BÀI TẬP CHƯƠNG IV.

KHÔNG GIAN VECTƠ

1. Xét tính độc lập tuyến tính hay phụ thuộc tuyến tính của các hệ vectơ sau:
   a. $x_1 = (1,-1,2),\ x_2 = (0,2,3),\ x_3 = (-1,1,1)$
   b. $x_1 = (1,-1,0,1),\ x_2 = (0,2,1,-1),\ x_3 = (2,0,1,1)$
   c. $x_1 = (1,1,1,1),\ x_2 = (1,0,1,1),\ x_3 = (1,1,0,1),\ x_4 = (0,1,1,1)$
   d. $A_1 = \begin{bmatrix} 1 & -5 \\ -4 & 2 \end{bmatrix},\ A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 5 \end{bmatrix},\ A_3 = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ -5 & 7 \end{bmatrix},\ A_4 = \begin{bmatrix} 1 & -7 \\ -5 & 1 \end{bmatrix}$
   e. $p_1 = x^2 - 2x + 3,\ p_2 = x^2 + 1,\ p_2 = 2x^3 + x^2 - 4x + 10$ trong $\mathbb{R}_3[x]$.
   f. $p_1 = x^3 + 1,\ p_2 = x^2 + 1,\ p_3 = -2x^2 + x,\ p_4 = -2x - 4$ trong $\mathbb{R}_3[x]$.
2. Cho hệ vectơ $x_1, x_2, \ldots, x_n$ độc lập tuyến tính của một không gian vectơ V. Chứng minh hệ vectơ $y_1 = x_1,\ y_2 = x_1 + x_2, \ldots,\ y_n = x_1 + x_2 + \ldots + x_n$ cũng độc lập tuyến tính.
3. Chứng minh rằng nếu trong hệ vectơ $x_1, x_2, \ldots, x_n$ không có vectơ nào biểu thị tuyến tính qua các vectơ còn lại thì $x_1, x_2, \ldots, x_n$ độc lập tuyến tính .
4. Tìm hạng và hệ con độc lập tuyến tính tối đại của các hệ sau:
   a. $x_1 = (47,26,16), x_2 = (-67,98,-428), x_3 = (35,23,1), x_4 = (201,-294,1284),$
   $x_5 = (155,86,52)$.
   b. $x_1 = (24,49,73,47),\ x_2 = (19,40,59,36),\ x_3 = (36,73,98,71),$
   $x_4 = (72,147,219,141),\ x_5 = (-38,-80,-118,-72)$.
   c. $x_1 = (17,24,25,31,42),\ x_2 = (-28,-37,-7,12,13),\ x_3 = (45,61,32,19,29),$
   $x_4 = (11,13,-18,-43,-55),\ x_5 = (39,50,-11,-55,-68)$.
5. Cho hệ vectơ $x_1, x_2, \ldots, x_n$ biểu thị tuyến tính được qua hệ $y_1, y_2, \ldots, y_m$. Chứng minh:
   a. $rank\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \le rank\{y_1, y_2, \ldots, y_m\}$.
   b. Nếu 2 hệ này có cùng hạng thì chúng tương đương.
6. Chứng minh:
   $rank\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} = rank\{u, x_1, x_2, \ldots, x_n\} \Leftrightarrow u$ biểu thị tuyến tính được qua $x_1, x_2, \ldots, x_n$.
7. Trong $\mathbb{R}^3$, cho hệ vectơ $u_1 = (1,2,1),\ u_2 = (-1,0,1),\ u_3 = (0,1,2)$.
   a. Chứng minh u_1, u_2, u_3 là một cơ sở của $\mathbb{R}^3$.
   b. Tìm tọa độ của $u = (a,b,c)$ trong cơ sở u_1, u_2, u_3.

