http://onthi.no1.vn
http://onthi.so1.in

Tìm nhiều cách chứng minh một hệ thức *nhờ biến đổi tương đương*

NGUYỄN VIỆT HẢI
(Hà Nội)

Từ một hệ thức nếu khéo sử dụng các phép biến đổi ta có thể nhận được nhiều hệ thức tương đương, mà mỗi hệ thức đó có một dạng riêng sẽ gợi cho ta tìm ra cách chứng minh tương ứng. Nếu ta chứng minh được một trong các hệ thức này thì suy ra được tất cả các hệ thức tương đương với nó. Như vậy, không những ta tìm được nhiều cách chứng minh hệ thức ban đầu mà còn có cách nhìn toàn diện hơn, hệ thống hơn về các hệ thức khác nhau về hình thức nhưng thống nhất với nhau về mối quan hệ toán học. Điều này được minh họa qua việc xét cách chứng minh một số hệ thức trong tam giác dưới đây.

Cho tam giác ABC với $AB = c, BC = a, CA = b$, $a + b + c = 2p$. Gọi S, R, r theo thứ tự là diện tích, bán kính đường tròn ngoại tiếp, bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC. Gọi r_a, r_b, r_c là bán kính đường tròn bàng tiếp tam giác ABC tương ứng với các góc CAB, ABC, BCA. Đặt $\widehat{CAB} = 2\alpha$, $\widehat{ABC} = 2\beta$, $\widehat{BCA} = 2\gamma$.

Trong bài này sẽ sử dụng một số hệ thức quen biết sau.

$$S = pr = \frac{abc}{4R} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}. \qquad \text{(I)}$$

Từ đó có $pr^2 = (p-a)(p-b)(p-c)$ (II)

Khai triển vế phải của (II) rồi thay $abc = 4Rrp$ vào và rút gọn được

$$ab + bc + ca - p^2 = 4Rr + r^2 \qquad \text{(III)}$$

Ta cũng biết:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{r}{p-a} = \frac{r_a}{p},\ \operatorname{tg}\beta = \frac{r}{p-b} = \frac{r_b}{p},$$

$$\operatorname{tg}\gamma = \frac{r}{p-c} = \frac{r_c}{p} \qquad \text{(IV)}$$

✪ **Bài toán.** *Chứng minh rằng trong tam giác ABC có hệ thức*

$$\frac{1}{p-a} + \frac{1}{p-b} + \frac{1}{p-c} = \frac{4R+r}{pr} \qquad (1)$$

Chứng minh. (*Cách 1*)

Đặt $T = \dfrac{1}{p-a} + \dfrac{1}{p-b} + \dfrac{1}{p-c}$.

Ta có

$$\frac{1}{p-a} + \frac{1}{p-b} = \frac{2p-a-b}{(p-a)(p-b)} = \frac{c}{(p-a)(p-b)}.$$

Tương tự có

$$\frac{1}{p-a} + \frac{1}{p-c} = \frac{b}{(p-a)(p-c)};$$

$$\frac{1}{p-b} + \frac{1}{p-c} = \frac{a}{(p-b)(p-c)}.$$

Từ đó

$$2T = \frac{c}{(p-a)(p-b)} + \frac{b}{(p-a)(p-c)} + \frac{a}{(p-b)(p-c)}$$

$$= \frac{c(p-c)+b(p-b)+a(p-a)}{(p-a)(p-b)(p-c)} = \frac{2p^2-(a^2+b^2+c^2)}{pr^2}$$

$$= \frac{2p^2-(a+b+c)^2+2(ab+bc+ca)}{pr^2}$$

$$= \frac{2(ab+bc+ca)-2p^2}{pr^2}.$$

Thay hệ thức (III) vào phân thức cuối cùng nêu trên ta có điều phải chứng minh.

