II. PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN CẤP 1

1. Phương trình tách biến (hay biến phân ly)

a) Là phương trình vi phân có dạng : $f_1(x) + f_2(y).y' = 0$ hay $f_1(x)dx + f_2(y)dy = 0$ (1)

b) Cách giải : Lấy tích phân phương trình (1) thì có :

$$\int f_1(x)\,dx + f_2(y)\,y'\,dx = C \quad \text{hay} \quad \int f_1(x)\,dx + f_2(y)\,dy = C$$

Thí dụ 1 : Giải phương trình vi phân : $y' = (1 + y^2).\,ex$

Phương trình được đưa về dạng :

$$\frac{dy}{1+y^2} = e^x dx$$

$$\Rightarrow \int \frac{dy}{1+y^2} = \int e^x dx + C$$

$$\Rightarrow arctg\, y = e^x + C$$

$$\Rightarrow y = tg(e^x + C)$$

c) Lưu ý:

Phương trình : $f_1(x)\,g_1(y)\,dx + f_2(x)\,g_2(y).\,dy = 0$ (2)

- Nếu $g_1(y)f_2(x) \neq 0$ thì có thể đưa phương trình trên về dạng phương trình tách biến bằng cách chia 2 vế cho $g_1(y)g_2(x)$ ta được :

$$\frac{f_1(x)}{f_2(x)}dx + \frac{g_2(y)}{g_1(y)}dy = 0 \quad (3)$$

- Nếu $g_1(y) = 0$ thì $y = b$ là nghiệm của (2). Nếu $f_2(x) = 0$ thì $x = a$ là nghiệm của (2). Các nghiệm đặc biệt này không chứa trong nghiệm tổng quát của phương trình (3)

Thí dụ 2: Giải phương trình vi phân: $(y^2 - 1)\,dx - (x^2 + 1)\,y\,dy = 0$

Với $y^2 - 1 \neq 0$ ta có :

$$\frac{dx}{x^2+1} = \frac{ydy}{y^2-1} \Rightarrow$$

$$\int \frac{dx}{x^2+1} = \int \frac{ydy}{y^2-1} \Rightarrow$$

$$\text{arctg}\, x = \frac{1}{2}\ln\left|y^2-1\right| + C$$

Ngoài nghiệm tổng quát này ta nhận thấy còn có 2 nghiệm: y =1 và y = -1

2. Phương trình đẳng cấp cấp 1

a). Là phương trình vi phân có dạng : $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$ (4)

Từ (4) có : y = xu --> y’ = u + xu’.

Thế vào (4) có: u + xu’ = f(u)

có thể đưa về dạng phương trình tách biến :

$$\frac{du}{f(u)-u} = \frac{dx}{x} \quad (5)$$

__Lưu ý:__ Khi giải phương trình (5) ta nhận được nghiệm tổng quát khi f(u) – u ≠ 0. Nếu f(u) – u = 0 tại u = a thì có thêm nghiệm y = ax.

__Thí dụ 3__: Giải phương trình vi phân: $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + \text{tg}\,\frac{y}{x}$

Đặt y = xu, ta có phương trình :

$$xu' + u = u + \text{tg}u \Rightarrow \frac{\cos u}{\sin u} du = \frac{dx}{x}$$

$$\ln\left|\sin u\right| = \ln\left|x\right| + \ln C, \quad \text{hay} \quad \sin u = Cx$$

$$\text{hay} \quad \sin\frac{y}{x} = Cx$$

Ngoài ra do f(u) = u ⇔ tg u = 0 ⇔ u = kπ x, nên ta còn có thêm các nghiệm : y = kπ x, với k= 0, ± 1, ± 2, …….

