

BÀI TẬP CHƯƠNG I

1.1. Thực hiện các phép tính

1. $(5 - 6i) + (2 + 4i)$
2. $(2 - 3i)(4 + i)$
3. $(1 + i)^2(1 - i)^3$
4. $\frac{2 + 3i}{5 + 4i}$
5. $\frac{(3 - 2i)(1 + 2i)}{4 - 3i}$
6. $\frac{(1 + i)(1 - 2i)}{(2 - i)(4 + 3i)}$
7. $\frac{4 + 5i + i^3}{(2 - i)^2}$
8. $\frac{(1 + i)^3}{(2 + i)(1 + 2i)}$
9. $(1 + 2i)^5$
10. $\left(\frac{2 + i}{1 - 2i}\right)^{25}$
11. $\frac{(1 + i)^9}{(i\sqrt{2})^8}$
12. $(\sqrt{7} + i\sqrt{3})^3(\sqrt{7} - i\sqrt{3})^2$
13. $\sqrt{-3 + 4i}$
14. $\sqrt{5 - 12i}$
15. $\sqrt{2i}$
16. $\sqrt{-1 - 2\sqrt{2}i}$

1.2. Viết số phức dưới dạng lượng giác và dạng mũ

1. 4
2. $3i$
3. $-2i$
4. $-2 + 2i$
5. $-\sqrt{6} - i\sqrt{2}$
6. $2\sqrt{3} + 2i$
7. $-\sqrt{2} + \sqrt{5}i$
8. $12 - 5i$

1.3. Viết dưới dạng mũ

1. $A = (2 - 2i)(3 + 3\sqrt{3}i)$
2. $B = (4 + 4i)(-1 + i)$
3. $C = \frac{-i}{1 + i}$
4. $D = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}i}{-1 + \sqrt{3}i}$

1.4. Tìm modul của các số phức

1. $\frac{2i}{3 - 4i}$
2. $(1 - i\sqrt{3})(\sqrt{3} + i)$
3. $(2 - 3i)^2(3 + i)^4$
4. $\frac{(3 + 4i)^3}{(1 + i\sqrt{3})^2}$
5. $\frac{1 - 2i}{1 + i} + \frac{2 - i}{1 - i}$
6. $\frac{1}{1 - i} + \frac{1}{1 + i} + \frac{5}{1 + 2i}$

1.5. Giải các phương trình

1. $z - 2\bar{z} + 5 - 6i = 0$
2. $z^{-2} = 4z$
3. $z + 2\bar{z} = \frac{2 - i}{1 + 3i}$
4. $|z| - z = 3 + i$
5. $|z|^2 + 1 + 6i = 2z$

1.6. Chứng minh với mọi số phức z, z_1, z_2

1. $|-z| = |z|$
2. $|\bar{z}| = |z|$
3. $|z|^2 = z\bar{z}$
4. $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$
5. $||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 - z_2|$

1.7. Chứng minh rằng

1. Nếu $|z| = 1$ thì $2 \leq |z^3 - 3| \leq 4$.
2. Nếu $|z| = 2$ thì $|z + 6 + 8i| \leq 12$.

1.8. Cho $w = \frac{z + i}{1 + iz}$. Chứng minh rằng nếu $\text{Im}(z) \leq 0$ thì $|w| \leq 1$.

1.9. Chứng minh rằng nếu $u + iv = (x + iy)^n$ thì $u^2 + v^2 = (x^2 + y^2)^n$, với n là số nguyên.

1.10. Chứng minh rằng $f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_n z^n = 0$, nếu $f(\bar{z}) = 0$, với $a_k \in \mathbb{R}$ ($k = 0, 1, \dots, n$).

1.11. Bằng cách xét tích của $1 + \frac{1}{2}i$ và $1 + \frac{1}{3}i$, chứng minh $\arctan \frac{1}{2} + \arctan \frac{1}{3} = \frac{\pi}{4}$.

