Bài 8: DẠNG SONG TUYẾN TÍNH, DẠNG TOÀN PHƯƠNG, KHÔNG GIAN EUCLID

Mục tiêu

- Khái niệm về dạng song tuyến tính và dạng toàn phương.
- Biết cách đưa dạng toàn phương về dạng chính tắc bằng hai phương pháp: Phương pháp Lagrange, phương pháp Jacobi và tiêu chuẩn Sylvester.
- Khái niệm về không gian Euclid, hệ trực giao và hệ trực chuẩn.
- Biết cách đưa đường mặt bậc hai ở dạng toàn phương về dạng trục chính.
- Giải được các bài toán trong các nội dung nêu trên.

Thời lượng

Bạn đọc nên để 15 giờ để nghiên cứu LT + 8 giờ làm bài tập.

Nội dung

Dạng song tuyến tính là cơ sở để ta nghiên cứu dạng toàn phương và tích vô hướng. Áp dụng dạng toàn phương và không gian Euclid vào Hình học giải tích ta có thể đưa các đường và mặt bậc hai về dạng chính tắc.

- Khái niệm về dạng song tuyến tính và dạng toàn phương.
- Biết cách đưa dạng toàn phương về dạng chính tắc bằng hai phương pháp: Phương pháp Lagrange, phương pháp Jacobi và tiêu chuẩn Sylvester.
- Khái niệm về không gian Euclid, hệ trực giao và hệ trực chuẩn.
- Biết cách đưa đường mặt bậc hai ở dạng toàn phương về dạng trục chính.
- Giải được các bài toán trong các nội dung nêu trên.

Bài toán mở đầu : Bài toán phân phối tối ưu công suất giữa thủy điện và nhiệt điện

Cho trước biểu đồ phụ tải trong một ngày đêm (24 giờ) tức là cho công suất phụ tải $P_{pt}(k)$, k = 1, 2,..., 24, tính bằng MW. Giả sử năng lượng thủy điện có thể khai thác trong một ngày đêm là A(MWh). Vấn đề là hãy xác định công suất của các nhà máy điện P_k, k = 1, 2,..., 24 sao cho đường biểu diễn công suất là bằng phẳng nhất có thể được (để giảm bớt chi phí cho việc điều chỉnh công suất) và sao cho sử dụng hết năng lực của thủy điện.

Từ yêu cầu ta có thể thiết lập mô hình như sau: Xác định các công suất P_k , k = 1, 2,..., 24 sao cho

$$\sum_{k=1}^{24}\left(P_k - \frac{\sum_{k=1}^{24} P_k}{24}\right) \to \min$$

$$\sum_{k=1}^{24}\left[P_{pt}(k) - P_k\right] = A$$

$$P_{min} \le P_k \le P_{max},\ k = 1, 2, \ldots, 24.$$

Hàm mục tiêu của bài toán có dạng toàn phương.

Dạng song tuyến tính là cơ sở để ta nghiên cứu dạng toàn phương và tích vô hướng. Áp dụng dạng toàn phương và không gian Euclid vào Hình học giải tích ta có thể đưa các đường và mặt bậc hai về dạng chính tắc.

8.1. Dạng song tuyến tính và dạng toàn phương

8.1.1. Dạng song tuyến tính

Định nghĩa 8.1: Cho V là không gian véc tơ trên $\mathbb{R}$, ánh xạ f: $V \times V \to \mathbb{R}$ gọi là một dạng song tuyến tính trên V nếu

$$f(x^1 + x^2, y) = f(x^1, y) + f(x^2, y) \qquad x^1, x^2, y \in V$$

$$f(\lambda x, y) = \lambda f(x, y) \qquad x, y \in V, \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

$$f(x, y^1 + y^2) = f(x, y^1) + f(x, y^2) \qquad \forall x, y^1, y^2 \in V$$

$$f(x, \lambda y) = \lambda f(x, y) \qquad x, y \in V, \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

Ví dụ: Ánh xạ f: $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ xác định bởi

$f(u, v) = x_1x_2 + y_1y_2$ trong đó $u = (x_1, y_1)$, $v = (x_2, y_2)$ là một dạng song tuyến tính trên $\mathbb{R}^2$.

Dạng song tuyến tính f(x, y) trên V gọi là đối xứng nếu

$$f(x, y) = f(y, x)\ \forall x, y \in V.$$

Dạng song tuyến tính trong ví dụ trên là đối xứng.

