Chương 3: Phép Tính Tích Phân Của Hàm 1 Biến

A. TÍCH PHÂN BẤT ĐỊNH

1. Các Bài Toán Tích Phân Bất Định Cơ Bản

Câu 1. $I = \int \frac{(2y+1)^2}{y} dy = \int \frac{4y^2+4y+1}{y} dy = \int \left(4y+4+\frac{1}{y}\right) dy = 2y^2+4y+\ln|y|+C$

Câu 2. $I = \int \left(\sqrt{3x^2} - 4\sqrt[5]{x^2}\right)x^3.dx = \int \left(x^3\sqrt{3x^2} - 4x^3\sqrt[5]{x^2}\right)dx = \int \left(\sqrt{3}x^2 - 4x^{\frac{17}{5}}\right)dx$

$= \frac{\sqrt{3}}{3}x^3 - \frac{20}{22}x^{\frac{22}{5}} + C$

Câu 3. $I = \int \frac{dx}{\sqrt[3]{5^x}} = \int 5^{\frac{-1}{3}x}.dx = \frac{1}{\frac{-1}{3}\ln 5}5^{\frac{-1}{3}x} + C = \frac{-3}{\sqrt[3]{5^x}.\ln 5} + C$

$\left(\text{Ta ADCT: } \int a^{\alpha x}dx = \frac{1}{\alpha.\ln a}a^{\alpha x} + C\right)$

Câu 4. $I = \int 3^{2x}(2^{1-x}+1)dx = \int 9^x\left(\frac{2}{2^x}+1\right).dx = \int \left(2\left(\frac{9}{2}\right)^x + 9^x\right)dx = 2\frac{\left(\frac{9}{2}\right)^x}{\ln\frac{9}{2}} + \frac{9^x}{\ln 9} + C$

Câu 5. $I = \int \frac{dt}{\cos^2 t.\sin^2 t} = \int \left(\frac{\cos^2 t + \sin^2 t}{\cos^2 t.\sin^2 t}\right)dt = \int \left(\frac{1}{\cos^2 t} + \frac{1}{\sin^2 t}\right)dt = \tan x - \cot x + C$

Câu 6. $I = \int \frac{\cos 2x}{\sin^2 x.\cos^2 x}dx = 4\int \frac{\cos 2x}{\sin^2 2x}dx = 4\int \frac{d\left(\frac{\sin 2x}{2}\right)}{\sin^2 2x} = 2\int \frac{d(\sin 2x)}{\sin^2 2x} = -\frac{2}{\sin 2x} + C$

Câu 7. $I = \int \frac{1+\cos^2 x}{1+\cos 2x}dx = \int \frac{1+\cos^2 x}{2\cos^2 x}dx = \frac{1}{2}\int \left(\frac{1}{\cos^2 x}+1\right)dx = \frac{1}{2}(\tan x + 1) + C$

Câu 8. $I = \int \frac{(1+x)^2}{x(1+x^2)}dx = \int \frac{(x^2+1)+2x}{x(1+x^2)}dx = \int \left(\frac{1}{x} + \frac{2}{(1+x^2)}\right)dx = \ln|x| + 2\arctan x + C$

$\left(\text{Ta ADCT: } \int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\arctan\left(\frac{x}{a}\right) + C\right)$

Câu 9. $I = \int \frac{1+2x^2}{x^2(1+x^2)}dx = \int \frac{(1+x^2)+x^2}{x^2(1+x^2)}dx = \int \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{1+x^2}\right)dx = -\frac{1}{x} + \arctan x + C$

Câu 10. $I = \int \frac{dx}{\cos 2x + \sin^2 x} = \int \frac{dx}{(1-2\sin^2 x)+\sin^2 x} = \int \frac{dx}{1-\sin^2 x} = \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + C$

Câu 11. $I = \int \sin x.\cos^2 x\, dx = \int \cos^2 x\, d(-\cos x) = -\frac{\cos^3 x}{3} + C$

Cách trên cũng giống như Phương Pháp đổi biến đặt $t = \cos x$

Câu 12. $I = \int \tan x\, dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}dx = \int \frac{d(-\cos x)}{\cos x} = -\ln|\cos x| + C$

Câu 13. $I = \int \frac{x^4}{x^2+2}dx = \int \frac{(x^4-4)+4}{x^2+2}dx = \int \frac{(x^2-2)(x^2+2)+4}{x^2+2}dx$

$= \int \left((x^2-2) + \frac{4}{x^2+2}\right)dx = \frac{x^3}{3} - 2x + \frac{4}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) + C$

Câu 14. $I = \int \frac{x-1}{(x+2)^2}dx = \int \left(\frac{-3}{(x+2)^2} + \frac{1}{x+2}\right)dx = \frac{3}{x+2} + \ln|x+2| + C$

Chú ý: Hàm số ban đầu ta dùng Phương Pháp đồng nhất theo CT:

$\frac{P(x)}{(x+\alpha)^n} = \frac{A}{(x+\alpha)^n} + \frac{B}{(x+\alpha)^{n-1}} + \cdots + \frac{Z}{x+\alpha}$