1.12. Biểu diễn qua lũy thừa của $\cos x, \sin x$

1. $\cos 2x, \sin 2x$

2. $\cos 3x, \sin 3x$

3. $\cos 4x, \sin 4x$

1.13. Tính các số phức

1. $(1 - i\sqrt{3})^3$

2. $\sqrt[4]{-1}$

3. $(-\sqrt{3} - i)^{-5}$

4. $(-\sqrt{2} + i\sqrt{6})^4$

5. $(2 - 2i)^5$

6. $(1 + i\sqrt{3})^{-7}$

7. $(1 + i)^{\frac{1}{2}}$

8. $(\sqrt{3} + i)^{-6}$

9. $\frac{1}{(\sqrt{3} - i)^4}$

10. $(-i)^{\frac{1}{3}}$

11. $\sqrt[3]{i}$

12. $\sqrt[5]{1 - i}$

13. $\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right)^{10}$

14. $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^5$

15. $\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^4$

16. $(-1 + i)^3(\sqrt{3} + i)^{-2}$

17. $\frac{(1 - i\sqrt{3})^4}{(2 + 2i)^3}$

18. $\left(\frac{1 + i\sqrt{3}}{1 - i\sqrt{3}}\right)^{10}$

1.14. Tính và viết dưới dạng mũ

1. $\sqrt[3]{-2 + 2i}$

2. $\sqrt[4]{\sqrt{3} + i}$

3. $\sqrt[5]{-4 + 3i}$

1.15. Giải phương trình trong \mathbb{C}

1. $x^8 - 16 = 0$

2. $x^3 + 1 = 0$

3. $x^4 - x^2 + 1 = 0$

1.16. Cho biểu thức $A = \frac{1 + i\sqrt{3}}{1 - i}$.

1. Viết biểu thức trên dưới dạng $A = x + iy$.

2. Viết dạng mũ của $1 + i\sqrt{3}$ và $1 - i$. Suy ra dạng lượng giác của A , từ đó tính $\cos \frac{7\pi}{12}, \sin \frac{7\pi}{12}$.

