

A. BIỂU DIỄN CÁC YẾU TỐ HÌNH HỌC

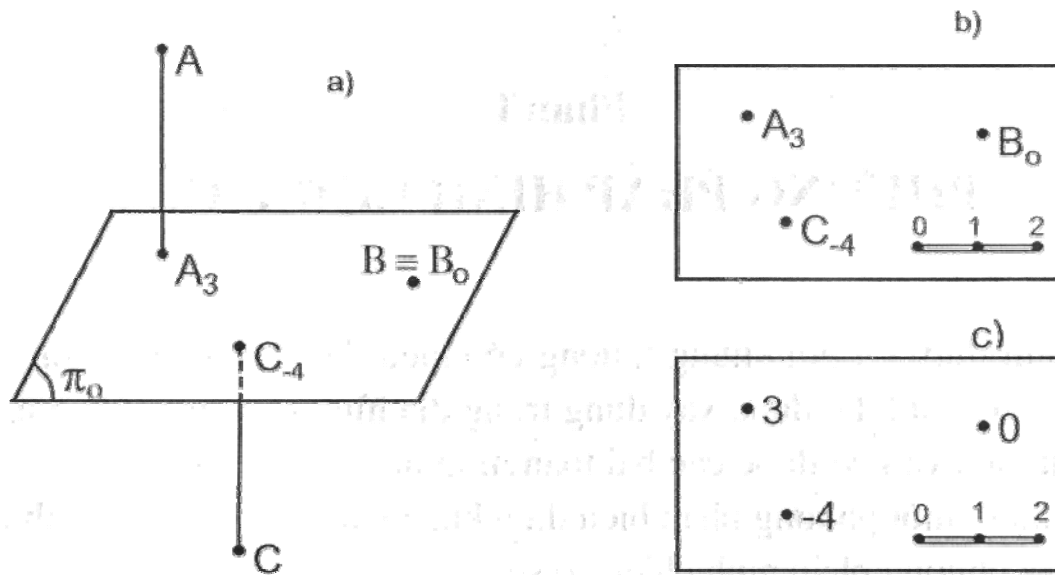
§1. ĐIỂM

Lấy một mặt phẳng hình chiếu nằm ngang π_0 , gọi là mặt phẳng chuẩn. Mặt phẳng này có độ cao bằng 0 tương đương với độ cao của mặt thủy chuẩn của quả đất. Trong không gian lấy một điểm A phía trên π_0 và cách ba đơn vị (hình 1a).

Khoảng cách của điểm đến mặt phẳng chuẩn π_0 ta gọi là độ cao của điểm. Nếu điểm ở phía trên π_0 thì độ cao của điểm là độ cao dương, thuộc π_0 độ cao bằng 0 ; ở phía dưới π_0 độ cao âm.

Chiếu song song song thẳng góc điểm A lên π_0 , ta được một hình chiếu của điểm A kèm theo con số chỉ độ cao của nó (hình 1b). Hình chiếu A_3 , được gọi là hình chiếu có số của điểm A. Nó hoàn toàn thỏa mãn điều kiện đủ của bản vẽ.

Hình 1a,b diễn tả hình không gian và hình chiếu có số của điểm A có độ cao (+3) ; điểm B có độ cao bằng 0 và điểm C có độ cao (-4).



Hình -1

Trong thực tế để cho đơn giản mỗi điểm có thể được biểu diễn bằng vị trí hình chiếu của điểm trên mặt phẳng chuẩn, bên cạnh có ghi con số chỉ độ cao của nó (hình 1c).

Trong hình chiếu có số, ở phía dưới mỗi bản vẽ người ta thường cho một thước tỉ lệ để tiện sử dụng (hình 1b, c). Thước tỉ lệ này cho ta tỉ lệ chung của bản vẽ. Đặc biệt trong xây dựng thủy lợi, các kích thước theo

hai chiều nằm ngang của công trình thường quá lớn so với chiều cao nên có thể dùng 2 tỉ lệ khác nhau:

Thường chọn : Tỉ lệ trên mặt bằng từ $1 : 20 \div 1 : 1.000.000$

Tỉ lệ theo chiều cao từ $1 : 2 \div 1 : 200$.

Khi đó phải ghi chú trên bản vẽ .

