

TRƯỜNG ĐẠI HỌC ĐÀ LẠT  
KHOA TOÁN - TIN HỌC



# GIẢI TÍCH SỐ

*(Bài giảng tóm tắt)*



NGƯỜI BIÊN SOẠN  
LÊ MINH LƯU

Đà Lạt 2009



<b>MỤC LỤC</b>	<b>1</b>
<b>Chương 1 Lý thuyết sai số</b>	<b>3</b>
1.1 Các loại sai số	3
1.2 Quy tắc thu gọn số	3
1.3 Chữ số chắc, không chắc	4
1.4 Hai bài toán về sai số	5
1.5 Sai số các phép toán	5
<b>Chương 2 Xấp xỉ tốt nhất</b>	<b>8</b>
2.1 Xấp xỉ tốt nhất trong không gian định chuẩn	8
2.2 Xấp xỉ tốt nhất trong không gian các hàm liên tục	12
2.3 Xấp xỉ tốt nhất trong không gian Hilbert	17
<b>Chương 3 Xấp xỉ hàm bằng đa thức nội suy</b>	<b>19</b>
3.1 Bài toán nội suy	19
3.2 Giải hệ đại số tuyến tính để xác định đa thức nội suy	21
3.3 Phương pháp nội suy Lagrange	22
3.4 Trường hợp các mốc nội suy cách đều	23
3.5 Sai số của phương pháp nội suy Lagrange	24
3.6 Chọn mốc nội suy tối ưu	26
<b>Chương 4 Tính gần đúng đạo hàm và tích phân</b>	<b>31</b>
4.1 Dùng nội suy Lagrange tính gần đúng đạo hàm	31
4.2 Tính gần đúng tích phân	32
<b>Chương 5 Giải phương trình phi tuyến</b>	<b>37</b>
5.1 Phương pháp đồ thị	37
5.2 Phương pháp chia đôi	37
5.3 Phương pháp lặp đơn	38
5.4 Phương pháp dây cung	40
5.5 Phương pháp tiếp tuyến	42
5.6 Giải đa thức	44
5.7 Giải hệ hai phương trình phi tuyến bằng phương pháp lặp đơn	46
<b>Chương 6 Giải hệ phương trình đại số tuyến tính</b>	<b>47</b>
6.1 Một vài khái niệm cần thiết	47

6.2 Phương pháp Gauss .....	47
6.3 Phương pháp căn số .....	51
6.4 Phương pháp lập đơn giải hệ đại số tuyến tính .....	53
6.5 Phương pháp Jacobi .....	53
6.6 Phương pháp Seidel .....	55
6.7 Phương pháp Gauss-Seidel .....	57
 <b>Chương 7 Giải gần đúng phương trình vi phân .....</b>	<b>59</b>
7.1 Phương pháp xấp xỉ liên tiếp .....	59
7.2 Phương pháp chuỗi nguyên .....	61
7.3 Phương pháp Euler .....	62
7.4 Phương pháp Euler cải tiến .....	65
7.5 Phương pháp Runge-Kutta .....	66
 <b>Tài liệu tham khảo .....</b>	<b>68</b>

## Chương 1

### Lý Thuyết Sai Số

#### 1.1 Các loại sai số

Trên thực tế khi đo một đại lượng hoặc xác định một đại lượng mà ta ký hiệu là  $a^*$ , thông thường không xác định được giá trị đúng mà chỉ biết được giá trị gần đúng  $a$ . Vậy ta đã gặp phải sai số. Có nhiều loại sai số:

##### 1. Sai số thực sự: Đại lượng

$$\Delta := |a - a^*|$$

gọi là sai số thực sự của  $a$ .

##### 2. Sai số tuyệt đối: Nếu biết $\Delta_a \geq 0$ sao cho

$$a - \Delta_a \leq a^* \leq a + \Delta_a$$

thì  $\Delta_a$  gọi là sai số tuyệt đối của  $a$ .

##### 3. Sai số tương đối: Đại lượng

$$\delta_a := \frac{\Delta_a}{|a|}$$

gọi là sai số tương đối của  $a$ .