1.17. Tính lần lượt căn bậc 2, 3, 4, 5, 6 của số phức 1 và biểu diễn các giá trị đó trên đường tròn lượng giác.

1.18. Các giá trị của $\sqrt[n]{1}$ là $w_k = \cos \frac{k2\pi}{n} + i \sin \frac{k2\pi}{n}$, $k = 0, 1, \dots, n - 1$.

1. Tính tổng $w_0 + w_1 + \dots + w_{n-1}$.

2. Chứng minh rằng w_k và w_{n-k} ($k = 1, \dots, n - 1$) là cặp số phức liên hợp và nghịch đảo của nhau.

3. Tính $\frac{1}{w_k} + \frac{1}{w_{n-k}}, k=1, \dots, n-1.$

4. Tính $\frac{1}{1-w_k} + \frac{1}{1-w_{n-k}}, k=1, \dots, n-1.$

1.19. Xác định các điểm trong mặt phẳng Oxy biểu diễn số phức z

1. $\operatorname{Re}(z) = \operatorname{Im}(z)$

2. $|z| < 3$

3. $|z-1+i| \leq 1$

4. $\operatorname{Re}(\bar{z}-i) = 2$

5. $\operatorname{Re}(z) + \operatorname{Im}(z) < 1$

6. $|2z-i| = 4$

7. $0 < \operatorname{Re}(iz) < 1$

8. $\operatorname{Im}(z-i) \geq 3$

9. $|z-i| = |z-1|$

10. $z = |z|$

11. $\operatorname{Im}(z^2) = 2$

12. $|z| = \operatorname{Re}(z)$

13. $\arg z = -z$

14. $|z-1| + |z+1| = 4$

15. $\arg z = \frac{\pi}{3}$

16. $\arg(z-1) = \frac{\pi}{4}$

17. $|z-i| + |z+i| < 6$

18. $\frac{\pi}{6} < \arg z < \frac{\pi}{4}$

1.20. Xác định đường cong C cho bởi phương trình

1. $z = -2t^2 + it, 0 < t < +\infty$

2. $z = 3t - 2it, -1 \leq t < 2$

3. $z = t - \frac{i}{t}, 0 < t < \infty$

4. $z = t^2 + it^4, -\infty < t < \infty$

5. $z = \frac{1}{1+it}, -\infty < t < \infty$

6. $z = 3(\cos t + i \sin t), \frac{\pi}{2} < t < \frac{3\pi}{2}$

7. $z = \cos t + 2i \sin t, 0 < t < \pi$

8. $z = 2 \sin^2 \frac{t}{2} + i \sin t, \frac{-\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$

9. $z = -t + i\sqrt{1-t^2}, -1 \leq t \leq 0$

10. $z = 2(t + i - ie^{-it}), -\infty < t < \infty$

.....

BÀI TẬP CHƯƠNG II

2.1. Tính giá trị của hàm tại điểm z_0

1. $f(z) = z - 3 \operatorname{Im}(z)$

a) $z_0 = 1$

b) $z_0 = -2i$

c) $z_0 = 1 - 2i$

2. $f(z) = z^2 \bar{z} - 2i.$

a) $z_0 = 2i$

b) $z_0 = 1 + i$

c) $z_0 = 3 - 2i$

3. $f(z) = |z|^2 - 2 \operatorname{Re}(iz) + z$

a) $z_0 = 3 - 4i$

b) $z_0 = 1 + 2i$

2.2. Tìm phần thực và phần ảo của các hàm

1. $f(z) = 5z - 3i + 4$

2. $f(z) = -2z + 3\bar{z} - i$

3. $f(z) = z^2 - (1-i)\bar{z}$

4. $f(z) = |z| - 2 \operatorname{Im}(iz)$

5. $f(z) = \frac{\bar{z}}{z+1}$

6. $f(z) = z - \frac{1}{z}$

2.3. Biết $z = re^{i\varphi}$, tìm phần thực và phần ảo của các hàm theo r, φ

1. $f(z) = \bar{z}$

2. $f(z) = |z|$

3. $f(z) = z^4$

4. $f(z) = x^2 + y^2 - iy$

5. $f(z) = z + \frac{1}{z}$

6. $f(z) = \operatorname{Re}(z^2)$

2.4. Tìm miền giá trị của các hàm

1. $f(z) = \bar{z}$ xác định trong nửa mặt phẳng trên $\operatorname{Im}(z) > 0$.

2. $f(z) = \operatorname{Im}(z)$ xác định trong hình tròn đóng $|z| \leq 2$.

3. $f(z) = |z|$ xác định trong hình vuông $0 \leq \operatorname{Re}(z) \leq 1, 0 \leq \operatorname{Im}(z) \leq 1$.

2.5. Tìm miền xác định và miền giá trị của các hàm

1. $f(z) = \frac{z}{\bar{z}}$

2. $f(z) = \frac{z + \bar{z}}{z - \bar{z}}$

2.6. Tìm ảnh B của tập A qua phép biến hình $w = f(z)$

1. $f(z) = \bar{z}$;

