Lời giới thiệu

Do ảnh hưởng của cuộc cách mạng thông tin và do sự phát triển nội tại của toán học, việc giảng dạy toán bậc đại học và cao học có nhiều thay đổi. Xu hướng chung là nhanh chóng cho học viên nắm bắt được các kiến thức cơ bản về toán học và khả năng ứng dụng, đồng thời sử dụng được các chương trình tính toán thực hành một cách thuần thục.

Để đáp ứng nhu cầu đó, trên cơ sở đề tài khoa học Phần mềm Cơ sở Toán học của Trung tâm Khoa học tự nhiên và Công nghệ Quốc gia do Viện Toán học chủ trì thực hiện từ năm 1996 đến năm 1998, chúng tôi biên soạn bộ giáo trình Cơ sở Toán học Cao cấp giành cho sinh viên đại học và cao học.

Bộ giáo trình này được biên soạn dựa theo nội dung chương trình toán cao cấp của các khoa cơ bản trong các trường đại học do Bộ Giáo dục và Đào tạo qui định, kết hợp với các giáo trình toán hiện đang được giảng dạy trong các trường đại học ở Hà Nội và một số nước tiên tiến trên thế giới. Mục đích của giáo trình là:

1. *Trình bày những khái niệm, những nguyên lý cơ bản và cần thiết nhất của toán học, với những chứng minh chặt chẽ, lô gic;*
2. *Rèn luyện kỹ năng tính toán thực hành trên máy tính và khả năng áp dụng công cụ toán học trong việc giải quyết các bài toán thực tiễn;*
3. *Giới thiệu một số hướng phát triển mới trong toán học hiện đại đang được quan tâm trên thế giới.*

Để đáp yêu cầu thứ nhất, chúng tôi chủ trương tránh đưa vào giáo trình những phần lý thuyết nặng nề và ít sử dụng đến sau này. Phần bài tập được biên soạn với mục đích giúp học viên củng cố kiến thức lý thuyết, không sa vào những kỹ sảo tính toán phức tạp.

Mục đích thứ hai được thể hiện trong giáo trình bởi phần bài tập và tính toán thực hành biên soạn rất công phu cho từng chương. Nó giúp cho học viên tiếp cận một cách nhẹ nhàng và thoải mái với công việc tính toán cụ thể, lĩnh vực luôn bị xem là đáng ngại nhất đối với các học viên bậc đại học ở nước ta xưa *nay. Người học không chỉ có thể thử sức với những bài toán thách đố (để rèn luyện tư duy), mà còn biết sử dụng máy tính để giải một cách dễ dàng những bài toán hóc búa mà họ tưởng chừng không thể nào giải nổi. Hi vọng rằng khi ra trường họ sẽ không còn phải ngại ngùng trong việc đưa các công cụ toán học vào công việc của mình. Thực tế cho thấy, ở đâu toán học phát huy được tác dụng thì ở đó thường thu được những kết quả bất ngờ.*

Công cụ tính toán thực hành giới thiệu trong giáo trình này là bộ chương trình Maple V. Đây là bộ chương trình tổng hợp, khá đồ sộ, nhưng hiện nay đã có thể cài đặt trên máy tính cá nhân với cấu hình bình thường (bộ nhớ tối thiểu là 8MB). Với khả năng biểu diễn và tính toán cực mạnh (kể cả trên các ký hiệu hình thức), nó hiện đang được xem một trong những chương trình phổ biến nhất sử dụng trong công tác đào tạo ở các trường đại học trên thế giới. Nếu sử dụng được Maple một cách thuần thục thì học viên cũng dễ dàng tiếp cận với các chương trình tính toán phổ biến khác như: Matematica, Matlab, Mathcad,.. Bằng các hướng dẫn cụ thể cho từng chương, giáo trình giúp người đọc tự mình từng bước tiến hành công việc tính toán một cách nhẹ nhàng như bấm máy tính bỏ túi, không cần chuẩn bị gì đặc biệt về kiến thức lập trình.

Để đạt được mục đích thứ ba, chúng tôi đưa vào giáo trình một số chương mục không kinh điển (không bắt buộc đối với học viên bậc đại học), giúp người đọc làm quen với những ý tưởng mới trong toán học hiện đại, khích lệ sự tìm tòi phát triển những cái mà lâu nay được xem như là bất di bất dịch trong toán học cổ điển. Phần này chắc chắn sẽ đem lại hứng thú và những gợi ý về mặt định hướng cho những người có nguyện vọng được đào tạo cao hơn về toán học, nhất là những học viên cao học.

Giáo trình này cũng được thiết lập dưới dạng siêu văn bản, rất thuận tiện cho việc đọc và tra cứu trên máy tính. Phần tính toán thực hành được thực hiện dễ dàng và thuận tiện ngay trong khuôn khổ của giáo trình (học đến đâu thực hành đến đó), nhằm xoá nhoà ranh giới giữa học toán và làm toán. Bạn đọc có nhu cầu về giáo trình dưới dạng siêu văn bản và thực hành tính toán trên Maple V xin liên hệ với các tác giả theo địa chỉ của Viện Toán học (Đường Hoàng Quốc Việt, Quận Cầu Giấy, Hà Nội).

Trong phần này chúng tôi giới thiệu với bạn đọc cuốn Giải tích I của các tác giả : Ts. Đinh Thế Lục (chủ biên), Ts. Phạm Huy Điển, Ts. Nguyễn Xuân Tấn, Pts. Tạ Duy Phượng. Nội dung quyển sách bao gồm những kiến thức đòi hỏi học viên phải nắm được về bộ môn Giải tích trong năm thứ nhất bậc đại học.