§2. ĐƯỜNG THẲNG

1. Biểu diễn

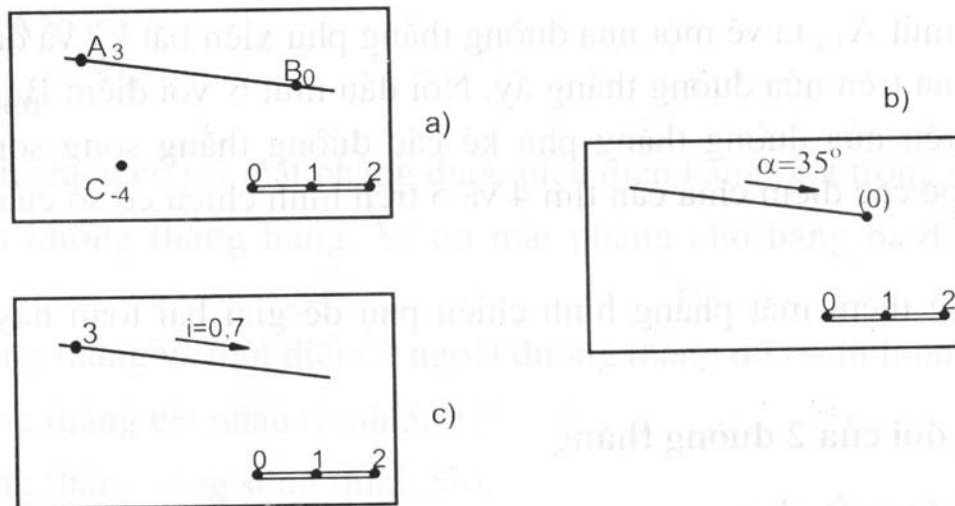
Hình chiếu có số của đường thẳng được xác định bằng một trong hai cách sau:

Hình chiếu có số của 2 điểm thuộc đường thẳng đó (xem đường thẳng AB trên hình 2a).

a. Hình chiếu có số của một điểm thuộc đường thẳng và phương của đường thẳng đó.

b. Hình chiếu có số của một điểm thuộc đường thẳng và phương của đường thẳng đó.

Phương của đường thẳng được diễn tả bằng mũi tên trên có ghi góc nghiêng của đường thẳng hoặc độ dốc i của đường thẳng so với mặt phẳng chuẩn (hình 2b, c).



Hình -2

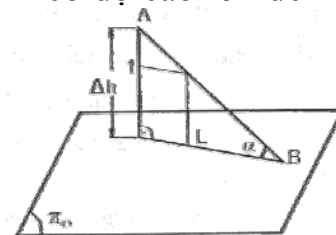
Chiều mũi tên chỉ hướng dốc xuống từ điểm có độ cao lớn đến điểm có độ cao nhỏ.

Ta đã biết :
$$i = \tan g \alpha = \frac{\Delta h}{L}$$

Trong đó:

Δh - Hiệu số độ cao của 2 điểm đã cho.

L - Độ dài hình chiếu có số của đoạn thẳng



Hình -3

(hình 3).

Nếu ta chọn $\Delta h = 1$ thì độ dài hình chiếu có số tương ứng của đoạn thẳng sẽ được gọi là *khoảng cách đường thẳng* (kí hiệu L).

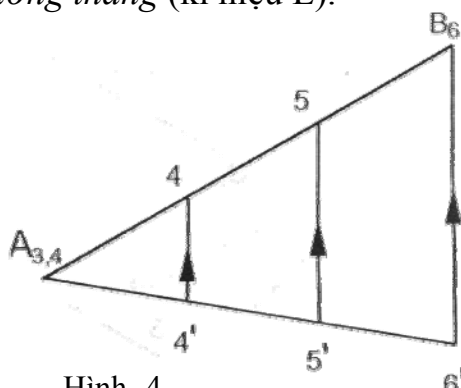
Lúc đó ta sẽ có :

$$i = \frac{l}{L}$$

Suy ra:

$$L = \frac{l}{i}$$

Vậy: khoảng của đường thẳng là một đại lượng bằng giá trị nghịch đảo của độ dốc đường thẳng đó.



Hình -4

2. Chia độ một đường thẳng

Chia độ một đường thẳng là tìm trên đường thẳng đã cho các điểm chia liên tiếp có độ cao là các số nguyên.

Ví dụ : Chia độ đường thẳng $A_{3,4}$, B_6 (hình 4).

Trước hết ta tính $\Delta h = h_B - h_A = 6 - 3,4 = 2,6$.

Sau đó, từ đầu mút ta $A_{3,4}$ ta vẽ một nửa đường thẳng bất kì và đặt liên tiếp 26 đoạn nhỏ bằng nhau trên nửa đường thẳng ấy. Nối đầu mút 6' với điểm B_6 . Cuối cùng các điểm 4', 5' trên nửa đường thẳng phụ kẻ các đường thẳng song song với đường thẳng 6', B_6 ta được các điểm chia cần tìm 4 và 5 trên hình chiếu có số của đường thẳng $A_{3,4}$, B_6 .

(Có thể sử dụng thêm mặt phẳng hình chiếu phụ để giải bài toán này. Bạn đọc tự giải quyết).

