**2.1.29.** Cho $f$ khả vi trên $[a, b]$ thoả mãn

(i) $$f(a) = f(b) = 0,$$

(ii) $$f'(a) = f'_+(a) > 0, \quad f'(b) = f'_-(b) > 0.$$

Chứng minh rằng tồn tại $c \in (a, b)$ sao cho $f(c) = 0$ và $f'(c) \leq 0$.

**2.1.30.** Chứng minh rằng $f(x) = \arctan x$ thoả mãn phương trình

$$(1 + x^2)f^{(n)}(x) + 2(n-1)f^{(n-1)}(x) + (n-2)(n-1)f^{(n-2)}(x) = 0$$

với $x \in \mathbb{R}$ và $n \geq 2$. Chứng minh rằng

$$f^{(2m)}(0) = 0, \quad f^{(2m+1)}(0) = (-1)^m(2m)!.$$

**2.1.31.** Chứng minh rằng

(a) $$(e^x \sin x)^{(n)} = 2^{n/2}e^x \sin\left(x + n\frac{\pi}{4}\right), \quad x \in \mathbb{R},\ n \geq 1,$$

(b) $$(x^n \ln x)^{(n)} = n!\left(\ln x + 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right), \quad x > 0,\ n \geq 1,$$

(c) $$\left(\frac{\ln x}{x}\right)^{(n)} = (-1)^n n! x^{-n-1}\left(\ln x - 1 - \frac{1}{2} - \cdots - \frac{1}{n}\right), x > 0,\ n \geq 1,$$

(d) $$\left(x^{n-1}e^{1/x}\right)^{(n)} = (-1)^n \frac{e^{1/x}}{x^{n+1}}, \quad x \neq 0,\ n \geq 1.$$

**2.1.32.** Chứng minh các đồng nhất thức sau:

(a) $$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\sin\left(x + k\frac{\pi}{2}\right) = 2^{n/2}\sin\left(x + n\frac{\pi}{4}\right), \quad x \in \mathbb{R},\ n \geq 1$$

(b) $$\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\frac{1}{k}\binom{n}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}, \quad n \geq 1$$

**2.1.33.** Cho $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$ với $x > 1$. Chứng minh rằng $f^{(n)}(x) > 0$ nếu $n$ lẻ và $f^{(n)} < 0$ với $n$ chẵn.

**2.1.34.** Cho $f_{2n} = \ln(1 + x^{2n}), \quad n \in \mathbb{N}$. Chứng minh rằng

$$f_{2n}^{(2n)}(-1) = 0.$$

**2.1.35.** Cho $P$ là một đa thức bậc $n$, chứng minh rằng

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(0)}{(k+1)!} x^{k+1} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{P^{(k)}(x)}{(k+1)!} x^{k+1}.$$

**2.1.36.** Cho $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ là các giá trị thoả mãn điều kiện

$$\lambda_1^k + \lambda_2^k + \ldots + \lambda_n^k > 0, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Kho đó hàm

$$f(x) = \frac{1}{(1-\lambda_1 x)(1-\lambda_2 x)\cdots(1-\lambda_n x)}$$

sẽ được xác định trong lân cận 0. Chứng minh rằng với $k \in \mathbb{N}$ ta có $f^{(k)}(0) > 0$.

**2.1.37.** Cho $f$ là hàm khả vi đến cấp $n$ trên $(0, +\infty)$. Chứng minh rằng với $x > 0$,

$$\frac{1}{x^{n+1}} f^{(n)}\left(\frac{1}{x}\right) = (-1)^n \left(x^{n-1} f\left(\frac{1}{x}\right)\right)^{(n)}.$$

**2.1.38.** Cho $\mathbf{I}, \mathbf{J}$ là hai khoảng mở và $f : \mathbf{J} \to \mathbb{R}$, $g : \mathbf{I} \to \mathbf{J}$ là các hàm khả vi vô hạn trên $\mathbf{J}$ và $\mathbf{I}$. Chứng minh *công thức Faà di Bruno* cho đạo hàm cấp $n$ của $h = f \circ g$ sau:

$$h^{(n)}(t) = \sum \frac{n!}{k_1! \cdots k_n!} f^{(k)}(g(t)) \left(\frac{g^{(1)}(t)}{1!}\right)^{k_1} \cdots \left(\frac{g^{(n)}(t)}{1!}\right)^{k_n},$$

trong đó $k = k_1 + k_2 + \cdots + k_n$ và tổng lấy trên tất cả các giá trị $k_1, k_2, \ldots, k_n$ sao cho $k_1 + 2k_2 + \cdots + nk_n = n$.