8.1.2. Dạng toàn phương

Giả sử f(x, y) là một dạng song tuyến tính trên V, $\{e^1, e^2, \ldots, e^n\}$ là một cơ sở của V. Khi đó, ta có

$$f(x, y) = f\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e^i, \sum_{j=1}^{n} y_j e^j\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i y_j f(e^i, e^j). \tag{8.1}$$

Đặt $f(e^i, e^j) = a_{ij}$ $(i, j = 1, 2,..., n)$, ta có

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Ma trận A gọi là ma trận của dạng song tuyến tính f theo cơ sở $\{e^1, e^2, \dots, e^n\}$. Nói chung, A không phải là một ma trận đối xứng $A \neq A'$.

Trong trường hợp f là dạng song tuyến tính đối xứng, nghĩa là

$$a_{ij} = f(e^i, e^j) = f(e^j, e^i) = a_{ji}, \ (i, j = 1,2,\dots,n)$$

thì A là ma trận đối xứng.

Nếu $\{f^1, f^2, \dots, f^n\}$ là một cơ sở khác của V với

$$f^k = \sum_{m=1}^{n} t_{mk} e^m \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

và $f(f^i, f^k) = b_{ik}$, ta có

$$b_{ik} = f(f^i, f^k) = f\left(\sum_{m=1}^{n} t_{mi} e^m, \sum_{l=1}^{n} t_{lk} e^l\right) = \sum_{m=1}^{n} t_{mi} \sum_{l=1}^{n} t_{lk} f(e^m, e^l)$$

$$\sum_{m=1}^{n} t_{mi} \sum_{l=1}^{n} t_{lk} a_{ml} \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Từ đây, ta có $B = T^{-1}AT$, trong đó

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix}, \ T = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & \dots & t_{1n} \\ t_{21} & t_{22} & \dots & t_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ t_{n1} & t_{n2} & \dots & t_{nn} \end{pmatrix}$$

Định nghĩa 8.2: Nếu f(x, y) là một dạng song tuyến tính đối xứng trên không gian véc tơ V thì f(x, x) gọi là một dạng toàn phương.

Nếu $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e^i$ và đặt $f(e^i, e^j) = a_{ij} = a_{ji}$ $(i, j = 1, 2,..., n)$.

Ta có $f(x, x) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$

$$= a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + \dots + 2a_{1n}x_1x_n + a_{22}x_2^2 + 2a_{23}x_2x_3 + \dots + a_{nn}x_n^2. \tag{8.2}$$

Trong trường hợp $a_{ij} = 0$ $(i \neq j;\ i, j = 1, 2,..., n)$ thì dạng toàn phương được gọi là dạng toàn phương ở dạng chính tắc, khi đó

$$f(x, x) = a_{11}x_1^2 \pm a_{22}x_2^2 \pm \dots \pm a_{nn}x_n^2.$$

8.1.3. Đưa dạng toàn phương về dạng chính tắc

Ta đã biết biểu thức của dạng song tuyến tính f(x, x) qua các tọa độ của véc tơ x phụ thuộc vào việc chọn cơ sở (hệ tọa độ) trong đó dạng toàn phương có dạng đơn giản

$$f(x, x) = \lambda_1\xi_1^2 + \lambda_2\xi_2^2 + \dots + \lambda_n\xi_n^2$$

8.1.3.1. Phương pháp Lagrange

Giả sử trong một cơ sở $f_1, f_2, \dots, f_n$ nào đó ta có

$$f(x, x) = \sum_{i,j} a_{ij}x_i x_j \quad i, j = \overline{1, n} \tag{8.3}$$

Trong đó $x_1, x_2, \dots, x_n$ là các tọa độ véc tơ *x* trong cơ sở này.

Ta sẽ dần dần biến đổi cơ sở sao cho trong dạng (8.3) mất đi các số hạng chéo (các tích tọa độ với hệ số khác nhau).

Vì mỗi biến số cơ sở ứng với một phép biến đổi xác định các tọa độ và ngược lại nên ta sẽ viết các công thức biến đổi các tọa độ.