3. Vị trí tương đối của 2 đường thẳng

a. Hai đường thẳng cắt nhau

Trong hình chiếu có số đường thẳng cắt nhau nếu tại giao điểm 2 hình chiếu của chúng thoả mãn điều kiện sau:

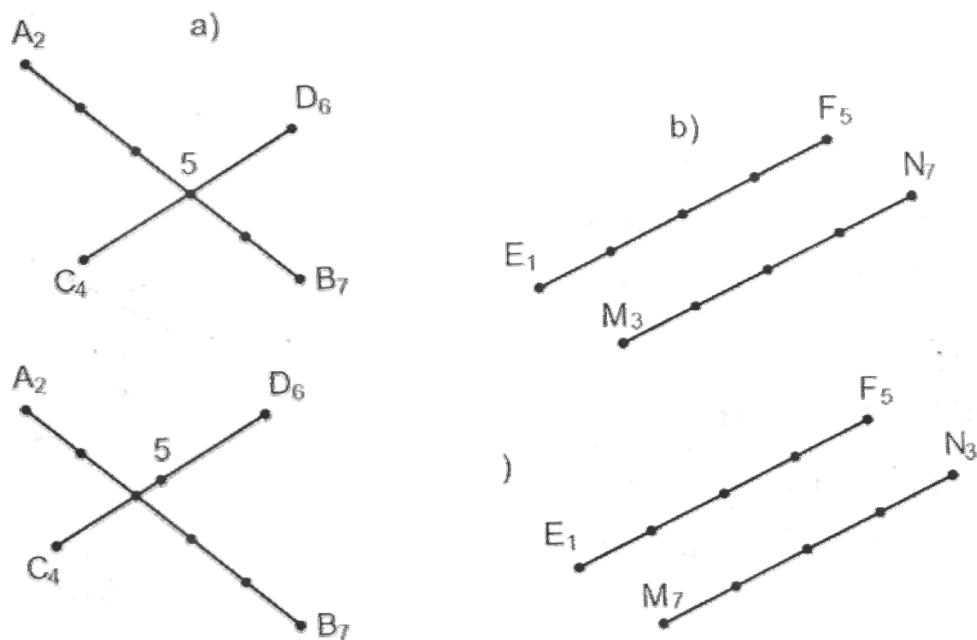
Giao điểm thuộc hình chiếu của mỗi đường thẳng đều có một độ cao như nhau. Hình 5a diễn tả 2 đường thẳng $A_2 B_7$ và $C_4 D_6$ cắt nhau tại điểm có độ cao là 5.

b. Hai đường thẳng song song

Hai đường thẳng song song với nhau nếu chúng thoả mãn 3 điều kiện sau:

- Hình chiếu của hai đường thẳng song song nhau.
- Khoảng cách của 2 đường thẳng bằng nhau.
- Các độ chia của 2 đường thẳng có cùng hướng tăng (hoặc cùng hướng giảm) (hình 5b).

c. Hai đường thẳng chéo nhau



hình 5

Hình biểu diễn của chúng không thoả mãn đồng thời các điều kiện của sự cắt nhau hoặc sự song song (hình 5c).

§3. MẶT PHẪNG

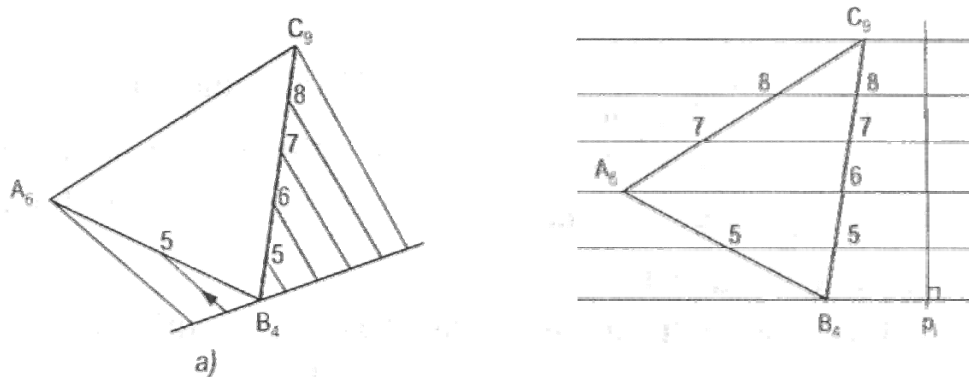
1. Biểu diễn

Trong hình chiếu có số, mặt phẳng được biểu diễn bằng một trong các cách sau:

