TẬP HỢP

I. Khái niệm tập hợp

1. Tập hợp và phần tử

Khái niệm tập hợp là một trong những khái niệm đầu tiên của toán học không được định nghĩa.

Do đó ta có thể hiểu một cách đơn giản tập hợp là một gom góp các vật thể mà ta gọi là ***phần tử.***

Người ta kí hiệu tập hợp bởi các chữ in hoa A, B, C, …, X, Y… Các phần tử của tập hợp được kí hiệu bởi các chữ in thường a, b, …,x, y…

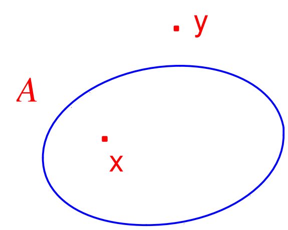
Ví dụ 1: ◘ Tập hợp các số tự nhiên từ 1 đến 10.

◘ Tập hợp người Việt Nam.

◘ Tập hợp những người yêu nhau.

◘ Tập hợp những bạn nam trong lớp cao trên 1,65m.

- Nếu x là một phần tử của tập hợp A, ta kí hiệu $x \in A$.
- Nếu y không là phần tử của tập hợp A kí hiệu $y \notin A$.



Biểu đồ Ven của tập hợp A

2. Cách xác định tập hợp

a) ***Liệt kê phần tử:*** Liệt kê các phần tử của tập hợp giữa hai dấu $\{\ \}$.

Ví dụ 2: a) Tập hợp A những số tự nhiên từ 1 đến 5 được kí hiệu là $A = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$.

b) Tập hợp B những nghiệm thực của phương trình $x^2 - x = 0$ là $B = \{0,\ 1\}$.

Ví dụ 3: Liệt kê các phần tử của mỗi tập hợp sau.

a) Không có gì quý hơn độc lập tự do.

b) Tập hợp A các số chính phương không vượt quá 100.

b) Chỉ ra tính chất đặc trưng cho các phần tử

Trong vài trường hợp, chẳng hạn như cho A là tập hợp các số nguyên dương, thì việc liệt kê phần tử trở nên rất khó khăn. Khi đó thay vì liệt kê phần tử ta có thể chỉ ra tính chất đặc trưng của các phần tử đó là A = { x | x là số nguyên dương }.

Ví dụ 4: Tập hợp B các nghiệm của phương trình $2x^2 - 5x + 3 = 0$ được viết theo ***tính chất đặc trưng*** là

$$B = \left\{ x \in \mathbb{R} \middle| \ 2x^2 - 5x + 3 = 0 \right\}$$

Tập hợp B được viết theo ***cách liệt kê phần tử*** là: $B = \left\{1,\ \frac{3}{2}\right\}$.

Ví dụ 5: Cho tập hợp $C = \{-15,\ -10,\ -5,\ 0,\ 5,\ 10,\ 15\}$. Viết tập C bằng cách chỉ rõ các tính chất đặc trưng cho các phần tử của nó

Ví dụ 6: Xét tập hợp $D = \{n \in \mathbb{N} |\ 3 \le n \le 20\}$. Hãy viết tập D bằng cách liệt kê phần tử của nó

3. Tập hợp rỗng

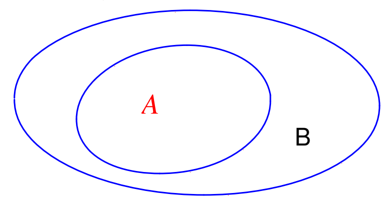
- Tập hợp không chứa phần tử nào là tập hợp rỗng, kí hiệu là $\varnothing$

Ví dụ 7: Cho $E = \{x \in \mathbb{R} |\ x^2 + x + 1 = 0\}$ thì $E = \varnothing$ vì phương trình $x^2 + x + 1 = 0$ vô nghiệm

II. Tập hợp con

1) Định nghĩa: Tập A được gọi là ***tập con*** của tập B và kí hiệu là $A \subset B$, nếu mọi phần tử của tập hợp A đều là phần tử của tập hợp B.