8. Trong $\mathbb{R}^3$, cho 2 hệ vectơ $u_1 = (1,1,1),\ u_2 = (1,1,2),\ u_3 = (0,1,2)$ và $v_1 = (2,1,-3),\ v_2 = (3,2,-5),\ v_3 = (1,-1,1)$.
    a. Chứng minh 2 hệ trên là 2 cơ sở của $\mathbb{R}^3$.
    b. Viết ma trận chuyển từ cơ sở *(u)* sang cơ sở *(v)* và ngược lại.
    c. Tìm tọa độ của vectơ $x = -2u_1 + 3u_2 - u_3$ trong cơ sở *(v)*.
9. Chứng minh tập hợp:
    a. $A = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x - y + 2z = 0\right\}$ là không gian con của $\mathbb{R}^3$.
    b. $B = \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \,/\, 2x - y + z = x - t = 0\right\}$ là không gian con của $\mathbb{R}^4$.
    c. $C = \left\{\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \,/\, a,b \in \mathbb{R}\right\}$ là không gian con của $M_2(\mathbb{R})$.
10. Tìm cơ sở và số chiều của các không gian vectơ con sinh bởi:
    a. $a_1 = (1,0,0,-1),\ a_2 = (2,1,1,0),\ a_3 = (1,1,1,1),\ a_4 = (1,2,3,4),$ $a_5 = (0,1,2,3)$.
    Tìm điều kiện đối với *x,y,z,t* để vectơ $u = (x,y,z,t)$ thuộc về không gian con này.
    b. $a_1 = (1,-1,1,0),\ a_2 = (1,1,0,1),\ a_3 = (2,0,1,1)$.
    Tìm điều kiện đối với *x,y,z,t* để vectơ $u = (x,y,z,t)$ thuộc về không gian con này.
    c. $a_1 = (1,-1,1,-1,1),\ a_2 = (1,1,0,0,3),\ a_3 = (3,1,1,-1,7),\ a_4 = (0,2,-1,1,2)$
    Tìm điều kiện đối với *x,y,z,t,u* để vectơ $a = (x,y,z,t,u)$ thuộc về không gian con này.
11. Tìm cơ sở và số chiều của các không gian vectơ con ở bài 9.
12. Tìm cơ sở và số chiều của các không gian vectơ con $U+V,\ U \cap V$ với:
    a. $U = \langle (1,2,1),\ (1,1,-1),\ (1,3,3) \rangle$ và $V = \langle (2,3,-1),\ (1,2,2),\ (1,1,-3) \rangle$.
    b. $U = \langle (1,1,0,0),\ (0,1,1,0),\ (0,0,1,1) \rangle$
    và $V = \langle (1,0,1,0),\ (0,2,1,1),\ (1,2,1,2) \rangle$
    c. $U = \{(x,y,z,t) \,/\, x - 2z + t = 0\}$ và
    $V = \{(x,y,z,t) \,/\, x = t \ \wedge\ y - 2z = 0\}$
13. Tìm cơ sở và số chiều của các không gian các nghiệm của hệ thuần nhất:
    a. $$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \qquad\quad - 3x_4 - x_5 = 0 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 0 \\ 4x_1 - 2x_2 + 6x_3 + 3x_4 - 4x_5 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 + 4x_4 - 7x_5 = 0 \end{cases}$$

b. $\begin{cases} x_1 - x_3 &= 0 \\ x_2 - x_4 &= 0 \\ x_1 - x_2 + x_5 &= 0 \\ -x_2 + x_4 - x_6 &= 0 \\ -x_3 + x_5 &= 0 \\ x_4 - x_6 &= 0 \end{cases}$

c. $\begin{cases} x_1 - x_3 + x_5 &= 0 \\ x_2 - x_4 + x_5 &= 0 \\ x_1 - x_2 + x_5 - x_6 &= 0 \\ x_2 - x_3 - x_6 &= 0 \\ x_1 - x_4 + x_5 &= 0 \end{cases}$

14. Hãy tìm hệ pt thuần nhất có không gian nghiệm là:
    a. $U = \langle (1,1,0), (1,0,-2) \rangle$
    b. $U = \langle (2,-1,0,1), (1,0,-1,2), (1,-1,1,-1), (3,-1,-1,3) \rangle$

15. Trong $\mathbb{R}^3$ cho 3 cơ sở α, β, γ. Biết

$$T_{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad T_{\gamma\beta} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

và $\gamma_1 = (1,1,1), \gamma_2 = (1,0,1), \gamma_3 = (0,1,1)$.

Hãy tìm cơ sở α.