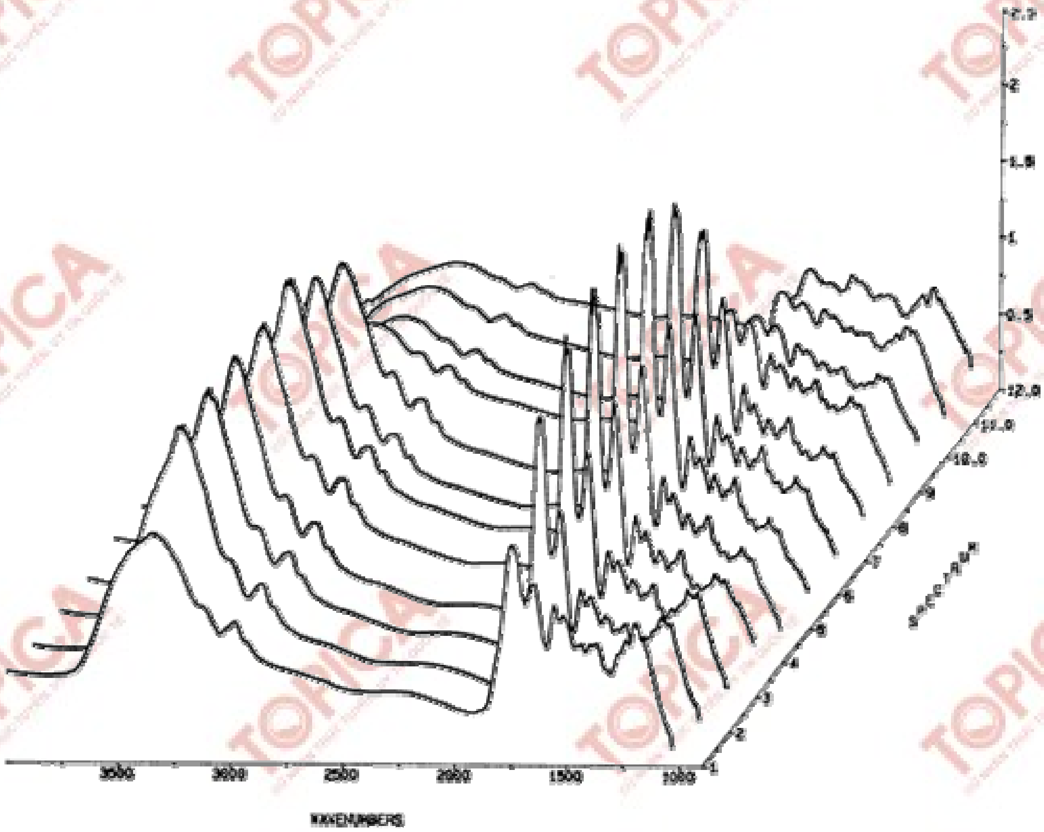
Bài 6: ÁNH XẠ TUYẾN TÍNH VÀ MA TRẬN



Mục tiêu

- Nắm được khái niệm về ánh xạ tuyến tính,
- Nắm được khái niệm về hạt nhân và ảnh
- Nắm được khái niệm về hạng của ánh xạ tuyến tính
- Khái niệm về ma trận của ánh xạ tuyến tính.
- Giải được các bài toán về ánh xạ tuyến tính, hạt nhân và ảnh, hạng của ánh xạ

Thời lượng

Bạn đọc nên để 15 giờ để nghiên cứu LT + 8 giờ làm bài tập.

Nội dung

Ánh xạ tuyến tính giúp ta hiểu được những yếu tố quyết định dẫn đên cấu trúc của không gian véc tơ.