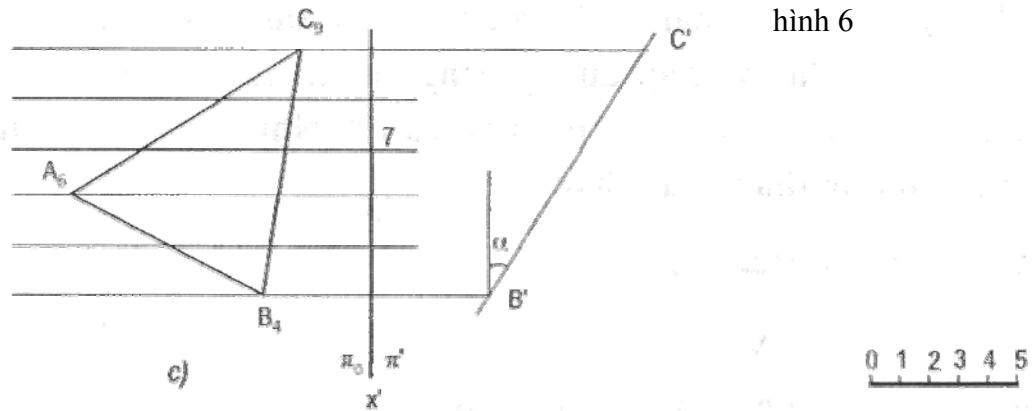
- Một đường thẳng và một điểm ở ngoài đường thẳng đó (xem hình 2a);
- Hai đường thẳng cắt nhau (hình 5a);
- Hai đường thẳng song song (hình 5b);

Và đặc biệt, trong hình chiếu có số mặt phẳng thường được biểu diễn bằng *đường tỉ lệ độ dốc*.

Giả thiết cho mặt phẳng \mathcal{P} xác định bằng ba điểm không thẳng hàng A_6 B_4 C_9 (xem hình 6a).



hình 6



hình 6

Trong \mathcal{P} vẽ các đường bằng liên tiếp có độ cao chênh nhau 1 đơn vị.

Để vẽ được các đường bằng này, trước hết phải chia độ các cạnh bên của tam giác (xem hình 6b).

Độ dài hình chiếu của khoảng cách giữa 2 đường bằng liên tiếp có độ cao nguyên chênh nhau một đơn vị được gọi là khoảng của mặt phẳng.

Ta ký hiệu, khoảng của mặt phẳng bằng chữ m (ngoài thực địa thường gọi là “mái dốc” m).

Ta có:

$$m = \frac{1}{i} = \frac{1}{\tan \alpha} = \cot \alpha$$

Trong đó:

i - Độ dốc của mặt phẳng

α - Góc nghiêng của mặt phẳng so với mặt phẳng chuẩn π_0 .

Vẽ đường dốc nhất p của mặt phẳng đã cho đối với π_0 . Hình chiếu p_1 của đường dốc nhất này vuông góc với hình chiếu của các đường bằng vừa vẽ 5-5, 6-6 ... (xem hình 6b) và cắt các đường bằng ở các điểm có chia độ cao tương ứng với độ cao của các đường bằng.

Hình chiếu có chia độ của đường dốc nhất được gọi là đường tỉ lệ độ dốc của mặt phẳng.

(Trên bản vẽ đường này được vẽ bằng hai nét mảnh song song).

2. Các tính chất :

1. Khoảng của mặt phẳng bằng khoảng của đường tỉ lệ độ dốc của mặt phẳng đó.

2. Góc nghiêng của mặt phẳng đối với π_0 cũng bằng góc nghiêng của đường dốc nhất của mặt phẳng đó đối với π_0 . Hình 6c cho thấy cách sử dụng mặt phẳng, hình chiếu phụ để xác định độ lớn góc nghiêng của mặt phẳng \mathcal{P} .

3. Đường tỉ lệ độ dốc biểu diễn mặt phẳng hoàn toàn xác định vị trí của mặt phẳng trong không gian. Thật vậy, từ đường tỷ lệ độ dốc đã cho ta có thể xác định được góc nghiêng của mặt phẳng đối với π_0 , hoặc qua một điểm chia nào đó của đường tỉ lệ độ dốc đã cho, vẽ một đường bằng

vuông góc với đường tỉ lệ độ dốc ấy, ví dụ trên hình 6c ta đã vẽ đường ở độ cao 7. Như vậy mặt phẳng đã cho được biểu diễn bằng 2 đường thẳng cắt nhau.

3. Sự song song và sự thẳng góc

1. Hai mặt phẳng song song

Điều kiện cần và đủ để cho 2 mặt phẳng song song với nhau là 2 đường tỉ lệ độ dốc của chúng phải song song. Hình 7 diễn tả sự song song của 2 mặt phẳng α_i và β_i .

2. Đường thẳng vuông góc với mặt phẳng

Hình 8a biểu diễn hình không gian của đường thẳng a vuông góc với mặt phẳng Ω . Góc nghiêng của mặt phẳng Ω với mặt phẳng chuẩn π_0 là α thì góc nghiêng của đường thẳng a so với π_0 sẽ là $(90^\circ - \alpha)$.

