 6 & 0 & 3 \\ 3 & 11 & 6 & 2 & m \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 5 & m \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & m-4 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m-5 \end{array}\right)$$

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 - x_4 = 0 \\ x_2 + 2x_4 = 2 \\ x_4 = 1 \\ 0 = m-5 \end{cases} \qquad (2)$$

Biện luận:

- $m \neq 5$: Hệ vô nghiệm.
- $m = 5$: Hệ đã cho tương đương với hệ sau:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 - x_4 = 0 \\ x_2 + 2x_4 = 2 \\ x_4 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_3 = \alpha, x_4 = 1 \\ x_2 = 0, x_1 = 1 - 2\alpha \end{cases}$$

Vậy với m = 1, hệ (1) có vô số nghiệm:

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (1 - 2\alpha, 0, \alpha, 1)$$

với $\alpha \in \mathbf{R}$ tuỳ ý.

Câu 2. a) Ma trận

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -1 & -2 & 2 \\ 3 & 11 & 3 \end{pmatrix}$$

khả nghịch vì

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -1 & -2 & 2 \\ 3 & 11 & 3 \end{vmatrix} = -6.$$

Ta có

$$\mathrm{Adj}(A) = \begin{pmatrix} 28 & -9 & 5 \\ -2 & 0 & 2 \\ -8 & 3 & -1 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 28 & -2 & -85 \\ -9 & 0 & 3 \\ 5 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

vì

$$A_{11} = +\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 11 & 3 \end{vmatrix} = -28; A_{12} = -\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = 9; A_{13} = +\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 11 \end{vmatrix} = -5;$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 11 & 3 \end{vmatrix} = 2; A_{22} = +\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = 0; A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 11 \end{vmatrix} = -2;$$

$$A_{31} = +\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = 8; A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -3; A_{33} = +\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = 1.$$

Suy ra

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\text{Adj}(A) = -\frac{1}{6}\begin{pmatrix} -28 & 2 & 8 \\ 9 & 0 & -3 \\ -5 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

b) Ta có

$$AXA = AB \Leftrightarrow XA = B \Leftrightarrow X = BA^{-1}$$

$$\Leftrightarrow X = -\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -28 & 2 & 8 \\ 9 & 0 & -3 \\ -5 & -2 & 1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{6}\begin{pmatrix} -25 & -4 & 5 \\ -51 & 0 & 15 \\ -32 & 10 & 10 \end{pmatrix}.$$

$$AYA = BA \Leftrightarrow AY = B \Leftrightarrow Y = A^{-1}B$$

$$\Leftrightarrow Y = -\frac{1}{6}\begin{pmatrix} -28 & 2 & 8 \\ 9 & 0 & -3 \\ -5 & -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix} = -\frac{1}{6}\begin{pmatrix} -10 & -52 & -106 \\ 3 & 15 & 36 \\ -5 & -5 & -20 \end{pmatrix}.$$

Câu 3. a) Với $u_1 = (1, 2, -3)$; $u_2 = (1, 3, 2)$; $u_3 = (2, 5, 2)$, ta có $B = \{u_1, u_2, u_3\}$ là một cơ sở của $\mathbf{R}^3$ vì

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 5 & 2 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$$

b) Với $u = (4, 9, -1)$, ta có

$$[u]_{\mathscr{B}} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3 = u \Leftrightarrow UX = B \qquad (1)$$

trong đó:

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 5 \\ -3 & 2 & 2 \end{pmatrix};\ B = \begin{pmatrix} 4 \\ 9 \\ -1 \end{pmatrix};\ X = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix}$$

Giải hệ trên ta được: $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (1, -1, 2)$. Vậy với $u = (4, 9, -1)$, ta có

$$[u]_{\mathscr{B}} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Câu 4. Xét ma trận $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 7 & 2 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$.

a) - Đa thức đặc trưng:

$$\varphi_A(\lambda) = |A - \lambda I_3| = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 & 1 \\ 0 & 7-\lambda & 2 \\ 0 & -2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)\begin{vmatrix} 7-\lambda & 2 \\ -2 & 2-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (3-\lambda)(\lambda^2 - 9\lambda + 18) = -(\lambda-3)^2(\lambda-6).$$

- Trị riêng:

$$\varphi(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda = 3 \text{ (bội 2)}, \lambda = 6 \text{ (bội 1)}.$$

Vậy A có 2 trị riêng $\lambda_1 = 3$ (bội 2), $\lambda_2 = 6$(bội 1).