Để dẫn dạng toàn phương f(x, x) về dạng chính tắc, ta cần có ít nhất một trong các hệ số a_{ii} (hệ số của x_i^2) khác 0. Điều đó luôn luôn có thể đạt được. Thật vậy, giả sử dạng f(x, x) không đồng nhất bằng 0, nhưng không chứa một biến bình phương nào, khi đó, nó chứa dù chỉ một tích, chẳng hạn như $2a_{12}x_1x_2$. Ta thay các tọa độ x_1, x_2 bởi

$$x_1 = x_1' + x_2'$$

$$x_2 = x_1' - x_2'$$

và không thay đổi các biến còn lại. Khi đó, số hạng $2a_{12}x_1x_2$ chuyển thành $2a_{12}(x_1'^2 - x_2'^2)$. Theo giả thiết $a_{11} = a_{22} = 0$ nên số hạng thu được không bao giờ bị triệt tiêu, nghĩa là hệ số $x_1'^2$ khác 0. Vậy ta giả sử rằng trong (8.3) có $a_{11} \neq 0$. Ta tách ra trong dạng toàn phương các số hạng chứa x_1

$$a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + \dots + 2a_{1n}x_1x_n$$

Ta bổ sung tổng này đến một bình phương đầy đủ của tổng, nghĩa là viết nó dưới dạng

$$a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + \dots + 2a_{1n}x_1x_n$$

$$= \frac{1}{a_{11}}(a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n)^2 - B. \tag{8.4}$$

Trong đó qua B ta ký hiệu các số hạng chỉ chứa các bình phương và tích từng đôi một của các số hạng $a_{12}x_2, \dots, a_{1n}x_n$.

Sau khi thay (8.4) vào (8.3) thì dạng toàn phương đã cho có dạng

$$f(x, x) = \frac{1}{a_{11}}(a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n)^2 + \dots$$

trong đó các số hạng không viết ra chỉ chứa các biến $x_2, \dots, x_n$.

Ta đặt

$$\eta_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n$$

$$\eta_2 = \qquad\qquad x_2$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\eta_n = \qquad\qquad x_n$$

Khi đó, dạng toàn phương trở thành

$$f(x,x) = \frac{1}{a_{11}}\eta_1^2 + \sum_{i,j=2}^{n} b_{ij}\eta_i\eta_j.$$

Biểu thức $\sum_{i,j=2}^{n} b_{ij}\eta_i\eta_j$ hoàn toàn giống dạng (8.3) chỉ có khác là bớt tọa độ x_1. Bây giờ, ta giả sử $b_{22} \neq 0$. Khi đó tiến hành phép biến đổi mới các biến tương tự như trên theo các công thức

$$\eta_1^* = \eta_1$$
$$\eta_2^* = b_{22}\eta_2 + b_{23}\eta_3 + \ldots + b_{2n}\eta_n$$
$$\eta_3^* = \eta_3$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\eta_n^* = \eta_n$$

Trong các biến mới ta có

$$f(x, x) = \frac{1}{a_{11}}\eta_1^{*2} + \frac{1}{b_{22}}\eta_2^* + \sum_{i,j=3}^{n} c_{ij}\eta_i^*\eta_j^*.$$

Tiếp tục quá trình này, sau một số hữu hạn bước, ta đến các biến $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ trong đó

$$f(x, x) = \lambda_1\xi_1^2 + \lambda_2\xi_2^2 + \ldots + \lambda_n\xi_n^2.$$

Như vậy, ta đi đến định lý sau.

Định lý 8.1: Giả sử trong không gian n chiều $\mathbb{R}^n$ cho dạng toàn phương bất kỳ f(x, x). Khi đó, trong $\mathbb{R}^n$ tồn tại cơ sở $e_1, e_2, \ldots, e_n$ sao cho với cơ sở đó

$$f(x, x) = \lambda_1\xi_1^2 + \lambda_2\xi_2^2 + \ldots + \lambda_n\xi_n^2.$$

Trong đó $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ là các tọa độ của véc tơ x trong cơ sở $e_1, e_2, \ldots, e_n$.

