MỘT SỐ BÀI TẬP HÌNH HỌC KHÔNG GIAN
(CÓ LỜI GIẢI CHI TIẾT)

BÀI 1

Câu 1:

Trong không gian Oxyz, viết phương trình mặt phẳng (P) chứa đường thẳng (d) : $\begin{cases} x-y-2=0 \\ 2x-z-6=0 \end{cases}$ sao cho giao tuyến của mặt phẳng (P) và mặt cầu (S) : $x^2+y^2+z^2+2x-2y+2z-1=0$ là đường tròn có bán kính r = 1.

Câu 2:

Cho lăng trụ ABC.A'B'C' có các mặt bên đều là hình vuông cạnh a. Gọi D, F lần lượt là trung điểm các cạnh BC, C'B'. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng A'B và B'C'.

GIẢI

Câu 1:

Mặt phẳng (P) chứa (d) có dạng: m(x – y – 2) + n(2x – z – 6) = 0

$\Leftrightarrow (P): (m+2n)x - my - nz - 2m - 6n = 0$

- Mặt cầu (S) có tâm I(-1; 1; -1), bán kính R = 2.
- (P) cắt (S) theo một đường tròn giao tiếp (C) có bán kính r = 1

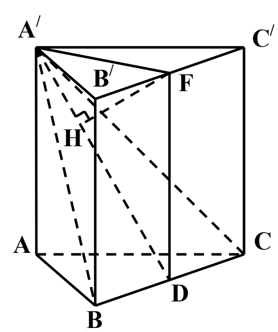
$\Leftrightarrow d(I;P) = \sqrt{R^2 - r^2} = \sqrt{3}$

$\Leftrightarrow \dfrac{|-m-2n-m+n-2m-6n|}{\sqrt{(m+2n)^2+m^2+n^2}} = \sqrt{3} \quad \Leftrightarrow |-4m-7n| = \sqrt{3}.\sqrt{2m^2+5n^2+4m.n}$

$\Leftrightarrow 5m^2 + 22m.n + 17n^2 = 0$

- Cho $n=1 \Rightarrow 5m^2+22m+17=0 \Leftrightarrow m=-1$ hay $m=-\dfrac{17}{5}$
- Vậy, có 2 mặt phẳng (P): $\left[\begin{array}{l} (P_1): x+y-z-4=0 \\ (P_2): 7x-17y+5z-4=0 \end{array}\right.$

Câu 2:



. *Cách 1*:

- Vì các mặt bên của lăng trụ là các hình vuông

$\Rightarrow AB = BC = CA = A'B' = B'C' = C'A' = a$

$\Rightarrow$ các tam giác ABC, $A'B'C'$ là các tam giác đều.

- Ta có: $B'C' // BC \Rightarrow B'C' // (A'BC)$

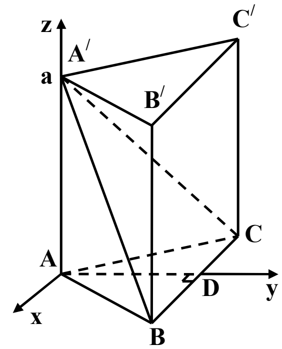
$\Rightarrow d(A'B; B'C') = d(B'C'; (A'BC)) = d(F; (A'BC))$

- Ta có: $\begin{cases} BC \perp FD \\ BC \perp A'D \quad (\Delta A'BC \text{ cân tại } A') \end{cases} \Rightarrow BC \perp (A'BC)$
- Dựng $FH \perp A'D$
- Vì $BC \perp (A'BC) \Rightarrow BC \perp FH \Rightarrow H \perp (A'BC)$

- $\Delta A'FD$ vuông có: $\dfrac{1}{FH^2}=\dfrac{1}{A'F^2}+\dfrac{1}{FD^2}=\dfrac{4}{3a^2}+\dfrac{1}{a^2}=\dfrac{7}{3a^2}\Rightarrow FH=\dfrac{a\sqrt{21}}{7}$.
- Vậy, $d(A'B;\,B'C')=FH=\dfrac{a\sqrt{21}}{7}$

Cách 2:

- Vì các mặt bên của lăng trụ là các hình vuông $\Rightarrow \Delta ABC, \Delta A'B'C'$ là các tam giác đều cạnh a.
- Dựng hệ trục Axyz, với Ax, Ay, Az đôi một vuông góc, A(0; 0; 0), $B\left(\dfrac{a}{2};\dfrac{a\sqrt3}{2};0\right), C\left(-\dfrac{a}{2};\dfrac{a\sqrt3}{2};0\right), A'(0;0;a)$, $B'\left(\dfrac{a}{2};\dfrac{a\sqrt3}{2};a\right), C'\left(-\dfrac{a}{2};\dfrac{a\sqrt3}{2};a\right)$