Bài 6 bao gồm bốn nội dung chính :

- Khái niệm chung
- Các tính chất của ánh xạ tuyến tính – Hạt nhân và ảnh
- Hạng của ánh xạ tuyến tính – định lí về số chiều
- Ma trận của ánh xạ tuyến tính

Bài toán mở đầu : Mô hình cân đối liên ngành dạng ma trận

Ký hiệu A là ma trận chi phí X là véc tơ tổng sản phẩm các ngành, Y là véc tơ các sản phẩm cuối cùng, E là ma trận đơn vị, ta có hệ thức :

$$(E - A)\,X = Y$$

Ta có một ánh xạ tuyến tính từ X vào Y diễn tả bởi ma trận (E – A)

6.1. Khái niệm chung

6.1.1. Khái niệm ánh xạ tuyến tính

Định nghĩa 6.1

Cho V, W là hai không gian véc tơ. Ánh xạ f: $V \to W$ gọi là ánh xạ tuyến tính nếu nó có hai tính chất sau

$$(1)\ f(u + v) = f(u) + f(v);\ \forall u, v \in V$$

$$(2)\ f(\alpha u) = \alpha f(u)\ \forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall u \in V.$$

Từ điều kiện 2) ta có

$$f(\theta) = f(0\theta) = 0\,f(\theta) = \theta$$

Vậy ánh xạ tuyến tính chuyển véc tơ không thành véc tơ không.

Kết hợp các điều kiện (1) và (2) ta có

$$f(\alpha x + \alpha y) = \alpha f(x) + \ \alpha f(y)\ ,\ \forall x, y \in V,\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

Một cách tổng quát quy nạp ta có

$$f\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i\right) = \sum_{i=1}^{n}\alpha_i f(x_i),\ \forall x_i \in V,\ \alpha_i \in \mathbb{R},\ i = 1, 2,..., n\ \ (*)$$

Hệ thức (*) chứng tỏ rằng ánh xạ tuyến tính chuyển một hệ véc tơ phụ thuộc tuyến tính thành một hệ véc tơ phụ thuộc tuyến tính .

Nếu ánh xạ tuyến tính là một đơn ánh thì gọi là đơn cấu

Nếu ánh xạ tuyến tính là một toàn ánh thì gọi là toàn cấu

Nếu ánh xạ tuyến tính là một song ánh thì gọi là đẳng cấu.

Khi có một đẳng cấu $f : V \to V'$ thì ta nói hai không gian véc tơ V và V′ đẳng cấu với nhau và ký hiệu $V \cong V'$.

Ví dụ 1: Cho ánh xạ f: $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ xác định bởi

$$f(x, y, z) = (x + 2y + 3z, 4x + 5y + 6z, 7x + 8y + 9z).$$

Chứng minh f là ánh xạ tuyến tính.

Giải:

Đặt $u^1 = (x_1, y_1, z_1)$, $u^2 = (x_2, y_2, z_2)$ ta có

$$f[\alpha_1 u^1 + \alpha_2 u^2] = f[(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2),(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2), (\alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2)]$$

$$= [\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + 2\alpha_1 y_1 + 2\alpha_2 y_2 + 3\alpha_1 z_1 + 3\alpha_2 z_2,$$

$$4\alpha_1x_1 + 4\alpha_2x_2 + 5\alpha_1y_1 + 5\alpha_2y_2 + 6\alpha_1z_1 + 6\alpha_2z_2,$$

$$7\alpha_1x_1 + 7\alpha_2x_2 + 8\alpha_1y_1 + 8\alpha_2y_2 + 9\alpha_1z_1 + 9\alpha_2z_2]$$

$$= \alpha_1(x_1 + 2y_1 + 3z_1, 4x_1 + 5y_1 + 6z_1, 7x_1 + 8y_1 + 9z_1) +$$

$$+ \alpha_2(x_2 + 2y_2 + 3z_2, 4x_2 + 5y_2 + 6z_2, 7x_2 + 8y_2 + 9z_2)$$

$$= \alpha_1f(x_1, y_1, z_1) + \alpha_2f(x_2, y_2, z_2) = \alpha_1f(u^1) + \alpha_2f(u^2)$$

nghĩa là $f[\alpha_1u^1 + \alpha_2u^2] = \alpha_1f(u^1) + \alpha_2f(u^2)$. Vậy f là ánh xạ tuyến tính.

Ví dụ 2: Cho V là không gian véc tơ n chiều và $B = \{w_1, w_2,..., w_n\}$ là một cơ sở của V. Khi đó, mỗi véc tơ $u \in V$ có thể biểu diễn duy nhất

$$u = c_1w_1 + c_2w_2 +...+ c_nw_n$$

nghĩa là $u_B = (c_1, c_2,..., c_n) \in \mathbb{R}^n$.

Xét ánh xạ $f: V \to \mathbb{R}^n$ xác định bởi $f(u) = u_B$.