-

<u>Thí dụ 4</u>: Giải phương trình vi phân: $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 + y^2}{2xy}$, $y(1) = 1$

Chia cả tử và mẫu của vế phải cho x^2 ta được :

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2}{2\left(\frac{y}{x}\right)}$$

Đặt y = xu ta có: $\frac{dx}{x} + \frac{2u\,du}{1+3u^2} = 0$

Lấy tích phân ta có :

$$\ln|x| + \frac{1}{3}\ln\left(1+3u^2\right) = C \Rightarrow x^3\left(1+3u^2\right) = \pm e^{3C} = C_1$$

thế $u = \frac{y}{x}$, ta được : $x^3\left(1+3\frac{y^2}{x^2}\right) = C_1 \Rightarrow x^3 + 3xy^2 = C_1$

Với điều kiện đầu : x = 1, y = 1, ta được nghiệm riêng: $x^3 + 3xy^2 = 4$

b). <u>Chú ý</u>: phương trình: $\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right)$ (6)

có thể đưa về dạng phương trình đẳng cấp như sau:

b1) Nếu 2 đường thẳng $a_1x + b_1y + c_1 = 0$, và $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ cắt nhau tại (x_1, y_1), thì đặt $X = x - x_1$, $Y = y - y_1$, thì phương trình (6) được đưa về dạng :

$$\frac{dY}{dX} = f\left(\frac{a_1X + b_1Y}{a_2X + b_2Y}\right) = f\left(\frac{a_1 + b_1\frac{Y}{X}}{a_2 + b_2\frac{Y}{X}}\right) = F\left(\frac{Y}{X}\right)$$

b2) Nếu 2 đường thẳng $a_1x + b_1y + c_1 = 0$, và $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ song song nhau,

khi đó có : $\frac{a_2}{a_1} = \frac{b_2}{b_1} = k$ nên phương trình (6) được đưa về dạng :

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{k(a_1x + b_1y) + c_2}\right) = F(a_1x + b_1y) \qquad (7)$$

khi đó đặt u = $a_1x + b_1y$, phương trình (7) trở thành phương trình tách biến.

<u>Thí dụ 5</u>: Giải phương trình vi phân : $\frac{dy}{dx} = \frac{x - y + 1}{x + y + 3}$

Giải hệ phương trình : $\begin{cases} x - y + 1 = 0 \\ x + y + 3 = 0 \end{cases}$

ta có : $x_1=1$, $y_1=2$

Đặt X = x - 1, Y = y - 2 , thì có :

$$\frac{dY}{dX} = \frac{X - Y}{X + Y} = \frac{1 - \frac{Y}{X}}{1 + \frac{Y}{X}}$$

Đặt u = $u = \frac{y}{x}$, ta có :

$$u + X\frac{du}{dX} = \frac{1-u}{1+u} \Rightarrow \frac{(1+u)\,du}{1 - 2u - u^2} = \frac{dX}{X}$$
$$\Rightarrow -\frac{1}{2}\ln\left|1 - 2u - u^2\right| = \ln|X| - \frac{1}{2}\ln C$$
$$\Rightarrow (1 - 2u + u^2)X^2 = C, \quad X^2 - 2XY - Y^2 = C$$

hay là: $x^2 + 2xy - y^2 + 2x + 6y = C$

3. Phương trình vi phân toàn phần

a). Là phương trình vi phân có dạng :

$P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0$ (8)

Nếu vế trái là vi phân toàn phần của một hàm số U(x,y), nghĩa là : dU(x,y) = P(x,y) dx + Q(x,y) dy

(theo chương 3, IV.1., thì điều kiện cần và đủ là: $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$)

Khi đó từ (8) , (9) ta có : dU(x,y) = 0

Vì thế nếu y(x) là nghiệm của (8) thì do dU(x,y(x)) = 0 cho ta :U(x,y(x)) = C (9)

Ngược lại nếu hàm y(x) thỏa (9) thì bằng cách lấy đạo hàm (9) ta có (8).

Như vậy U(x,y) = C là nghiệm của phương trình (8)

b). Cách giải thứ nhất :

Giả sử P, Q trong (8) thỏa $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$, ta có U thỏa:

dU(x,y) = P(x,y) dx + Q(x,y) dy

$\rightarrow$ $P = \frac{\partial U}{\partial x},\ Q = \frac{\partial U}{\partial y}$

Lấy tích phân biểu thức $P = \frac{\partial U}{\partial x}$, thì do y được xem là hằng số nên ta có :

$$U(x,y) = \int P(x,y)dx \quad + \ C(y) \qquad (10)$$

trong đó C(y) là hàm bất kỳ theo biến y. Lấy đạo hàm biểu thức (10) theo biến y và do $Q = \frac{\partial U}{\partial y}$, ta được :