Hay; $\boxed{A \subset B \Leftrightarrow \forall x (x \in A \Rightarrow x \in B)}$



Thay cho $A \subset B$, ta cũng có thể viết $B \supset A$ (đọc là B chứa A)

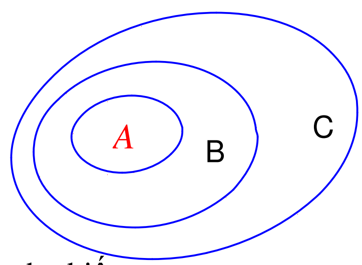
Nếu A không phải là tập con của B, ta viết $A \not\subset B$

2) Tính chất: Từ định nghĩa ta suy ra

a) $A \subset A$, *với mọi tập hợp* A

b) Nếu $A \subset B,\ B \subset C$ thì $A \subset C$

c) $\varnothing \subset A$, với mọi tập hợp A



▲ **Câu hỏi:** Cho $A = \{x \in \mathbb{Z} |\ -1 \le x \le 3\}$. Hãy cho biết:

- Các tập con của A có chứa phần tử 2 và 3.
- Các tập con của A không chứa 0, 1.
- Hãy cho một tập hợp C thoả $C \not\subset A$ và $\{-1,\ 2,\ 3\} \subset C$.

III. Tập hợp bằng nhau

Khi $A \subset B$ và $B \subset A$ ta nói tập hợp A bằng tập hợp B và viết là $A = B$. Như vậy

$$\boxed{A = B \Leftrightarrow \forall x (x \in A \Leftrightarrow x \in B)}$$

Ví dụ 8: Xét hai tập hợp $A = \{n \in \mathbb{N} |\ n \text{ là bội của 4 và } 6\}$

$$B = \{n \in \mathbb{N} |\ n \text{ là bội của } 12\}$$

1) Hãy kiểm tra các kết luận sau:

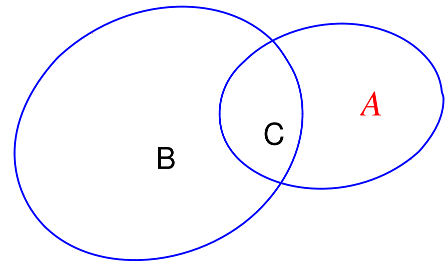
a) $A \subset B$ b) $B \subset A$

2) A có bằng B không?

IV. Các phép toán trên tập hợp

1. Giao của hai tập hợp

Cho hai tập hợp A và B. Giao của A và B, kí hiệu là $A\cap B$ là tập hợp các phần tử vừa thuộc A vừa thuộc B



Tức là

$$\boxed{x\in A\cap B \Leftrightarrow \begin{cases} x\in A \\ x\in B \end{cases}}$$

Ví dụ 1: Cho $A=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$

$$B=\left\{x\in \mathbb{Z} \middle|\ -2\le x\le 3\right\}$$

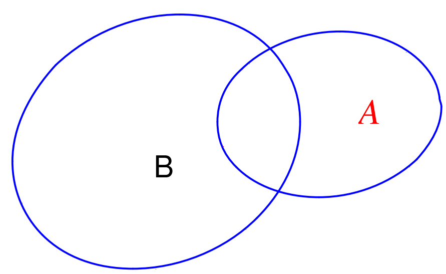
$$C=\left\{x\in \mathbb{R} \middle|\ 2x^2-3x=0\right\}$$

a) Liệt kê các phần tử của tập hợp B và C

b) Tìm $A\cap B,\ B\cap C$ và $A\cap C$

2. Hợp của hai tập hợp

Cho hai tập hợp A và B, hợp của hai tập hợp A và B, kí hiệu $A\cup B$ là tập hợp các phần tử thuộc A hoặc thuộc B