- Không gian riêng:

- Không gian riêng $V(\lambda_1)$ ứng với trị riêng $\lambda_1 = 3$ là không gian nghiệm của hệ:

$$Au = \lambda_1 u \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 7 & 2 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}(x_1, x_2, x_3) = 3(x_1, x_2, x_3)$$

$$\Leftrightarrow (3x_1 + 2x_2 + x_3, 7x_2 + 2x_3, -2x_2 + 2x_3) = (3x_1, 3x_2, 3x_3)$$

$$\Leftrightarrow 2x_2 + x_3 = 0 \qquad (1)$$

Giải hệ (1), ta tìm được nghiệm tổng quát $(x_1, x_2, x_3) = (\alpha, -\beta, 2\beta)$ với $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ tùy ý. Suy ra

$$V(\lambda_1) = \{(\alpha, -\beta, 2\beta) \mid \alpha, \beta \in \mathbf{R}\} = \{\alpha(1,0,0) + \beta(0,-1,2) \mid \alpha, \beta \in \mathbf{R}\}$$
$$= \langle (1,0,0); (0,-1,2) \rangle.$$

Vậy $V(\lambda_1)$ có dim $V(\lambda_1) = 2$ (= số bội của λ_1) với cơ sở

$$B_1 = \{(1,0,0); (0,-1,2)\}.$$

- Không gian riêng $V(\lambda_2)$ ứng với trị riêng $\lambda_2 = 6$ là không gian nghiệm của hệ:

$$Au = \lambda_2 u \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 7 & 2 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}(x_1, x_2, x_3) = 6(x_1, x_2, x_3)$$

$$\Leftrightarrow (3x_1 + 2x_2 + x_3, 7x_2 + 2x_3, -2x_2 + 2x_3) = (6x_1, 6x_2, 6x_3)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -3x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases} \qquad (2)$$

Giải hệ (2), ta tìm được nghiệm tổng quát $(x_1, x_2, x_3) = (-\alpha, -2\alpha, \alpha)$ với $\alpha \in \mathbf{R}$ tùy ý. Suy ra

$$V(\lambda_2) = \{(-\alpha,-2\alpha, \alpha) \mid \alpha \in \mathbf{R}\} = \{\alpha(-1,-2, 1) \mid \alpha \in \mathbf{R}\} = < (-1,-2, 1) >.$$

Vậy $V(\lambda_2)$ có dim $V(\lambda_2) = 1$ với cơ sở $B_2 = \{(-1, -2, 1)\}$.

b) Vì các không gian riêng của A đều có số chiều bằng số bội của các trị riêng tương ứng nên A chéo hóa được.mLập ma trận P bằng cách lần lượt dựng các vectơ trong $B_1 = \{(1,0,0); (0, -1,2)\}$ và $B_2 = \{(0, -2, 1)\}$ thành các cột:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Khi đó ta có

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

LỜI GIẢI TOÁN CAO CẤP C_2 - ĐỀ THAM KHẢO 2

Câu 1. Ta giải và biện luận hệ

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 2; \\ x_1 + mx_2 + 3x_3 = 4; \\ x_1 + 2x_2 + (m-1)x_3 = 0. \end{cases} \qquad (1)$$

bằng qui tắc Cramer:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & m & 3 \\ 1 & 2 & m-1 \end{vmatrix} \overset{d_2 := d_2 - d_1}{\underset{d_3 := d_3 - d_1}{=\!=}} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & m-1 & 2 \\ 0 & 1 & m-2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} m-1 & 2 \\ 1 & m-2 \end{vmatrix} = m^2 - 3m$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & m & 3 \\ 0 & 2 & m-1 \end{vmatrix} \overset{d_2 := d_2 - 2d_1}{=\!=} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & m-2 & 1 \\ 0 & 2 & m-1 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} m-2 & 1 \\ 2 & m-1 \end{vmatrix} = 2(m^2 - 3m)$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 0 & m-1 \end{vmatrix} \overset{d_2 := d_2 - 2d_1}{=\!=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & m-1 \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & m-1 \end{vmatrix} = 2m$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & m & 4 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} \overset{d_2 := d_2 - 2d_1}{=\!=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & m-2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} -1 & m-2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -2m$$

