TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM TP.HCM
KHOA TOÁN – TIN HỌC

TÓM TẮT BÀI GIẢNG

Môn

TOÁN RỜI RẠC

Giảng viên biên soạn: Nguyễn Ngọc Trung

TP.HCM 9.2006

MỤC LỤC

Chương 1. Mệnh đề

1.1 Mệnh đề - Tính chất

1.1.1 Mệnh đề và các phép toán mệnh đề

Định nghĩa. Mệnh đề là các khẳng định có giá trị chân lý xác định (đúng hoặc sai, nhưng không thể vừa đúng, vừa sai). Các mệnh đề đúng được nói là có *chân trị đúng*, các mệnh đề sai được nói là có *chân trị sai*.

Ví dụ: - Các khẳng định sau là mệnh đề:
. "1 + 2 = 5" là mệnh đề sai.
. "10 là số chẵn" là mệnh đề đúng.
- Các khẳng định sau không phải là mệnh đề:
. "Tôi đi học"
. "n là số nguyên tố"

Ký hiệu: Ta thường ký hiệu các mệnh đề bằng các chữ cái in hoa: P, Q, R, … và chân trị đúng (sai) được ký hiệu bởi 1 (0).

Các phép toán mệnh đề:

- *Phép phủ định:* phủ định của mệnh đề P được ý hiệu bởi $\neg P$ (đọc là "không P" hoặc "phủ định của P". Chân trị của $\neg P$ là 0 nếu chân trị của P là một và ngược lại.

  VD. P = "3 là số nguyên tố" là mệnh đề đúng. Do đó mệnh đề $\neg P$ = "3 **không** là số nguyên tố là mệnh đề sai.

  Bảng sau gọi là bảng chân trị của phép phủ định:

P	$\neg P$
0	1
1	0

- *Phép nối liền:* Mệnh đề nối liến của hai mệnh đề P và Q được ký hiệu bởi $P \wedge Q$ (đọc là "P và Q". Chân trị của $P \wedge Q$ là 1 nếu cả P lẫn Q đều có chân trị là 1, trong các trường hợp khác $P \wedge Q$ có chân trị là 0.

  VD. P = "Hôm nay trời đẹp" và Q = "Trận bóng đá hấp dẫn". Khi đó ta có mệnh đề nối liền của P và Q là: $P \wedge Q$ = "Hôm nay trời đẹp và trận bóng đá hấp dẫn". Mệnh đề nối liền này sẽ đúng nếu như cả hai mệnh đề P và Q đều đúng. Ngược lại nếu có một trong hai mệnh đề trên sai hoặc cả hai cùng sai thì mệnh đề nối liền sẽ là sai.

Bảng chân trị của phép nối liền:

P	Q	$P \wedge Q$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

- *Phép nối rời:* Mệnh đề nối rời của hai mệnh đề P và Q được ký hiệu bởi $P \vee Q$ (đọc là "P hay Q". Chân trị của $P \vee Q$ là 0 nếu cả P lẫn Q đều có chân trị là 0, trong các trường hợp khác $P \wedge Q$ có chân trị là 0.

VD. P = "An là ca sĩ", P = "An là giáo viên". Khi đó ta có mệnh đề nối rời của P và Q là $P \vee Q$ = "An là ca sĩ hay An là giáo viên". Mệnh đề nối liền này sẽ đúng nếu như một trong hai mệnh đề trên là đúng hoặc cả hai mệnh đề trên đều đúng. Nếu cả hai mệnh đề P và Q đều sai thì $P \vee Q$ sẽ sai.

Bảng chân trị của phép nối rời:

P	Q	$P \vee Q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

- *Phép kéo theo:* Mệnh đề P kéo theo Q được ký hiệu là $P \to Q$. Để xác định chân trị của mệnh đề P kéo theo Q ta xét ví dụ sau: P = "An trúng số", Q = "An mua xe máy", khi đó mệnh đề P kép theo Q sẽ là "**Nếu** An trúng số **thì** An sẽ mua xe máy". Ta có các trường hợp sau đây:
  - An đã trúng số và anh ta mua xe máy: hiển nhiên mệnh đề $P \to Q$ là đúng.
  - An đã trúng số nhưng anh ta không mua xe máy: rõ ràng mệnh đề $P \to Q$ là sai.
  - An không trúng số nhưng anh ta vẫn mua xe máy: mệnh đề $P \to Q$ vẫn đúng.
  - An không trúng số và anh ta không mua xe máy: mệnh đề $P \to Q$ đúng.