Tức là

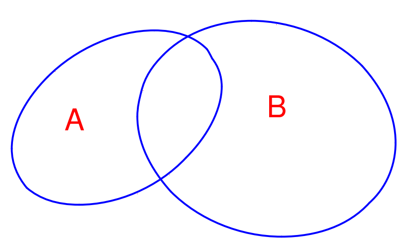
$$\boxed{x\in A\cup B \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x\in A \\ x\in B \end{array}\right.}$$

Ví dụ 2: Với các tập hợp $A,\ B$ và C trong ví dụ 1 thì

- $A\cup B=\{...............................\}$
- $B\cup C=\{...............................\}$
- $(A\cap B)\cup C=\{................................\}$

3. Hiệu và phần bù của hai tập hợp

Cho hai tập hợp A và B. Hiệu của hai tập hợp A và B, kí hiệu là $A\setminus B$ là tập hợp các phần tử ***chỉ*** thuộc A nhưng không thuộc B.



Tức là:

$$\boxed{x\in A\setminus B \Leftrightarrow \begin{cases} x\in A \\ x\notin B \end{cases}}$$

- Đặc biệt: Khi $B \subset A$ thì phần hiệu $A \setminus B$ được gọi

là ***phần bù*** của B trong A. Kí hiệu là $C_A B$

Ví dụ 3: Cho A là tập hợp các học sinh lớp 10 đang học

ở trường em và B là tập hợp các học sinh đang học môn Tiếng Anh của trường em. Hãy diễn đạt bằng lời các tập hợp sau

a) $A \cap B$ c) $A \setminus B$

. b) $A \cup B$ d) $B \setminus A$

4. Một số các tập con của tập hợp số thực

Trong các chương sau, ta thường sử dụng các tập con sau đây của tập số thực $\mathbb{R}$

Tên gọi và kí hiệu	Tập hợp	Biểu diễn trên trục số
Tập số thực $(-\infty;\ +\infty)$	$\mathbb{R}$	
Đoạn $[a;\ b]$	$\{x \in \mathbb{R} \mid a \le x \le b\}$	
Khoảng $(a;\ b)$	....	
Nửa khoảng $[a;\ b)$	....	
Nửa khoảng $(a;\ b]$	....	
Nửa khoảng $(-\infty;\ a]$	....	
Nửa khoảng $[a;\ +\infty)$	....	
Khoảng $(-\infty;\ a)$	....	
Khoảng $(a;\ +\infty)$	....	

Trong các kí hiệu trên, kí hiệu $-\infty$ đọc là âm cô cực, kí hiệu $+\infty$ đọc là dương vô cực; a và b được gọi là các đầu mút của đoạn, khoảng hay nửa khoảng .

Bài tập

1. a) Cho $A = \{\ x \in \mathbb{N} \mid x < 20$ và x chia hết cho $3\}$. Hãy liệt kê các phần tử của tập hợp A

b) Cho tập hợp $B = \{2,\ 6,\ 12,\ 20,\ 30\}$. Xác định B bằng cách chỉ ra một tính chất đặc trưng cho các phần tử của nó

c) Hãy liệt kê các phần tử của tập hợp các học sinh lớp em cao dưới 1m60

2. Trong hai tập hợp A và B dưới đây, tập hợp nào là tập hợp con của tập hợp còn lại? Hai tập hợp A và B có bằng nhau không?

a) A là tập hợp các hình vuông B là tập hợp các hình thoi

b) $A = \{ n \in \mathbb{N} | \ n$ là một ước chung của 24 và 30$\}$

$B = \{ n \in \mathbb{N} | \ n$ là một ước của 6$\}$

3. Tìm tất cả các tập con của tập hợp sau

a) $A = \{a, b\}$ b) $B = \{0, 1, 2\}$

4. Liệt kê các phần tử của các tập hợp sau:

a) $A = \{n \in \mathbb{N} | \ 2n+1 < 16\}$. b) $B = \{n \in \mathbb{N} | \ n^2 < 16\}$.