Chứng minh rằng f là ánh xạ tuyến tính.

Giải:

Ta có

$$v \in V \Rightarrow v = d_1w_1 + d_2w_2 +...+ d_nw_n$$

nghĩa là $v_B = (d_1, d_2,..., d_n) \in \mathbb{R}^n$.

Do đó

$$[u + v]_B = (c_1 + d_1, c_2 + d_2,..., c_n + d_n)$$

$$= (c_1, c_2,..., c_n) + (d_1, d_2,..., d_n)$$

$$= u_B + v_B$$

$$\Leftrightarrow f(u + v) = f(u) + f(v)$$

$$[\alpha u]_B = (\alpha c_1, \alpha c_2,..., \alpha c_n) = \alpha(c_1, c_2,..., c_n) = \alpha u_B$$

$$\Leftrightarrow f(\alpha u) = \alpha f(u).$$

Vậy f là ánh xạ tuyến tính.

6.1.2. Các phép toán về ánh xạ tuyến tính

- Giả sử V và W là hai không gian véc tơ và

  $$f: V \to W \qquad g: V \to W$$

  là hai ánh xạ tuyến tính từ V tới W.

  - Ta định nghĩa tổng $f + g$ của hai ánh xạ tuyến tính và tích αf của một ánh xạ tuyến tính với một số thực α như sau

    $$\forall u \in V, (f + g)(u) = f(u) + g(u) \in W$$

    $$\forall u \in V, (\alpha f)(u) = \alpha f(u) \in W.$$

    Dễ thấy rằng $f + g$ và αf cũng là những ánh xạ tuyến tính từ V tới W.

- Bây giờ gọi L(V, W) là tập tất cả những ánh xạ tuyến tính từ V tới W. Với hai phép toán cộng ánh xạ tuyến tính và nhân ánh xạ tuyến tính với một số thực vừa định nghĩa có thể chứng minh được rằng L(V, W) là một không gian véc tơ trên trường số thực $\mathbb{R}$.

- Giả sử V, W, U là ba không gian véc tơ và

$$f: V \to W \qquad g: W \to U$$

Khi đó, ánh xạ hợp $g \circ f$ xác định bởi

$(\forall u \in V)\ (g \circ f)(u) = g(f(u)) \in U$ là một ánh xạ tuyến tính từ V tới U.

6.1.3. Sự đẳng cấu của không gian n chiều với $\mathbb{R}^n$

Định nghĩa 6.2: Hai không gian véc tơ V và V′ gọi là đẳng cấu nếu giữa các véc tơ $x \in V$ và các véc tơ $x' \in V'$ có một tương ứng 1 – 1: $x \leftrightarrow x'$ sao cho nếu $x \leftrightarrow x'$ và $y \leftrightarrow y'$ thì

$$x + y \leftrightarrow x' + y'$$

$$\alpha x \leftrightarrow \alpha x',\ \alpha \in \mathbb{R}.$$

Hai không gian đẳng cấu có những tính chất giống nhau.

Định lí 6.1: Mọi không gian n chiều V đều đẳng cấu với $\mathbb{R}^n$.

Chứng minh:

Xét ánh xạ $f: V \to \mathbb{R}^n$ xác định bởi

$$v \in V \Rightarrow f(v) = (v)_B \in \mathbb{R}^n$$

Trong đó B là một cơ sở của V.

Theo ví dụ ở trên f là ánh xạ tuyến tính và tạo ra một tương ứng 1 – 1 giữa V và $\mathbb{R}^n$ nghĩa là

$$x \in V \leftrightarrow (x)_B \in \mathbb{R}^n$$

$$y \in V \leftrightarrow (y)_B \in \mathbb{R}^n$$

Ta có

$$x + y \in V \leftrightarrow (x + y)_B = (x)_B + (y)_B \in \mathbb{R}^n$$

$$\alpha x V \leftrightarrow (\alpha x)_B = \alpha (x)_B \in \mathbb{R}^n.$$

Vậy V đẳng cấu với $\mathbb{R}^n$.