Sau đó quy đồng và tìm các giá trị A, B, C,…, Z cần tìm. Cụ thể như bài trên ta có:

$$\frac{x-1}{(x+2)^2}=\frac{A}{(x+2)^2}+\frac{B}{x+2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-1}{(x+2)^2}=\frac{A+B(x+2)}{(x+2)^2}=\frac{Bx+A+2}{(x+2)^2}$$

$$\Leftrightarrow x-1=Bx+A+2 \Leftrightarrow \begin{cases} B=1 \\ A=-3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{x-1}{(x+2)^2}=\frac{-3}{(x+2)^2}+\frac{1}{x+2}$$

$$\left(\text{ADCT}: \int \frac{dx}{(x+a)^n}=-\frac{1}{(n-1)(x+a)^{n-1}}+C\right)$$

Câu 15. $I=\int e^x.\sqrt{4+e^x}dx$

Đặt: $t=\sqrt{4+e^x} \Rightarrow \begin{cases} t^2=4+e^x \\ e^x=t^2-4 \end{cases} \Rightarrow 2t.dt=e^x dx$

Vậy tích phân đã cho trở thành:

$$I=2\int (t^2-4).tdt=2\int (t^3-4t)\,dt=\frac{t^4}{2}-4t^2+C$$

Câu 16. $I=\int \frac{dx}{\cos^2 x.\sqrt{1+\tan x}}$

Đặt: $t=\sqrt{1+\tan x} \Rightarrow t^2=1+\tan x \Rightarrow 2tdt=\frac{dx}{\cos^2 x}$

$$\Rightarrow I=2\int \frac{tdt}{t}=2\int dt=2t+C=2.\sqrt{1+\tan x}+C$$

Câu 17. $I=\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{1-x^8}}$

<u>Cách 1:</u> (Dùng Phương Pháp vi phân)

$$I=\int \frac{d\left(\frac{x^4}{4}\right)}{\sqrt{1-(x^4)^2}}=\frac{1}{4}\int \frac{d(x^4)}{\sqrt{1-(x^4)^2}}=\frac{1}{4}\arcsin x^4+C$$

<u>Cách 2:</u> (Cách đổi biến nhưng sẽ lâu hơn)

Đặt $t=x^4 \Rightarrow dt=4x^3dx \Rightarrow \frac{dt}{4}=x^3dx$

$$\Rightarrow I=\frac{1}{4}\int \frac{dt}{\sqrt{1-u^2}}=\frac{1}{4}\arcsin t+C=\frac{1}{4}\arcsin x^4+C$$

$$\left(\text{ADCT}: \int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\arcsin\left(\frac{x}{a}\right)+C\right)$$

Câu 18. $I=\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}dx=-\int \sqrt{\frac{x-1}{1+x}}dx$

Xét 2 trường hợp: (Điều kiện: $\left[\begin{matrix} x\ge 1 \\ x<-1 \end{matrix}\right.$)

■ với $x\ge 1$:

$$I=-\int \frac{x-1}{\sqrt{x^2-1}}dx=-\int \left(\frac{2x}{2\sqrt{x^2-1}}-\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\right)dx$$

$$=-\left(\sqrt{x^2-1}-\ln\left|x+\sqrt{x^2-1}\right|\right)+C=\ln\left|x+\sqrt{x^2-1}\right|-\sqrt{x^2-1}+C$$

■ với $x<-1$:

$$I=-\int \frac{1-x}{\sqrt{x^2-1}}dx=-\int \left(\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}-\frac{2x}{2\sqrt{x^2-1}}\right)dx$$

$$=-\left(\ln\left|x+\sqrt{x^2-1}\right|-\sqrt{x^2-1}\right)+C=\sqrt{x^2-1}-\ln\left|x+\sqrt{x^2-1}\right|+C$$

Bài toán trên cũng có cách biên đổi khác là đổi biến bằng cách đặt $t=\frac{1}{\cos 2t}$. Sau đây là 2 bài toán tổng quát:

Ví du $\int\sqrt{\frac{x-a}{x+a}}dx.$

(ĐS. $\sqrt{x^2-a^2}-2a\ln(\sqrt{x-a}+\sqrt{x+a})$ nếu $x>a$,
$-\sqrt{x^2-a^2}+2a\ln(\sqrt{-x+a}+\sqrt{-x-a})$ nếu $x<-a$)

Chỉ dẫn. Đặt $x=\dfrac{a}{\cos 2t}$.

Ví dụ : Tính tích phân : $I=\int\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}dx,\ (a>0)$

Giải:

Đặt $x=a.\cos 2t$, khi đó: $dx=-2a.\sin 2tdt$.