Biện luận: $\Delta = 0 \Leftrightarrow m^2 - 3m = 0 \Leftrightarrow m = 0, m = 3.$

- $m \neq 0$ và $m \neq 3$: $\Delta \neq 0$ nên hệ (1) có duy nhất một nghiệm định bởi:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{2(m^2-3m)}{m^2-3m} = 2$$
$$x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{2m}{m^2-3m} = \frac{2}{m-3}$$
$$x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = -\frac{2m}{m^2-3m} = -\frac{2}{m-3}$$

- $m = 3$: $\Delta = 0$, $\Delta_2 \neq 0$ nên hệ (1) vô nghiệm.
- $m = 0$: $\Delta = \Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3 = 0$. Hệ (1) trở thành:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 + 3x_3 = 4 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \end{cases} \qquad (2)$$

$$(A \mid B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[d_3:=d_3-d_1]{d_2:=d_2-d_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow{d_3:=d_3-d_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$(2) \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ -x_2 + 2x_3 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_3 = \alpha \\ x_2 = 2\alpha - 2 \\ x_1 = 2 - x_2 - x_3 = 4 - 3\alpha \end{cases}$$

Vậy với m = 0, hệ (1) có vô số nghiệm $(x_1, x_2, x_3) = (4 - 3\alpha,\ 2\alpha - 2,\ \alpha)$ với $\alpha \in \mathbf{R}$ tuỳ ý.

Câu 2. Với các ma trận $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, ma trận X thoả AX = B phải thuộc loại 3×2. Đặt

$$X = \begin{pmatrix} x_1 & x_4 \\ x_2 & x_5 \\ x_3 & x_6 \end{pmatrix}$$

Ta có

$$AX = B \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & x_4 \\ x_2 & x_5 \\ x_3 & x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 - x_2 + 2x_3 & x_4 - x_5 + 2x_6 \\ 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 & 2x_4 - 2x_5 + 3x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 1 \\ 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -1 \\ x_4 - x_5 + 2x_6 = 2 \\ 2x_4 - 2x_5 + 3x_6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 1 \\ -x_3 = -3 \\ x_4 - x_5 + 2x_6 = 2 \\ -x_6 = -4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = \alpha; x_3 = 3; x_1 = -5 + \alpha \\ x_5 = \beta; x_6 = 4; x_4 = -6 + \beta \end{cases}$$

Vậy các ma trận X cần tìm là:

$$X = \begin{pmatrix} -5 + 6\alpha & -6 + \beta \\ \alpha & \beta \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \text{ với } \alpha, \beta \in \mathbb{R} \text{ tuỳ ý.}$$

Câu 3. Không gian W sinh bởi

$u_1 = (1,1,0,1)$; $u_2 = (1,2,0,1)$; $u_3 = (1,0,1,1)$; $u_4 = (0,3,-2,0)$.

là không gian dòng của ma trận A có được bằng cách xếp u_1, u_2, u_3, u_4 thành các dòng:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -2 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = R$$

a) Vì R có dòng 0 nên $u_1; u_2; u_3; u_4$ phụ thuộc tuyến tính .

b) W có dimW = 3 và một cơ sở B = {v_1, v_2, v_3}, trong đó

$v_1 = (1, 1, 0, 1)$

$v_2 = (0, 1, 0, 0)$

$v_3 = (0, 0, 1, 0)$

Câu 4. Xét ma trận $A=\begin{pmatrix}1&-2&0\\-2&1&0\\0&0&3\end{pmatrix}$.

a) - Đa thức đặc trưng:

$$\varphi_A(\lambda)=|A-\lambda I_3|=\begin{vmatrix}1-\lambda&-2&0\\-2&1-\lambda&0\\0&0&3-\lambda\end{vmatrix}=(3-\lambda)\begin{vmatrix}1-\lambda&-2\\-2&1-\lambda\end{vmatrix}$$
$$=(3-\lambda)(\lambda^2-2\lambda-3)=-(\lambda-3)^2(\lambda+1).$$

- Trị riêng:

$$\varphi(\lambda)=0\Leftrightarrow\lambda=3\text{ (bội 2)},\ \lambda=-1\text{ (bội 1)}.$$

Vậy A có 2 trị riêng $\lambda_1 = 3$ (bội 2), $\lambda_2 = -1$ (bội 1).