#### 1.2 Quy tắc thu gọn số

Giả sử ta có số gần đúng  $a$  được viết dưới dạng thập phân

$$a = \pm(\beta_p 10^p + \dots + \beta_j 10^j + \dots + \beta_{p-s} 10^{p-s})$$

trong đó  $\beta_j \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}, \beta_p > 0$ . Ta muốn thu gọn số  $a$  đến hàng thứ  $j$ . Gọi số  $\bar{a}$  là số thu gọn đến hàng thứ  $j$  của số  $a$  và phần vớt bỏ là  $\mu$ . Đặt:

$$\bar{a} = \beta_p 10^p + \dots + \beta_{j+1} 10^{j+1} + \bar{\beta}_j 10^j.$$

Trong đó:  $\bar{\beta}_j$  bằng  $\beta_j + 1$  nếu  $0,5 \times 10^j < \mu < 10^j$  và bằng  $\beta_j$  nếu  $0 \leq \mu < 0,5 \times 10^j$ . Trường hợp  $\mu = 0,5 \times 10^j$  thì  $\bar{\beta}_j = \beta_j$  nếu  $\beta_j$  chẵn và  $\bar{\beta}_j = \beta_j + 1$  nếu  $\beta_j$  lẻ. Như vậy sai số thu gọn là đại lượng  $\Gamma_a \geq 0$  thỏa

$$|\bar{a} - a| \leq \Gamma_a.$$

Do

$$a = \pm(\beta_p 10^p + \dots + \beta_j 10^j + \mu),$$

$$\bar{a} = \pm(\beta_p 10^p + \dots + \beta_j 10^j + \bar{\beta}_j 10^j),$$

ta có

$$|a - \bar{a}| = |(\beta_j - \bar{\beta}_j) \times 10^j + \mu| < 0.5 \times 10^j.$$

**Ví dụ:** Số  $\pi \simeq 3,1415 \simeq 3,142 \simeq 3,14$ .

### Chú ý

1. Sai số tuyệt đối không đặc trưng cho độ chính xác của phép đo mà chỉ cho phép ta hình dung được độ gần nhau giữa giá trị đúng và giá trị gần đúng.
2. Sai số tuyệt đối cùng thứ nguyên với đại lượng đo.
3. Sai số tương đối đặc trưng cho độ chính xác của phép đo và không có thứ nguyên.
4. Sau khi thu gọn số thì sai số tuyệt đối tăng lên.

Gọi  $a^*$  là giá trị đúng,  $a$  là giá trị gần đúng và gọi  $\bar{a}$  là số sau khi thu gọn của  $a$  thì

$$|a^* - \bar{a}| \leq |a^* - a| + |a - \bar{a}| \leq \Delta_a + \Gamma_a.$$

### 1.3 Chữ số chắc và không chắc

Giả sử có số gần đúng  $a$  viết ở dạng

$$a = \pm(\beta_p 10^p + \dots + \beta_j 10^j + \dots + \beta_{p-s} 10^{p-s}).$$

Với sai số tuyệt đối của  $a$  là  $\Delta_a$ . Cho số  $0 < \omega \leq 1$ . Nếu  $\Delta_a \leq \omega \times 10^i$  thì chữ số  $\beta_i$  gọi là chữ số chắc, ngược lại chữ số  $\beta_i$  gọi là chữ số không chắc.

Chữ số chắc với  $\omega = 1$  gọi là chắc theo nghĩa rộng. Chữ số chắc với  $\omega = 0,56$  gọi là chắc theo nghĩa hẹp.

### Chú ý:

- Nếu  $\beta_i$  là chữ số chắc thì  $\beta_j, \forall j \geq i$  cũng là chữ số chắc.
- Nếu  $\beta_i$  không chắc thì  $\beta_j, \forall j \leq i$  cũng không chắc.
- Một chữ số là chắc sau khi thu gọn số có thể nó không còn là chắc.
- Trong kỹ thuật, người ta thường dùng  $\omega = 1$  và nếu chữ số là chắc thì sau thu gọn nó vẫn là chắc ( $0,56 \leq \omega \leq 1$ ).
- Khi tính toán, ta thường giữ lại các chữ số chắc và lấy phụ thêm từ 1 đến 2 chữ số không chắc và có ký hiệu riêng để chỉ các chữ số không chắc này.

- Sai số tương đối của một số không phụ thuộc vào vị trí dấu phẩy của nó (dấu chấm thập phân).