Ta có: $\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}dx=\sqrt{\frac{a+a.\cos 2t}{a-a.\cos 2t}}(-2a.\sin 2tdt)=|\cot gt|(-2a.\sin 2tdt)$

$$=-4a.\cos^2 t.dt=-2a(1+\cos 2t)dt.$$

Khi đó: $I=-2a\int(1+\cos 2t)dt=-2a\left(t-\frac{1}{2}\sin 2t\right)$

Câu 19. $I=\int\frac{1+x}{\sqrt{1-x^2}}dx=\int\left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)dx$

$=\arcsin x-\dfrac{\frac{1}{2}(1-x^2)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}=\arcsin x-\sqrt{1-x^2}+C$

$\left(\int\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx.\text{ Đặt } t=\sqrt{1-x^2}\Rightarrow t^2=(1-x^2)\Rightarrow 2tdt=2xdx\right)$

Câu 20. $I=\int\frac{2x-\sqrt{\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}}dx=\int\frac{2x.dx}{\sqrt{1-x^2}}-\int\sqrt{\arcsin x}\,d(\arcsin x)$

$=-2\sqrt{1-x^2}-\dfrac{(\arcsin x)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+C=-2\sqrt{1-x^2}-\frac{2}{3}\sqrt{\arcsin^3 x}+C$

Câu 21. $I=\int\frac{dx}{1+\sqrt{x+1}}$

Đặt $t=\sqrt{x+1}\Rightarrow t^2=x+1\Rightarrow 2tdt=xdx$

$\Rightarrow I=\int\frac{2tdt}{1+t}=\int\frac{(2t+2)-2}{1+t}dt=\int\left(2-\frac{2}{1+t}\right)dt$

$=2t-2\ln|1+t|+C=2\sqrt{x+1}-2\ln\left|1+\sqrt{x+1}\right|+C$

Câu 22. $I=\int\frac{x^2}{\sqrt{x^2+2}}dx=\int\frac{(x^2+2)-2}{\sqrt{x^2+2}}dx=\int\left(\sqrt{x^2+2}-\frac{2}{\sqrt{x^2+2}}\right)dx$

$=\ln\left|x+\sqrt{x^2+2}\right|+\frac{x}{2}\sqrt{x^2+2}-2\ln\left|x+\sqrt{x^2+2}\right|+C$

$=\frac{x}{2}\sqrt{x^2+2}-\ln\left|x+\sqrt{x^2+2}\right|+C$

$\left(\int\sqrt{x^2+b}=\frac{b}{a}\ln\left|x+\sqrt{x^2+b}\right|+\frac{x}{a}\sqrt{x^2+b}+C\right)$

Câu 23. $I=\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2-a^2}}$ (HD: $t=\frac{a}{\sin t}$)

Câu 24. $I=\int x^2\sqrt{4-x^2}\,dx$ (HD: $t=a\sin t$)

Câu 25. $I=\int \frac{dx}{\sqrt{x-x^2}}$ (HD: $x=\sin^2 t$) ĐS: $\frac{-1}{a}\arcsin\frac{a}{x}$

Câu 26. $I=\int \frac{dx}{x+\sqrt{x^2-x-1}}$

Đặt $t=x+\sqrt{x^2-x-1}\Rightarrow x=\frac{t^2-1}{2t-1}\Rightarrow dx=\frac{2(t^2-t+1)}{(1-2t)^2}dt$

$\Rightarrow I=2\int\frac{t^2-t+1}{t(1-2t)^2}dt=2\int\left[\frac{3}{2(2t-1)^2}-\frac{3}{2(2t-1)}+\frac{1}{t}\right]dt$

$=\frac{3}{2-4t}-\frac{3}{4}\ln|1-2t|+\ln|t|+C$

$=\frac{3}{2-4\left(x+\sqrt{x^2-x-1}\right)}-\frac{3}{4}\ln\left|1-2\left(x+\sqrt{x^2-x-1}\right)\right|+\ln\left|x+\sqrt{x^2-x-1}\right|+C$

Câu 27. $I=\int\frac{dx}{1+\tan x}=\int\frac{\cos x}{\cos x+\sin x}dx$

Xét tích phân liên kết với I là I_1

$I_1=\int\frac{\sin x}{\sin x+\cos x}dx$

Ta co: $\begin{cases} I+I_1=\int\frac{\sin x+\cos x}{\sin x+\cos x}dx=\int dx=x+C_1\\ I-I_1=\int\frac{\sin x-\cos x}{\sin x+\cos x}dx=\int\frac{d(\sin x+\cos x)}{\sin x+\cos x}=\ln|\sin x+\cos x|+C_2\end{cases}$

Giải Hệ PT ta suy ra:

$\Rightarrow\begin{cases} I=\frac{1}{2}(x+\ln|\sin x+\cos x|)+C\\ I_2=\frac{1}{2}(x-\ln|\sin x+\cos x|)+C\end{cases}$

$\Rightarrow\frac{1}{2}\int\frac{[(\cos x+\sin x)-(\cos x-\sin x)]dx}{\sin x+\cos x}=\frac{1}{2}\int dx+\frac{1}{2}\int\frac{d(\cos x+\sin x)}{\cos x+\sin x}$

$=\frac{1}{2}x+\ln|\sin x+\cos x|+C$

Câu 28. $I=\int\frac{dx}{1+\sin^2 x}=\int\frac{dx}{1+\frac{1-\cos 2x}{2}}=\int\frac{2dx}{3-\cos 2x}$