6.2. Các tính chất của ánh xạ tuyến tính - Hạt nhân và ảnh

6.2.1. Các tính chất của ánh xạ tuyến tính

Định lí 6.2: Cho V và W là hai không gian véc tơ. Nếu $f: V \to W$ là một ánh xạ tuyến tính thì

a. $f(\theta) = \theta$

b. $f(-v) = -f(v), \forall v \in V$

c. $f(u - v) = f(u) - f(v), \forall u, v \in V$.

Chứng minh:

a. Giả sử $v \in V$.

Vì $\theta v = \theta$ nên

$$f(\theta) = f(\theta v) = \theta(v) = \theta$$

b. Vì $-v = (-1)v$ nên

$$f(-v) = f[(-1)v] = (-1)f(v) = -f(v).$$

c. Vì $u - v = u + (-v)$ nên

$$f(u - v) = f[u + (-1)v] = f(u) - f(v).$$

6.2.2. Khái niệm về hạt nhân và ảnh của ánh xạ tuyến tính

Định nghĩa 6.3: Giả sử V và W là hai không gian véc tơ và f: $V \to W$ là một ánh xạ tuyến tính. Khi đó, tập tất cả các phần tử của V có ảnh là $\theta \in W$ gọi là hạt nhân của f, ký hiệu là Ker(f).

$$\mathrm{Ker}(f) = \{x \mid x \in V, f(x) = \theta\}.$$

Tập tất cả các phần tử của W là ảnh của ít nhất một phần tử của V gọi là ảnh của f, ký hiệu là Im(f).

$$\mathrm{Im}(f) = \{y \mid y \in W, \exists x \in V, f(x) = y\}.$$

Như vậy Im(f) = f(V).

Tính chất của nhân và ảnh.

Định lí 6.3: Nếu f: $V \to W$ là một ánh xạ tuyến tính thì

a. Ker(f) là một không gian con của V.

b. Im(f) là một không gian con của W

6.3. Hạng của ánh xạ tuyến tính – Định lí về số chiều

Định nghĩa 6.4: Nếu f: $V \to W$ là một ánh xạ tuyến tính thì số chiều của Im(f) gọi là hạng của f, ký hiệu là rank(f).

$$\mathrm{rank}(f) = \dim(\mathrm{Im}(f)).$$

Định lí 6.4: (về số chiều) Nếu f: $V \to W$ là một ánh xạ tuyến tính thì

$$\dim(\mathrm{Im}(f)) + \dim(\mathrm{Ker}(f)) = n, \text{ trong đó } n = \dim V,$$

tức là $\mathrm{rank}(f) + \dim(\mathrm{Ker}(f)) = n$.

Ví dụ: Xét ánh xạ tuyến tính f: $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$.

$$f(x; y; z) = (x + z; y - x; z + y; x + y + 2z)$$

a. Xác định các ảnh theo f của các véc tơ cơ sở chính tắc e^1, e^2, e^3 của $\mathbb{R}^3$. Tính hạng của hệ các véc tơ ảnh $\{f(e^1); f(e^2); f(e^3)\}$.

b. Xác định hạt nhân Ker(f) và số chiều của $f(\mathbb{R}^3)$.

c. Cho dạng tổng quát của các véc tơ của $f(\mathbb{R}^3)$ và một cơ sở của không gian con này.

Giải:

a. $e^1 = (1; 0; 0)$, $e^2 = (0; 1; 0)$, $e^3 = (0; 0; 1)$

$$f(e^1) = (1; -1; 0; 1)$$
$$f(e^2) = (0, 1, 1, 1)$$
$$f(e^3) = (1, 0, 1, 2).$$

Ta nhận thấy $f(e^3) = f(e^1) + f(e^2)$. Vì vậy, ta xét xem $f(e^1)$, $f(e^2)$ có độc lập tuyến tính không, nghĩa là xét

$$\alpha_1 f(e^1) + \alpha_2 f(e^2) = 0?$$

$$\begin{cases} \alpha_1 = 0 \\ -\alpha_1 + \alpha_2 = 0 \\ \alpha_2 = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 0 \\ \alpha_2 = 0. \end{cases}$$

Vậy hai véc tơ $f(e^1)$, $f(e^2)$ là độc lập tuyến tính.

Do đó

$$\text{rank}\,\{f(e^1), f(e^2), f(e^3)\} = 2.$$

b. Theo định nghĩa

$\text{Ker}(f) = \{(x, y, z) \mid (x + z, y - x, z + y, x + y + 2z) = (0, 0, 0, 0)\}$.