- Ta có: $B'C'\,/\!/\,BC,\ B'C'\,/\!/\,(A'BC)$
$$\Rightarrow d(B'C';\,A'B)=d(B'C';\,(A'BC))=d(B';\,(A'BC))$$
- $\overrightarrow{A'B}=\left(\dfrac{a}{2};\dfrac{a\sqrt3}{2};-a\right),\ \overrightarrow{A'C}=\left(-\dfrac{a}{2};\dfrac{a\sqrt3}{2};-a\right)$
- $[\overrightarrow{A'B};\overrightarrow{A'C}]=\left(0;a^2;\dfrac{a^2\sqrt3}{2}\right)=a^2\left(0;1;\dfrac{\sqrt3}{2}\right)=a^2.\vec n$, với $\vec n=\left(0;1;\dfrac{\sqrt3}{2}\right)$
- Phương trình mp $(A'BC)$ qua A' với pháp vectơ $\vec n$:
$$0(x-0)+1(y-0)+\frac{\sqrt3}{2}(z-a)=0$$
$\Leftrightarrow (A'BC): y+\dfrac{\sqrt3}{2}z-\dfrac{a\sqrt3}{2}=0$
- $$d(B'(A'BC))=\frac{\left|\frac{a\sqrt3}{2}+\frac{\sqrt3}{2}.a-\frac{a\sqrt3}{2}\right|}{\sqrt{1+\frac{3}{4}}}=\frac{\frac{a\sqrt3}{2}}{\frac{\sqrt7}{2}}=\frac{a\sqrt{21}}{7}.$$
- Vậy, $d(A'B;\,B'C')=\dfrac{a\sqrt{21}}{7}$.

BÀI 2

Câu 1:

Trong không gian Oxyz cho A(0; 1; 0), B(2; 2; 2), C(-2; 3; 1) và đường thẳng $(\Delta):\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+2}{-1}=\dfrac{z-3}{2}$

1. Tìm điểm M thuộc (Δ) để thể tích tứ diện MABC bằng 3.
2. Tìm điểm N thuộc (Δ) để thể tích tam giác ABN nhỏ nhất.

Câu 2: (1,0 điểm)

Cho hình chóp S.ABC đáy ABC là tam giác đều cạnh a. SA = SB = SC, khoảng cách từ S đến mặt phẳng (ABC) là h. Tính h theo a để hai mặt phẳng (SAB) và (SAC) vuông góc nhau.

GIẢI

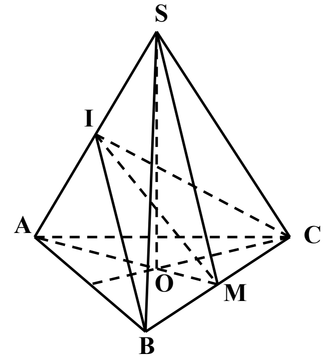
Câu 1:

1. Phương trình tham số của (D): $\begin{cases} x = 1+2t \\ y = -2-t \\ z = 3+2t \end{cases}$

- $M \in (\Delta) \Rightarrow M(1+2t; -2-t; 3+2t)$
- $\overrightarrow{AB} = (2; 1; 2)$, $\overrightarrow{AC} = (-2; 2; 1)$
- $[\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}] = (-3; -6; 6) = -3(1; 2; -2) = -3.\vec{n}$, với $\vec{n} = (1; 2; -2)$
- Phương trình mp (ABC) qua A với pháp vectơ $\vec{n}$: (ABC): x + 2y – 2z – 2 = 0.
- $S_{ABC} = \frac{1}{2}\left|[\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}]\right| = \frac{1}{2}\sqrt{(-3)^2+(-6)^2+6^2} = \frac{9}{2}.$
- Đường cao MH của tứ diện MABC là khoảng từ M đến (ABC):
  $MH = d(M(ABC)) = \frac{|1+2t+2(-2-t)-2(3+2t)-2|}{\sqrt{1+4+4}} = \frac{|-4t-11|}{3}$
- Thể tích tứ diện MABC bằng 3 $\Leftrightarrow V = \frac{1}{3}.\frac{9}{2}.\frac{|4t+11|}{3} = 3$
  $\Leftrightarrow |4t+11| = 6 \Leftrightarrow t = -\frac{5}{4}$ hay $t = -\frac{17}{4}.$
- Vậy, có 2 điểm M cần tìm là: $M\left(-\frac{3}{2}; -\frac{3}{4}; \frac{1}{2}\right)$ hay $M\left(-\frac{15}{2}; \frac{9}{4}; \frac{11}{2}\right)$

2. $N \in (\Delta) \Rightarrow N(1+2t; -2-t; 3+2t)$

- $S_{ABN} = \frac{1}{2}\left|[\overrightarrow{NA}; \overrightarrow{NB}]\right| = \frac{1}{2}\sqrt{32t^2+128t+146} = \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{(4t+8)^2+9} \geq \frac{3\sqrt{2}}{2}$
  $\Rightarrow \max S_{ABN} = \frac{3\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow 4t+8=0 \Leftrightarrow t=-2.$
- Vậy, điểm N cần tìm là N(-3; 0; 1).