Đặt $t=\tan x\Rightarrow\begin{cases} x=\arctan t\Rightarrow dx=\frac{dt}{1+t^2}\\ \cos 2x=\frac{1-t^2}{1+1^2}\end{cases}$

$\Rightarrow I=2\int\frac{dt}{(1+t^2)\left(3-\frac{1-t^2}{1+1^2}\right)}=2\int\frac{dt}{3t^2+3-1+t^2}=2\int\frac{dt}{4t^2-2}=\int\frac{dt}{2t^2-1}=\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t^2-\frac{1}{2}}$

$=\frac{1}{2}.\frac{1}{2.\frac{\sqrt{2}}{2}}\ln\left|\frac{t-\frac{\sqrt{2}}{2}}{t+\frac{\sqrt{2}}{2}}\right|+C=\frac{\sqrt{2}}{4}\ln\left|\frac{2t-\sqrt{2}}{2t+\sqrt{2}}\right|+C=\frac{\sqrt{2}}{4}\ln\left|\frac{2\tan(x)-\sqrt{2}}{2\tan(x)+\sqrt{2}}\right|+C$

Câu 29. $I=\int\frac{dx}{1-\sin^4 x}=\int\frac{dx}{(1-\sin^2 x)(1+\sin^2 x)}=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{1-\sin^2 x}-\frac{1}{2}\int\frac{dx}{1+\sin^2 x}$

Với $\int\frac{dx}{1+\sin^2 x}=\frac{\sqrt{2}}{4}\ln\left|\frac{2\tan(x)-\sqrt{2}}{2\tan(x)+\sqrt{2}}\right|+C$

Với $\int\frac{dx}{1-\sin^2 x}=\int\frac{dx}{\cos^2 x}=\int(1+\tan^2 x)dx=\tan x+C$

$\Rightarrow I=\frac{1}{2}\tan x-\frac{\sqrt{2}}{8}\ln\left|\frac{2\tan(x)-\sqrt{2}}{2\tan(x)+\sqrt{2}}\right|+C$

Câu 30. $I = \int \frac{x^7}{(1+x^4)^2}dx = \int \left(\frac{x^3}{1+x^4} - \frac{x^3}{(1+x^4)^2}\right)dx$

Đặt $t = (1+x^4) \Rightarrow dt = 4x^3dx \Rightarrow \frac{dt}{4} = x^3dx$

$\Rightarrow I = \frac{1}{4}\int\left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t^2}\right)dt = \frac{1}{4}\left(\ln|t| + \frac{1}{t}\right) + C$

$= \frac{1}{4}\left(\ln|(1+x^4)| + \frac{1}{(1+x^4)}\right) + C$

Câu 31. $I = \int x^2e^x dx$ (HD: TP từng phần 2 lần)

Đặt $\begin{cases} u = x^2 \\ dv = e^x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 2xdx \\ v = e^x \end{cases}$

$\Rightarrow I = xe^x - 2\int xe^x dx = xe^x - 2J$

■ Với $J = \int xe^x dx$

Đặt $\begin{cases} u = x \\ dv = e^x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = e^x \end{cases}$

$\Rightarrow J = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C$

Vậy Tích phân I đã cho I là:
$I = xe^x - 2J = xe^x - 2(xe^x - e^x) + C = 2e^x - xe^x + C$

Câu 32. $I = \int x^3e^{-x^2}dx$

Đặt $t = -x^2 \Rightarrow dt = -2xdx \Rightarrow -\frac{dt}{2} = xdx$

$\Rightarrow I = \frac{-1}{2}\int(-t)e^t dt = \frac{1}{2}\int te^t dt$

Dùng tích phân từng phần ta có:
Đặt $\begin{cases} u = t \\ dv = e^t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dt \\ v = e^t \end{cases}$

$\Rightarrow I = \frac{1}{2}\left(te^t - \int e^t dt\right) = \frac{1}{2}(te^t - e^t) + C$

$\Rightarrow I = \frac{1}{2}\left(-x^2e^{-x^2} - e^{-x^2}\right) + C$

Câu 33. $I = \int \frac{dx}{2^x + 1}$

Đặt $\begin{cases} u = 2^x + 1 \\ dv = dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 2^x \ln 2\, dx \\ v = x \end{cases}$

$\Rightarrow I = (2^x + 1)x - \ln 2 \int x2^x dx = (2^x+1)x - \ln 2\ K$

■ Với $K = \int x2^x dx$

Đặt $\begin{cases} u = x \\ dv = 2^x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = \frac{2^x}{\ln 2} \end{cases}$

$\Rightarrow K = \frac{x.2^x}{\ln 2} - \frac{1}{\ln 2}\int 2^x dx = \frac{x.2^x}{\ln 2} - \frac{2^x}{\ln^2 2} + C$

$\Rightarrow I = x - \frac{2^x}{\ln 2} + C$

Câu 34. $I = \int \frac{\arctan x}{x^2(1+x^2)}dx$

Đặt $t = \arctan x \Rightarrow \begin{cases} dt = \dfrac{dx}{1+x^2} \\ x = \tan t \end{cases}$