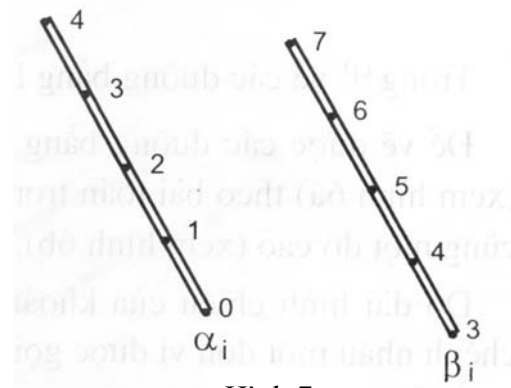
Ta đã biết:

$$m_{mp} = \frac{1}{tg \alpha}$$

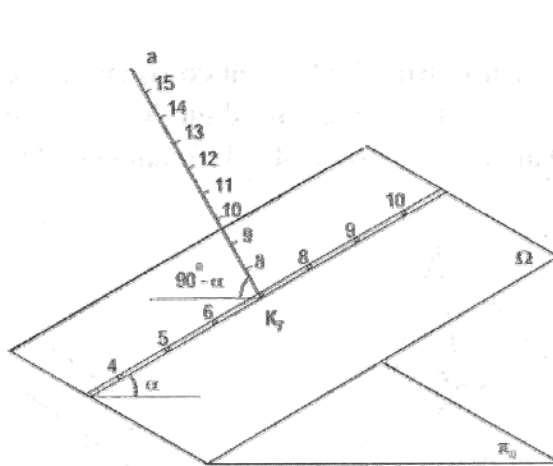
$$l_{dt} = \frac{1}{tg(90^\circ - \alpha)}$$

Rút ra:

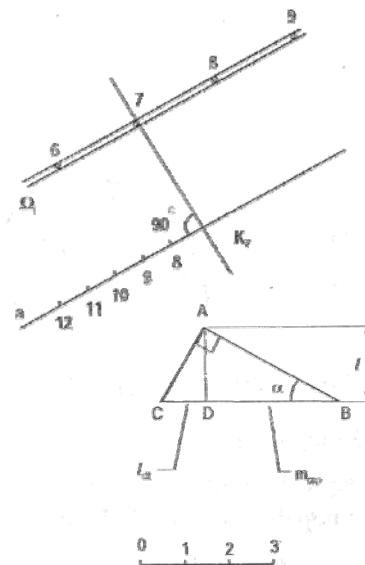
$$l_{dt} = \frac{1}{m_{mp}}$$



Hình 7



Hình 8



Vậy khoảng của đường thẳng vuông góc với mặt phẳng là một đại lượng tỉ lệ nghịch với khoảng của mặt phẳng.

Hình 8b là đồ thức của đường thẳng a vuông góc với mặt phẳng Ω tại điểm K_7 . Nhận thấy rằng trên đồ thức hình chiếu của đường thẳng a song

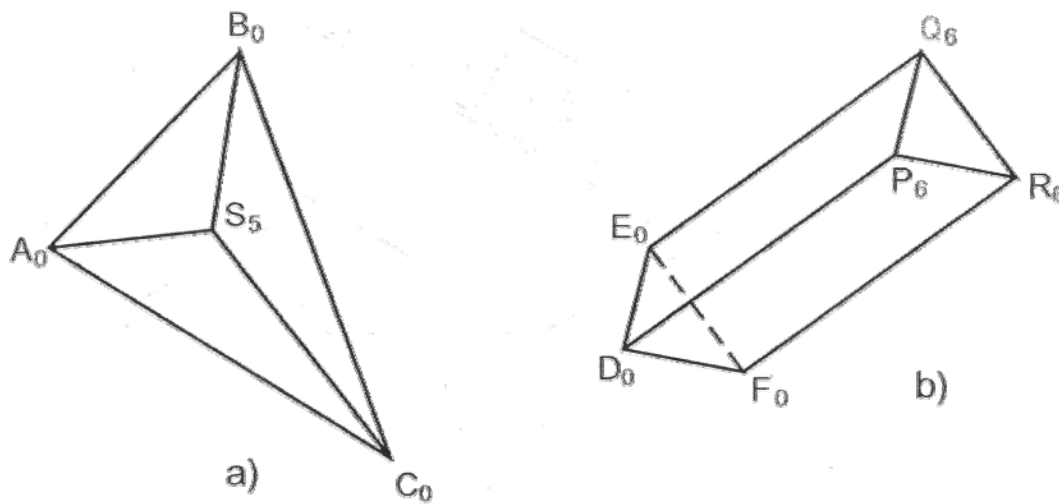
song với hình chiếu của đường tỉ lệ độ dốc của mặt phẳng Ω , khoảng của chúng tỉ lệ nghịch với nhau và độ tăng ngược chiều.