a) A là đường thẳng $y = 3$

b) A là đường thẳng $y = x$

2. $f(z) = (1 + i)z$

a) A là đường thẳng $x = 2$

b) A là đường thẳng $y = 2x + 1$

3. $f(z) = 2z$

a) A là nửa mặt phẳng trên $\operatorname{Im}(z) > 1$

b) $A = \{z \in \mathbb{C} : 0 < \operatorname{Re}(z) < 1\}$

4. $f(z) = iz$

a) A là đường tròn $|z - 1| = 2$

b) $A = \{z \in \mathbb{C} : -1 < \operatorname{Im}(z) < 0\}$

2.7. Tìm ảnh qua phép biến hình $w = z^2$

1. đường thẳng $x = 1$

2. đường thẳng $y = -2$

3. tập $A = \left\{z \in \mathbb{C} : 0 \leq \arg z \leq \frac{\pi}{4}\right\}$

2.8. Tìm ảnh qua phép biến hình $w = \frac{1}{z}$

1. đường thẳng $y = x$

2. đường thẳng $x = 1$

3. đoạn thẳng từ điểm $1 - i$ đến điểm $2 - 2i$

4. đường tròn $|z| = 2$

5. đường tròn $|z - 1| = 1$

6. tập $A = \{z \in \mathbb{C} : 1 < \operatorname{Re}(z) < 2\}$

2.9. Tìm giới hạn của các hàm số

1. $\lim_{z \rightarrow 2-i} (z^2 - \bar{z})$

2. $\lim_{z \rightarrow -1+i} (|z|^2 - i\bar{z})$

3. $\lim_{z \rightarrow 1+i} \frac{z - \bar{z}}{z + \bar{z}}$

4. $\lim_{z \rightarrow 2i} \frac{\operatorname{Im}(z)}{z + \operatorname{Re}(z)}$

2.10. Chứng minh

1. $\lim_{z \rightarrow z_0} c = c \quad (c \in \mathbb{C})$

2. $\lim_{z \rightarrow z_0} z = z_0$

3. $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{z} = \infty$

4. $\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{1}{z} = 0$

2.11. Sử dụng kết quả bài 2.10, tìm các giới hạn

1. $\lim_{z \rightarrow 2+i} (z^2 - z)$
2. $\lim_{z \rightarrow i} (z^5 - 2z + 1)$
3. $\lim_{z \rightarrow -i} \frac{z^4 - 1}{z + i}$
4. $\lim_{z \rightarrow 1-i} \frac{z^2 + 1}{z^2 - 1}$
5. $\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{z^2 + iz - 2}{(1 + 2i)z^2}$
6. $\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{iz + 1}{2z - i}$

2.12. Xét xem các hàm số sau có giới hạn khi $z \rightarrow 0$ hay không?

1. $f(z) = \frac{\operatorname{Re}(z)}{\operatorname{Im}(z)}$
2. $f(z) = \frac{\bar{z}}{z}$

2.13. Chứng tỏ rằng các hàm số sau liên tục tại z_0

1. $f(z) = z^2 - iz + 3 - 2i; z_0 = 2 - i$
2. $f(z) = \bar{z} - 3\operatorname{Re}(z) + i; z_0 = 3 - 2i$
3. $f(z) = \begin{cases} \frac{z^3 - 1}{z - 1}, & |z| \neq 1 \\ 3, & |z| = 1 \end{cases}; z_0 = 1$

2.14. Xét tính liên tục của các hàm số

1. $f(z) = \bar{z}$
2. $f(z) = \operatorname{Im}(z^2)$

2.15. Xét tính khả vi của hàm $f(z)$ và tính đạo hàm (nếu có)

1. $f(z) = \bar{z}$
2. $f(z) = (\bar{z})^2$
3. $f(z) = z \cdot \operatorname{Im}(z)$
4. $f(z) = z \cdot \bar{z}$
5. $f(z) = \operatorname{Re}(z^2)$
6. $f(z) = e^{|z-1|^2}$
7. $f(z) = z^5 + \bar{z}$
8. $f(z) = |z| \cdot z$

2.16. Chứng tỏ các hàm số sau không giải tích tại bất kỳ điểm nào trong mặt phẳng phức

1. $f(z) = \operatorname{Re}(z)$
2. $f(z) = y + ix$
3. $f(z) = 2x^2 + y + i(y^2 - x)$
4. $f(z) = 4z - 6\bar{z} + 3$

2.17. Các hàm số sau giải tích trong miền nào của mặt phẳng phức

1. $f(z) = z^2$
2. $f(z) = z \cdot \operatorname{Re}(z)$
3. $f(z) = \operatorname{Im}(z^2)$
4. $f(z) = z^2 + z\bar{z}$

2.18. Chứng minh rằng

1. Nếu f giải tích trong miền D và $|f(z)|$ là hằng số trong D thì f cũng là hằng số trong D .
2. Nếu f giải tích trong miền D và $f'(z) = 0$ thì f là hằng số trong D .