Biến đổi tương đương hệ thức (1) được,

$$\frac{pr}{p-a}+\frac{pr}{p-b}+\frac{pr}{p-c}=4R+r.$$

Áp dụng hệ thức (IV) ta chuyển việc chứng minh hệ thức (1) đến chứng minh hệ thức sau:

$$r_a+r_b+r_c=4R+r \qquad (2)$$

Chứng minh. (*Cách 2*)

Sử dụng hệ thức (I) và (IV) có

$$r_a=\frac{pr}{p-a}=\frac{S^2}{S(p-a)}=\frac{p(p-b)(p-c)}{S}.$$

Tương tự $r_b=\dfrac{p(p-a)(p-c)}{S}$,

$$r_c=\frac{p(p-a)(p-b)}{S}\ ,\ r=\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{S}.$$

Từ đó

$$S\big((r_a+r_b)+(r_c-r)\big)$$
$$= p(p-c)(p-a+p-b)+(p-a)(p-b)(p-(p-c))$$
$$= c\big(p(p-c)+(p-a)(p-b)\big)$$
$$= c\big(2p^2-p(a+b+c)+ab\big) = cab = 4RS.$$

Giản ước S ở vế đầu và vế cuối của dãy đẳng thức ta được (2).

Lại biến đổi tương đương hệ thức (1) theo cách khác được

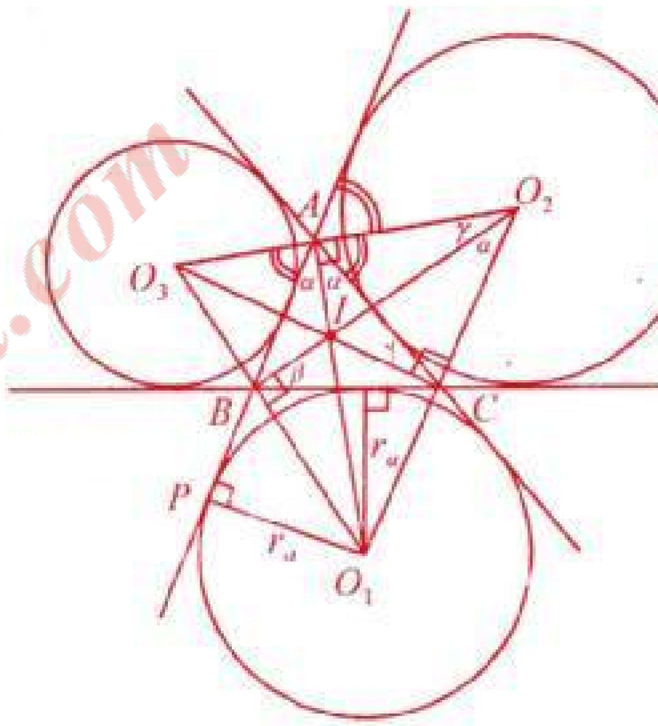
$$\frac{4R+r}{r}=\frac{p}{p-a}+\frac{p}{p-b}+\frac{p}{p-c}$$
$$=\left(\frac{a}{p-a}+1\right)+\left(\frac{b}{p-b}+1\right)+\left(\frac{c}{p-c}+1\right).$$

Từ đó ta chuyển việc chứng minh hệ thức (1) về chứng minh hệ thức

$$\frac{a}{p-a}+\frac{b}{p-b}+\frac{c}{p-c}=\frac{4R}{r}-2 \qquad (3)$$

Chứng minh. (*Cách 3*)

Gọi O_1, O_2, O_3 là tâm đường tròn bàng tiếp tam giác ABC tương ứng với các góc CAB, ABC, BCA (xem hình vẽ).



TaiLieuTuoi.com

Từ (I) và (IV) có

$$\frac{aS}{p-a}=\frac{apr}{p-a}=ar_a=2S_{O_1BC}.$$

Tương tự có

$$\frac{bS}{p-b}=2S_{O_2AC}\ ,\ \frac{cS}{p-c}=2S_{O_3AB}.$$

Dễ thấy $\widehat{O_1AC}+\widehat{O_2AC}=\dfrac{180^\circ}{2}=90^\circ$ nên $O_1A\perp O_2A$. Tương tự có $O_1A\perp O_3A$ và $O_1A\perp O_2O_3$, $O_2B\perp O_1O_3$, $O_3C\perp O_1O_2$.