Câu 2:

Cách 1:

- Gọi O là tâm của ΔABC
- Ta có: $\begin{cases} SA = SB = SC \\ OA = OB = OC \ (\Delta ABC \text{ đều}) \end{cases}$
  $\Rightarrow$ SO là trục của đường tròn (ABC)
  $\Rightarrow SO \perp (ABC)$
- Mà : $AO \perp BC; SO \perp BC \Rightarrow BC \perp (SOA) \Rightarrow BC \perp SA$
- Dựng $BI \perp SA$, suy ra: $SA \perp (IBC) \Rightarrow SA \perp IC.$

$\Rightarrow \widehat{BIC}$ là góc phẳng nhị diện (B, SA, C).

◦ ΔSOA vuông có: $SA^2 = SO^2 + OA^2 = h^2 + \dfrac{a^2}{3} = \dfrac{3h^2 + a^2}{3} \Rightarrow SA = \dfrac{\sqrt{3h^2 + a^2}}{\sqrt{3}}$

◦ Gọi M là trung điểm BC
Ta có: $BM \perp (SOA),\ BI \perp SA$
$\Rightarrow IM \perp SA$ (định lý 3 đường vuông góc)
$\Rightarrow \Delta MIA \backsim \Delta SOA$

$$\Rightarrow MI = SO.\frac{AM}{SA} = h.\frac{a\sqrt{3}}{2}.\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3h^2 + a^2}} = \frac{3ah}{2\sqrt{3h^2 + a^2}}$$

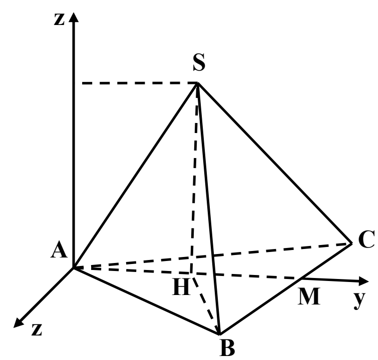
◦ $\Delta SAB = \Delta SAC$ (c.c.c) $\Rightarrow IB = IC \Rightarrow \Delta IBC$ cân tại I.

◦ $(SAB) \perp (SAC) \Leftrightarrow \Delta IBC$ vuông cân tại I $\Leftrightarrow IM = \dfrac{1}{2}BC$

$$\Leftrightarrow \frac{3ah}{2\sqrt{3h^2 + a^2}} = \frac{1}{2}a \Leftrightarrow 3h = \sqrt{3h^2 + a^2}$$

$$\Leftrightarrow 9h^2 = 3h^2 + a^2 \quad \Leftrightarrow h = \frac{a\sqrt{6}}{6}.$$

◦ Vậy, $h = \dfrac{a\sqrt{6}}{6}$.



Cách 2:

◦ Gọi H là tâm của ΔABC
và M là trung điểm của BC

◦ Ta có: $\begin{cases} SA = SB = SC \\ HA = HB = HC\ (\Delta ABC \text{ đều}) \end{cases}$

◦ Dựng hệ trục tọa độ Axyz, với Ax, Ay, Az đôi một vuông góc $A(0; 0; 0)$,

$$B\left(\frac{a}{2}; \frac{a\sqrt{3}}{2}; 0\right), C\left(-\frac{a}{2}; \frac{a\sqrt{3}}{2}; 0\right), H\left(0; \frac{a\sqrt{3}}{2}; 0\right), S\left(0; \frac{a\sqrt{3}}{3}; h\right).$$

◦ $\overrightarrow{SA} = \left(0; \dfrac{a\sqrt{3}}{3}; h\right), \overrightarrow{SB} = \left(\dfrac{a}{2}; \dfrac{a\sqrt{3}}{6}; -h\right), \overrightarrow{SC} = \left(-\dfrac{a}{2}; \dfrac{a\sqrt{3}}{6}; -h\right)$