Trên hình 8b cũng cho thấy cách tìm độ lớn khoảng của đường thẳng dựa vào khoảng của mặt phẳng đã biết trước (bạn đọc tự giải thích cách làm này).

B. BIỂU DIỄN ĐƯỜNG - MẶT

§1. ĐA DIỆN

Đa diện được diễn tả bằng hình chiếu có số của các đỉnh, các cạnh và các mặt bên của chúng. Hình 9 diễn tả tháp S.ABC, đỉnh tháp có độ cao 5, đáy tháp nằm trong mặt phẳng chuẩn và lăng trụ xiên có các đáy là 2 tam giác ($D_0E_0F_0$) và ($P_6Q_6R_6$).



Hình 9

§2. ĐƯỜNG CONG - MẶT CONG

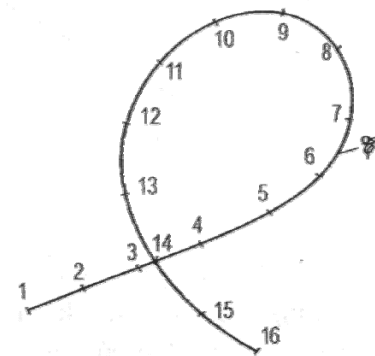
1. Đường cong

Đường cong được diễn tả bằng hình chiếu có số của một tập hợp điểm đủ xác định đường cong đó.

Hình 10 diễn tả đường cong \mathcal{C} nhờ các điểm 1, 2, 3, ..., 15, 16.

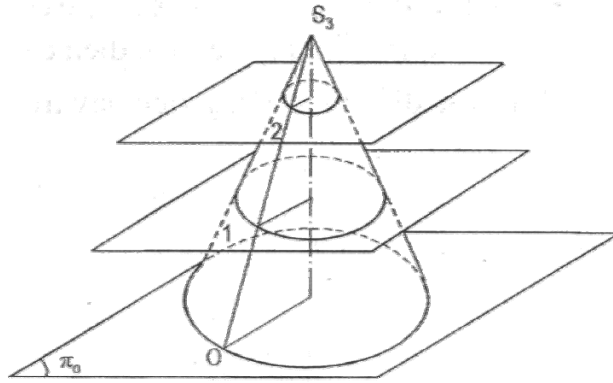
2. Mặt cong

Mặt cong được diễn tả bằng hình chiếu có số của các yếu tố xác định mặt cong và các đường đồng mức của nó (đường đồng mức là giao tuyến của mặt cong với mặt phẳng bằng. Nói cách khác đó là đường mà tất cả các điểm nằm trên đường đó đều có cùng một độ cao).

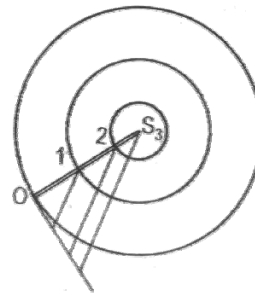


Hình 10

Hình 11a là hình không gian của một nón tròn xoay, trục thẳng góc với mặt phẳng chuẩn π_0 , đỉnh nón có độ cao 3, đáy nón thuộc π_0 . Cắt nón này bằng các mặt phẳng bằng ở các độ cao khác nhau ta được các đường đồng mức là các đường tròn bằng. Hình chiếu của chúng là các đường tròn đồng tâm S_3 . Nhận thấy rằng, nếu các mặt phẳng bằng chênh nhau 1 đơn vị độ cao, thì bán kính của các đường tròn bằng cũng hơn kém nhau một đoạn bằng khoảng của đường sinh nón.



a)



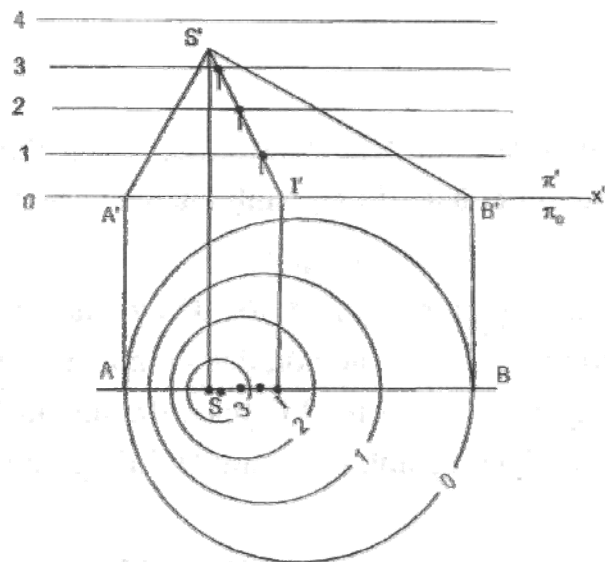
b)

Hình 11

Hình 11b diễn tả hình chiếu có số của nón đó và cách vẽ các đường đồng mức ở độ cao 1 và 2 dựa vào sự chia độ của đường sinh nón.

