Giải tích hàm nâng cao

2. Dạng hình học của định lý Hahn-Banach.

Bổ đề 1 (dung lượng của tập hợp lồi)

Giả sử C là tập hợp lồi, mở, chứa véctơ không của không gian định chuẩn E.

$$(\forall x \in E)\ p(x) = \inf\{\alpha > 0, \alpha^{-1}x \in C\}$$

Khi đó hàm p thỏa

1) $p(\lambda x) = \lambda p(x),\ \lambda > 0$

2) $p(x+y) \le p(x) + p(y)$

3) tồn tại M sao cho:

a) $(\forall x \in E)\ 0 \le p(x) \le M\ \|x\|$

b) $C = \{x \in E : p(x) < 1\}$

2. Dạng hình học của định lý Hahn-Banach.

Chứng minh bổ đề 1

1) $p(\lambda x) = \lambda p(x),\ \lambda > 0$

Nếu $\lambda > 0$ và $y = \lambda x$, ta có

$$p(y) = \inf\{\alpha > 0 : \frac{y}{\alpha} \in C\} = \inf\{\alpha > 0 : \frac{\lambda x}{\alpha} \in C\}$$

$$= \inf\{\lambda\alpha' > 0 : \frac{y}{\alpha'} \in C\} = \lambda \inf\{\alpha' > 0 : \frac{y}{\alpha'} \in C\} = \lambda p(x)$$

vậy $p(\lambda x) = \lambda p(x)$

2) $p(x+y) \le p(x) + p(y)$

$x, y \in E$, $\varepsilon > 0$. Töø(1) vaø(3b), ta co

$$p\left(\frac{x}{p(x)+\varepsilon}\right) = \frac{1}{p(x)+\varepsilon}\, p(x) < 1$$

$$\Rightarrow \frac{x}{p(x)+\varepsilon} \in C \qquad \text{vaø} \ \frac{y}{p(y)+\varepsilon} \in C$$

Suy ra, $(\forall t \in [0,1])$ $\dfrac{tx}{p(x)+\varepsilon} + \dfrac{(1\text{-}t)y}{p(y)+\varepsilon} \in C$

choïn $t = \dfrac{p(x)+\varepsilon}{p(x)+p(y)+2\varepsilon}$ ta coù $\dfrac{x+y}{p(x)+p(y)+2\varepsilon} \in C$

$$\Rightarrow p(x+y) < p(x) + p(y) + 2\varepsilon \quad \Rightarrow p(x+y) \le p(x) + p(y)$$

Chứng minh bổ đề 2

1) Giaû söû $0 \in C$

Xeùt dung löôïng p cuûa C. Xeùt $G = Rx_0$

$g : G \to R$, $g(tx_0) = t$

Kieåm tra $g(x) < p(x)$

Theo ñònh lyù Hahn-Banach, toàn taïi f treân E, khuyeách cuûa g

sao cho $(\forall x \in E)\ f(x) < p(x)$,

f lieân tuïc do boå ñeà 1, 3a) vaø $f(x_0) = 1$.

Töø boå ñeà 1, 3b) suy ra $(\forall x \in C)\ f(x) < 1$

2. Dạng hình học của định lý Hahn-Banach.

Định lý Hahn-Banach (dạng hình học thứ nhất)

Cho A và B là hai tập hợp khác rỗng, lồi, và rời nhau của không gian định chuẩn E, A là tập mở. Khi đó tồn tại siêu phẳng đóng tách A và B theo nghĩa rộng.

2. Dạng hình học của định lý Hahn-Banach.

Chứng minh Đặt $C = A\backslash B$.

1) Kiểm tra C lồi 2) Kiểm tra C mở 3) Kiểm tra $0 \notin C$

Theo bổ đề 2) tồn tại phiếm hàm tuyến tính liên tục trên E sao cho

$$(\forall z \in C)\, f(z) < 0 \Leftrightarrow (\forall x \in A, y \in B)\, f(x) < f(y)$$

Cố định $\alpha \in R$, với $\sup_{x \in A} f(x) \le \alpha \le \inf_{y \in B} f(y)$

Khi đó siêu phẳng của phương trình $\{f(x) = \alpha\}$ tách A và B theo nghĩa rộng.

2. Dạng hình học của định lý Hahn-Banach.

Định lý Hahn-Banach (dạng hình học thứ hai)

Cho *A* và *B* là hai tập hợp khác rỗng, lồi, và rời nhau của không gian định chuẩn *E*, *A* là tập mở. Khi đó tồn tại siêu phẳng đóng tách A và B theo nghĩa rộng.

2. Dạng hình học của định lý Hahn-Banach.

Chứng minh Vôùi $\varepsilon > 0$, ñaët $A_\varepsilon = A + B(0,\varepsilon)$

$$B_\varepsilon = B + B(0,\varepsilon)$$

1) Kiểm tra A_ε vaø B_ε lồi.

2) Kiểm tra A_ε vaø B_ε mở, không trống.

3) Kiểm tra A_ε vaø B_ε rời nhau.

Khi đó tồn tại siêu phẳng của phương trình $\{f(x) = \alpha\}$ tách *A* và *B* theo nghĩa rộng.

$$(\forall x \in A, y \in B, z \in B(0,1))\ f(x + \varepsilon z) \le \alpha \le f(y + \varepsilon z)$$

$$\Rightarrow f(x) + \varepsilon \|f\| \le \alpha \le f(y) + \varepsilon \|f\|$$

Vậy $\{f(x) = \alpha\}; f \ne 0$ tách *A* và *B* theo nghĩa hẹp.

3. Định lý Banach - Steihauss.

Bổ đề Baire

Cho X là không gian mêtrix đủ, không trống.

Giả sử $\{X_n\}_{n\geq 1}$ là dãy các tập hợp đóng sao cho $\bigcup_{n=1}^{\infty} X_n = X$

Khi đó tồn tại n_0 sao cho $\operatorname{int} X_{n_0} \neq 0.$

3. Định lý Banach - Steihauss.

Định lý Banach - Steihauss

Cho E, F là hai không gian Banach. $\{T_i\}_{i\in I}$ là họ các toán tử tuyến tính liên tục từ E vào F sao cho $\sup_{i\in I} \|T_i(x)\| < \infty.$

Khi đó $\sup_{i\in I} \|T_i\|_{L(E,F)} < \infty.$