c) $C = \left\{x \middle| \ x = \frac{1}{2^n}, n \in \mathbb{N}, \text{và } x \geq \frac{1}{8}\right\}$. d) $D = \{x \in \mathbb{R} | \ x(2x+1)(x^2-2) = 0\}$.

e) $E = \{x \in \mathbb{Z} | \ x = 2k, k \in \mathbb{N}, k \leq 3\}$. f) $F = \{x \in \mathbb{R} | \ x^2 - 4 = 0\}$.

g) $G = \{x \in \mathbb{N} | \ x > x^2\}$. h) $H = \left\{x \in \mathbb{R} \middle| \ \begin{cases} x^2 - 7x + 10 = 0 \\ x^2 - 5x = 0 \end{cases}\right\}$.

i) $K = \{x \in \mathbb{Z} | \ |x| < 4\}$. j) $L = \{x \in \mathbb{N} | \ x(1-x)(x^2-2) = 0\}$.

5. Xác định các tập hợp sau bằng phương pháp nêu tính chất đặc trưng:

a) $A = \{1, 3, 5, 7, 9, 11\}$. b) $B = \{0, 1, 4, 9, 16, 25, 36\}$.

c) $C = \left\{\frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \frac{1}{64}\right\}$. d) $D = \{0, 3, 6, 9, 12, 15\}$

6. Tập hợp A có bao nhiêu tập con, nếu:

a) A có 2 phần tử. b) A có 3 phần tử.

c) A có 4 phần tử.

7. Cho $A = \varnothing; B = \{a\}; C = \{a,b\}; D = \{a,b,c\}$. Hãy viết ra tất cả các tập hợp con của A, B, C, D.

8. Cho hai tập hợp: $A = \{3k+1 | \ k \in \mathbb{Z}\}$, $B = \{6l+4 | \ l \in \mathbb{Z}\}$. Chứng tỏ rằng $B \subset A$.

9. Cho tập hợp A, hãy xác định $A \cap A, A \cup A, A \cap \varnothing, A \cup \varnothing, C_A A, C_A \varnothing$.

10. Cho 3 tập hợp

$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ $B = \{2, 4, 6\}$ $C = \{1, 3, 5\}$

Tìm $A\cup B,\ A\cap B,\ (A\cup B)\cap C,\ (A\cap B)\cup C,\ A\setminus B,\ (B\setminus C)\cap A$.

11. Cho $A=\{0\ ;\ 2;\ 4;\ 6;\ 8;\ 10\}$, $B=\{0;\ 1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5;\ 6\}$ và $C=\{4;\ 5;\ 6;\ 7;\ 8;\ 9;\ 10\}$. Hãy tìm

a) $A\cap(B\cap C)$ b) $A\cup(B\cup C)$ c) $A\cap(B\cup C)$

d) $(A\cup B)\cap C$ e) $(A\cap B)\cup C$

12. Cho tập hợp *A* các số tự nhiên là ước của 18, tập hợp *B* các số tự nhiên là ước của 30. Xác định các tập hợp $A\cap B,\ A\cup B,\ A\setminus B,\ B\setminus A$.

13. Cho $A=\left\{x\in\mathbb{Z}\,\middle|\,|x|\le 2\right\}$

$B=\left\{x\in\mathbb{Z}\,\middle|\,4<x^2<9\right\}$.

a) Liệt kê các phần tử của *A*, *B*. b) Tìm tất cả các tập con của *B*.

c) Tìm $A\cap B,\ A\cup B,\ A\setminus B,\ B\setminus A$.

14. Tìm tất cả các tập *X* sao cho $\{1,\ 2\}\subset X\subset\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$.

15. Cho $E=\left\{x\in\mathbb{N}\,\middle|\,1\le x\le 10\right\}$ và các tập con của *E*:

$A=\left\{x\in\mathbb{N}\,\middle|\,1<x<6\right\}$, $B=\{1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9\}$.

a) Viết các tập *E*, *A* bằng cách liệt kê các phần tử.

b) Tìm phần bù trong *E* của *A* và *B*.

c) Tính số tập con có một phần tử và 9 phần tử của *E*.