Hình 12 diễn tả một nón xiên và cách vẽ các đường đồng mức của nó nhờ mặt phẳng hình chiếu phụ π' vuông góc với π_0 và song song với trục SI của nón.

Hình 13a diễn tả trụ chiếu bằng nhận đường cong $A_0-1-2-3-4-B_7$ là đường chuẩn. Hình chiếu có số của trụ này suy biến trùng với hình chiếu của đường cong.

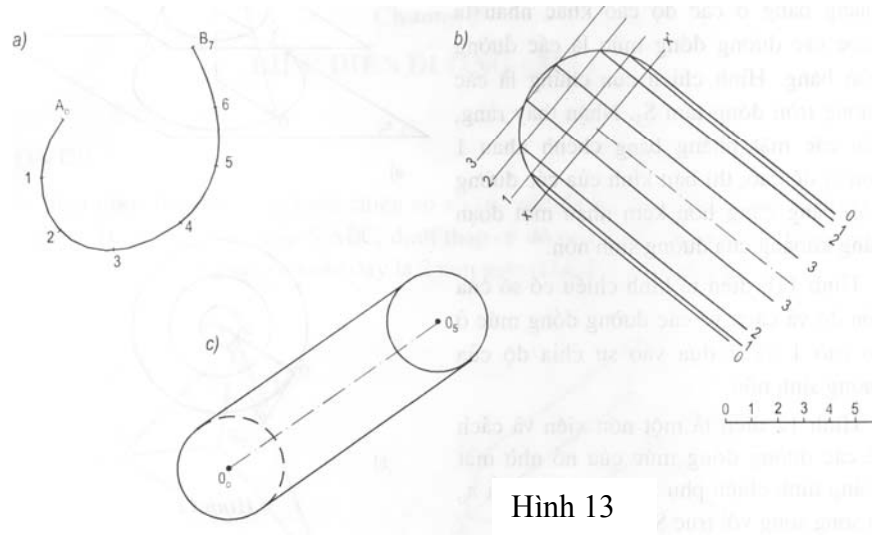


Hình 12

Hình 13b diễn tả trụ tròn xoay, trục là đường bằng. Hình vẽ cho thấy cách chia độ nửa vòng tròn đáy để biểu diễn các đường sinh của trụ.

Hình 13c diễn tả một trụ xiên đáy tròn bằng ở độ cao

0 và 5.



Hình 13

§3. MẶT DỐC ĐỀU

Mặt dốc đều là mặt bao các nón tròn xoay, trục thẳng đứng, đỉnh chạy trên một đường cong (\mathcal{C}) gọi là đường chuẩn, đường sinh của các nón tạo với mặt phẳng chuẩn những góc bằng nhau (α).

Hình 14a diễn tả hình không gian của mặt dốc đều γ , bao các nón tròn xoay đỉnh $S_1, S_2, S_3, S_4 \dots$ nằm trên đường chuẩn \mathcal{C} ; các nón đều có góc đáy α bằng nhau. Đường dốc nhất của mặt dốc đều vẽ qua một điểm bất kỳ thuộc đường chuẩn trùng với đường sinh của nón có đỉnh tại điểm ấy. Đường sinh này cũng là đường tiếp xúc của nón đó với mặt dốc đều.