#### 1.4 Hai bài toán về sai số

Xét số gần đúng viết ở dạng thập phân

$$a = \pm(\beta_p 10^p + \beta_{p-1} 10^{p-1} + \dots + \beta_{p-s} 10^{p-s}).$$

Có hai bài toán đặt ra:

##### Bài toán 1:

Biết số chữ số chắc của  $a$  là  $\gamma_a$ , tìm sai số tương đối  $\delta_a$  của  $a$ . Gọi  $a^0$  là số  $a$  mà sau khi dời dấu phẩy sao cho chữ số chắc cuối ở hàng đơn vị và toàn chữ số chắc. Ta có

$$\beta_p \times 10^{\gamma_a-1} \leq a^0 \leq (\beta_p + 1) \times 10^{\gamma_a-1} \leq 10^{\gamma_a}.$$

Vậy

$$\frac{1}{(\beta_p + 1) \times 10^{\gamma_a-1}} \leq \delta_a \leq \frac{1}{\beta_p \times 10^{\gamma_a-1}}.$$

Nếu không biết  $\beta_p$  thì lấy

$$\frac{1}{10^s} \leq \delta_a \leq \frac{1}{10^{s-1}}.$$

##### Bài toán 2:

Biết sai số tương đối là  $\delta_a$ , tìm số chữ số chắc  $\gamma_a$ . Giả sử biết  $\delta_a > 0$ , ta viết  $\delta_a = \lambda 10^{-m}$  với  $0.1 < \lambda < 1$  và  $m$  là số nguyên. Đặt  $a_m$  là số  $a$  nhưng dời dấu chấm thập phân sao cho  $a_m$  có  $m+1$  chữ số trước dấu chấm thập phân. Ta có:

$$a_m \leq (\beta_p + 1) \times 10^m,$$

suy ra

$$\Delta_a = a_m \delta_a = a_m \delta_a = a_m \lambda 10^{-m} \leq \lambda(\beta_p + 1).$$

Bởi vì

$$0,2 < \lambda(\beta_p + 1) \leq 10.$$

Vậy có hai trường hợp xảy ra

- Nếu  $\lambda(\beta_p + 1) \leq 1$  thì  $\Delta_{a_m} \leq 1$  và  $a_m$  có  $m+1$  chữ số chắc.
- Nếu  $\lambda \times (\beta_p + 1) > 1$  thì  $\Delta_{a_m} \leq 10$  và  $a_m$  có  $m$  chữ số chắc.

Cuối cùng ta có thể kết luận, nếu  $\delta_a = \frac{\lambda}{10^m}$ ,  $0.1 < \lambda \leq 1$  và  $\lambda(\beta_p + 1) \leq 1$  thì  $a$  có  $m + 1$  chữ số chắc, ngược lại  $a$  có  $m$  chữ số chắc.

### 1.5 Sai số các phép toán

Giả sử phải tìm đại lượng  $y$  theo công thức

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Gọi  $x_i^*, y^*, i = 1, 2, \dots, n$  và  $x_i, y, i = 1, 2, \dots, n$  là các giá trị đúng và gần đúng. Nếu  $f$  khả vi liên tục ta có

$$\begin{aligned} |y - y^*| &= |f(x_1, \dots, x_n) - f(x_1^*, \dots, x_n^*)| \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{|\partial f(x_1, \dots, \theta_i, \dots, x_n)|}{\partial x_i} |x_i - x_i^*|, \end{aligned}$$

ở đây  $\theta_i \in [x_i, x_i^*], i = 1, 2, \dots, n$ . Ta có thể coi (do  $f$  khả vi liên tục và  $x_i^*$  khá gần  $x_i$ ),

$$\left| \frac{\partial f(x_1, \dots, \theta_i, \dots, x_n)}{\partial x_i} \right| \simeq \left| \frac{\partial f(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_i} \right|.$$

Do đó

$$\Delta_y = \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial f(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_i} \right| \Delta_{x_i},$$

và

$$\delta_y = \frac{\Delta_y}{|y|} = \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial \ln f(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_i} \right| \Delta_{x_i}.$$

**a. Sai số phép tính cộng, trừ:**

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n x_i,$$

$$\frac{\partial f(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_i} = 1 \Rightarrow \Delta_y = \sum_{i=1}^n \Delta_{x_i}.$$

Giả sử  $\Delta_{x_m} = \max_{i=1, \dots, n} \{\Delta_{x_i}\}$ , và chữ số chắc cuối của  $x_m$  ở hàng thứ  $k$ , ( $\Delta_{x_m} = 10^k$ ). Ta có:

$$\Delta_y \geq \Delta_{x_m} = 10^k.$$

Do đó khi làm phép cộng, trừ nên qui tròn các  $x_i$  đến mức giữ lại 1 hoặc 2 chữ số bên phải hàng thứ  $k$ .