Từ đó, ta có hệ

$$\begin{cases} x + z = 0 & (1) \\ y - x = 0 & (2) \\ z + 2y = 0 & (3) \\ x + y + 2z = 0 & (4) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = -x \\ y = x \\ (3) = (1) + (2) \\ (4) = 2(1) + (2) \end{cases}$$

$$\text{Kerf} = \{(x; y; z) \mid z = -x; y = x\} = \{x(1; 1; -1) \mid x \in \mathbb{R}\}.$$

Vậy $\dim \text{Ker}(f) = 1$.

$\dim f(\mathbb{R}^3) = \dim \mathbb{R}^3 - \dim \text{Ker}(f) = 3 - 1 = 2$.

c. Đặt

$$\begin{cases} X = x + z \\ Y = y - x \end{cases} \Rightarrow z + y = X + Y$$

$$\Rightarrow x + y + 2z = (x + z) + (z + y) = X + X + Y = 2X + Y.$$

Vậy

$$f(\mathbb{R}^3) = \{(X; Y; X + Y; 2X + Y) \mid X \in \mathbb{R}, Y \in \mathbb{R}\}.$$

Vì

$$(X; Y; X + Y; 2X + Y) = X(1; 0; 1; 2) + Y(0; 1; 1; 1)$$

nên một cơ sở của $(\mathbb{R}^3)$ là các véc tơ

$$\begin{cases} (1; 0; 1; 2) = f(e^3) \\ (0; 1; 1; 1) = f(e^2). \end{cases}$$

6.4. Ma trận của ánh xạ tuyến tính

Định nghĩa 6.5: Cho V, W là hai không gian véc tơ n chiều và m chiều tương ứng,

$$\{e_1, e_2, \ldots, e_n\} \quad \text{và} \quad \{f_1, f_2, \ldots, f_m\} \qquad (I,II)$$

là cặp cơ sở của V và W. Nếu $f : V \to W$ là một ánh xạ tuyến tính thì

$$f(e_i) = \sum_{j=1}^{m} a_{ji} f_j (i = 1, 2, \ldots, n). \qquad (6.1)$$

Ma trận

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

gọi là ma trận của ánh xạ tuyến tính f theo các cơ sở $\{e_i\}^n$ và $\{f_j\}^m$.

Nếu sử dụng ma trận thì n đẳng thức (6.1) có thể viết một cách hình thức dưới dạng đẳng thức ma trận

$$(f(e_1), \ldots, f(e_n)) = (f_1, \ldots, f_m)A. \qquad (6.2)$$

Nếu biết ma trận A của ánh xạ tuyến tính f đối với cặp cơ sở (I, II) thì đối với mỗi véc tơ $x \in V$ cho trước, ta luôn luôn tính được tọa độ của véc tơ f(x) đối với cơ sở (II). Thực vậy, giả sử rằng

$$x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i \qquad (a)$$

$$f(x) = \sum_{i=1}^{m} \beta_i f_i \qquad (b)$$

Hãy tính các giá trị β_i , i = 1,2,..,m.

Hệ thức (b) có thể viết dưới dạng ma trận

$$f(x) = (f_1, \ldots, f_m)\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_m \end{pmatrix} \qquad (c)$$

Mặt khác vì f là một ánh xạ tuyến tính nên theo (a) ta có

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(e_i) = (f(e_1), \ldots, f(e_n))\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$$

Theo công thức (6.2) ta có

$$f(x) = (f_1, \ldots, f_m)A\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \qquad (d)$$

Từ các hệ thức (c) và (d) ta có

$$(f_1,\dots, f_m)\begin{pmatrix}\beta_1\\ \vdots \\ \beta_m\end{pmatrix} = (f_1,\dots, f_m)A\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots \\ \alpha_n\end{pmatrix} \quad \text{(e)}$$

Vì hệ véc tơ $\{f_1,\dots,f_m\}$ độc lập tuyến tính, từ hệ thức (e) ta suy ra rằng

$$\begin{pmatrix}\beta_1\\ \vdots \\ \beta_m\end{pmatrix} = A\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots \\ \alpha_n\end{pmatrix} \tag{6.3}$$

Theo đẳng thức ma trận (6.3) ta có

$$\beta_i = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k a_{ik},\ i = 1, 2,\dots, m. \tag{6.4}$$

Định lí 6.5: Hạng của ma trận A bằng số chiều Im(f).