Ta cũng có

$$\widehat{CO_2A}=\widehat{CIO_1}=\widehat{CAI}+\widehat{ACI}=\alpha+\gamma=\widehat{CBO_1}.$$

Từ đó có

$\Delta O_1O_2O_3 \backsim \Delta O_1BC$ nên $\dfrac{O_2O_3}{a}=\dfrac{AO_1}{r_a}$.

Ta có

$$2S_{O_1O_2O_3}=O_2O_3.AO_1=\frac{O_2O_3}{AO_1}.AO_1^2=\frac{a}{r_a}.AO_1^2$$

Chú ý rằng $AO_1 = \dfrac{AP}{\cos\alpha} = \dfrac{p}{\cos\alpha}$ và $r_a = p\mathrm{tg}\alpha$ (theo (IV)) nên

$$2S_{O_1O_2O_3} = \frac{ap^2}{p.\mathrm{tg}\alpha.\cos^2\alpha} = \frac{p.2R.\sin 2\alpha}{\sin\alpha.\cos\alpha} = 4Rp \quad (V)$$

Mặt khác sử dụng (I), (IV) có

$$\begin{aligned}2S_{O_1O_2O_3} &= S + S_{O_1BC} + S_{O_2AC} + S_{O_3AB}\\ &= S + \frac{a}{2}.r_a + \frac{b}{2}.r_b + \frac{c}{2}.r_c\\ &= S + \frac{aS}{2(p-a)} + \frac{bS}{2(p-b)} + \frac{cS}{2(p-c)}\\ &= \frac{S}{2}\left(2 + \frac{a}{p-a} + \frac{b}{p-b} + \frac{c}{p-c}\right) \qquad (VI)\end{aligned}$$

Từ (V), (VI) và $S = pr$ suy ra hệ thức (3).

Ta lại biến đổi hệ thức (1) tương đương với

$$\frac{r}{p-a} + \frac{r}{p-b} + \frac{r}{p-c} = \frac{4R+r}{p}.$$

Sử dụng (IV) ta chuyển việc chứng minh hệ thức (1) về chứng minh hệ thức

$$\mathrm{tg}\alpha + \mathrm{tg}\beta + \mathrm{tg}\gamma = \frac{4R+r}{p} \qquad (4)$$

Chứng minh. (*Cách 4*)

Sử dụng (IV) ta có

$$p = (p-a) + a = \frac{r}{\mathrm{tg}\alpha} + 2R\sin 2\alpha.$$

Áp dụng công thức lượng giác của góc chia đôi với $\mathrm{tg}\alpha = t$ ta có $p = \dfrac{r}{t} + \dfrac{4Rt}{1+t^2}$.

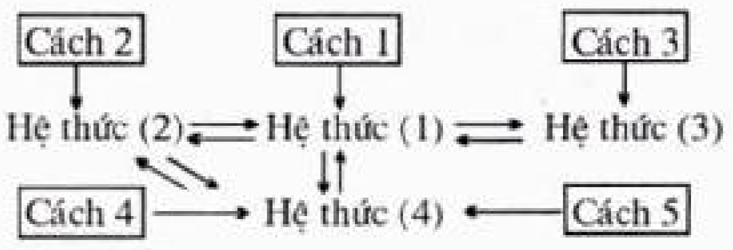
Quy đồng mẫu số rồi viết trong dạng phương trình đối với t ta được

$$pt^3 - (4R+r)t^2 + pt - r = 0 \qquad (VII)$$

Như vậy $t = \mathrm{tg}\alpha$ là nghiệm của phương trình bậc ba (VII). Tương tự như thế $\mathrm{tg}\beta$, $\mathrm{tg}\gamma$ cũng là nghiệm của phương trình bậc ba (VII). Áp dụng định lí Viète cho tổng ba nghiệm của phương trình bậc ba (VII) ta có hệ thức (4).