2.19. Cho $z = x + iy = re^{i\varphi}$ và $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$.

Chứng minh điều kiện C - R tương đương với $\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \varphi}, \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi}$.

2.20. Tìm hàm giải tích $f(z) = u + iv$, biết

1. $u = x + y$
2. $v = x - 2y$
3. $u = 2xy + 3x$
4. $v = e^{\frac{-y}{x}}$
5. $v = x^3 - 3xy^2$
6. $u = \arctan \frac{y}{x}$
7. $u = \ln(x^2 + y^2) + x - 2y$
8. $v = e^{-x} \cos y + 2x - y$

2.21. Tìm các hằng số a, b, c và d để các hàm sau giải tích

1. $f(z) = x + ay + i(bx + cy)$
2. $f(z) = 3x - y + i(ax + by - 3)$
3. $f(z) = x^2 + axy + by^2 + i(cx^2 + dxy + y^2)$

2.22. Tìm phần thực và phần ảo của các hàm số

1. $f(z) = e^{-3+4i}$
2. $f(z) = \cos(2 + i)$
3. $f(z) = \sin 2i$
4. $f(z) = \operatorname{sh}(1 - 4i)$

2.23. Tính $\sin z$, nếu $z = \frac{\pi}{2} + i \ln(3 - 2\sqrt{2})$.

2.24. Chứng minh

1. $\sin(x + iy) = \sin x \operatorname{ch} y + i \cos x \operatorname{sh} y$
2. $\cos(x + iy) = \cos x \operatorname{ch} y + i \sin x \operatorname{sh} y$

2.25. Giải phương trình

1. $\sin z = 2$
2. $\cos z = 3$
3. $e^z = 1$
4. $e^z = -1$

.....

BÀI TẬP CHƯƠNG III

3.1. Tính các tích phân

1. $I = \int_C (z + 3i) dz$, C có phương trình $x = 2t$, $y = 4t - 1$, $1 \leq t \leq 3$.
2. $I = \int_C (2\bar{z} - z) dz$, C có phương trình $x = -t$, $y = t^2 + 2$, $0 \leq t \leq 2$.
3. $I = \int_C |z|^2 dz$, C có phương trình $x = t^2$, $y = \frac{1}{t}$, $1 \leq t < 2$.
4. $I = \oint_C \operatorname{Re}(z) dz$, C là đường tròn $|z| = 1$.
5. $I = \oint_C \bar{z} dz$, C là đường tròn $|z| = 1$.
6. $I = \oint_C \left(\frac{1}{(z+i)^2} - \frac{2}{z+i} + 3 \right) dz$, C là đường tròn $|z+i| = 1$.

3.2. Tính các tích phân

1. $I = \int_C (x^2 + iy^3) dz$, C là đoạn thẳng
 - a) nối từ $z = 1$ đến $z = i$.
 - b) nối từ $z = 1 + i$ đến $z = i$.
2. $I = \int_C \frac{z+1}{z} dz$, C là
 - a) nửa phải đường tròn đơn vị từ $z = -i$ đến $z = i$.
 - b) nửa trái đường tròn đơn vị từ $z = -i$ đến $z = i$.
3. $I = \int_C (x^2 - iy^2) dz$, C có điểm đầu $z = -1$ và điểm cuối $z = 1$, trong hai trường hợp sau

a) C là nửa dưới đường tròn đơn vị.

b) C là nửa trên đường tròn đơn vị.

4. $I = \int_C e^z dz$, với C là đường gấp khúc nối $0, 2, 1 + i\pi$.

5. $I = \int_C z dz$ theo ellip $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ từ điểm $z = 2$ đến điểm $z = i$, chiều ngược kim đồng hồ.