Ví dụ: Giả sử trong không gian $\mathbb{R}^3$ với cơ sở f_1, f_2, f_3 cho dạng toàn phương

$$f(x, x) = 2x_1x_2 + 4x_1x_3 - x_2^2 - 8x_3^2.$$

Ta đặt

$$x_1 = x_2'$$
$$x_2 = x_1'$$
$$x_3 = x_3'$$

Khi đó, ta được

$$f(x, x) = -x_1'^2 + 2x_1'2x_2' + 4x_2'x_3' - 8x_3'^2.$$

Tiếp đó, ta đặt

$$\eta_1 = -x_1' + x_2'$$
$$\eta_2 = x_2'$$
$$\eta_3 = x_3'.$$

Ta sẽ được biểu thức mới cho dạng toàn phương

$$f(x, x) = -\eta_1^2 + \eta_2^2 + 4\eta_2\eta_3 - 8\eta_3^2.$$

Phép biến đổi

$$\xi_1 = \eta_1$$
$$\xi_2 = \eta_2 + 2\eta_3$$
$$\xi_3 = \eta_3.$$

cho ta dạng chính tắc

$$f(x, x) = -\xi_1^2 + \xi_2^2 - 12\xi_3^2.$$

8.1.3.2. Phương pháp Jacobi và tiêu chuẩn Sylvester

Ta cần đặt điều kiện đối với dạng toàn phương f(x, y) với cơ sở xuất phát như sau: Giả sử ma trận $\|a_{ik}\|$ của dạng song tuyến tính f(x, y) trong cơ sở $f_1, f_2, \ldots, f_n$ có các định thức con khác 0

$$\Delta_1 = a_{11} \neq 0\ ;\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$$

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0. \tag{8.5}$$

Trong cơ sở $f_1, f_2, \ldots, f_n$ dạng toàn phương f(x, x) có dạng

$$f(x, x) = \sum_{i, k=1}^{n} a_{ik}\xi_i\xi_k$$

với $a_{ik} = f(f_i, f_k)$.

Mục đích của ta là xác định các véc tơ $e_1, e_2, \ldots, e_n$ sao cho

$$f(e_i, e_k) = 0 \text{ với } i \neq k\ (i, k = \overline{1, n}). \tag{8.6}$$

Quá trình tiến hành tương tự như quá trình trực giao hóa.

Ta sẽ tìm các véc tơ $e_1, e_2, \ldots, e_n$ dưới dạng

$$\left.\begin{array}{l} e_1 = \alpha_{11}f_1 \\ e_2 = \alpha_{21}f_2 + \alpha_{22}f_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ e_n = \alpha_{n1}f_1 + \alpha_{n2}f_2 + \dots + \alpha_{nn}f_n \end{array}\right\} \quad (8.7)$$

Các hệ số α_{ik} có thể tìm như sau:

Nếu $f(e_k, f_i) = 0$ với $i = 1, 2, \dots k - 1$ thì $f(e_k, e_i) = 0$ đối với $i = 1, 2, \dots, k - 1$.

Thật vậy, thay e_i bởi biểu thức

$$\alpha_{i1}f_1 + \alpha_{i2}f_2 + \dots + \alpha_{ii}f_i$$

ta được

$$f(e_k, e_i) = f(e_k, \alpha_{i1}f_1 + \alpha_{i2}f_2 + \dots + \alpha_{ii}f_i)$$

$$= \alpha_{i1}f(e_k, f_1) + \alpha_{i2}f(e_k, f_2) + \dots + \alpha_{ii}f(e_k, f_i).$$

Như vậy, nếu $f(e_k, f_i) = 0$ đối với bất kỳ k và bất kỳ $i < k$ thì $f(e_k, e_i)$ đối với $i < k$ và do đó, tính đối xứng của dạng song tuyến tính, ta có đối với cả $i > k$, nghĩa là $e_1, e_2, \dots, e_n$ là cơ sở cần tìm.

Do đó, bài toán của ta dẫn tới bài toán sau:

Xác định các hệ số $\alpha_{k1}, \alpha_{k2}, \dots, \alpha_{kk}$ sao cho véc tơ

$$e_k = \alpha_{k1}f_1 + \alpha_{k2}f_2 + \dots + \alpha_{kk}f_k$$

thỏa các điều kiện

$$f(e_k, f_i) = 0 \text{ với } i = 1, 2, \dots, k - 1. \quad (8.8)$$

Với các điều kiện đó, véc tơ e_k được xác định chính xác đến phần tử xác định. Ta cố định phần tử đó nhờ đòi hỏi

$$f(e_k, f_k) = 1. \quad (8.9)$$

Ta sẽ thấy ngay với các điều kiện (8.8) và (8.9), véc tơ e_k đã được xác định một cách đơn trị.