**2.1.39.** Chứng minh rằng các hàm số sau :

(a) $$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{nếu } \; x \neq 0, \\ 0 & \text{nếu } \; x = 0, \end{cases}$$

(b) $$g(x) = \begin{cases} e^{-1/x} & \text{nếu } \; x > 0, \\ 0 & \text{nếu } \; x \leq 0, \end{cases}$$

(c) $$h(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x-a} + \frac{1}{x-b}} & \text{nếu } \; x \in (a, b), \\ 0 & \text{nếu } \; x \notin (a, b), \end{cases}$$

cùng thuộc $C^\infty(\mathbb{R})$.

**2.1.40.** Cho $f$ khả vi trên $(a, b)$ sao cho với $x \in (a, b)$ ta có $f'(x) = g(f(x))$, trong đó $g \in C^\infty(a, b)$. Chứng minh rằng $f \in C^\infty(a, b)$.

**2.1.41.** Cho $f$ là hàm khả vi cấp hai trên $(a, b)$ và với các số $\alpha, \beta, \gamma$ thực thoả mãn $\alpha^2 + \beta^2 > 0$ ta có

$$\alpha f''(x) + \beta f'(x) + \gamma f(x) = 0, \quad x \in (a, b).$$

Chứng minh rằng $f \in C^\infty(a, b)$.

## 2.2 Các định lý giá trị trung bình

**2.2.1.** Chứng minh rằng nếu $f$ liên tục trong khoảng đóng $[a, b]$, khả vi trên khoảng mở $(a, b)$ và $f(a) = f(b) = 0$ thì với $\alpha \in \mathbb{R}$, tồn tại $x \in (a, b)$ sao cho

$$\alpha f(x) + f'(x) = 0.$$

**2.2.2.** Cho $f$ và $g$ là các hàm liên tục trên $[a, b]$, khả vi trên khoảng mở $(a, b)$ và giả sử $f(a) = f(b) = 0$. Chứng minh rằng tồn tại $x \in (a, b)$ sao cho

$$g'(x)f(x) + f'(x) = 0.$$

**2.2.3.** Cho $f$ là hàm liên tục trên $[a, b]$, $a > 0$ và khả vi trên khoảng mở $(a, b)$. Chứng minh rằng nếu

$$\frac{f(a)}{a} = \frac{f(b)}{b},$$

thì tồn tại $x_0 \in (a, b)$ sao cho $x_0 f'(x_0) = f(x_0)$.

**2.2.4.** Giả sử $f$ liên tục trên $[a, b]$ và khả vi trên $(a, b)$. Chứng minh rằng nếu $f^2(b) - f^2(a) = b^2 - a^2$ thì phương trình

$$f'(x)f(x) = x$$

có ít nhất một nghiệm trong $(a, b)$.

**2.2.5.** Giả sử $f$ và $g$ liên tục, khác 0 trong $[a, b]$ và khả vi trên $(a, b)$. Chứng minh rằng nếu $f(a)g(b) = f(b)g(a)$ thì tồn tại $x_0 \in (a, b)$ sao cho

$$\frac{f'(x_0)}{f(x_0)} = \frac{g'(x_0)}{g(x_0)}.$$

**2.2.6.** Giả sử $a_0, a_1, \ldots, a_n$ là các số thực thoả mãn

$$\frac{a_0}{n+1} + \frac{a_1}{n} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{2} + a_n = 0.$$

Chứng minh rằng đa thức $P(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n$ có ít nhất một nghiệm trong $(0, 1)$.