◦ $[\overrightarrow{SA}; \overrightarrow{SB}] = \left(-\dfrac{ah\sqrt{3}}{2}; \dfrac{ah}{2}; -\dfrac{a^2\sqrt{3}}{6}\right) = -\dfrac{a}{6}(3h\sqrt{3}; -3h; a\sqrt{3}) = -\dfrac{a}{6}.\vec{n}_1,$

với $\vec{n}_1 = (3h\sqrt{3}; -3h; a\sqrt{3})$

◦ $[\overrightarrow{SA}; \overrightarrow{SC}] = \left(-\dfrac{ah\sqrt{3}}{2}; -\dfrac{ah}{2}; \dfrac{a^2\sqrt{3}}{6}\right) = -\dfrac{a}{6}(3h\sqrt{3}; 3h; -a\sqrt{3}) = -\dfrac{a}{6}.\vec{n}_2,$

với $\vec{n}_2 = (3h\sqrt{3}; 3h; -a\sqrt{3})$.

◦ Mặt phẳng (SAB) có cặp vectơ chỉ phương $\overrightarrow{SA}; \overrightarrow{SB}$ nên có pháp vectơ $\vec{n}_1$.

◦ Mặt phẳng (SAC) có cặp vectơ chỉ phương $\overrightarrow{SA}; \overrightarrow{SC}$ nên có pháp vectơ $\vec{n}_2$.

- $(SAB) \perp (SAC) \Leftrightarrow \cos(\vec{n}_1; \vec{n}_2) = 0$

$$\Leftrightarrow 3h\sqrt{3}.3h\sqrt{3} - 3h.3h + a\sqrt{3}(-a\sqrt{3}) = 0 \Leftrightarrow 27h^2 - 9h^2 - 3a^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 18h^2 = 3a^2 \Leftrightarrow h = \frac{a\sqrt{6}}{6}.$$

- Vậy: $h = \dfrac{a\sqrt{6}}{6}$.

BÀI 3

Câu 1:

Trong không gian Oxyz cho đường thẳng (d) và mặt cầu (S):

$$(d): \begin{cases} 2x - 2y - z + 1 = 0 \\ x + 2y - 2z - 4 = 0 \end{cases} ; \qquad (S): x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 6y + m = 0$$

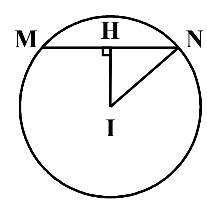
Tìm m để (d) cắt (S) tại hai điểm M, N sao cho MN = 8.

Câu 2:

Cho tứ diện OABC có đáy là ΔOBC vuông tại O, OB = a, OC = $a\sqrt{3}$, $(a > 0)$ và đường cao $OA = a\sqrt{3}$. Gọi M là trung điểm cạnh BC. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và OM.

GIẢI

Câu 1:



Mặt cầu (S): $(x-2)^2 + (y-3)^2 + z^2 = 13 - m$ có tâm I(-2; 3; 0), bán kính $R = IN = \sqrt{13 - m}$, với m < 13.

- Dựng $IH \perp MN \Rightarrow MH = HN = 4$

  $\Rightarrow IH = \sqrt{IN^2 - HN^2} = \sqrt{13 - m - 16} = \sqrt{-m - 3}$, với m < -3.

- Phương trình tham số của đường thẳng (d): $\begin{cases} x = t \\ y = 1 + \dfrac{1}{2}t \\ z = -1 + t \end{cases}$

- (d) có vectơ chỉ phương $\vec{u} = \left(1; \dfrac{1}{2}; 1\right) = \dfrac{1}{2}(2; 1; 2)$ và đi qua điểm A(0; 1; -1)

- $\overrightarrow{AI} = (-2; 2; 1)$; $[\overrightarrow{AI}; \vec{u}] = (3; 6; -6)$

- Khoảng cách h từ I đến đường thẳng (d): $h = \dfrac{\left|[\overrightarrow{AI}; \vec{u}]\right|}{|\vec{u}|} = \dfrac{\sqrt{3^2 + 6^2 + 6^2}}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2}} = \dfrac{\sqrt{81}}{\sqrt{9}} = 3.$

- Ta có: IH = h

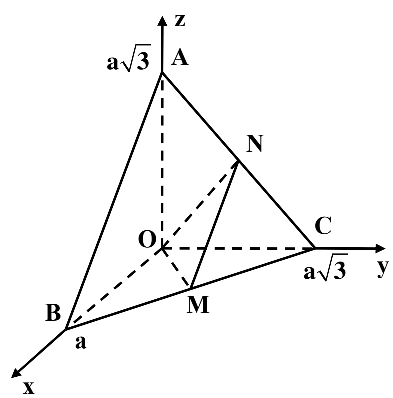
$$\Leftrightarrow \sqrt{-m - 3} = 3 \quad \Leftrightarrow -m - 3 = 9 \Leftrightarrow m = -12 \text{ (thỏa điều kiện)}$$

- Vậy, giá trị cần tìm: m = -12.

