

BÀI TẬP CHƯƠNG II.

TÍNH TOÁN TRÊN MA TRẬN

1. Cho các ma trận $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ và $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$.

a. Tính các ma trận AB , $B^t A$, $B^t(A - A^t)$.

b. Tính $f(A)$ với $f(x) = x^2 - x + 2$.

2. Cho $A_\alpha = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}$.

a. Chứng minh $A_\alpha A_\beta = A_{\alpha+\beta}$, $(A_\alpha)^n = A_{n\alpha}$.

b. Tính $\begin{bmatrix} \sqrt{3} & 1 \\ -1 & \sqrt{3} \end{bmatrix}^{2005}$, $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}^n$

3. Tìm ma trận $X \in M_2(\mathbb{R})$ sao cho $AX = XA$ với:

a. $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

b. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$

4. Tìm ma trận $X \in M_2(\mathbb{R})$ sao cho $X^2 - 2X = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}$.

5. Cho ma trận $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$.

a. Chứng minh A là nghiệm của $f(x) = x^2 - (a+d)x + ad - bc$.

b. Chứng minh nếu $\exists k \in \mathbb{N}$ $A^k = 0$ thì $A^2 = 0$

6. Giả sử ma trận $A \in M_n(\mathbb{R})$ thỏa $\forall X \in M_n(\mathbb{R})$ $(XA)^2 = 0$.

Chứng minh $A = 0$.

7. Cho hai ma trận $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ sao cho $AB = BA$. Chứng minh :

a. $A^2 - B^2 = (A - B)(A + B)$

b. $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$

8. Tính:

a. $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^n$ b. $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}^n$ c. $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^n$

ĐỊNH THỨC

9. Tính các định thức:

a.
$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 13547 & 13647 \\ 28423 & 28523 \end{vmatrix}$$

b.
$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 246 & 427 & 327 \\ 1014 & 543 & 443 \\ -342 & 721 & 621 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & i & 1+i \\ -i & 1 & 0 \\ 1-i & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

c.
$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & 1 & -4 & 3 \\ 3 & -4 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & -2 & -1 \end{vmatrix}$$

d.
$$\begin{vmatrix} 1 & \varepsilon^2 & \varepsilon \\ \varepsilon & 1 & \varepsilon^2 \\ \varepsilon^2 & \varepsilon & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \varepsilon & \varepsilon^2 \\ 1 & \varepsilon^2 & \varepsilon \end{vmatrix}$$
 với ε là căn bậc 3 khác 1 của đơn vị.

10. Không khai triển định thức, hãy tìm hệ số của x^4 và x^2 trong đa thức

$$f(x) = \begin{vmatrix} 2x & x & 1 & 2 \\ 1 & x & 1 & -1 \\ 3 & 2 & x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & x \end{vmatrix}.$$

11. Biết 1020 là bội của 17. Không khai triển định thức, hãy chứng minh

$$\begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 & 1 \\ 4 & 5 & 0 & 1 \\ 5 & 5 & 2 & 0 \\ 4 & 4 & 5 & 0 \end{vmatrix} \text{ là bội của 17.}$$

12. Chứng minh:

a.
$$\begin{vmatrix} a_1 + b_1 & b_1 + c_1 & c_1 + a_1 \\ a_2 + b_2 & b_2 + c_2 & c_2 + a_2 \\ a_3 + b_3 & b_3 + c_3 & c_3 + a_3 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$\text{b. } \begin{vmatrix} a^2 & (a+1)^2 & (a+2)^2 & (a+3)^2 \\ b^2 & (b+1)^2 & (b+2)^2 & (b+3)^2 \\ c^2 & (c+1)^2 & (c+2)^2 & (c+3)^2 \\ d^2 & (d+1)^2 & (d+2)^2 & (d+3)^2 \end{vmatrix} = 0$$