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\int P(x,y)dx\right) + \ + \ C'(y) = Q(x,y)$$

từ phương trình vi phân này tìm C(y)

-

Thí dụ 6: Giải phương trình: $(x^2 + y^2)\,dx + (2xy + \cos y)\,dy = 0$

Ta có: $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(x^2 + y^2\right) = 2y$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(2xy + \cos y\right) = 2y$$

$\Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$, vậy sẽ có hàm U(x,y) thỏa:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = x^2 + y^2,\ \frac{\partial U}{\partial y} = 2xy + \cos y$$

Lấy tích phân hệ thức thứ nhất theo x, ta có:

$$U(x,y) = \frac{x^3}{3} + y^2 x + C(y)$$

Lấy đạo hàm biểu thức này theo y, và nhớ $\frac{\partial U}{\partial y} = 2xy + \cos y$ thì có : 2yx + C'(y) = 2xy + cos y

C'(y) = cos y

C(y) = sin y + C

Vậy có nghiệm của phương trình là: $\frac{x^3}{3} + y^2 x + \sin y = C$

c). Cách giải thứ hai (dùng tích phân đường loại 2):

Vì dU(x,y) = P(x,y) dx + Q(x,y) dy

(theo theo chương 3, IV.1., thì điều kiện cần và đủ là : $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$)

Nên : $U(x,y) = \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy$

$$= \int_{x_0}^{x} P(x, y_0)\,dx + \int_{y_0}^{y} Q(x_0, y)\,dy \qquad (11)$$

Thí dụ 7:

Giải phương trình: (x + y + 1) dx + (x – y^2 + 3) dy = 0

Ta có : $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial}{\partial y}(x + y + 1) = 1$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(x - y^2 + 3\right) = 1$$

➔ $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = \dfrac{\partial P}{\partial y}$, vậy sẽ có hàm U(x,y) thỏa:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = x + y + 1, \quad \frac{\partial U}{\partial y} = x - y^2 + 3$$

Sử dụng công thức (10) (với xo = 0, yo=0), có :

$$U(x, y) = \int_0^x (x + 1)\,dx + \int_0^y (x - y^2 + 3)\,dy$$
$$= \frac{x^2}{2} + x + xy - \frac{y^3}{3} + 3y$$

Vậy ta có nghiệm của phương trình vi phân :

$$\frac{x^2}{2} + x + xy - \frac{y^3}{3} + 3y = C$$

4. Phương trình vi phân tuyến tính cấp một

a). Là phương trình vi phân có dạng: y’ + p(x) y = f(x) (11)

trong đó p(x), f(x) là các hàm liên tục.

Nếu f(x)=0, ta có: y’ + p(x) y = 0 (12)

Phương trình (12) gọi là phương trình tuyến tính thuần nhất.

b). Cách giải:

Với phương trình (12), có
$$\frac{dy}{y} = -\,p(x)dx$$
$$\Rightarrow \ln|y| = -\int p(x)\,dx + \ln C_1,\ \ C_1$$
$$\Rightarrow y = C\,e^{-\int p(x)dx},\quad C \neq 0 \qquad (13)$$

Với phương trình (11), có thể giải bằng phương pháp biến thiên hằng số tức là tìm nghiệm của nó ở dạng (13) nhưng coi C là hàm số, dạng :

$$y = C(x)\,e^{-\int p(x)dx} \qquad (14)$$

Lấy đạo hàm (14), thay vào (11), có :

$$\frac{dC}{dx}e^{-\int p(x)dx} - C(x)p(x)\,e^{-\int p(x)dx} + p(x)C(x)e^{-\int p(x)dx} = f(x)$$

hay : $\dfrac{dC}{dx}e^{-\int p(x)dx} = f(x)e^{\int p(x)dx}$

từ đó , có: $C(x) = \int f(x)\,e^{-\int p(x)dx}\,dx \quad C_1$

Vậy : $y = e^{-\int p(x)dx}\,[\int p(x)\,e^{-\int p(x)dx} + C_1]$ (15)

Công thức (15) nói chung khó nhớ, nên tốt nhất là cần nhớ các bước tính toán của phương pháp biến thiên hằng số để lặp lại.