<u>Câu 2</u>:

<u>Cách 1</u>:

- Gọi N là điểm đối xứng của C qua O.
- Ta có: OM // BN (tính chất đường trung bình)
  $\Rightarrow$ OM // (ABN)
  $\Rightarrow$ d(OM; AB) = d(OM; (ABN)) = d(O; (ABN)).
- Dựng $OK \perp BN$, $OH \perp AK$ ($K \in BN$; $H \in AK$)
- Ta có: $AO \perp (OBC); OK \perp BN \Rightarrow AK \perp BN$
  $BN \perp OK; BN \perp AK \Rightarrow BN \perp (AOK) \Rightarrow BN \perp OH$
  $OH \perp AK; OH \perp BN \Rightarrow OH \perp (ABN) \Rightarrow d(O; (ABN) = OH$
- Từ các tam giác vuông OAK; ONB có:
  $$\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OK^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{ON^2} = \frac{1}{3a^2} + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{3a^2} = \frac{5}{3a^2} \Rightarrow OH = \frac{a\sqrt{15}}{5}$$
- Vậy, $d(OM;\ AB) = OH = \dfrac{a\sqrt{15}}{5}$.



<u>Cách 2</u>:

- Dựng hệ trục Oxyz, với Ox, Oy, Oz đôi một vuông góc O(0; 0; 0),
  $A(0; 0; a\sqrt{3})$; $B(a; 0; 0)$, $C(0; a\sqrt{3}; 0)$,
  $M\left(\frac{a}{2}; \frac{a\sqrt{3}}{2}; 0\right)$ và $N\left(0; \frac{a\sqrt{3}}{2}; \frac{a\sqrt{3}}{2}\right)$
  là trung điểm của AC.
- MN là đường trung bình của ΔABC
  $\Rightarrow$ AB // MN
  $\Rightarrow$ AB // (OMN) $\Rightarrow$ d(AB; OM) = d(AB; (OMN)) = d(B; (OMN)).
- $\overrightarrow{OM} = \left(\frac{a}{2}; \frac{a\sqrt{3}}{2}; 0\right), \overrightarrow{ON} = \left(0; \frac{a\sqrt{3}}{2}; \frac{a\sqrt{3}}{2}\right)$
- $[\overrightarrow{OM}; \overrightarrow{ON}] = \left(\frac{3a^2}{4}; \frac{a^2\sqrt{3}}{4}; \frac{a^2\sqrt{3}}{4}\right) = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}\left(\sqrt{3}; 1; 1\right) = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}\vec{n}$, với $\vec{n} = (\sqrt{3}; 1; 1)$
- Phương trình mp (OMN) qua O với pháp vectơ $\vec{n}$: $\sqrt{3}x + y + z = 0$
- Ta có: $d(B; (OMN)) = \dfrac{\left|\sqrt{3}.a + 0 + 0\right|}{\sqrt{3+1+1}} = \dfrac{a\sqrt{3}}{\sqrt{5}} = \dfrac{a\sqrt{15}}{5}$
- Vậy, $d(AB;\ OM) = \dfrac{a\sqrt{15}}{5}$.

<u>BÀI 4</u>

Câu 1:

Trong không gian Oxyz cho mặt phẳng $(\alpha): 2x - y + z - 5 = 0$. Viết phương trình mặt phẳng (P) qua giao tuyến của (α) và mặt phẳng (xOy) và (P) tạo với 3 mặt phẳng tọa độ một tứ diện có thể tích bằng $\frac{125}{36}$.

Câu 2:

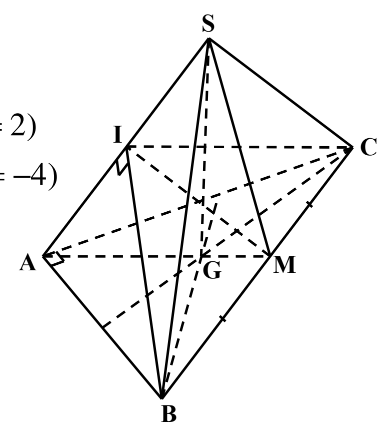
Cho hình chóp SABC có đáy là tam giác ABC vuông cân tại A, AB = AC = a ($a > 0$), hình chiếu của S trên đáy trùng với trọng tâm G của ΔABC. Đặt SG = x ($x > 0$). Xác định giá trị của x để góc phẳng nhị diện (B, SA, C) bằng 60^o.