- Không gian riêng:

- Không gian riêng $V(\lambda_1)$ ứng với trị riêng $\lambda_1 = 3$ là không gian nghiệm của hệ:

$$Au=\lambda_1u\Leftrightarrow\begin{pmatrix}1&-2&0\\-2&1&0\\0&0&3\end{pmatrix}(x_1,x_2,x_3)=3(x_1,x_2,x_3)$$
$$\Leftrightarrow(x_1-2x_2,-2x_1+x_2,3x_3)=(3x_1,3x_2,3x_3)$$
$$\Leftrightarrow x_1+x_2=0\qquad(1)$$

Giải hệ (1), ta tìm được nghiệm tổng quát $(x_1, x_2, x_3) = (-\alpha, \alpha, \beta)$ với $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ tùy ý. Suy ra

$$V(\lambda_1)=\{(-\alpha,\alpha,\beta)\mid\alpha,\beta\in\mathbf{R}\}=\{\alpha(-1,1,0)+\beta(0,0,1)\mid\alpha,\beta\in\mathbf{R}\}$$
$$=\langle(-1,1,0);(0,0,1)\rangle.$$

Vậy $V(\lambda_1)$ có $\dim V(\lambda_1) = 2$ (= số bội của λ_1) với cơ sở

$$B_1=\{(-1,1,0);(0,0,1)\}.$$

- Không gian riêng $V(\lambda_2)$ ứng với trị riêng $\lambda_2 = -1$ là không gian nghiệm của hệ:

$$Au=\lambda_2u\Leftrightarrow\begin{pmatrix}1&-2&0\\-2&1&0\\0&0&3\end{pmatrix}(x_1,x_2,x_3)=-(x_1,x_2,x_3)$$
$$\Leftrightarrow(x_1-2x_2,-2x_1+x_2,3x_3)=(-x_1,-x_2,-x_3)$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}x_1-x_2=0\\x_3=0\end{cases}\qquad(2)$$

Giải hệ (2), ta tìm được nghiệm tổng quát $(x_1, x_2, x_3) = (\alpha, \alpha, 0)$ với $\alpha \in \mathbf{R}$ tùy ý. Suy ra

$$V(\lambda_2)=\{(\alpha,\alpha,0)\mid\alpha\in\mathbf{R}\}=\{\alpha(1,1,0)\mid\alpha\in\mathbf{R}\}=\langle(1,1,0)\rangle.$$

Vậy $V(\lambda_2)$ có $\dim V(\lambda_2) = 1$ với cơ sở $B_2 = \{(1, 1, 0)\}$.

b) Vì các không gian riêng của A đều có số chiều bằng số bội của các trị riêng tương ứng nên A chéo hóa được. Lập ma trận P bằng cách lần lượt dựng các vectơ trong $B_1 = \{(-1,1,0); (0, 0,1)\}$ và $B_2 = \{(1, 1, 0)\}$ thành các cột

$$P=\begin{pmatrix}-1&0&1\\1&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$$

Khi đó ta có

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}3&0&0\\0&3&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$$

LỜI GIẢI TOÁN CAO CẤP C_2 - ĐỀ THAM KHẢO 3

Câu 1. Ta giải hệ phương trình tuyến tính

$$\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 1 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 - 2x_5 = 1 \\ 4x_1 - 10x_2 + 5x_3 - 5x_4 + 7x_5 = 1 \\ 2x_1 - 14x_2 + 7x_3 - 7x_4 + 11x_5 = -1 \end{cases} \qquad (1)$$

bằng phương pháp Gauss

$$(A \mid B) = \left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & -2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 1 & -2 & 1 \\ 4 & -10 & 5 & -5 & 7 & 1 \\ 2 & -14 & 7 & -7 & 11 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{d_1 \leftrightarrow d_2} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & -2 & 1 \\ 2 & -2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 4 & -10 & 5 & -5 & 7 & 1 \\ 2 & -14 & 7 & -7 & 11 & -1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\substack{d_3:=d_3-4d_1 \\ d_4:=d_4-2d_1}]{d_2:=d_2-2d_1} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & -6 & 3 & -3 & 5 & -1 \\ 0 & -18 & 9 & -9 & 15 & -3 \\ 0 & -18 & 9 & -9 & 15 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow[d_4:=d_4-3d_2]{d_3:=d_3-3d_2} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & -6 & 3 & -3 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 - 2x_5 = 1 \\ -6x_2 + 3x_3 - 3x_4 + 5x_5 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_3 = 2\alpha; x_4 = 2\beta; x_5 = 6\gamma \\ x_2 = \dfrac{1}{6} + \alpha - \beta + 5\gamma \\ x_1 = \dfrac{2}{3} + 2\gamma \end{cases}$$

