HỆ PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN

Th.S Đàm Thanh Phương; Th.S Ngô Mạnh Tưởng

Ngày 8 tháng 3 năm 2011

Định nghĩa

Hệ phương trình vi phân chuẩn tắc cấp 1 là hệ có dạng:

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1, ..., y_n) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{dy_n}{dx} = f_n(x, y_1, ..., y_n) \end{cases} \tag{1}$$

trong đó x là biến số độc lập, $y_1, y_2, ..., y_n$ là các hàm số phải tìm.

Định lý tồn tại và duy nhất nghiệm

Cho hệ phương trình vi phân (1).
Giả sử các hàm số $f_i\left(x, y_1, ..., y_n\right)$ cùng với các đạo hàm riêng $\dfrac{\partial f_i\left(x, y_1, ..., y_n\right)}{\partial y_j}$, $i = 1, 2, ..., n; j = 1, 2, ..., n$, liên tục trong một miền D trong R^{n+1}.
Giả sử $\left(x_0, y_1^0, y_2^0, ..., y_n^0\right)$ là một điểm thuộc D.
Khi đó trong một lân cận nào đó của điểm $x = x_0$ có một nghiệm duy nhất của hệ (1) thỏa mãn các điều kiện

$$y_1 \Big|_{x=x_0} = y_1^0,\ y_2 \Big|_{x=x_0} = y_2^0,\ ...,\ y_n \Big|_{x=x_0} = y_n^0$$

Các loại nghiệm của hệ chuẩn tắc

Nghiệm tổng quát của hệ (1) là bộ n hàm số
$y_i = \varphi_i\left(x, C_1, C_2, ..., C_n\right), i = 1, 2, ..., n$ trong đó $C_1, C_2, ..., C_n$ là các hằng số tùy ý thỏa mãn các điều kiện sau:
1, Nó thỏa mãn hệ (1) với mọi giá trị của $C_1, C_2, ..., C_n$;
2, Với mọi điểm $\left(x_0, y_1^0, y_2^0, ..., y_n^0\right)$ ở đó các điều kiện của định lý tồn tại và duy nhất nghiệm được thỏa mãn, có thể tìm được một bộ giá trị
$C_1 = C_1^0, C_2 = C_2^0, ..., C_n = C_n^0$ sao cho các hàm số
$y_i = \varphi_i\left(x, C_1, C_2, ..., C_n\right)$ thỏa mãn các điều kiện ban đầu
$y_i\big|_{x=x_0} = y_i^0, i = 1, 2, ..., n$
Nghiệm riêng của hệ (1) là nghiệm có được bằng cách cho $C_1, C_2, ..., C_n$ trong nghiệm tổng quát các giá trị xác định
$C_1 = C_1^0; C_2 = C_2^0; ..., C_n = C_n^0$

Phương pháp khử

Một hệ phương trình vi phân chuẩn tắc cấp một có thể đưa được về một phương trình vi phân cấp cao đối với một hàm số chưa biết bằng cách khử những hàm số chưa biết còn lại từ những phương trình của hệ. Giải phương trình vi phân cấp cao đó, rồi tìm những hàm số chưa biết còn lại.
Ví dụ 1: Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} y' = 5y + 4z \\ z' = 4y + 5z \end{cases}$$

Lấy đạo hàm hai vế phương trình đầu ta được:$y'' = 5y' + 4z'$
Thay z' bởi vế phải của phương trình sau, ta được $y'' = 5y' + 16y + 20z$
Từ phương trình đầu suy ra $z = \dfrac{1}{4}(y' - 5y)$. Thế vào phương trình trên ta được $y'' - 10y' + 9y = 0$
Nghiệm tổng quát của phương trình này là: $y = C_1e^x + C_2e^{9x}$. Tính y' rồi thế vào phương trình đầu ta được $z = -C_1e^x + C_2e^{9x}$

Phương pháp khử

Ví dụ 2: Giải hệ phương trình $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y \\ \dfrac{dy}{dt} = x \end{cases}$

Ví dụ 3: Giải hệ phương trình $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x - 2y \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x - y \end{cases}$

Ví dụ 4: Giải hệ phương trình $\begin{cases} y' = y + z \\ z' = y + z + x \end{cases}$

Ví dụ 5: Giải hệ phương trình $\begin{cases} y' = \dfrac{y^2}{z} \\ z' = \dfrac{1}{2}y \end{cases}$

Phương pháp lập tổ hợp giải tích

Trong một số trường hợp, có thể tổ hợp các phương trình của hệ lại để được một phương trình vi phân dễ giải.
Ví dụ 1: Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} y' = z \\ z' = y \end{cases}$$

Cộng hai vế phương trình: $y' + z' = y + z \Rightarrow y + z = C_1 e^x$
Trừ hai vế phương trình: $y' - z' = -(y - z) \Rightarrow y - z = C_2 e^{-x}$
Từ đó suy ra $y = \frac{1}{2}\left(C_1 e^x + C_2 e^{-x}\right); z = \frac{1}{2}\left(C_1 e^x - C_2 e^{-x}\right)$
Ví dụ 2: Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} y' = y^2 + yz \\ z' = z^2 + yz \end{cases}$$

Định nghĩa

Hệ tuyến tính thuần nhất hệ số hằng là hệ có dạng:

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \ldots + a_{1n}y_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{dy_n}{dx} = a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \ldots + a_{nn}y_n \end{cases} \qquad (2)$$

Nếu $y_1, y_2, \ldots, y_n$ là nghiệm của hệ (2), dùng ký hiệu vecto $\vec{Y}$ có các thành phần $y_1, y_2, \ldots, y_n$ để chỉ nghiệm ấy.
Nếu $\vec{Y}_1, \vec{Y}_2, \ldots, \vec{Y}_m$ là những nghiệm của hệ (2) thì mọi tổ hợp của chúng dạng

$$C_1\vec{Y}_1 + C_2\vec{Y}_2 + \ldots + C_m\vec{Y}_m$$

cũng là nghiệm của hệ ấy.

Phương pháp giải

Tìm nghiệm của hệ dưới dạng

$$y_1 = p_1 e^{\lambda x}, y_2 = p_2 e^{\lambda x}, ..., y_n = p_n e^{\lambda x} \tag{3}$$

trong đó $p_1, p_2, ..., p_n, \lambda$ là những số phải xác định. Sau khi thế (3) vào (2), ta được hệ phương trình sau đối với $p_1, p_2, ..., p_n$:

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda)\, p_1 + a_{12} p_2 + ... + a_{1n} p_n = 0 \\ a_{21} p_1 + (a_{22} - \lambda)\, p_2 + ... + a_{2n} p_n = 0 \\ .... \\ a_{n1} p_1 + a_{n2'} p_2 + ... + (a_{nn} - \lambda)\, p_n = 0 \end{cases} \tag{4}$$

Đó là hệ thuần nhất phải có nghiệm khác không, do đó định thức của ma trận các hệ số phải bằng không.

Phương pháp giải

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2}` & \dots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0 \qquad (5)$$