GIẢI

Câu 1:

Phương trình mặt phẳng (xOy): z = 0

- Phương trình mặt phẳng (P) thuộc chùm xác định bởi (α) và (xOy) có dạng:
  $m(2x - y + z - 5) - nz = 0 \Leftrightarrow (P): 2mx - my + (m+n)z - 5m = 0$
- Giao điểm A, B, C của (P) và 3 trục Ox, Oy, Oz lần lượt có tọa độ:
  $A\left(\frac{5}{2}; 0; 0\right)$, $B(0; -5; 0)$, $C\left(0; 0; \frac{5m}{m+n}\right)$
- Thể tích tứ diện OABC bằng $\frac{125}{36} \Leftrightarrow V = \frac{1}{6}.OA.OB.OC = \frac{1}{6}.\frac{5}{2}.5.\left|\frac{5m}{m+n}\right| = \frac{125}{36}$
  $\Leftrightarrow |m+n| = 3|m| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m+n = 3m \\ m+n = -3m \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} m = 1, n = 2 \\ m = 1, n = -4 \end{array}\right.$
- Vậy, có 2 phương trình mặt phẳng (P):
  $$\left[\begin{array}{l} (P_1): 2x - y + 3z - 5 = 0 \quad (m = 1; n = 2) \\ (P_2): 2x - y - 3z - 5 = 0 \quad (m = 1; n = -4) \end{array}\right.$$



Câu 2:

. *Cách 1*:

- Gọi M là trung điểm của BC
  $\Rightarrow AM \perp BC$ (ΔABC vuông cân)
- Ta có: $SG \perp (ABC) \Rightarrow SG \perp BC$.
  Suy ra: $BC \perp (SAM)$
- Dựng $BI \perp SA \Rightarrow IM \perp SA$ và $IC \perp SA$
  $\Rightarrow \widehat{BIC}$ là góc phẳng nhị diện (B; SA; C).
- $\Delta SAB = \Delta SAC$ (c.c.c)
  $\Rightarrow IB = IC \Rightarrow \Delta IBC$ cân tại I.
- $BC = a\sqrt{2}$; $AM = BM = MC = \frac{1}{2}BC = \frac{a\sqrt{2}}{2}$; $AG = \frac{a\sqrt{2}}{3}$
- $\Delta AIM \sim \Delta AGS \Rightarrow IM = SG.\frac{AM}{AS} = x.\frac{a\sqrt{2}}{2}.\frac{1}{\sqrt{SG^2 + AG^2}} = \frac{ax\sqrt{2}}{2\sqrt{x^2 + \frac{2a^2}{9}}}$

$$\Leftrightarrow IM = \frac{3ax\sqrt{2}}{2\sqrt{9x^2+2a^2}}.$$

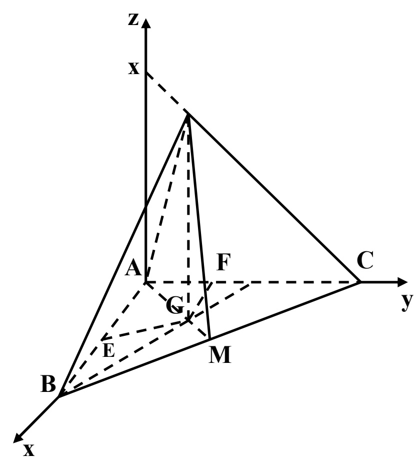
- Ta có: $\widehat{BIC} = 60^o \Leftrightarrow \widehat{BIM} = 30^o \Leftrightarrow BM = IM.tg30^o \Leftrightarrow \frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{3}.3ax\sqrt{2}}{2\sqrt{9x^2+2a^2}}$

$$\Leftrightarrow \sqrt{9x^2+2a^2} = 3x\sqrt{3} \Leftrightarrow 9x^2+2a^2 = 27x^2$$

$$\Leftrightarrow 18x^2 = 2a^2 \quad \Leftrightarrow 9x^2 = a^2 \Leftrightarrow x = \frac{a}{3}.$$

- Vậy, $x = \frac{a}{3}$.