6. $I = \int_C \frac{1}{z} dz$ theo đường tròn $|z| = 1$ từ điểm $z = 1$ đến điểm $z = -1$, trong hai trường hợp

a) nửa mặt phẳng trên.

b) nửa mặt phẳng dưới.

7. $I = \oint_C \operatorname{Im}(z - i) dz$, với biên C gồm đường tròn $|z| = 1$ từ $z = 1$ đến $z = i$ và đoạn thẳng từ $z = i$ đến $z = 1$.

8. $I = \oint_C ze^z dz$, với C là biên của hình vuông có các đỉnh là $z = 0, z = 1, z = 1 + i$ và $z = i$.

3.3. Tính tích phân $I = \oint_C f(z) dz$, với C là biên của tam giác có các đỉnh là $z = 0, z = 1$ và $z = 1 + i$:

1. $f(z) = \operatorname{Re}(z)$

2. $f(z) = z^2$

3. $f(z) = 2z - 1$

4. $f(z) = z^{-2}$

3.4. Tính tích phân $I = \int_C (z^2 - z + 2) dz$, với C có điểm đầu $z = i$, điểm cuối $z = 1$, trong các trường hợp:

1. C là đường thẳng $x + y = 1$

2. C là đường gấp khúc nối $i, 1 + i, 1$

3. C là parabol $y = 1 - x^2$

4. C là đường tròn $|z| = 1$ (chiều cùng kim đồng hồ)

3.5. Tính tích phân $I = \int_C (\bar{z})^2 dz$ với C là đường nối từ điểm $z = 0$ đến điểm $z = 1 + i$ trong trường hợp

1. C là đoạn thẳng.

2. C là đường gấp khúc nối $0, 1, 1 + i$.

3.6. Tính tích phân $I = \int_C |z| dz$, nếu C là

1. đoạn thẳng nối từ điểm $z = -i$ đến điểm $z = i$.

2. nửa trái đường tròn $|z| = 1$ nối từ điểm $z = -i$ đến điểm $z = i$.

3. nửa phải đường tròn $|z| = 1$ nối từ điểm $z = -i$ đến điểm $z = i$.

3.7. Tính tích phân $I = \int_C \bar{z} dz$ từ $z = 1$ đến $z = i$, theo mỗi đường sau

1. dọc theo trục Ox đến O , rồi dọc theo trục Oy đến i .

2. dọc theo đường thẳng $y = 1 - x$.

3. dọc theo đường thẳng đứng đến $(1 + i)$ rồi dọc theo đường ngang đến i .

3.8. Tính tích phân $I = \oint_C |z| dz$, với C là đường tròn $|z - i| = 1$.

3.9. Tính các tích phân

$$1. \int_0^{3+i} z^2 dz$$

$$2. \int_{i/2}^i e^{\pi z} dz$$

$$3. \int_{\pi}^{\pi+2i} \sin \frac{z}{2} dz$$

$$4. \int_0^i z e^z dz$$

$$5. \int_0^{1+i\pi} z \sin z dz$$

$$6. \int_i^1 \frac{1}{(z+1)^2} dz$$

3.10. Tính các tích phân

$$1. I = \int_C \cos z dz, \text{ trong đó } C = \{(x, y) : x = y^2, 0 \leq y \leq 1\}$$

$$2. I = \oint_C \frac{1}{z^2} dz, C \text{ là elip } (x-1)^2 + \frac{1}{4}(y+2)^2 = 1.$$