**2.2.7.** Xét các số thực $a_0, a_1, \ldots, a_n$ thoả mãn

$$\frac{a_0}{1} + \frac{2a_1}{1} + \frac{2^2 a_2}{3} \cdots + \frac{2^{n-1} a_{n-1}}{n} + \frac{2^n a_n}{n+1} = 0.$$

Chứng minh rằng hàm số

$$f(x) = a_n \ln^n x + \cdots + a_2 \ln^2 x + a_1 \ln x + a_0$$

có ít nhất một nghiệm trong $(1, e^2)$.

**2.2.8.** Chứng minh rằng nếu mọi nghiệm của đa thức $P$ có bậc $n \geq 2$ đều là thực thì mọi nghiệm của đa thức $P'$ cũng đều là thực.

**2.2.9.** Cho $f$ khả vi liên tục trên $[a, b]$ và khả vi cấp hai trên $(a, b)$, giả sử $f(a) = f'(a) = f(b) = 0$. Chứng minh rằng tồn tại $x_1 \in (a, b)$ sao cho $f''(x_1) = 0$.

**2.2.10.** Cho $f$ khả vi liên tục trên $[a, b]$ và khả vi cấp hai trên $(a, b)$, giả sử $f(a) = f(b)$ và $f'(a) = f'(b) = 0$. Chứng minh rằng tồn tại hai số $x_1, x_2 \in (a, b)$, $x_1 \neq x_2$ sao cho

$$f''(x_1) = f''(x_2).$$

**2.2.11.** Chứng minh rằng các phương trình sau:

(a) $x^{13} + 7x^3 - 5 = 0,$

(b) $3^x + 4^x = 5^x$

có đúng một nghiệm thực .

**2.2.12.** Chứng minh rằng với các số $a_1, a_2, \dots, a_n$ khác 0 và với các số $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ thoả mãn $\alpha_i \neq \alpha_j$, $i \neq j$, phương trình

$$a_1 x^{\alpha_1} + a_2 x^{\alpha_2} + \cdots + a_n x^{\alpha_n} = 0$$

có nhiều nhất là $n-1$ nghiệm trong $(0, +\infty)$.

**2.2.13.** Chứng minh rằng với các giả thiết của bài trên, phương trình

$$a_1 e^{\alpha_1 x} + a_2 e^{\alpha_2 x} + \cdots + a_n e^{\alpha_n x} = 0$$

có nhiều nhất là $n-1$ nghiệm trong $(0, +\infty)$.

**2.2.14.** Cho các hàm $f, g, h$ liên tục trên $[a, b]$ và khả vi trên $(a, b)$, ta định nghĩa hàm

$$F(x) = \det \begin{vmatrix} f(x) & g(x) & h(x) \\ f(a) & g(a) & h(a) \\ f(b) & g(b) & h(b) \end{vmatrix}, \quad x \in [a, b].$$

Chứng minh rằng tồn tại $x_0 \in (a, b)$ sao cho $F'(x_0) = 0$. Sử dụng kết quả vừa nhận được phát biểu định lý giá trị trung bình và định lý giá trị trung bình tổng quát.

**2.2.15.** Cho $f$ liên tục trên $[0, 2]$ và khả vi cấp hai trên $(0, 2)$. Chứng minh rằng nếu $f(0) = 0$, $f(1) = 1$ và $f(2) = 2$ thì tồn tại $x_0 \in (0, 2)$ sao cho $f''(x_0) = 0$.

**2.2.16.** Giả sử $f$ liên tục trên $[a, b]$ và khả vi trên $(a, b)$. Chứng minh rằng nếu $f$ không là một hàm tuyến tính thì tồn tại $x_1$ và $x_2$ thuộc $(a, b)$ sao cho

$$f'(x_1) < \frac{f(b) - f(a)}{b - a} < f'(x_2).$$

**2.2.17.** Cho $f$ là hàm liên tục trên $[0,1]$ và khả vi trên $(0,1)$. Giả sử rằng $f(0) = f(1) = 0$ và tồn tại $x_0 \in (0,1)$ sao cho $f(x_0) = 1$. Chứng minh rằng $|f'(c)| > 2$ với $c \in (0,1)$.