$\Rightarrow I = \int \dfrac{tdt}{\tan^2 t}$

Dùng tích phân từng phần:

Đặt $\begin{cases} u = t \\ dv = \dfrac{dt}{\tan^2 t} = \cot^2 tdt = ((\cot^2 t + 1) - 1)dt = \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dt \\ v = -(\cot t + t) \end{cases}$

$\Rightarrow I = -t(\cot t + t) + \int (\cot t + t)dt = -t(\cot t + t) + \ln|\sin t| + \dfrac{1}{2}t^2 + C$

$= -\arctan(x).[\cot(\arctan x) + \arctan(x)] + \ln|\sin(\arctan x)| + \dfrac{1}{2}\arctan^2 x + C$

Câu 35. $I = \int \cos(\ln x)dx$

Đặt $\begin{cases} u = \cos(\ln x) \\ dv = dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \dfrac{-1}{x}\sin(\ln x)dx \\ v = x \end{cases}$

$\Rightarrow I = x\cos(\ln x) + \int \sin(\ln x)dx = x\cos(\ln x) + K$

■ Với $K = \int \sin(\ln x)dx$

Đặt $\begin{cases} u = \sin(\ln x) \\ dv = dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \dfrac{1}{x}\cos(\ln x)dx \\ v = x \end{cases}$

$K = x\sin(\ln x) - \int \cos(\ln x)dx = x\sin(\ln x) - I$

$\Rightarrow I = x\cos(\ln x) + K = x\cos(\ln x) + x\sin(\ln x) - I$

$\Rightarrow I = \dfrac{x\cos(\ln x) + x\sin(\ln x)}{2} + C$

Câu 36. $I = \int e^{\sqrt{x}}dx$ (HD: $t = \sqrt{x} \Rightarrow t^2 = x \Rightarrow 2tdt = dx$ ...)

Câu 37. $I = \int \dfrac{x^2}{(1+x^2)^2}dx = \int \dfrac{(1+x^2)-1}{(1+x^2)^2}dx = \int \left(\dfrac{1}{1+x^2} - \dfrac{1}{(1+x^2)^2}\right)dx$

$= \arctan x - \int \dfrac{dx}{(1+x^2)^2} = \arctan x - K$

■ Với $K = \int \dfrac{dx}{(1+x^2)^2}$

Đổi biến số: $x = \tan t$, với $t \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, ta có:

$dx = \dfrac{dt}{\cos^2 t}, 1 + x^2 = 1 + \tan^2 t = \dfrac{1}{\cos^2 t}$

$\Rightarrow K = \int \dfrac{dt}{\cos^2 t.\left(\dfrac{1}{\cos^2 t}\right)^2} = \int \cos^2 t.dt = \int (1 + \cos 2t)dt = \dfrac{1}{2}(t + \sin 2t) + C$

Trở về biến số x, ta có : $t = \arctan\frac{x}{a}$, $\sin t = \frac{\tan t}{\sqrt{1+\tan^2 t}}$, $\cos t = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2 t}}$

$\sin t.\cos t = \dfrac{\tan t}{\sqrt{1+\tan^2 t}} = \dfrac{x}{1+x^2}$

$\Rightarrow K = \arctan x + \dfrac{1}{2}.\dfrac{x}{x^2+1} + C$

$\Rightarrow I = \arctan x - K = -\dfrac{1}{2}.\dfrac{x}{x^2+1} + C$

Câu 38. $I = \int e^{\arccos x} dx = \int \left(\frac{e^{\arccos x}}{\sqrt{1-x^2}}.\sqrt{1-x^2}\right) dx$

Với $I_1 = \int \frac{e^{\arccos x}}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int e^{\arccos x}.d(-\arccos x) = -\int e^{\arccos x}.d(\arccos x) = -e^{\arccos x} + C_1$

Với $I_2 = \int \sqrt{1-x^2}\, dx = \frac{1}{2}\left(\arcsin x + x\sqrt{1-x^2}\right) + C_2$

$\Rightarrow I = I_1.I_2 = -e^{\arccos x}.\left(\arcsin x + x\sqrt{1-x^2}\right) + C$

Câu 39. $I = \int \sin(\sqrt[3]{x})\, dx$

Đặt $t = \sqrt[3]{x} \Rightarrow t^3 = x \Rightarrow 3t^2 dt = dx$

$\Rightarrow I = 3\int t^2 \sin t\, dt$

Đặt $\begin{cases} dv = \sin t.dt \\ u = t^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v = -\cos t \\ du = 2t.dt \end{cases}$

$\Rightarrow I = 3\left(-t^2\cos t + 2\int t\cos t\, dt\right)$

■ Với $\int t\cos t.dt$

Đặt $\begin{cases} u = t \\ dv = \cos t\, dt \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dt \\ v = \sin t \end{cases}$

$\Rightarrow \int t\cos t.dt = t.\sin t - \int \sin t.dt = t.\sin t + \cos t + C$