16. Cho: $A=\left\{x\in\mathbb{R}\,\middle|\,(x-3)(x^2+x-2)=0\right\}$

$B=\left\{x\in\mathbb{Z}\,\middle|\,x^2<5\right\}$ và $C=\left\{x\in\mathbb{N}\,\middle|\,x\le 4\right\}$.

a) Liệt kê các phần tử của *A*, *B*, *C*.

b) Xác định $B\setminus(A\cap C);(B\cup C)\setminus A;(A\setminus B)\cap(B\setminus A)$.

c) So sánh $B\setminus(A\cup C)$ và $(B\setminus A)\cap(B\setminus C)$.

HÀM SỐ

I. Khái niệm về hàm số

Trong giáo trình này chúng ta chỉ xét trường hợp đặc biệt của hàm số đó là ***hàm số thực.***

1. Ánh xạ

Giả sử X, Y là hai tập hợp tùy ý khác rỗng cho trước. Một phép liên kết f tương ứng mỗi phần tử $x \in X$ với duy nhất phần tử $y = f(x) \in Y$ được gọi là *một ánh xạ từ X vào Y.*

Kí hiệu:
$$\begin{aligned} f &: X \to Y \\ x &\to y = f(x) \end{aligned}$$

Khi đó:
- X gọi là tập hợp nguồn (*tập xác định*) .
- Y gọi là tập hợp đích (*tập giá trị*).

Người ta thường kí hiệu tập xác định là D_f, tập giá trị là R_f

Ví dụ 1:

a) Giả sử X ={1, 2} và Y={a, b, c}. Tương ứng $1 \to a, 2 \to b$ cho ta một ánh xạ $f : X \to Y$

b) Giả sử Z={1, 2, 3, 4} và T={a, b, c}. Tương ứng $1 \to a, 2 \to b, 3 \to c, 4 \to a$ cho ta một ánh xạ $f : Z \to T$

c) Giả sử Z ={1, 2, 3, 4} và T={a, b, c}. Tương ứng $1 \to a, 1 \to b, 3 \to c, 4 \to a$ không phải là một ánh xạ

2. Định nghĩa hàm số

Ánh xạ f sao cho với mỗi giá trị $x \in D_f$ có một và chỉ một giá trị tương ứng $y \in \mathbb{R}$ thì ta có một ***hàm số thực.***

Kí hiệu:
$$\begin{aligned} f &: X \to \mathbb{R} \\ x &\to y = f(x) \end{aligned}$$

- Ta gọi là x là ***biến số*** và $y = f(x)$ là ***hàm số*** của x.
- Tập hợp D_f được gọi là ***tập xác định*** của hàm số

❖ Một hàm số có thể được cho dưới dạng *bảng*, *biểu đồ* hoặc bằng c*ông thức*.

***Ghi chú*:** Khi cho hàm số bằng công thức mà không chỉ rõ tập xác định của nó thì ta có quy ước sau:

Tập xác định của hàm số $y=f\left(x\right)$ *là tập hợp tất cả các số thực* x *sao cho biểu thức* $f\left(x\right)$ *có nghĩa*

Ví dụ 2: Xét các biểu thức sau, biểu thức nào là hàm số? Hãy tìm tập xác định của chúng

a) $\begin{array}{l} f: X \to \mathbb{R} \\ \quad x \to y = f(x) = x+1 \end{array}$

b) $\begin{array}{l} f: X \to \mathbb{R} \\ \quad x \to y = f(x) = \dfrac{x^2-1}{x-1} \end{array}$

c) $\begin{array}{l} f: X \to X \\ \quad x \to y = f(x) = x \end{array}$

d) $\begin{array}{l} f: X \to \mathbb{R} \\ \quad x \to y = f(x) = c \end{array}$

e) $\begin{array}{l} f: X \to \mathbb{R} \\ \quad x \to y = f(x) = \begin{cases} 2x+2 & \text{khi } x \geq 1 \\ x^2 & \text{khi } x<1 \end{cases} \end{array}$

f) $\begin{array}{l} f: X \to \mathbb{R} \\ \quad x \to y = f(x) = \begin{cases} 2x+2 & \text{khi } x \geq 1 \\ 8 & \text{khi } x=1 \end{cases} \end{array}$