Bảng chân trị của phép kéo theo:

P	Q	$P \to Q$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

- *Phép kéo theo hai chiều:* Mệnh đề P kéo theo Q và ngược lại được ký hiệu bởi $P \leftrightarrow Q$ là mệnh đề có chân trị đúng khi P và Q có chân trị giống nhau (cùng đúng hoặc cùng sai) và có chân trị sai khi P và Q có chân trị khác nhau.

VD. P = "An học giỏi", Q = "An được điểm cao". Khi đó mệnh đề $P \leftrightarrow Q$= "Nếu An học giỏi thì An sẽ được điểm cao và ngược lại".

Bảng chân trị của phép kéo theo hai chiều như sau:

P	Q	$P \leftrightarrow Q$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

1.1.2 Dạng mệnh đề

Định nghĩa. *Dạng mệnh đề* được xây dựng từ:
- Các mệnh đề (là các hằng mệnh đề)
- Các biến mệnh đề p, q, r, … có thể lấy giá trị là các mệnh đề nào đó.
- Các phép toán trên mệnh đề, và các dấu ngoặc ( ).

Ví dụ. $E(p,q,r) = (p \wedge q) \vee (\neg r \to p)$ là một dạng mệnh đề trong đó p, q, r là các biến mệnh đề.

Để ý rằng ta có thể xây dựng nhiều dạng mệnh đề phức tạp từ các dạng mệnh đề đơn giản hơn bằng cách sử dụng các phép toán mệnh đề để kết hợp chúng lại. Chẳng hạn như dạng mệnh đề E(p,q,r) ở trên được kết nối từ hai dạng mệnh đề $E_1(p,q,r) = p \wedge q$ và $E_2(p,q,r) = \neg r \to p$ bằng phép toán nối rời ($\vee$).

Mỗi dạng mệnh đề sẽ được sẽ có một bảng chân trị xác định trong đó mỗi dòng cho biết chân trị của dạng mệnh đề đó theo các chân trị cụ thể của các biến.

Ví dụ. $E(p,q,r)=(p\wedge q)\vee(\neg r\to p)$ có bảng chân trị như sau:

p	q	r	$\neg r$	$p\wedge q$	$\neg r\to p$	E(p,q,r)
0	0	0	1	0	0	0
0	0	1	0	0	1	1
0	1	0	1	1	0	1
0	1	1	0	1	1	1
1	0	0	1	1	1	1
1	0	1	0	1	1	1
1	1	0	1	1	1	1
1	1	1	0	1	1	1

Định nghĩa. Hai dạng mệnh đề E và F được nói là *tương đương logic* nếu chúng có cùng bảng chân trị. Khi ấy ta viết $E\Leftrightarrow F$.

Chú ý rằng nếu E và F tương đương logic thì dạng mệnh đề $P\leftrightarrow Q$ luôn lấy giá trị là 1 dù các biến có lấy bất cứ giá trị nào.

Định nghĩa.

i. Một dạng mệnh đề được gọi là một hằng đúng nếu nó luôn luôn lấy chân trị 1
ii. Một dạng mệnh đề được gọi là một hằng sai nếu nó luôn lấy chân trị 0.

Mệnh đề. Hai dạng mệnh đề E và F tương đương logic khi và chỉ khi $P\leftrightarrow Q$ là một hằng đúng.

Định nghĩa. Dạng mệnh đề F được nói là hệ quả logic của dạng mệnh đề E nếu $E\to F$ là một hằng đúng. Khi ấy ta viết $E\Rightarrow F$.

Các quy luật logic:

Định lý. Với p, q, r là các biến mệnh đề, 1 là hằng đúng, 0 là hằng sai, ta có các tương đương logic:

i. *Phủ định của phủ định:*

$$\neg\neg p\Leftrightarrow p$$

ii. *Quy tắc De Morgan:*

$$\neg(p\wedge q)\Leftrightarrow\neg p\vee\neg q$$

và $$\neg(p\vee q)\Leftrightarrow\neg p\wedge\neg q$$

iii. *Luật kéo theo:*

$$p\to q\Leftrightarrow\neg p\vee q$$

iv. *Luật giao hoán:*

$$p\wedge q\Leftrightarrow q\wedge p$$

và $p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$

v. Luật phân phối:

$p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

và $p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$

vi. Luật kết hợp:

$p \wedge (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \wedge r$

và $p \vee (q \vee r) \Leftrightarrow (p \vee q) \vee r$

vii. Luật lũy đẳng:

$p \wedge p \Leftrightarrow p$

và $p \vee p \Leftrightarrow p$

viii. Luật trung hòa:

$p \wedge 1 \Leftrightarrow p$

và $p \vee 0 \Leftrightarrow p$

ix. Phần tử bù:

$p \wedge \neg p \Leftrightarrow 0$

và $p \vee \neg p \Leftrightarrow 1$

x. Luật thống trị:

$p \wedge 0 \Leftrightarrow 0$

và $p \vee 1 \Leftrightarrow 1$

xi. Luật hấp thụ:

$p \wedge (p \vee q) \Leftrightarrow p$

và $p \vee (p \wedge q) \Leftrightarrow p$

Ví dụ. sử dụng các quy luật logic chứng minh rằng dạng mệnh đề $E(p,q) = (p \wedge (p \rightarrow q)) \rightarrow q$ là hằng đúng.

Giải. E(p,q) $\Leftrightarrow [p \wedge (\neg p \vee q)] \rightarrow q \Leftrightarrow [(p \wedge \neg p) \vee (p \wedge q)]$

$\Leftrightarrow [0 \vee (p \wedge q)] \rightarrow q \Leftrightarrow (p \wedge q) \rightarrow q$

$\Leftrightarrow \neg p \vee \neg q \vee q \Leftrightarrow \neg p \vee 1$

$\Leftrightarrow 1$

1.1.3 Các quy tắc suy diễn

Trong chứng minh toán học, xuất phát từ một số khẳng định đúng (mệnh đề đúng) gọi là tiền đề, ta sẽ áp dụng các quy tắc suy diễn để suy ra chân lý của một khẳng định q mà ta gọi là kết luận. Nói cách khác, ta sẽ phải tìm cách chứng minh dạng mệnh đề $(p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_n) \rightarrow q$ là một hằng đúng, trong đó $p_1, p_2, ..., p_n, q$ là các dạng mệnh đề theo một số biến logic nào đó.

Ví dụ. Giả sử ta có các tiền đề:

p_1: "Nếu An học chăm thì An đạt điểm cao"

p_2: "Nêu An không hay đi chơi thì An học chăm"

p_3: "An không được điểm cao"

Ta muốn dùng các quy tắc suy diễn để suy ra kết luận: q = "An hay đi chơi". Muốn vậy, ta phải trừu tượng hóa các mệnh đề nguyên thủy: "An học chăm", "An hay đi chơi" và "An được điểm cao" thành các biến mệnh đề p, q, r. Như vậy các tiền đề bây giờ trở thành các dạng mệnh đề:

$p_1 = p \to r$

$p_2 = \neg q \to p$

$p_3 = \neg r$

Ta phải chứng minh dạng mệnh đề sau là một hằng đúng:

$$\left[(p \to r) \wedge (\neg q \to p) \wedge \neg r\right] \to q$$

Ta có thể chứng minh điều này bằng cách lập bảng chân trị của dạng mệnh đề trên. Tuy nhiên cách này sẽ gặp rất nhiều khó khăn khi các biến mệnh đề lớn (số dòng của bảng chân trị bằng 2^n, với n là số biến mệnh đề). Một phương pháp khác là sử dụng các quy tắc suy diễn để chia bài toán ra thành nhiều bước nhỏ, nghĩa là từ các tiền đề ta suy ra một số kết luận trung gian trước khi áp dụng các quy tắc suy diễn để suy ra kết luận. Để tiện ta mô hình hóa phép suy diễn thành sơ đồ như sau:

$$\begin{array}{l} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ \underline{p_n} \\ \therefore q \end{array}$$

Sau đây là một số quy tắc suy diễn thường dùng mà chân lý của nó có thể được kiểm tra dễ dàng bằng cách lập bảng chân trị.

❖ Quy tắc Modus Ponens (Phương pháp khẳng định):

Quy tắc này được thể hiện bởi hằng đúng: $\left[(p \to q) \wedge p\right] \to q$ hoặc dưới dạng sơ đồ:

$$\begin{array}{l} p \to q \\ \underline{p \qquad} \\ \therefore q \end{array}$$

Ví dụ. Nếu An học chăm thì An sẽ được điểm cao, mà An học chăm. Suy ra An được điểm cao.

❖ Tam đoạn luận (Syllogism).