Suy ra nghiệm của (1) là:

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (\frac{2}{3} + 2\gamma, \frac{1}{6} + \alpha - \beta + 5\gamma, 2\alpha, 2\beta, 6\gamma)$$

với $\alpha; \beta; \gamma \in \mathbf{R}$ tuỳ ý.

Câu 2. a) Tính định thức của A.

$$\det A = \begin{vmatrix} 8 & 4 & 5 & 4 \\ 6 & m+5 & 5 & 6 \\ 3 & 2m & 2m & 3 \\ m+2 & 2m & 2m & m+2 \end{vmatrix} \overset{c_1 := c_1 - c_4}{=\!=\!=} \begin{vmatrix} 4 & 4 & 5 & 4 \\ 0 & m+5 & 5 & 6 \\ 0 & 2m & 2m & 3 \\ 0 & 2m & 2m & m+2 \end{vmatrix}$$

$$= 4\begin{vmatrix} m+5 & 5 & 6 \\ 2m & 2m & 3 \\ 2m & 2m & m+2 \end{vmatrix} \overset{d_3 := d_3 - d_2}{=\!=\!=} 4\begin{vmatrix} m+5 & 5 & 6 \\ 2m & 2m & 3 \\ 0 & 0 & m-1 \end{vmatrix} = 4(m-1)\begin{vmatrix} m+5 & 5 \\ 2m & 2m \end{vmatrix} = 8m^2(m-1)$$

b) Ta có

A^2 khả nghịch $\Leftrightarrow \det(A^2) \neq 0 \Leftrightarrow [\det A]^2 \neq 0 \Leftrightarrow \det A \neq 0$
$\Leftrightarrow 8m^2(m-1) \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 0$ và $m \neq 1$.

Câu 3. a) Với

$u_1 = (1, 2, 3, 0)$; $u_2 = (2, -1, 0, 1)$; $u_3 = (1, 7, 9, -1)$

ta lập ma trận A bằng cách xếp u_1, u_2, u_3 thành các dòng:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 7 & 9 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -5 & -6 & 1 \\ 0 & 5 & 6 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -5 & -6 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = R$$

Vì R có dòng 0 nên $u_1; u_2; u_3$ phụ thuộc tuyến tính.

b) $u = (0,5, 6, m)$ là một tổ hợp tuyến tính của $u_1; u_2; u_3$ khi và chỉ khi phương trình sau có nghiệm:

$$\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3 = u \Leftrightarrow UX = B \qquad (1)$$

trong đó:

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 7 \\ 3 & 0 & 9 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 6 \\ m \end{pmatrix}; \quad X = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix}$$

$$(A \mid B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 7 & 5 \\ 3 & 0 & 9 & 6 \\ 0 & 1 & -1 & m \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & 5 & 5 \\ 0 & -6 & 6 & 6 \\ 0 & 1 & -1 & m \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & m+1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

(1) có nghiệm khi và chỉ khi m = –1. Do đó u = = (0, 5, 6, m) là một tổ hợp tuyến tính của u_1; u_2; u_3 khi và chỉ khi m = –1.

Câu 4. Xét ma trận $A = \begin{pmatrix} 7 & -12 & 6 \\ 10 & -19 & 10 \\ 12 & -24 & 13 \end{pmatrix}$.

a) - Đa thức đặc trưng:

$$\varphi_A(\lambda) = |A - \lambda I_3| = \begin{vmatrix} 7-\lambda & -12 & 6 \\ 10 & -19-\lambda & 10 \\ 12 & -24 & 13-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -12 & 6 \\ 1-\lambda & -19-\lambda & 10 \\ 1-\lambda & -24 & 13-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & -12 & 6 \\ 1 & -19-\lambda & 10 \\ 1 & -24 & 13-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (1-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & -12 & 6 \\ 0 & -7-\lambda & 4 \\ 0 & -12 & 7-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\begin{vmatrix} -7-\lambda & 4 \\ -12 & 7-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(\lambda^2-1) = -(\lambda-1)^2(\lambda+1).$$

- Trị riêng:

$$\varphi(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1 \text{ (bội 2)}, \lambda = -1 \text{ (bội 1)}.$$

Vậy A có 2 trị riêng $\lambda_1 = 1$ (bội 2), $\lambda_2 = -1$ (bội 1).