<u>*Cách 2*</u>:



- $BC = a\sqrt{2}$
- Gọi M là trung điểm BC

  $\Rightarrow AM = \frac{a\sqrt{2}}{2};\ AG = \frac{a\sqrt{2}}{3}$
- Gọi E, F lần lượt là hình chiếu của G trên AB, AC. Tứ giác AEGF là hình vuông

  $\Rightarrow AG = AE\sqrt{2} \Rightarrow AE = AF = \frac{a}{3}.$
- Dựng hệ trục tọa độ Axyz, với Ax, Ay, Az đôi một vuông góc, A(0; 0; 0), B(a; 0; 0), C(0; a; 0), $G\left(\frac{a}{3}; \frac{a}{3}; 0\right)$, $S\left(\frac{a}{2}; \frac{a}{2}; x\right)$.
- $\overrightarrow{SA} = \left(\frac{a}{3}; \frac{a}{3}; x\right), \overrightarrow{SB} = \left(\frac{2a}{3}; -\frac{a}{3}; -x\right), \overrightarrow{SC} = \left(-\frac{a}{3}; \frac{2a}{3}; -x\right)$
- $[\overrightarrow{SA}; \overrightarrow{SB}] = \left(0; ax; -\frac{a^2}{3}\right) = a\left(0; x; -\frac{a}{3}\right) = a.\vec{n}_1$, với $\vec{n}_1 = \left(0; x; -\frac{a}{3}\right)$
- $[\overrightarrow{SA}; \overrightarrow{SC}] = (-ax; 0; \frac{a^2}{3}) = -a\left(x; 0; -\frac{a}{3}\right) = -a.\vec{n}_2$, với $\vec{n}_2 = \left(x; 0; -\frac{a}{3}\right)$.
- Mặt phẳng (SAB) có cặp vectơ chỉ phương $\overrightarrow{SA}, \overrightarrow{SB}$ nên có pháp vectơ $\vec{n}_1$
- Mặt phẳng (SAC) có cặp vectơ chỉ phương $\overrightarrow{SA}, \overrightarrow{SC}$ nên có pháp vectơ $\vec{n}_2$
- Góc phẳng nhị diện (B; SA; C) bằng 60^o.

$$\Leftrightarrow \cos 60^o = \frac{\left|0.x + x.0 + \frac{a}{3}\frac{a}{3}\right|}{\sqrt{0+x^2+\frac{a^2}{9}}\sqrt{x^2+0+\frac{a^2}{9}}} = \frac{\frac{a^2}{9}}{\frac{9x^2+a^2}{9}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} = \frac{a^2}{9x^2+a^2} \quad \Leftrightarrow 9x^2 = a^2 = 2a^2 \Leftrightarrow 9x^2 = a^2 \Leftrightarrow x = \frac{a}{3}.$$

- Vậy, $x = \frac{a}{3}$.

BÀI 5

Câu 1:

Trong không gian Oxyz, tìm trên Ox điểm A cách đều đường thẳng

$(d): \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z+2}{2}$ và mặt phẳng $(\alpha): 2x-y-2z=0.$

Câu 2:

Cho hình chóp SABC có đáy ABC là tam giác đều có cạnh bằng $2a\sqrt{2}$, SA vuông góc với (ABC) và SA = a. Gọi E, F lần lượt là trung điểm của cạnh AB, BC. Tính góc và khoảng cách giữa hai đường thẳng SE và AF.

GIẢI

Câu 1:

Gọi $A(a;\, 0;\, 0) \in Ox$.

- Khoảng cách từ A đến mặt phẳng (α): $d(A;\alpha)=\dfrac{|2a|}{\sqrt{2^2+1^2+2^2}}=\dfrac{|2a|}{3}$
- (Δ) qua $M_0(1;\, 0;\, -2)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u}=(1;\, 2;\, 2)$
- Đặt $\overrightarrow{M_0M_1}=\vec{u}$
- Do đó: $d(A;\Delta)$ là đường cao vẽ từ A trong tam giác AM_0M_1

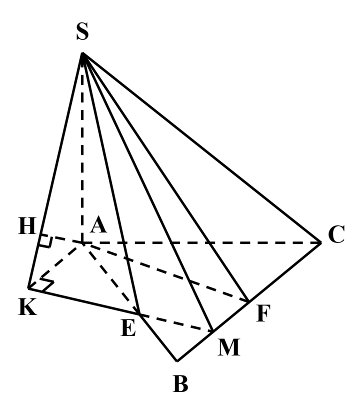
  $\Rightarrow d(A;\Delta)=\dfrac{2.S_{AM_0M_1}}{M_0M_1}=\dfrac{\left|[\overrightarrow{AM_0};\vec{u}]\right|}{|\vec{u}|}=\dfrac{\sqrt{8a^2-24a+36}}{3}$
- Theo giả thiết: $d(A;\alpha)=d(A;\Delta)$

  $\Leftrightarrow \dfrac{|2a|}{3}=\dfrac{\sqrt{8a^2-24a+36}}{3}\Leftrightarrow 4a^2=8a^2-24a+36\Leftrightarrow 4a^2-24a+36=0$

  $\Leftrightarrow 4(a-3)^2=0\Leftrightarrow a=3.$
- Vậy, có một điểm $A(3;\, 0;\, 0)$.