$$3. I = \oint_C \frac{z-3}{z^2+2z+2} dz, C : |z| = 1$$

$$4. I = \oint_C (1+z^2)^{-1} dz, C \text{ là elip } x^2 + 4y^2 = 1.$$

3.11. Tính các tích phân

$$1. I = \oint_C \frac{z^2}{z-2i} dz$$

$$a) C : |z| = 3$$

$$b) C : |z| = 1$$

$$2. I = \oint_C \frac{1}{z^2+9} dz$$

$$a) C : |z-2i| = 2$$

$$b) C : |z+2i| = \frac{1}{2}$$

$$3. I = \oint_C \frac{z^2+z-i}{z^2+3z-4} dz$$

$$a) C : |z| = 2$$

$$b) C : |z+5| = \frac{3}{2}$$

$$4. I = \oint_C \frac{z+2}{z^2(z-1-i)} dz$$

$$a) C : |z| = 1$$

$$b) C : |z-1-i| = 1$$

$$5. I = \oint_C \frac{1}{z^3(z-4)} dz$$

$$a) C : |z| = 1$$

$$b) C : |z-2| = 1$$

$$6. I = \oint_C \frac{e^z}{z(z-1)^3} dz$$

$$a) C : |z+2| = 1$$

$$b) C : |z| = \frac{1}{2}$$

$$c) C : |z-1| = \frac{1}{2}$$

$$d) C : |z| = 2$$

3.12. Tính các tích phân

$$1. I = \oint_C \frac{\cos(iz)}{z^2+\pi^2} dz, C : |z-i| = 4$$

$$2. I = \oint_C \frac{\sin(\pi z/2)}{z^2-1} dz, C : |z+i| = \sqrt{3}$$

$$3. I = \oint_C \frac{e^z}{z^2(z^2+1)} dz, C : |z-i| = \sqrt{2}$$

$$4. I = \oint_C \frac{z}{(z^2+1)(z+3)^2} dz, C : |z| = 2$$

$$5. I = \oint_C \frac{1}{z^3(z-1)^2} dz, C : |z-2| = 4$$

$$6. I = \oint_C \frac{\cos 2z}{z^5} dz, C : |z| = 1$$

3.13. Tính các tích phân

1. $I = \oint_C \frac{\sin \frac{\pi z}{4}}{z^2 - 1} dz, C : x^2 + y^2 = 2x.$

2. $I = \oint_C \frac{\cos z}{z^2 - 1} dz, C$ là biên của tam giác có các đỉnh $z = 0, z = 2 - 2i$ và $z = 2 + 2i$.

3. $I = \oint_C \frac{z^2}{z^2 + 4} dz, C$ là biên của hình vuông có các đỉnh là $z = -2, z = 2, z = -2 + 4i$ và $z = 2 + 4i$.

4. $I = \oint_C \frac{e^{iz}}{4z^2 - \pi^2} dz, C$ có phương trình $z = i + 2e^{it}, 0 \leq t \leq 2\pi$.

3.14. Cho $t > 0$ và C là đường cong tròn, kín, bao quanh điểm $z = -1$.

Chúng minh rằng: $\frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{ze^{zt}}{(z+1)^3} dz = \left(t - \frac{t^2}{2}\right)e^{-t}.$

3.15. Cho C là nửa trên đường tròn $|z| = R$ từ $z = R$ đến $z = -R$.

Chúng minh rằng: $\left| \int_C \frac{e^{imz}}{z^2 + a^2} dz \right| \leq \frac{\pi R}{R^2 - a^2} \quad (m > 0, R > a > 0).$

.....

BÀI TẬP CHƯƠNG IV

4.1. Xác định xem các dãy sau, dãy nào hội tụ, dãy nào phân kỳ

1. $\left\{ \frac{1 + in}{in^2} \right\}$ 2. $\left\{ \frac{n(1 + i^n)}{n + 1} \right\}$ 3. $\left\{ \frac{n + i^n}{\sqrt{n}} \right\}$ 4. $\left\{ e^{\frac{1}{n}} + i2 \arctan n \right\}$

4.2. Chứng tỏ các dãy sau hội tụ bằng cách sử dụng định lý 4.1

1. $\left\{ \frac{4n + i3n}{2n + i} \right\}$ 2. $\left\{ \left(\frac{1 + i}{4} \right)^n \right\}$