**2.2.18.** Cho $f$ liên tục trên $[a,b]$, $a > 0$, khả vi trên $(a,b)$. Chứng minh rằng tồn tại $x_0 \in (a,b)$ sao cho

$$\frac{bf(a) - af(b)}{b-a} = f(x_1) - x_1 f'(x_1).$$

**2.2.19.** Chứng minh rằng các hàm số $x \mapsto \ln(1+x)$, $x \mapsto \ln(1+x^2)$ và $x \mapsto \arctan x$ liên tục đều trên $[0,+\infty)$.

**2.2.20.** Giả sử $f$ khả vi cấp hai trên $(a,b)$ và tồn tại $M \geq 0$ sao cho $|f''(x)| \leq M$ với mọi $x \in (a,b)$. Chứng minh rằng $f$ liên tục đều trên $(a,b)$.

**2.2.21.** Giả sử $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, $b - a \geq 4$ khả vi trên khoảng mở $(a,b)$. Chứng minh rằng tồn tại $x_0 \in (a,b)$ sao cho

$$f'(x_0) < 1 + f^2(x_0).$$

**2.2.22.** Chứng minh rằng nếu $f$ khả vi trên $(a,b)$ và nếu

(i) $$\lim_{x\to a^+} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x\to b^-} f(x) = -\infty,$$

(ii) $$f'(x) + f^2(x) + 1 \geq 0, \quad \text{với} \quad x \in (a,b),$$

thì $b - a \geq \pi$.

**2.2.23.** Cho $f$ liên tục trên $[a,b]$ và khả vi trên $(a,b)$. Chứng minh rằng nếu $\lim\limits_{x\to b^-} f'(x) = A$ thì $f'_-(b) = A$.

**2.2.24.** Giả sử $f$ khả vi trên $(0,\infty)$ và $f'(x) = O(x)$ khi $x \to \infty$. Chứng minh rằng $f(x) = O(x^2)$ khi $x \to \infty$.

**2.2.25.** Cho $f_1, f_2, \ldots, f_n$ và $g_1, g_2, \ldots, g_n$ là các hàm liên tục trên $[a,b]$ và khả vi trên $(a,b)$. Giả sử rằng $g_k(a) \neq g_k(b)$ với mọi $k = 1,2,\ldots,n$. Chứng minh rằng tồn tại $c \in (a,b)$ sao cho

$$\sum_{k=1}^{n} f'_k(c) = \sum_{k=1}^{n} g'_k(c) \frac{f_k(b) - f_k(a)}{g_k(b) - g_k(a)}.$$

**2.2.26.** Cho hàm $f$ khả vi trên khoảng mở $\mathbf{I}$ và giả sử $[a,b] \subset \mathbf{I}$. Ta nói rằng $f$ ***khả vi đều trên*** $[a,b]$ nếu với mọi $\varepsilon > 0$, tồn tại $\delta > 0$ sao cho

$$\left| \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - f'(x) \right| < \varepsilon$$

với mọi $x \in [a,b]$ và $|h| < \delta$, $x + h \in \mathbf{I}$. Chứng minh rằng $f$ khả vi đều trên $[a,b]$ khi và chỉ khi $f'$ liên tục trên $[a,b]$.

**2.2.27.** Cho $f$ liên tục trên $[a,b]$, $g$ khả vi trên $[a,b]$ và $g(a) = 0$. Chứng minh rằng nếu tồn tại $\lambda \neq 0$ sao cho

$$|g(x)f(x) + \lambda g'(x)| \leq |g(x)|, \quad \text{với} \quad x \in [a,b],$$

thì $g(x) \equiv 0$ trên $[a,b]$.

**2.2.28.** Cho $f$ khả vi trên $(0,+\infty)$. Chứng minh rằng nếu $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$ thì $\lim\limits_{x\to+\infty} |f'(x)| = 0$.