Ví dụ 3:

a) Giả sử chi phí cho thức ăn trung bình hàng tuần của hộ gia đình (C) phụ thuộc vào mức thu nhập trung bình hàng tuần của hộ gia đình đó (I) theo mối quan hệ $C=12+0,3I$.

i) Đây có phải là hàm số không? Vì sao?

ii) Tìm giá trị của C khi I bằng 800, 1500, 2000?

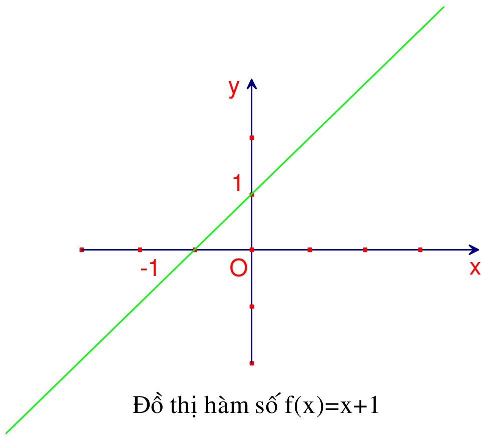
b) Jeff Simpson lập kế hoạch cho công việc kinh doanh của riêng mình: sản xuất và buôn bán xe đạp. Anh ấy muốn tính điểm hòa vốn – là điểm mà tổng thu nhập bằng với chi phí bỏ ra. Hay nói đơn giản đó là điểm mà Jeff không muốn phải lỗ vốn(tiền).Jeff đã ước tính chi phí cố định hàng tháng như (thuê mặt bằng, gas, nước, điện thoại, bảo hiểm, v.v) là vào khoảng $1000 mỗi tháng. Những chi phí khác như: nguyên vật liệu, sản xuất, tiền trả cho nhân viên được gom vào gọi là biến chi phí và sẽ gia tăng tuyến tính. Mở đầu là biến chi phí cho việc sản xuất 500 chiếc xe đạp với giá $9000 mỗi tháng. Jeff đã xác định rằng nếu bán 500 chiếc xe đạp với giá $25 mỗi chiếc thì anh ấy sẽ thu về số tiền là 25*500=1250$. Hỏi điểm hòa vốn mà Jeff quan tâm có giá trị là bao nhiêu ?.

II. Đồ thị của hàm số

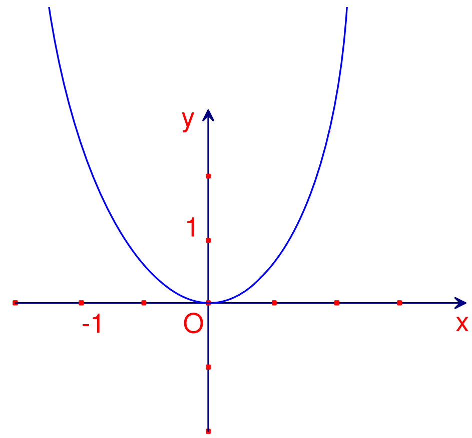
Đồ thị của hàm số $y=f\left(x\right)$ xác định trên tập D_f là tập hợp tất cả các điểm $M\left(x;f\left(x\right)\right)$ trên mặt phẳng toạ độ với mọi $x\in D_f$

Ví dụ 4:

a) Vẽ đồ thị hàm số f(x)=2x+1; g(x)= $g(x)=\frac{1}{2}x^2$



Đồ thị hàm số f(x)=x+1



Đồ thị hàm số g(x)=1/2x2

b) Vẽ đồ thị hàm số sau

$f: X \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \rightarrow y = f(x) = \begin{cases} 2x+2 & \text{khi } x \geq 1 \\ x^2 & \text{khi } x<1 \end{cases}$$