- Không gian riêng:

• Không gian riêng $V(\lambda_1)$ ứng với trị riêng $\lambda_1 = 1$ là không gian nghiệm của hệ:

$$Au = \lambda_1 u \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 7 & -12 & 6 \\ 10 & -19 & 10 \\ 12 & -24 & 13 \end{pmatrix}(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2, x_3)$$

$$\Leftrightarrow (7x_1 - 12x_2 + 6x_3, 10x_1 - 19x_2 + 10x_3, 12x_1 - 24x_2 + 13x_3) = (x_1, x_2, x_3)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 6x_1 - 12x_2 + 6x_3 = 0 \\ 10x_1 - 20x_2 + 10x_3 = 0 \\ 12x_1 - 24x_2 + 12x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \qquad (1)$$

Giải hệ (1), ta tìm được nghiệm tổng quát $(x_1, x_2, x_3) = (2\alpha - \beta, \alpha, \beta)$ với $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ tùy ý. Suy ra

$V(\lambda_1) = \{(2\alpha - \beta, \alpha, \beta) | \alpha, \beta \in \mathbf{R}\} = \{\alpha(2,1,0) + \beta(-1,0,1) | \alpha, \beta \in \mathbf{R}\}$

$= <(2,1,0); (-1,0,1)>$.

Vậy $V(\lambda_1)$ có dim $V(\lambda_1) = 2$ (= số bội của λ_1) với cơ sở

$B_1 = \{(2, 1,0); (-1,0,1)\}$.

• Không gian riêng $V(\lambda_2)$ ứng với trị riêng $\lambda_2 = -1$ là không gian nghiệm của hệ:

$$Au = \lambda_2 u \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 7 & -12 & 6 \\ 10 & -19 & 10 \\ 12 & -24 & 13 \end{pmatrix}(x_1, x_2, x_3) = -(x_1, x_2, x_3)$$

$$\Leftrightarrow (7x_1 - 12x_2 + 6x_3, 10x_1 - 19x_2 + 10x_3, 12x_1 - 24x_2 + 13x_3) = -(x_1, x_2, x_3)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 8x_1 - 12x_2 + 6x_3 = 0 \\ 10x_1 - 18x_2 + 10x_3 = 0 \\ 12x_1 - 24x_2 + 14x_3 = 0 \end{cases} \qquad (2)$$

$$\begin{pmatrix} 8 & -12 & 6 \\ 10 & -18 & 10 \\ 12 & -24 & 14 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 4 & -6 & 3 \\ 5 & -9 & 5 \\ 6 & -12 & 7 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & 3 & -2 \\ 5 & -9 & 5 \\ 6 & -12 & 7 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & 3 & -2 \\ 0 & 6 & -5 \\ 0 & 6 & -5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & 3 & -2 \\ 0 & 6 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(2) \Leftrightarrow \begin{cases} -x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 0 \\ \quad 6x_2 - 5x_3 = 0 \end{cases} \qquad (2')$$

Giải hệ (2′), ta tìm được nghiệm tổng quát $(x_1, x_2, x_3) = (3\alpha, 5\alpha, 6\alpha)$ với $\alpha \in \mathbf{R}$ tùy ý. Suy ra

$V(\lambda_2) = \{(3\alpha, 5\alpha, 6\alpha) | \alpha \in \mathbf{R}\} = \{\alpha(3, 5, 6) | \alpha \in \mathbf{R}\} = <(3, 5, 6)>$.

Vậy $V(\lambda_2)$ có dim $V(\lambda_2) = 1$ với cơ sở $B_2 = \{(3, 5, 6)\}$.

b) Vì các không gian riêng của A đều có số chiều bằng số bội của các trị riêng tương ứng nên A chéo hóa được. Lập ma trận P bằng cách lần lượt dựng các vectơ trong $B_1 = \{(2, 1,0); (-1,0,1)\}$ và $B_2 = \{(3, 5, 6)\}$ thành các cột

$$P = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

Khi đó ta có

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$