$\Rightarrow I = 3(-t^2\cos t + 2(t\sin t + \cos t)) = -3t^2.\cos t + 6t\sin t + 6\cos t + C$

$= -3\sqrt[3]{x^2}\cos(\sqrt[3]{x}) + 6.\sqrt[3]{x}.\sin(\sqrt[3]{x}) + 6\cos(\sqrt[3]{x}) + C$

Câu 40. $I = \int 2^x.\sin x\, dx$

Đặt $\begin{cases} u = 2^x \\ dv = \sin x\, dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 2^x \ln 2\, dx \\ v = -\cos x \end{cases}$

$\Rightarrow I = -2^x.\cos x + \ln 2\int 2^x\cos x\, dx = -2^x\cos x + \ln 2.K$

■ Với $K = \int 2^x \cos x\, dx$

Đặt $\begin{cases} u = 2^x \\ dv = \cos x\, dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 2^x \ln 2\, dx \\ v = \sin x \end{cases}$

$\Rightarrow K = 2^x\sin x - \ln 2\int 2^x \sin x\, dx = 2^x\sin x - \ln 2.I$

$\Rightarrow I = \frac{-2^x\cos x + 2^x\ln 2\sin x}{1+\ln^2 2} + C = \frac{2^x}{1+\ln^2 2}(\ln 2\sin x - \cos x) + C$

2. Tích Phân Hàm Hữu Tỉ

Câu 41. $I = \int \frac{2x^2-1}{x^3-5x^2+6x} dx$

Ta có : $\frac{2x^2-1}{x^3-5x^2+6x} = \frac{2x^2-1}{(x-3)(x-2)x} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x}$

$\Leftrightarrow (A+B+C)x^2 - (2A+3B+5C)x + 6C = 2x^2 - 1$

$\Leftrightarrow \begin{cases} A+B+C = 2 \\ 2A+3B+5C = 0 \\ 6C = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = \frac{17}{3} \\ B = -\frac{7}{2} \\ C = -\frac{1}{6} \end{cases}$

Vậy tích phân đã cho trở thành :

$$I = \frac{17}{3}\int \frac{dx}{x-3} - \frac{7}{2}\int \frac{dx}{x-2} - \frac{1}{6}\int \frac{dx}{x}$$
$$= \frac{17}{3}\ln|x-3| - \frac{7}{2}\ln|x-2| - \frac{1}{6}\ln|x| + C$$

Câu 42. $I = \int \frac{dx}{x(x^2+2)} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x} - \frac{1}{2}\int \frac{xdx}{x^2+2} = \frac{1}{2}\ln|x| - \frac{1}{2}\int \frac{d\left(\frac{x^2+2}{2}\right)}{x^2+2} + C$

$$= \frac{1}{2}\ln x - \frac{1}{4}\ln|x^2+2| + C$$

■**Chú ý : Dùng Phương pháp đồng nhất hệ số ta có kết quả :**

$$\frac{1}{x(x^2+2)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+2}\right)$$

Giả sử :

$$\frac{1}{x(x^2+2)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+2} \quad (*)$$

Quy đồng 2 vế $(*)$ ta có :

$1 = A(x^2+2) + Cx + 2A$

Đồng nhất hệ số ta có :

$$\begin{cases} A+B=0 \\ C=0 \\ 2A=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=\frac{1}{2} \\ B=-\frac{1}{2} \\ C=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x(x^2+2)} = \frac{1}{2x} - \frac{1}{2}\frac{x}{(x^2+2)}$$

Câu 43 $I = \int \frac{dx}{x^4+1} = \frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\left|\frac{x^2+\sqrt{2}x+1}{x^2-\sqrt{2}x+1}\right| + \frac{1}{2\sqrt{2}}\arctan\left(\sqrt{2}x+1\right) + \arctan\left(\sqrt{2}x-1\right) + C$

Hướng dẫn: $x^4+1 = \left(x^2+x\sqrt{2}+1\right)\left(x^2-x\sqrt{2}+1\right) \Rightarrow \frac{1}{x^4+1} = \frac{1}{2\sqrt{2}} * \frac{x+\sqrt{2}}{x^2+x\sqrt{2}+1} - \frac{1}{2\sqrt{2}} * \frac{x-\sqrt{2}}{x^2-x\sqrt{2}+1}$

Câu 44. $I = \int \frac{x^9}{x^{10}-1}dx = \int \frac{d\left(\frac{x^{10}-1}{10}\right)}{x^{10}-1} = \frac{1}{10}\ln|x^{10}-1| + C$

Câu 45. $I = \int \frac{dx}{x^4-a^4} = \int \frac{dx}{(x^2-a^2)(x^2+a^2)} \quad (a>0)$

Mà : $\frac{1}{(x^2-a^2)(x^2+a^2)} = \frac{A}{x^2-a^2} + \frac{B}{x^2+a^2}$

$\Leftrightarrow (A+B)x^2 + (A-B)a^2 = 1$

$$\begin{cases} A+B=0 \\ A-B=\frac{1}{a^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=\frac{1}{2a^2} \\ B=-\frac{1}{2a^2} \end{cases}$$