III. Các phép toán đối với hàm số

1. Hàm số mới

Cho hai hàm số f có tập xác định là D_f và g có tập xác định là D_g, ta định nghĩa:

$$(f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x)$$
$$(f.g)(x) = f(x).g(x)$$
$$(\frac{f}{g})(x) = f(x)/g(x)$$

Lưu ý: Tập xác định của các hàm số kết hợp này là phần giao nhau giữa tập xác định của hàm số f và g, $D_{f+g} = D_f \cap D_g$

Riêng đối với hàm số $(f/g)(x)$ thì $D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap \{x \in D_g / g(x) \neq 0\}$.

Ví dụ 4:

a) Cho hàm số $f(x)=\sqrt{x}; g(x)=\sqrt{4-x^2}$. *Tìm* $(f \pm g)(x); (f.g)(x);$ $(f/g)(x)$ *và tập xác định của các hàm số mới này.*

Giải:

Tập xác định của hàm số $f(x)=\sqrt{x}$ *bao gồm các giá trị của x sao cho* $\sqrt{x} \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 0$, *như vậy ta được* $D_f = [0, \infty)$, *tương tự ta được* $D_g = [-2, 2]$. *Phần giao của hai tập xác định* *là* $D_f \cap D_g = [0,\infty) \cap [-2,2] = [0,2]$. *Dựa trên cách hình thành các hàm số mới từ hai hàm số f(x) và g(x) ta có*

$$(f \pm g)(x) = \sqrt{x} + \sqrt{4-x^2}; D_{f+g} = D_f \cap D_g = [0,2]$$

$$(f.g)(x) = \sqrt{x} * \sqrt{4-x^2} = \sqrt{4x-x^3}; D_{fg} = D_f \cap D_g = [0,2]$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{4-x^2}} = \sqrt{\frac{x}{4-x^2}}; D_{\frac{f}{g}} = [0,2)$$

Ví dụ 5:

b) Cho hàm số $f(x) = 1 + \sqrt{x-2}$, $g(x) = x - 3$. *Tìm* $(f \pm g)(x); (f.g)(x);\quad (f/g)(x); 7.f$. *Tìm tập xác định tương ứng của các hàm số vừa tìm được?*

c) Cho hàm số $f(x) = \sqrt{x}$; $g(x) = \sqrt{x}$. *Tìm (f.g)(x) và tập xác định của hàm số mới .*

2. Hàm số hợp

Ví dụ 6:

Cho hàm số $f(x) = x^2 + 3; g(x) = \sqrt{x}$. Ta có: $f_0 g = f(g(x)) = \left(\sqrt{x}\right)^2 + 3 = x + 3$

và $g_0 f = g(f(x)) = \sqrt{x^2+3}$

Ví dụ 7:

a) Cho hàm số $f(x) = x^2 + 3; g(y) = \sqrt{y+1}$. Tìm $f_0 g = f(g(y))$?.

b) Cho $f(x) = \sqrt{x}, g(x) = 1/x, h(x) = x^3$. Tìm $(f_0 g_0 h)(x) = f(g(h(x)))$?.

❖ **Vậy nếu biến số của một hàm số này được thay bằng hàm số của một biến số mới nào đó thì ta có *"hàm hợp"*.**

$$(f_0 g)(x) = f(g(x))$$

Tập xác định của hàm hợp là tập hợp tất cả các giá trị của biến số sau cùng sao cho biểu thức thu được có ý nghĩa.

Ví dụ 8: Giả sử nhu cầu của một mặt hàng được cho bởi hàm $P = 80 - 0,2Q$, *hàm tổng doanh thu có dạng như thế nào ?*

Giải: Vì doanh thu (TR) được tính bằng tổng số tiền kiếm được khi bán sản phẩm nên $TR = P.Q$. Vậy TR là một hàm số hợp. Thay $P = 80 - 0,2Q$, ta có $TR = (80 - 0,2.Q).Q = 80Q - 0,2Q^2$.