**Chú ý:** Khi trừ hai số gần nhau cần lấy các số với nhiều chữ số chắc vì khi trừ hai số gần nhau kết quả mất chính xác.



**b. Sai số phép toán nhân, chia:**

Giả sử

$$y = \frac{x_1, \dots, x_p}{x_{p+1}, \dots, x_n} = f(x_1, \dots, x_p, \dots, x_n).$$

Khi đó

$$\ln y = \sum_{i=1}^p \ln x_i - \sum_{j=p+1}^n \ln x_j$$

suy ra

$$\delta y = \sum_{i=1}^n \delta x_i.$$

Nếu  $\delta x_m = \max_{i=1, \dots, n} \{\delta x_i\}$  và số chữ số chắc của  $x_m$  là  $k$  thì  $\delta y \geq \delta x_m$  và số chữ số chắc của  $y$  không vượt quá  $k$ . Vì vậy khi làm phép toán nhân, chia ta chỉ cần lấy  $k + 1$  hoặc  $k + 2$  chữ số là đủ.

**c. Sai số phép lũy thừa, khai căn và nghịch đảo:**

Cho  $y = x^\alpha, \alpha \in \mathbf{R}$ ,

$$\delta y = \left| \frac{d \ln y}{dx} \right| \Delta_x = |\alpha| \delta x.$$

- Nếu  $\alpha > 1$  thì  $\delta y > \delta x$  tức là phép lũy thừa làm giảm độ chính xác.
- Nếu  $0 < \alpha < 1$  thì  $\delta y < \delta x$  tức là phép khai căn làm tăng độ chính xác.
- Nếu  $\alpha = -1$  thì  $\delta y = \delta x$  và phép nghịch đảo có độ chính xác không đổi.

## Chương 2

### Xấp Xỉ Tốt Nhất

#### 2.1. Xấp xỉ tốt nhất trong không gian định chuẩn

Giả sử  $X$  là không gian tuyến tính định chuẩn.  $L \subset X$  là đa tạp tuyến tính đóng của  $X$  và  $f \in X$ . Bài toán đặt ra hãy tìm phần tử  $f^* \in L$  sao cho:

$$\|f - f^*\| = \inf_{g \in L} \|g - f\|.$$

**Định lý 2.1.1** Nếu  $L$  là không gian con hữu hạn chiều của  $X$  thì với mọi  $f \in X$  luôn tồn tại  $f^* \in L$  thỏa

$$\|f - f^*\| = \inf_{g \in L} \|g - f\|.$$

(Phần tử  $f^*$  gọi là phần tử xấp xỉ tốt nhất  $f$  trên  $L$ ).

*Chứng minh:* Xét

$$\Omega = \{g \in L : \|g\| \leq 2\|f\|\} \subset L.$$

Dễ thấy  $\Omega$  là tập đóng, giới nội trong không gian hữu hạn chiều nên  $\Omega$  là Compact.

Xét hàm  $\phi(g) := \|f - g\|$ .

Ta có

$$\begin{aligned} |\phi(g) - \phi(h)| &= \left| \|f - g\| - \|f - h\| \right| \\ &\leq \|(f - g) - (f - h)\| = \|h - g\|. \end{aligned}$$

Do  $\phi$  là hàm liên tục trên tập Compact  $\Omega$  nên hàm  $\phi$  đạt cực tiểu trên  $\Omega$ . Từ đó

$$\exists f^* \in \Omega : \phi(f^*) = \min_{g \in \Omega} \phi(g).$$

Mặt khác: Nếu  $g \in L \setminus \Omega$  tức là  $g$  không thuộc  $\Omega$  thì

$$\begin{aligned} \|g - f\| &\geq \|g\| - \|f\| \\ &> 2\|f\| - \|f\| = \|f\| = \|f - \theta\| \end{aligned}$$

(ở đây  $\theta$  chỉ phần tử không của không gian  $X$ ). Bởi vậy  $\forall g \in L \setminus \Omega$ , thì  $\|g - f\| > \|f - \theta\|$ , tức là

$$\inf_{g \in L \setminus \Omega} \|g - f\| \geq \|f - \theta\|.$$

Suy ra

$$\|f - f^*\| = \min_{g \in \Omega} \|f - g\|$$