Quy tắc này được thể hiện bằng hằng đúng: $\left[(p \to q) \wedge (q \to r)\right] \to (p \to r)$ hay dưới dạng mô hình:

$$\begin{array}{l} p \to q \\ \underline{q \to r} \\ \therefore p \to r \end{array}$$

Ví dụ. Nếu An không hay đi chơi thì An học chăm và nếu An học chăm thì An sẽ được điểm cao. Suy ra nếu An không hay đi chơi thì An sẽ được điểm cao.

❖ Quy tắc Modus Tollens (phương pháp phủ định)

Quy tắc này được thể hiện bởi hằng đúng: $\left[(p \to q) \wedge \neg q\right] \to \neg p$ hay dưới dạng mô hình:

$$\begin{array}{l} p \to q \\ \underline{\neg q} \\ \therefore \neg p \end{array}$$

Ví dụ. Nếu trời mưa thì đường ướt mà đường không ướt. Suy ra trời không mưa.

❖ Quy tắc mâu thuẫn (chứng minh bằng phản chứng)
Quy tắc này dựa trên tương đương logic sau:

$$\left[(p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_n) \to q\right] \Leftrightarrow \left[(p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_n \wedge \neg q) \to 0\right]$$

Ví dụ. Hãy sử dụng phương pháp phản chứng cho chứng minh sau:

$$\begin{array}{l} p \to r \\ \neg p \to q \\ \underline{q \to s} \\ \therefore \neg r \to s \end{array}$$

- Trước hết, ta lấy phủ định của kết luận: $\neg(\neg r \to s) \Leftrightarrow \neg(r \vee s) \Leftrightarrow \neg r \wedge \neg s$
- Sau đó ta sẽ thêm vào các tiền đề hai giả thiết phụ $\neg r$ và $\neg s$ tìm cách chứng minh suy luận sau là đúng:

$$
\begin{array}{l}
p \to r \\
\neg p \to q \\
q \to s \\
\neg r \\
\neg s \\
\hline
\therefore 0
\end{array}
$$

Các bước suy luận sẽ được thực hiện như sau:

$$
\begin{array}{lll}
 & \neg p \to q & \\
 & q \to s & \\
\cline{2-2}
 & \therefore \neg p \to s & \text{(Tam đoạn luận)} \\
\text{mà} & \neg s & \\
\cline{2-2}
 & \therefore p & \text{(PP phủ định)} \\
\text{mà} & p \to r & \\
\cline{2-2}
 & \therefore r & \text{(PP khẳng định)}
\end{array}
$$

Kết luận r cùng với giả thiết phụ $\neg r$ cho ta $r \wedge \neg r \Leftrightarrow 0$. Do đó theo phương pháp phản chứng, chứng minh ban đầu là đúng.

❖ Quy tắc chứng minh theo trường hợp:

Quy tắc này được thể hiện bằng hằng đúng sau:

$$\left[(p \to r) \wedge (q \to r)\right] \to \left[(p \vee q) \to r\right]$$

Ý nghĩa của quy tắc này là nếu một giả thiết có thể tác ra thành hai trường hợp p đúng hay q đúng, và ta đã chứng minh được riêng rẽ cho từng trường hợp là kết luận r đúng, khi ấy r cũng đúng trong cả hai trường hợp.

Ví dụ. Để chứng minh rằng f(n) = n(n+1) luôn chia hết cho 2 với mọi số tự nhiên n, ta xét hai trường hợp là n chẵn, n lẻ và thấy rằng trong cả hai trường hợp f(n) luôn chia hết cho 2. Vậy ta rút ra kết luận cần chứng minh là f(n) luôn chia hết cho 2 với mọi số tự nhiên n.

Trên đây là một số quy tắc suy diễn ta thường dùng trong các quá trình suy luận. Sau đây ta sẽ xét một ví dụ cụ thể có sử dụng kết hợp nhiều quy tắc suy diễn:

Ví dụ. Kiểm tra suy luận sau đúng hay sai: *"Nếu nghệ sĩ Văn Ba không trình diễn hay số vé bán ra ít hơn 50 vé thì đêm diễn sẽ bị hủy bỏ và Ông bầu sẽ rất buồn. Nếu đêm diễn bị hủy bỏ thì phải trả lại vé cho người xem. Nhưng tiền vé đã không được trả lại cho người xem. Vậy nghệ sĩ Văn Ba đã trình diễn"*.

Để kiểm tra suy luận trên, ta thay các mệnh đề nguyên thủy bằng các biến mệnh đề:

p: "nghệ sĩ Văn Ba đã trình diễn"