**2.2.29.** Tìm tất cả các hàm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ là thoả mãn phương trình hàm

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'\left(x + \frac{1}{2}h\right) \quad \text{với} \quad x, h \in \mathbb{R},\ h \neq 0.$$

(HD. Chứng minh rằng phương trình chỉ có duy nhất nghiệm là một đa thức bậc hai bất kỳ).

**2.2.30.** Cho các số dương $p, q$ thoả mãn $p + q = 1$, hãy tìm tất cả các hàm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thoả mãn phương trình

$$\frac{f(x) - f(y)}{x - y} = f'(px + qy) \quad \text{với} \quad x, y \in \mathbb{R},\ x \neq y.$$

**2.2.31.** Chứng minh rằng nếu $f$ khả vi trên khoảng mở $\mathbf{I}$ thì $f'$ nhận mọi giá trị trung gian trong $\mathbf{I}$.

**2.2.32.** Cho $f$ khả vi trên $(0,\infty)$. Chứng minh rằng

(a) nếu $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - f'(x)) = 0$ thì $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$,

(b) nếu $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x) - 2\sqrt{x}f'(x)) = 0$ thì $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

**2.2.33.** Chứng minh rằng nếu $f \in C^2([a,b])$ có ít nhất ba nghiệm trong $[a,b]$ thì phương trình $f(x) + f''(x) = 2f'(x)$ có ít nhất một nghiệm trong $[a,b]$.

**2.2.34.** Chứng minh rằng nếu đa thức$P$ bậc $n$ có $n$ nghiệm phân biệt lớn hơn 1 thì đa thức

$$Q(x) = (x^2+1)P(x)P'(x) + xP^2(x) + (P'(x))^2$$

có ít nhất $2n-1$ nghiệm phân biệt.

**2.2.35.** Giả sử rằng đa thức $P(x) = a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ với $a_m > 0$ có $m$ nghiệm thực phân biệt. Chứng minh rằng đa thức $Q(x) = (P(x))^2 - P'(x)$ có

(1) đúng $m+1$ nghiệm thực phân biệt nếu $m$ lẻ,

(2) đúng $m$ nghiệm thực phân biệt nếu $m$ chẵn.

**2.2.36.** Giả sử đa thức $P(x)$ bậc $n \geq 3$ có các nghiệm đều thực, viết

$$P(x) = (x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n),$$

trong đó $a_i \leq a_{i+1}$, $i = 1, 2, \ldots, n-1$ và

$$P'(x) = n(x-c_1)(x-c_2)\cdots(x-c_{n-1}),$$

trong đó $a_i \leq c_i \leq a_{i+1}$, $i = 1, 2, \ldots, n-1$. Chứng minh rằng nếu

$$\begin{aligned} Q(x) &= (x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_{n-1}),\\ Q'(x) &= (n-1)(x-d_1)(x-d_2)\cdots(x-d_{n-2}), \end{aligned}$$

thì $d_i \geq c_i$ với $i = 1, 2, \ldots, n-2$. Hơn nữa chứng minh rằng nếu

$$\begin{aligned} R(x) &= (x-a_2)(x-a_3)\cdots(x-a_n),\\ R'(x) &= (n-1)(x-e_1)(x-e_2)\cdots(x-e_{n-2}), \end{aligned}$$

thì $e_i \leq c_{i+1}$ với $i = 1, 2, \ldots, n-2$.

**2.2.37.** Sử dụng giả thiết của bài trên hãy chứng minh rằng

(1) nếu $S(x) = (x - a_1 - \varepsilon)(x - a_2)\dots(x - a_n)$, trong đó $\varepsilon > 0$ thoả mãn $a_1 + \varepsilon \leq a_{n-1}$ và nếu $S'(x) = n(x - f_1)(x - f_2)\dots(x - f_{n-1})$ thì $f_{n-1} \geq c_{n-1}$,

(2) nếu $T(x) = (x - a_1)(x - a_2)\dots(x - a_n + \varepsilon)$, với $\varepsilon > 0$ thoả mãn $a_n - \varepsilon \leq a_2$ và nếu $T'(x) = n(x - g_1)(x - g_2)\dots(x - g_{n-1})$ thì $g_1 \leq c_1$.