4.3. Tìm tổng của các chuỗi sau (nếu chuỗi hội tụ)

1. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{i}{k(k+1)}$ 2. $\sum_{k=1}^{\infty} (1 - i)^k$ 3. $\sum_{k=1}^{\infty} 2 \left(\frac{3}{1 + 3i} \right)^k$
 4. $\sum_{k=1}^{\infty} 4i \left(\frac{1}{2} \right)^{k-1}$ 5. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{i^k}{(1 + i)^{k-1}}$ 6. $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k + 2i} - \frac{1}{k + 1 + 2i} \right)$

4.4. Tìm bán kính và hình tròn hội tụ của các chuỗi

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z - i)^n}{n^2}$ 2. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - 2i)^n}{(1 - i)^{n+1}}$ 3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n2^n} (z - 1 + i)^n$
 4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2} (z - 1)^n$ 5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^n}$ 6. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1 + 2i}{2} \right)^n (z + 2i)^n$

4.5. Khai triển Taylor các hàm số sau trong lân cận điểm a và cho biết miền khai triển được

1. $f(z) = \frac{1}{1-z}, a = 3i$

2. $f(z) = e^z, a = \pi i$

3. $f(z) = \frac{1}{z}, a = 1$

4. $f(z) = \cos z, a = \pi / 4$

5. $f(z) = \frac{1}{2+z}, a = -1, a = i$

6. $f(z) = \frac{z-1}{z+1}, a = 0, a = 1$

4.6. Khai triển Taylor các hàm số sau trong lân cận điểm a và tìm bán kính hội tụ

1. $f(z) = \frac{i}{(z-i)(z-2i)}, a = 0$

2. $f(z) = \frac{z}{z^2 - 2z - 3}, a = 0, a = 2$

4.7. Khai triển Laurent các hàm số trong miền cho trước

1. $f(z) = \frac{\cos z}{z}, |z| > 0$

2. $f(z) = \frac{z - \sin z}{z^5}, |z| > 0$

3. $f(z) = e^{\frac{-1}{z^2}}, |z| > 0$

4. $f(z) = \frac{e^{2z}}{(z-1)^2}, |z-1| > 0$

5. $f(z) = z \sin \frac{2}{z}, |z| > 0$

6. $f(z) = z^2 e^{\frac{1}{z}}, |z| > 0$

7. $f(z) = \frac{1}{z(z+1)^2}, 0 < |z+1| < 1$

8. $f(z) = \frac{1}{(z^2+1)^2}, 0 < |z+i| < 2$

4.8. Khai triển Laurent hàm số $f(z) = \frac{1}{z(z-1)^2}$ trong các miền

1. $0 < |z| < 1$

2. $|z| > 1$

4.9. Khai triển Laurent hàm số $f(z) = \frac{1}{z(z-3)}$ trong các miền

1. $0 < |z| < 3$

2. $|z| > 3$

3. $0 < |z-3| < 3$

4. $|z-3| > 3$

5. $1 < |z-4| < 4$

6. $1 < |z+1| < 4$

4.10. Khai triển Laurent hàm số $f(z) = \frac{z}{(z+1)(z-2)}$ trong các miền

1. $1 < |z| < 2$

2. $|z+1| > 2$

3. $0 < |z+1| < 3$

4. $0 < |z-2| < 3$

4.11. Tìm và phân loại các điểm bất thường cô lập của các hàm số

1. $f(z) = \frac{z+2}{(z-1)^3 z(z+1)}$

2. $f(z) = \frac{1 - \cos z}{z^3}$

3. $f(z) = \frac{2}{(z^2+1)^2}$

4. $f(z) = ze^{\frac{1}{z}}$

5. $f(z) = \frac{z^5}{(z-1)^2}$

6. $f(z) = \cos \frac{1}{z+i}$

7. $f(z) = \frac{3z-1}{z^2+2z+5}$

8. $f(z) = \frac{z-1}{(z+1)(z^3+1)}$

9. $f(z) = \frac{\sin z}{z^2 - z^3}$

10. $f(z) = \frac{\cos z - \cos 2z}{z^6}$