Chứng minh:

Ta có $\{f(e_1),\dots, f(e_n)\}$ là một hệ sinh của Im(f). Do đó, số chiều của Im(f) bằng hạng của hệ véc tơ $\{f(e_1),\dots f(e_n)\}$, nhưng hạng của $\{f(e_1),\dots, f(e_n)\}$ bằng hạng của A. Do đó

$$r(A) = \dim(\mathrm{Im}(f)).$$

Ví dụ: Ký hiệu $\{e^1, e^2, e^3, e^4\}$ là cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^4$ và $\{\xi^1, \xi^2, \xi^3\}$ là một cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^3$. Xét ánh xạ tuyến tính $f: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ xác định bởi

$$\begin{cases} f(e^1) = \xi^1 + 2\xi^2 + \xi^3 \\ f(e^2) = f(e^4) = -\xi^1 - 2\xi^2 + \xi^3 \\ f(e^3) = 2\xi^1 + 4\xi^2 + 3\xi^3 \end{cases} \quad (*)$$

a. Xác định ma trận của ánh xạ tuyến tính f, từ đó suy ra hạng của f.

b. Xác định một cơ sở của hạt nhân Ker (f), từ đó suy ra hạng của f.

Giải:

a. Từ (*) ta có ma trận của f

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 4 & -2 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

b. $(x, y, z, t) = xe^1 + ye^2 + ze^3 + te^4$

$$\begin{aligned} f(x, y, z, t) &= xf(e^1) + yf(e^2) + zf(e^3) + tf(e^4) \\ &= x(\xi^1 + 2\xi^2 + \xi^3) + y(-\xi^1 - 2\xi^2 + \xi^3) + \\ &\qquad + z(2\xi^1 + 4\xi^2 + 3\xi^3) + t(-\xi^1 - 2\xi^2 + \xi^3) \\ &= (x - y + 2z - t)\xi^1 + (2x - 2y + 4z - 2t)\xi^2 + (x + y + 3z + t)\xi^3 \end{aligned}$$

Vì vậy

$$f(x; y; z; t) = (x - y + 2z - t; 2x - 2y + 4z - 2t; x + y + 3z + t)$$

$$\mathrm{Ker}(f) = \{(x; y; z; t) \mid (x - y + 2z - t; 2x - 2y + 4z - 2t; x + y + 3z + t) = (0; 0; 0\}$$

$$\begin{cases} x - y + 2z - t = 0 \\ 2x - 2y + 4z - 2t = 0 \\ x + y + 3z + t = 0 \end{cases}$$

$$2x + 5z = 0 \Rightarrow x = -\frac{5}{2}z$$

$$4y + 2z + 4t = 0 \Rightarrow y = -\frac{z}{2} - t$$

$$\mathrm{Ker}(f) = \left\{(x;\ y;\ z;\ t) \middle| x = -\frac{5}{2}z;\ y = -\frac{z}{2} - t;\ z;\ t \in \mathbb{R}\right\}$$

$$= \left\{z\left(-\frac{5}{2}; -\frac{1}{2}; 1; 0\right) + t(0; -1; 0; 1) \middle| z,\ t \in \mathbb{R}\right\}.$$

Như thế một cơ sở của Ker(f) gồm hai véc tơ

$u = (5; 1; -2; 0)$ và $v = (0; -1; 0; 1)$.

$\dim\mathrm{Ker}(f) = 2$

$\mathrm{rank}(f) = \dim\mathbb{R}^4 - \dim\mathrm{Ker}(f) = 4 - 2 = 2.$

TÓM LƯỢC CUỐI BÀI

- Các bạn đã được học về Ánh xạ tuyến tính.
- Các bạn cần ghi nhớ các vấn đề sau:
- Nắm được khái niệm về ánh xạ tuyến tính, hạt nhân và ảnh;
- Nắm được khái niệm về ma trận của ánh xạ tuyến tính;
- Giải được các bài toán về ánh xạ tuyến tính, hạt nhân và ảnh.

Bài tiếp theo các bạn sẽ được học về Toán tử tuyến tính, Trị riêng và véc tơ riêng.