**2.2.38.** Sử dụng giả thiết của bài 2.2.36 hãy chứng minh rằng

$$a_i + \frac{a_{i+1} - a_i}{n - i + 1} \leq c_i \leq a_{i+1} - \frac{a_{i+1} - a_i}{i + 1}, \quad i = 1, 2, \dots, n - 1.$$

**2.2.39.** Chứng minh rằng nếu $f$ khả vi trên $[0, 1]$ và

(i) $f(0) = 0$,

(ii) tồn tại $K > 0$ sao cho $|f'(x)| \leq K|f(x)|$ với $x \in [0, 1]$,

thì $f(x) \equiv 0$.

**2.2.40.** Cho $f$ là một hàm khả vi vô hạn trên khoảng $(-1, 1)$, $\mathbf{J} \subset (-1, 1)$ là một khoảng có độ dài $\lambda$. Giả sử $\mathbf{J}$ được chia thành ba khoảng liên tiếp $\mathbf{J}_1$, $\mathbf{J}_2$, $\mathbf{J}_3$ có độ dài tương ứng là $\lambda_1$, $\lambda_2$, $\lambda_3$, tức là ta có $\mathbf{J}_1 \cup \mathbf{J}_2 \cup \mathbf{J}_3 = \mathbf{J}$ và $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = \lambda$. Chứng minh rằng nếu

$$m_k(\mathbf{J}) = \inf\left\{|f^{(k)}(x)| : x \in \mathbf{J}\right\}, \quad k \in \mathbb{N},$$

thì

$$m_k(\mathbf{J}) \leq \frac{1}{\lambda_2}(m_{k-1}(\mathbf{J}_1) + m_{k-1}(\mathbf{J}_3)).$$

**2.2.41.** Chứng minh rằng với giả thiết của bài trước, nếu $|f(x)| \leq 1$ với $x \in (-1, 1)$ thì

$$m_k(\mathbf{J}) \leq \frac{2^{\frac{k(k+1)}{2}} k^k}{\lambda^k}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

**2.2.42.** Giả sử rằng đa thức $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ có $n$ nghiệm thực phân biệt. Chứng minh rằng nếu tồn tại $p, 1 \leq p \leq n - 1$ sao cho $a_p = 0$ và $a_i \neq 0$ với mọi $i \neq p$ thì $a_{p-1} a_{p+1} < 0$.

## 2.3 Công thức Taylor và quy tắc L'Hôpital

**2.3.1.** Giả sử $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ khả vi cấp $n-1$ trên $[a, b]$. Nếu $f^{(n)}(x_0)$ tồn tại thì với mọi $x \in [a, b]$,

$$\begin{aligned} f(x) = f(x_0) &+ \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 \\ &+ \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + o((x-x_0)^n). \end{aligned}$$

(Công thức này được gọi là *công thức Taylor với phần dư dạng Peano*).

**2.3.2.** Giả sử $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ khả vi liên tục cấp $n$ trên $[a, b]$ và giả sử rằng $f^{(n+1)}$ tồn tại trong khoảng mở $(a, b)$. Chứng minh rằng với mọi $x, x_0 \in [a, b]$ và mọi $p > 0$ tồn tại $\theta \in (0, 1)$ sao cho ,

$$\begin{aligned} f(x) = f(x_0) &+ \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 \\ &+ \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + r_n(x), \end{aligned}$$

trong đó

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x-x_0))}{n!p}(1-\theta)^{n+1-p}(x-x_0)^{n+1}$$

được gọi là *phần dư dạng Schlomilch-Roche*.

**2.3.3.** Sử dụng kết quả trên hãy chứng minh các dạng phần dư sau:

(a) $$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x-x_0))}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

*(dạng Lagrange),*

(b) $$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x-x_0))}{n!}(1-\theta)^n(x-x_0)^{n+1}$$

*(dạng Cauchy).*