Thay (8.8) vào (8.9) biểu thức cho e_k ta nhận được hệ phương trình bậc nhất sau đây đối với α_{ki}

$$\left.\begin{array}{l} \alpha_{k1}f(f_1, f_1) + \alpha_{k2}f(f_1, f_2) + \dots + \alpha_{kk}f(f_1, f_k) = 0 \\ \alpha_{k1}f(f_2, f_1) + \alpha_{k2}f(f_2, f_2) + \dots + \alpha_{kk}f(f_2, f_k) = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \alpha_{k1}f(f_{k-1}, f_1) + \alpha_{k2}f(f_{k-1}, f_2) + \dots + \alpha_{kk}f(f_{k-1}, f_k) = 0 \\ \alpha_{k1}f(f_k, f_1) + \alpha_{k2}f(f_k, f_2) + \dots + \alpha_{kk}f(f_k, f_k) = 1 \end{array}\right\} \quad (8.10)$$

Định thức của hệ phương trình này là

$$\Delta = \begin{vmatrix} f(f_1, f_1) & f(f_1, f_2) & \dots & f(f_1, f_k) \\ f(f_2, f_1) & f(f_2, f_2) & \dots & f(f_2, f_k) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f(f_k, f_1) & f(f_k, f_2) & \dots & f(f_k, f_k) \end{vmatrix} \quad (8.11)$$

Và theo điều kiện (8.5), định thức trên khác 0. Vì vậy, nghiệm của (8.10) tồn tại và duy nhất. Như vậy, bài toán tìm véc tơ e_k đã được giải cho k bất kỳ.

Bây giờ, ta tìm các hệ số b_{ik} của dạng toàn phương f(x, x) trong cơ sở $e_1, e_2,..., e_n$ như ta đã biết

$$b_{ik} = f(e_i, e_k).$$

Theo cách dựng cơ sở này, $f(e_i, e_k) = 0$ khi $i \neq k$, nghĩa là $b_{ik} = 0$ khi $i \neq k$.

Ta tính $b_{kk} = f(e_k, e_k)$

$$f(e_k, e_k) = f(e_k, \alpha_{k1}f_1 + \alpha_{k2}f_2 +\ldots+ \alpha_{kk}f_k)$$

$$= \alpha_{k1}f(e_k, f_1) + \alpha_{k2}f(e_k, f_2) +\ldots+ \alpha_{kk}f(e_k, f_k)$$

và theo (8.8) và (8.9)

$$f(e_k, e_k) = \alpha_{kk}.$$

Số α_{kk} có thể tìm từ hệ (8.10) theo quy tắc Crame

$$\alpha_{kk} = \frac{\Delta_{k-1}}{\Delta_k}$$

trong đó Δ_{k-1} là định thức tương đương với (8.11) bậc k – 1, trong đó đặt $\Delta_0 = 1$.

Như vậy

$$b_{kk} = f(e_k, e_k) = \frac{\Delta_{k-1}}{\Delta_k}$$

và do đó định lý sau đây đã được chứng minh.

Định lý 8.2: Giả sử trong cơ sở $f_1, f_2,\ldots, f_n$ dạng toàn phương có dạng

$$f(x, x) = \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}\xi_i\xi_k$$

với $a_{ik} = f(f_i, f_k)$. Tiếp theo, giả sử các định thức

$$\Delta_1 = a_{11},\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

đều khác 0. Khi đó, tồn tại các cơ sở $e_1, e_2,..., e_n$ trong đó f(x, x) được viết dưới dạng chính tắc như sau

$$f(x, x) = \frac{\Delta_0}{\Delta_1}\xi_1^2 + \frac{\Delta_1}{\Delta_2}\xi_2^2 + \ldots + \frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_n}\xi_n^2 \tag{8.12}$$

với ξ_k là các tọa độ của véc tơ x trong cơ sở $e_1, e_2,\ldots, e_n$.

Ví dụ: Xét dạng toàn phương

$$f(x, x) = 2x_1^2 + 3x_1x_2 + 4x_1x_3 + x_2^2 + x_3^2$$

Ta có

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & \frac{3}{2} & 2 \\ \frac{3}{2} & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\Delta_0 = 1;\ \Delta_1 = 2;\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & 1 \end{vmatrix} = -\frac{1}{4}$$

$$\Delta_3 = \Delta = 2 + 0 + 0 - 4 - \frac{9}{4} - 0 = -2 - \frac{9}{4} = -\frac{17}{4}$$

$$f(x, x) = \frac{1}{2}\xi_1^2 + 2(-4)\xi_2^2 + \frac{-\frac{1}{4}}{-\frac{17}{4}}\xi_3^2 = \frac{1}{2}\xi_1^2 - 8\xi_2^2 + \frac{1}{17}\xi_3^2 .$$

Từ định lý trên cho ta khả năng tìm các hệ số dương và hệ số âm của các số hạng bình phương. Chính là, nếu Δ_{i-1} và Δ_i có cùng dấu thì hệ số của ξ_i^2 là dương, nếu chúng khác dấu thì hệ số âm, nghĩa là số các hệ số âm bằng số các thay đổi dấu của dãy 1, $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n$.