13. Tính định thức cấp tổng quát:

$$\text{a. } \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & \cdots & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & \cdots & 2 & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & n-1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 & n \end{vmatrix}$$

$$\text{b. } \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 1 & 3 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 1 & 2 & 5 & \cdots & n-1 & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & 2n-3 & n \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & 2n-1 \end{vmatrix}$$

$$\text{c. } \begin{vmatrix} a_1 & x & x & \cdots & x & x \\ x & a_2 & x & \cdots & x & x \\ x & x & a_3 & \cdots & x & x \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x & x & x & \cdots & a_{n-1} & x \\ x & x & x & \cdots & x & a_n \end{vmatrix}$$

$$\text{d. } \begin{vmatrix} x & y & y & \cdots & y & y \\ z & x & y & \cdots & y & y \\ z & z & x & \cdots & y & y \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ z & z & z & \cdots & x & y \\ z & z & z & \cdots & z & x \end{vmatrix} \quad (\text{cấp } n)$$

14. Giải phương trình:

$$\text{a. } \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \end{vmatrix} = 0$$

$$\text{b. } \begin{vmatrix} 1 & x & x-1 & x+2 \\ 0 & 0 & x^2-1 & 0 \\ x & 1 & x & x-2 \\ 0 & 0 & x^5+1 & x^{100} \end{vmatrix} = 0$$

$$c. \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2-x & \dots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & n-1-x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & n-x \end{vmatrix} = 0$$

HẠNG MA TRẬN – MA TRẬN KHẢ NGHỊCH

15. Tìm hạng của ma trận:

$$a. \begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 4 & 6 \\ -3 & 5 & -2 & -3 & -4 \\ -2 & 3 & 5 & 6 & 4 \end{bmatrix}$$

$$b. \begin{bmatrix} 3 & -1 & 3 & 2 & 5 \\ 5 & -3 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & -3 & 5 & 0 & 7 \\ 7 & -5 & 1 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$c. \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 2 & -3 \\ 3 & -2 & 5 & -4 \\ 5 & -2 & 8 & -5 \end{bmatrix}$$

$$d. \begin{bmatrix} 1 & a & -1 & 2 \\ 2 & -1 & a & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{bmatrix}$$

$$e. \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & 4 \\ a & 4 & 10 & 1 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

$$f. \begin{bmatrix} m & 1 & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 & 1 \\ 1 & 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & 1 & m \end{bmatrix}$$

16. Cho ma trận

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & m & 3 \\ 1 & 0 & m-2 & 3 \\ 2 & 1 & m-m^2 & 3 \\ 5 & 3 & 3m & m+7 \end{bmatrix}. \text{ Tìm } m \text{ sao cho}$$

$$a. \text{ rank } A = \text{rank} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$b. \text{ rank } A = \text{rank} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 14 & 32 \\ 4 & 5 & 6 & 32 & 77 \end{bmatrix}$$

$$c. \text{rank} A = \text{rank} \begin{bmatrix} 0 & 4 & 10 & 1 \\ 4 & 8 & 18 & 7 \\ 10 & 18 & 40 & 17 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \end{bmatrix}$$

17. Tìm hạng của ma trận:

$$a. \begin{bmatrix} a+1 & a & \cdots & a & a \\ a & a+1 & \cdots & a & a \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a & a & \cdots & a+1 & a \\ a & a & \cdots & a & a+1 \end{bmatrix} \quad (\text{cấp } n)$$

$$b. \begin{bmatrix} a & 0 & \cdots & 0 & b \\ 0 & a & \cdots & b & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & b & \cdots & a & 0 \\ b & 0 & \cdots & 0 & a \end{bmatrix} \quad (\text{cấp } 2n)$$

18. Tìm ma trận đảo của:

$$a. \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \quad b. \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad c. \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$d. \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad e. \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

19. Tìm ma trận đảo của ma trận cấp n :

$$a. \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \quad b. \begin{bmatrix} a+1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a+1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & a+1 \end{bmatrix}$$