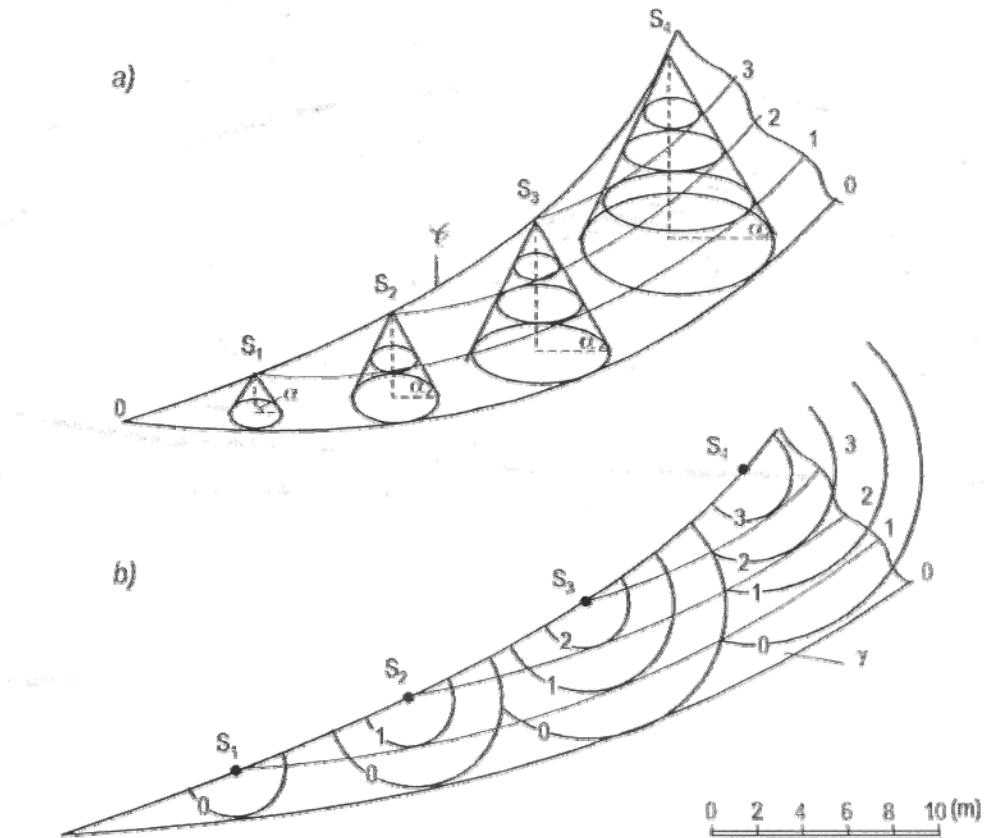
Hình 14b là hình chiếu có số của mặt dốc đều γ . Mặt dốc đều này được biểu diễn bằng các đường đồng mức. Cách vẽ các đường đồng mức đó như sau:

1. Biểu diễn các nón tròn xoay đỉnh $S_1, S_2, S_3, S_4 \dots$ bằng các đường tròn bằng cao thấp hơn nhau một đơn vị. Muốn vậy từ góc đáy α của các nón đã cho ta tính ra khoảng l của các đường sinh nón.

Chẳng hạn cho $\alpha = 27^\circ$, ta có $l = \cot g \alpha = \cot g 27^\circ \approx 2$

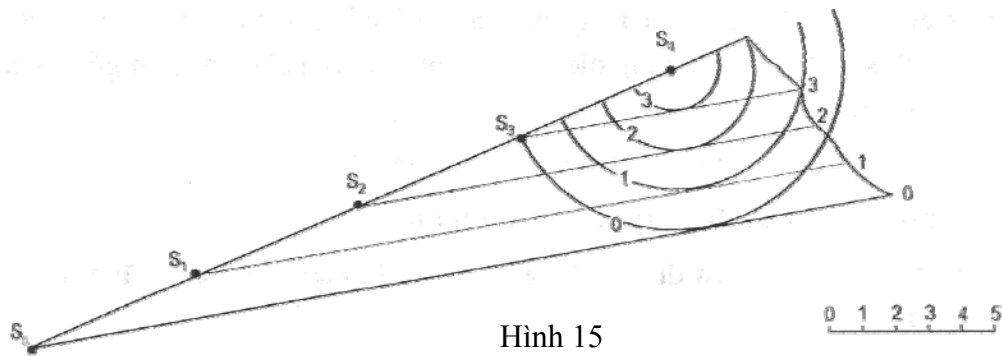
Dựa vào tỷ lệ xích cho trên bản vẽ, lấy S_1 làm tâm quay đường tròn bán kính bằng 2 đơn vị, ta được nón thứ nhất đỉnh S_1 , đường tròn đáy nón ở độ cao bằng 0, lại lấy S_2 làm tâm vẽ 2 đường tròn bán kính lần lượt bằng 2 và 4 đơn vị ta được nón thứ 2, đỉnh S_2 , đường tròn đáy ở độ cao 0 và đường đồng mức tròn ở độ cao 1. Cứ tiếp tục làm như vậy ta được thêm các nón đỉnh $S_3, S_4 \dots$

2. Vẽ các đường đồng mức tiếp xúc với các đường tròn bằng của các nón ở các độ cao như nhau ta được mặt dốc đều biểu diễn bằng các đường đồng mức ở các độ cao 0, 1, 2, 3 ...



Hình 14

Khi đường chuẩn \mathcal{C} là đường thẳng, mặt dốc đều sẽ là mặt phẳng nghiêng. Trường hợp này cách biểu diễn sẽ đơn giản hơn nhiều (xem hình 15).



Hình 15

§4. MẶT ĐỊA HÌNH (MẶT ĐẤT TỰ NHIÊN)

Trong hình chiếu có số, địa hình được diễn tả gần đúng bằng một hệ thống các đường đồng mức.

Hình 16 diễn tả một phần quả đồi nhỏ cho từ đường đồng mức 4 tới đường đồng mức 11, đỉnh đồi có độ cao 11,4. Các đường đồng mức