Câu 2:

Cách 1:



- Gọi M là trung điểm của BF $\Rightarrow$ EM // AF

  $\Rightarrow (\widehat{SA;\, AF})=(\widehat{EM;\, AF})=\widehat{SEM}$
- ΔSAE vuông tại A có:

  $SE^2=SA^2+AE=a^2+2a^2=3a^2\Rightarrow SE=a\sqrt{3}$
- $AF=\dfrac{2a\sqrt{2}.\sqrt{3}}{2}=a\sqrt{6}$

  $\Rightarrow EM=BM=MF=\dfrac{a\sqrt{6}}{2};\ BF=a\sqrt{2}$
- $SB^2=SA^2+AB^2=a^2+8a^2=9a^2\Rightarrow SB=3a$

- $SF^2 = SA^2 + AF^2 = a^2 + 6a^2 = 7a^2 \Rightarrow SF = a\sqrt{7}$
- Áp dụng định lý đường trung tuyến SM trong ΔSBF có:

  $SB^2 + SF^2 = 2.SM^2 + \frac{1}{2}BF^2$

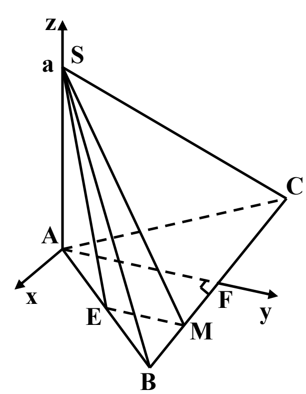
  $\Leftrightarrow 9a^2 + 7a^2 = 2SM^2 + \frac{1}{2}.2a^2 \Leftrightarrow SM^2 = \frac{15a^2}{2}$
- Gọi α là góc nhọn tạo bởi SE và AF
- Áp dụng định lý hàm Côsin vào ΔSEM có:

  $$\cos\alpha = \left|\cos\widehat{SEM}\right| = \left|\frac{ES^2 + EM^2 - SM^2}{2.ES.EM}\right| = \left|\frac{3a^2 + \frac{3a^2}{2} - \frac{15a^2}{2}}{2.\frac{a\sqrt{6}}{2}.a\sqrt{3}}\right| = \left|-\frac{\sqrt{2}}{2}\right| = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

  $\Rightarrow \alpha = 45^o.$
- Dựng $AK \perp ME;\ AH \perp SK$. Ta có: $AK = MF = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ và $AH \perp (SME)$
- Vì $AF // ME \Rightarrow d(SE;\ AF) = d(AF;\ (SME)) = AH.$
- ΔSAK vuông có:

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AK^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{2}{a^2} = \frac{3}{a^2} \Rightarrow AH = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

- Vậy, $d(SE;\ AF) = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.



<u>Cách 2</u>:

- Dựng hệ trục Axyz, với Ax, Ay, Az đôi một vuông góc, A(0; 0; 0),

  $B(a\sqrt{2};\ a\sqrt{6};\ 0),\ C(-a\sqrt{2};\ a\sqrt{6};\ 0),\ S(0;\ 0;\ a),$

  $E\left(\frac{a\sqrt{2}}{2};\ \frac{a\sqrt{6}}{2};\ 0\right);\ F(0;\ a\sqrt{6};\ 0)$

  và $M\left(\frac{a\sqrt{2}}{2};\ a\sqrt{6};\ 0\right).$
- $\overrightarrow{SE} = \left(\frac{a\sqrt{2}}{2};\ \frac{a\sqrt{6}}{2};\ -a\right);\ \overrightarrow{AF} = (a;\ a\sqrt{6};\ 0),\ \overrightarrow{SM} = \left(\frac{a\sqrt{2}}{2};\ a\sqrt{6};\ -a\right)$
- Gọi α là góc nhọn tạo bởi SE và AF.ta có:

  $$\cos\alpha = \cos(\overrightarrow{SE};\ \overrightarrow{AF}) = \left|\frac{0.\frac{a\sqrt{2}}{2} + a\sqrt{6}.\frac{a\sqrt{6}}{2}0(-a)}{\sqrt{0 + 6a^2 + 0}.\sqrt{\frac{a^2}{2} + \frac{3a^2}{2} + a^2}}\right| = \frac{3a^2}{a\sqrt{6}.a\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

  $\Rightarrow \alpha = 45^o.$
- $[\overrightarrow{SE};\ \overrightarrow{SM}] = \left(\frac{a^2\sqrt{6}}{2};\ 0;\ \frac{a^2\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}(\sqrt{2};\ 0;\ 1) = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}\vec{n},$ với $\vec{n} = (\sqrt{2};\ 0;\ 1)$