Trong bài tập 1 dưới đây hướng dẫn cách chứng minh hệ thức (4) (coi là cách (5)) bằng các phép biến đổi lượng giác. Với mỗi hệ thức (1), (2), (3), (4) ta có cách chứng minh tương ứng nhưng vì các hệ thức này tương đương với nhau nên nếu xuất phát từ một trong năm cách chứng minh đã nêu thì đi theo mũi tên trong sơ đồ dưới ta chứng minh được hệ thức (1) và cả các hệ thức (2), (3), (4). Cũng dễ dàng thấy nếu sử dụng (IV) có thể biến đổi hệ thức (2) tương đương với hệ thức (4).

Sơ đồ liên hệ giữa các hệ thức và cách chứng minh



Mời các bạn làm các bài tập sau có liên quan đến các hệ thức trên và cách chứng minh chúng.

Bài 1. Sử dụng các phép biến đổi lượng giác để chứng minh các hệ thức sau:

a) $\dfrac{4R}{p} = \dfrac{8R}{2R(\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma)} = \dfrac{1}{\cos\alpha.\cos\beta.\cos\gamma}$;

b) $\dfrac{r}{p} = \mathrm{tg}\alpha.\mathrm{tg}\beta.\mathrm{tg}\gamma$.

Từ đó suy ra hệ thức (4) (*cách* (5)).

Bài 2. Chứng minh rằng $\dfrac{1}{p-a}$, $\dfrac{1}{p-b}$, $\dfrac{1}{p-c}$ là ba nghiệm của phương trình bậc ba

$$pr^2x^3 - (4R+r)rx^2 + px - 1 = 0.$$

Từ đó suy ra hệ thức (1).

Hướng dẫn. $\dfrac{4R}{p-(p-a)} = \dfrac{4R}{a} = \dfrac{4R}{2R\sin 2\alpha}$

$= \mathrm{tg}\alpha + \mathrm{cotg}\alpha = \dfrac{r}{p-a} + \dfrac{p-a}{r}$,

đặt $x = \dfrac{1}{p-a}$ rồi quy đồng mẫu số.

Bài 3. Chứng minh các hệ thức sau:

a) $p\mathrm{tg}\alpha = \dfrac{(p-b)(p-c)}{r}$;

b) $p(\mathrm{tg}\alpha + \mathrm{tg}\beta) = 4R\cos^2\gamma$;

c) $\cos 2\alpha + \cos 2\beta + \cos 2\gamma = 1 + 4\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$

$= 1 + \dfrac{r}{R}$;

d) $2p(\mathrm{tg}\alpha + \mathrm{tg}\beta + \mathrm{tg}\gamma) =$

$= 6R + 2R(\cos 2\alpha + \cos 2\beta + \cos 2\gamma)$.

Từ đó suy ra hệ thức (4).

Bài 4. Gọi O_1, O_2, O_3 theo thứ tự là tâm đường tròn bàng tiếp tam giác ABC tương ứng với các góc CAB, ABC, BCA. Hãy dựa vào bài tập 3b và $S_{O_1O_2O_3} = S_{CO_1O_3} + S_{CO_2O_3}$ để chứng minh $S_{O_1O_2O_3} = 2Rp$ (V). Từ đó suy ra hệ thức (3).

Bài 5. a) Chứng minh rằng hệ thức (3) tương đương với mỗi hệ thức (5), (6) sau:

$$\frac{a^2}{p-a} + \frac{b^2}{p-b} + \frac{c^2}{p-c} = 4p\left(\frac{R}{r} - 1\right) \qquad (5)$$

$$a^2\mathrm{tg}\alpha + b^2\mathrm{tg}\beta + c^2\mathrm{tg}\gamma = 4p(R-r) \qquad (6)$$

b) Hãy chứng minh hệ thức (5) bằng cách quy đồng mẫu số và dựa vào khai triển công thức Heron theo a, b, c thành

$$16S^2 = 2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) - (a^4 + b^4 + c^4).$$

Hướng dẫn: a) Đặt $\dfrac{a^2}{p-a} + a = \dfrac{pa}{p-a}$.

TaiLieuTuoi.com