Vậy tích phân đã cho trở thành :

$$\frac{1}{2a^2}\int \frac{dx}{x^2-a^2} - \frac{1}{2a^2}\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{2a^2}.\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| - \frac{1}{2a^2}.\frac{1}{a}\arctan\left(\frac{x}{a}\right) + C$$

Câu 46. $I = \int \frac{x}{x^4-4x^2+3}dx = \int \frac{xdx}{(x^2-3)(x^2-1)}$

Mà : $\frac{x}{(x^2-3)(x^2-1)} = \frac{A}{x^2-3} + \frac{B}{x^2-1}$

$\Leftrightarrow (A+B)x^2 - A - 3B = x$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A + B = \dfrac{1}{x} \\ -A - 3B = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2B = \dfrac{1}{x} \\ A + B = \dfrac{1}{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B = -\dfrac{1}{2x} \\ A = \dfrac{3}{2x} \end{cases}$$

Vậy tích phân đã cho trở thành :

$$I = \frac{3}{2}\int \frac{dx}{x(x^2-3)} - \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x(x^2-1)}$$

Tiếp tục dùng Phương Pháp đồng nhất ta thu được :

$$I = \frac{3}{2}\int \left[-\frac{1}{3x} + \frac{1}{6}\left(\frac{1}{x-\sqrt{3}} - \frac{1}{x+\sqrt{3}}\right)\right]dx - \frac{1}{2}\int\int \left[-\frac{1}{x} + \frac{1}{2(x-1)} - \frac{1}{2(x+1)}\right]dx$$

$$= \frac{3}{2}\left[\frac{-1}{3}\ln|x| + \frac{1}{6}\ln\left|\frac{x-\sqrt{3}}{x+\sqrt{3}}\right|\right] - \frac{1}{2}\left[-\ln|x| + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|\right] + C$$

$$= \frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-\sqrt{3}}{x+\sqrt{3}}\right| - \frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + C$$

Câu 47. $I = \displaystyle\int \frac{3x^2+1}{(x^2-1)^2}dx = \int \left(\frac{3}{x^2-1} + \frac{4}{(x^2-1)^2}\right)dx = 3\int \frac{dx}{x^2-1} + 4\int \frac{dx}{(x^2-1)^2}$

$3\arctan x + 4\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2-1)^2}$

Với : $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2-1)^2} = \frac{1}{4}\int \left[\frac{(x-1)-(x+1)}{(x-1)(x+1)}\right]^2 dx = \frac{1}{4}\int \left[\frac{1}{(x+1)} - \frac{1}{(x-1)}\right]^2 dx$

$$= \frac{1}{4}\int \left(\frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{(x-1)^2} - \frac{2}{(x+1)(x-1)}\right)dx$$

$$= \frac{1}{4}\int \left(\frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{(x-1)^2} - \frac{2}{x^2-1}\right)dx$$

$$\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x-1} - \ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|\right) + C$$

$$\Rightarrow I = 3\arctan x + 4\int \frac{dx}{(x^2-1)^2} = 3\arctan x - -\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x-1} - \ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + C$$

Câu 48. $I = \displaystyle\int \frac{x^6 - 2x^4 + 3x^3 - 9x^2 + 4}{x^5 - 5x^3 + 4x}dx$

Câu 49. $I = \displaystyle\int \frac{x^9}{(x^4-1)^2}dx$

Câu 50. $I = \displaystyle\int \frac{dx}{(x^2+9)^3}$ (Xem GT TCCA1 ĐH Nông Lâm TP. HCM Trang 108)

Ta co: $I = \dfrac{x}{2.3.9(x^2+9)^3} + \dfrac{(2.3)-1}{2.3.9}\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+9} = \frac{1}{54}\frac{x}{(x^2+9)^3} + \frac{5}{54}I_1$

Với $I_1 = \displaystyle\int \frac{dx}{x^2+3^2} = \frac{1}{3}\tan\left(\frac{x}{3}\right) + C_1$

$$\Rightarrow I = \frac{1}{54}\frac{x}{(x^2+9)^3} + \frac{5}{54}.\frac{1}{3}\tan\left(\frac{x}{3}\right) + C = \frac{1}{54}\frac{x}{(x^2+9)^3} + \frac{5}{162}.\tan\left(\frac{x}{3}\right) + C$$

Câu 51. $I = \displaystyle\int \frac{dx}{(x^2+1)^4}$ (Xem GT TCCA1 ĐH Nông Lâm TP. HCM Trang 108)

Ta co: $I = \dfrac{x}{2.4.1(x^2+1)^4} + \dfrac{2.4-1}{2.4.1}\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+1} = \frac{1}{8}\frac{x}{(x^2+1)^4} + \frac{7}{8}\int \frac{dx}{x^2+1} = \frac{1}{8}\frac{x}{(x^2+1)^4} + \frac{7}{8}\arctan x + C$