Và như vậy, ta có định lý sau:

Định lý 8.3: Số các hệ số âm trong dạng (8.12) của dạng toàn phương bằng số các thay đổi dấu của dãy 1, $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n$.

Giả sử, trong trường hợp riêng $\Delta_i > 0,\ i = \overline{1, n}$. Khi đó, tồn tại cơ sở $e_1, e_2, \ldots, e_n$ trong đó dạng toàn phương có dạng

$$f(x, x) = \lambda_1\xi_1^2 + \lambda_2\xi_2^2 + \ldots + \lambda_n\xi_n^2$$

Với $\lambda_i > 0,\ \forall i = \overline{1, n}$, do đó $f(x, x) \geq 0$ đối với x bất kỳ. Hơn nữa, đẳng thức

$$f(x, x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\xi_i^2 = 0$$

Nếu $\xi_1 = \xi_2 = \ldots = \xi_n = 0$.

Nói cách khác, nếu $\Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0, \ldots, \Delta_n > 0$ thì dạng toàn phương f(x, x) là xác định dương.

Có thể chứng minh phần đảo rằng, nếu f(x, x) là xác định dương thì $\Delta_k > 0, \forall k$.

Định lý 8.4: (Tiêu chuẩn Sylvester)

Giả sử f(x, y) là dạng song tuyến tính đối xứng và $f_1, f_2, \ldots, f_n$ là cơ sở của $\mathbb{R}^n$. Khi đó, dạng toàn phương f(x, x) là xác định dương khi và chỉ khi

$$\lambda_i > 0,\ \forall i = \overline{1, n}.$$

8.2. Không gian Euclid

8.2.1. Tích vô hướng và không gian Euclid

8.2.1.1. Định nghĩa 8.3

Cho V là không gian véc tơ thực, tích vô hướng của hai véc tơ x, $y \in V$ là một số thực, ký hiệu $<x, y>$ thỏa mãn các tính chất sau:

1. $<x, y> = <y, x>$ $\quad \forall x, y \in V$

2. $<\lambda x, y> = \lambda <x, y>$ $\quad \forall x, y \in V$

3. $<x^1 + x^2, y> = <x^1, y> + <x^2, y>$ $\quad \forall x^1, x^2, y \in V$

4. $<x, x> \geq 0$ $\quad \forall x \in V$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $x = 0$.

Không gian véc tơ thực hữu hạn chiều V trên đó xác định một tích vô hướng gọi là không gian Euclid, ký hiệu là E.

Nhận xét:

Tích vô hướng trên không gian véc tơ V thực chất là một dạng song tuyến tính, đối xứng $f(x, y) = <x, y>$ trên V, thỏa mãn $f(x, x)$ là một dạng toàn phương xác định dương.

8.2.1.2. Độ dài một véc tơ

Giả sử E là một không gian Euclid. Khi đó, $x \in E$ thì $\|x\|$ xác định bởi

$$\|x\| = <x, x>^{\frac{1}{2}}$$

gọi là chuẩn của véc tơ x.

Chú ý: Trong $\mathbb{R}^n$, ta định nghĩa tích vô hướng

$$<x, y> = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i,\ x = (x_1, ..., x_n),\ y = (y_1, ..., y_n).$$

Khi đó

$$\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$$

8.2.1.3. Góc giữa hai véc tơ

$$<\vec{a}, \vec{b}> = |\vec{a}|.|\vec{b}|\cos(\vec{a}, \vec{b})$$

$$\Rightarrow \cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{<\vec{a}, \vec{b}>}{|\vec{a}|.|\vec{b}|},\ \text{nếu } |\vec{a}| \neq 0, |\vec{b}| \neq 0.$$

Chuyển sang không gian Euclid

$$\cos(x, y) = \frac{<x, y>}{\|x\|\|y\|}$$

Hai véc tơ x, y gọi là trực giao nếu $<x, y> = 0$.