-

<u>Thí dụ 8</u>: Giải phương trình: y’ – y.cotg x = 2x.sinx

Phương trình thuần nhất có nghiệm: $y = C\,e^{\int \cot g x dx} = C\sin x$

Tìm nghiệm phương trình không thuần nhất ở dạng: y = C(x). sin x

Thế vào phương trình ban đầu, ta được :

C’(x) sin x + C(x) cos x – C(x) cos x = 2x sin x

C’(x) = 2x ➔ C(x) = x^2 + C

Vậy : $y = x^2 \sin x + C \sin x$

<u>Thí dụ 9</u>: Giải phương trình: $xy' - 3y = x^2$

Đưa về dạng chuẩn : $y' - \frac{3y}{x} = x$

Nghiệm tổng quát phương trình thuần nhất :

$$y = Ce^{3\int\frac{dx}{x}} = Ce^{3\ln|x|} = Cx^3$$

Tìm nghiệm ở dạng $y = C(x)\,x^3$. Thế vào phương trình ban đầu ta có : $C'(x)x^3 + 3C(x)\,x^2 - 3C(x)\,x^2 = x$

$$C'(x) = \frac{1}{x^2} \quad \Rightarrow C(x) = 1\frac{1}{x} + C$$

Vậy : $y = \left(-\frac{1}{x} + C\right)x^3 = x^3 - x^2$

<u>Chú ý:</u> Nếu coi x là hàm số theo biến y thì phương trình tuyến tính đối với hàm số x có dạng : $\frac{dx1}{dy} + p(y)\,x = f(y)$

<u>Thí dụ 10</u>: Giải phương trình: $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x\cos y + \sin 2y}$

Phương trình này không tuyến tính. Tuy nhiên nếu coi x là hàm, y là biến ta có :

$$\frac{dx}{dy} = x\cos y + \sin 2y$$

$$\frac{dx}{dy} - x\cos y = \sin 2y$$

Đây lại là phương trình vi phân tuyến tính đối với hàm x. Nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất có dạng :

$$x = Ce^{\int\cos y\,dy} = Ce^{\sin y}$$

Tìm nghiệm của phương trình không thuần nhất dạng : $x = C(y)\,e^{\sin y}$, đưa vào phương trình ban đầu, có :

$$C'(y)e^{\sin y}+C(y)e^{\sin y}.\cos y-C(y)e^{\sin y}.\cos y=\sin 2y$$
$$C'(y)=e^{-\sin y}\sin 2y$$
$$C(y)=\int e^{-\sin y}\sin 2y\,dy=2\int e^{-\sin y}\sin y\,d\sin y$$
$$C(y)=-2e^{-\sin y}(\sin y+1)+C$$

Vậy : x = C esiny – 2siny – 2

5. Phương trình Bernoulli

a). Là phương trình vi phân có dạng : y' + p(x) y = f(x) yα , α ≠ 1 (16)

b). Cách giải : Đưa về dạng : $y^{-\alpha}y' + p(x)\,y^{1-\alpha} = f(x)$

Đặt $z = y^{1-\alpha}$, ta được $z' = (1-\alpha)\,y^{-\alpha}y'$, nên phương trình (16) có dạng tuyến tính :

$$\frac{1}{1-\alpha}z'+p(x)z=f(x)$$

hay là : z' + (1 - α)P(x) z = (1-α)f(x)

Thí dụ 11: Giải phương trình: $y'-\frac{4}{x}y=x\sqrt{y}$

Đây là phương trình Bernoulli với α = ½ . Chia 2 vế cho $\sqrt{y}$ ta được :

Thí dụ 12: Giải phương trình: $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{x\cos y+\sin 2y}$

Phương trình này không tuyến tính. Tuy nhiên nếu coi x là hàm, y là biến ta có :

$$y^{-\frac{1}{2}}y'-\frac{4}{x}\sqrt{y}=x$$

Đặt $z=\sqrt{y}\Rightarrow z'=\frac{y'}{2\sqrt{y}}$, thế vào phương trình trên, ta có: $2z'-\frac{4}{x}z=x,\quad z'-\frac{2}{x}y=\frac{x}{2}$

Nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất tương ứng bằng :

$$z=Ce^{\int\frac{2dx}{x}}=Ce^{2\ln|x|}=Cx^2$$

Tìm nghiệm phương trình không thuần nhất dạng : z = C(x). x^2