Vậy $I = \dfrac{1}{8}\dfrac{x}{(x^2+1)^4} + \dfrac{7}{8}\arctan x + C$

Câu 52. $I = \displaystyle\int \frac{dx}{(x^4-1)^2}$ (Xem GT TCCA1 ĐH Nông Lâm TP. HCM Trang 109)

Ta co: $\dfrac{1}{(x^4-1)^2}=\dfrac{1}{[(x^2-1)(x^2+1)]^2}=\dfrac{1}{(x^2-1)^2.(x^2+1)^2}=\dfrac{A}{(x^2-1)^2}+\dfrac{B}{(x^2+1)^2}$

Quy đồng cả tử và mẫu ta được :

$(A+B)x^4+2(A-B)x^2+A+B=1$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}A+B=1\\(A+B)x^4=-2(A-B)x^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}A+B=1\\A-B=-\dfrac{x^2}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}A=\dfrac{2-x^2}{4}\\B=\dfrac{2+x^2}{4}\end{cases}$$

Vậy $\dfrac{1}{(x^4-1)^2}=\dfrac{2+x^2}{4(x^2-1)^2}+\dfrac{2-x^2}{4(x^2+1)^2}=\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{2+x^2}{(x^2-1)^2}+\dfrac{2-x^2}{(x^2+1)^2}\right)$

Tiếp tục dùng Phương Pháp đồng nhất ta có :

- $\dfrac{2+x^2}{(x^2-1)^2}=\dfrac{A}{x^2-1}+\dfrac{B}{(x^2-1)^2}=\dfrac{Ax^2-A+B}{(x^2-1)^2}$

$\Leftrightarrow Ax^2-A+B=2+x^2$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}Ax^2=x^2\\-A+B=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}A=1\\B=2+A\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}A=1\\B=3\end{cases}$$

$$\Rightarrow\frac{2+x^2}{(x^2-1)^2}=\frac{1}{x^2-1}+\frac{3}{(x^2-1)^2}=\frac{1}{x^2-1}+\frac{3}{4}\left[\frac{2-x}{(x-1)^2}+\frac{2+x}{(x+1)^2}\right]$$

$*$ Với $\dfrac{1}{(x^2-1)^2}=\dfrac{1}{(x-1)^2(x+1)^2}=\dfrac{A}{(x-1)^2}+\dfrac{B}{(x+1)^2}=\dfrac{(A+B)x^2+2(A-B)x+A+B}{(x-1)^2(x+1)^2}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}A+B=1\\A-B=-\dfrac{(A+B)x}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}A+B=1\\A-B=-\dfrac{x}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}A=\dfrac{2-x}{4}\\B=\dfrac{2+x}{4}\end{cases}\Rightarrow\frac{1}{(x^2-1)^2}=\frac{1}{4}\left[\frac{2-x}{(x-1)^2}+\frac{2+x}{(x+1)^2}\right]$$

- $\dfrac{2-x^2}{(x^2+1)^2}=\dfrac{A}{x^2+1}+\dfrac{B}{(x^2+1)^2}=\dfrac{Ax^2+A+B}{(x^2+1)^2}$

$$\Rightarrow\frac{2-x^2}{(x^2+1)^2}=\frac{-1}{x^2+1}+\frac{3}{(x^2+1)^2}$$

Vậy tích phân đã cho tương đương :

$$I=\frac{1}{4}\int\left[\frac{1}{x^2-1}+\frac{3}{4}\left(\frac{2-x}{(x-1)^2}+\frac{2+x}{(x+1)^2}\right)-\frac{1}{x^2+1}+\frac{3}{(x^2+1)^2}\right]dx$$

$$=\frac{1}{4}\int\left[\frac{1}{x^2-1}+\frac{3}{4}\left(\frac{2}{(x-1)^2}-\frac{x}{(x-1)^2}+\frac{2}{(x+1)^2}+\frac{x}{(x+1)^2}\right)-\frac{1}{x^2+1}+\frac{3}{(x^2+1)^2}\right]dx$$

$$=\frac{1}{4}\left[\ \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+\frac{3}{4}\left(-\frac{2}{x-1}-\ln|x-1|+\frac{1}{x-1}-\frac{2}{x+1}+\ln|x+1|+\frac{1}{x+1}\right)-\arctan x\right.$$
$$\left.+\frac{x}{4(x^2+1)^2}+\frac{3}{4}\arctan x\ \right]+C$$

$$=\frac{1}{4}\left[\ \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+\frac{3}{4}\left(-\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}+\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right|\right)+\frac{x}{4(x^2+1)^2}-\frac{1}{4}\arctan x\ \right]+C$$

Câu 53. $I=\displaystyle\int\frac{x^7+2}{(x^2+x+1)^2}$

Câu 54

$$I=\int\frac{x^2+x+1}{x^5-2x^4+x^3}dx=\int\frac{x^2+x+1}{x^3\left(x^2-2x+1\right)}dx=\int\frac{x^2+x+1}{x^3(x-1)^2}dx=\int\left(\frac{1}{x(x-1)^2}+\frac{1}{x^2(x-1)^2}+\frac{1}{x^3(x-1)^2}\right)dx$$