Trong Chương 1 chúng tôi không trình bầy chi tiết về xây dựng trường số thực (để không làm lại phần việc của những người biên soạn giáo trình Số học), mà chỉ sử dụng *lát cắt* để chứng minh *sự tồn tại biên* của tập bị chặn, một tính chất quan trọng được dùng nhiều lần trong chương trình Giải tích, đồng thời làm quen sinh viên với môn học Tô pô đại cương thông qua các khái niệm trên đường thẳng thực. Ngoài việc sử dụng trong giáo trình này, nó giúp học viên hiểu rõ bản chất của những khái niệm trừu tượng trong lý thuyết Tô pô tổng quát. Bên cạnh những khái niệm kinh điển như: đạo hàm, vi phân, tích phân, chuỗi hàm,... chúng tôi giới thiệu (trong Chương 7) một số một khái niệm mới của *Giải tích không trơn*, một lĩnh vực đang được quan tâm và ứng dụng. Chương phương trình vi phân (Chương 11) được đưa vào nhằm củng cố những kiến thức về đạo hàm, tích phân và phục vụ nhu cầu tìm hiểu các bài toán đặt ra trong cơ học, vật lý, hóa học, sinh học,... Chúng tôi không đi sâu vào lĩnh vực này (để tránh gây chồng tréo với những người biên soạn giáo trình phương trình vi phân) mà chỉ đặt mục đích giới thiệu khái niệm làm cơ sở cho việc thực hành tính toán.

Để người đọc dễ tiếp thu, chúng tôi cố gắng trình bày giáo trình một cách gọn gàng, đơn giản nhưng đầy đủ. Ngoại trừ những phần giành lại cho bộ môn khác, các vấn đề nêu ra trong khuôn khổ giáo trình giải tích đều được chứng minh chặt chẽ và khúc triết. Phần bài tập và tính toán thực hành được biên soạn công phu, có nội dung bao quát tất cả những chủ đề cơ bản. Chúng tôi hy vọng rằng giáo trình sẽ là một cẩm nang tốt cho sinh viên các trường kỹ thuật và tổng hợp.

CHƯƠNG 1

Tập hợp và Số thực

1.1. Khái niệm tập hợp

1.1.1. Tập hợp

Tập hợp, trong Toán học, được xem là một khái niệm "khởi đầu" không định nghĩa. Nó đồng nghĩa với các từ họ, hệ, lớp,... và được dùng để mô tả một quần thể của những đối tượng *phân biệt được* mà chúng ta tư duy như *một thể trọn vẹn*.

Thí dụ Khi ta nói: Họ các đường tròn đồng tâm, hệ các phương trình tuyến tính, lớp các hàm đa thức, cũng có nghĩa là tập hợp của các đối tượng nói trên. Tập hợp xe cơ giới của thành phố Hà Nội, tập hợp các sinh viên Việt Nam, tập hợp những đường phố xuất phát từ Hồ Gươm, v.v... là những ví dụ điển hình về khái niệm tập hợp không chỉ trong Toán học, mà cả trong ngôn ngữ thông thường.

Những thành viên của tập hợp gọi là *phần tử* (hay *điểm*). Cho A là một tập, ta viết $x \in A$ (đọc: x thuộc A) có nghĩa x là một phần tử của A, và viết $x \notin A$ (đọc: x không thuộc A) có nghĩa x không phải là phần tử của A.

1.1.2. Diễn tả tập hợp

Để *diễn tả tập hợp* người ta dùng dấu móc $\{...\}$. Trong dấu móc ta có thể liệt kê tất cả các phần tử của tập hợp $\{x_1,...,x_n\}$, hoặc nêu thuộc tính chung (P) của các phần tử tập hợp bằng cách viết $\{x : x \text{ thỏa mãn } (P)\}$.

Thí dụ $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
hoặc $A = \{1, 2,...,5\}$
hoặc $A = \{x : x \text{ là số tự nhiên sao cho } 1 \le x \le 5\}$.

1.1.3. Tập rỗng

Ta quy ước *Tập rỗng* (hay tập trống) là tập hợp không có một phần tử nào cả. Người ta thường ký hiệu tập rỗng là $\varnothing$.

Thí dụ Tập hợp các cầu thủ bóng đá Việt Nam đã đoạt giải Olympic năm 1996 là tập rỗng; tập hợp các số lẻ chia hết cho 4 là tập rỗng.

1.1.4. Tập trùng nhau

Ta nói tập A và tập B *trùng nhau* (hay bằng nhau) và viết $A = B$ (đọc: A bằng B) nếu chúng có cùng những phần tử, tức là $x \in A$ khi và chỉ khi $x \in B$. Khi chúng không trùng nhau ta viết $A \neq B$.

Thí dụ A là tập gồm số 2 và số 4, còn B là tập các số chẵn dương bé hơn 5. Ta có $A = B$.

1.1.5. Tập hợp con

Ta nói A là *tập con* của tập B nếu mọi phần tử của A là phần tử của B. Khi đó ta viết $A \subseteq B$ (đọc: A nằm trong B), hoặc $B \supseteq A$ (đọc: B chứa A). Nếu $A \subseteq B$ và $A \neq B$ ta nói A là *tập con thật sự* của B. Quy ước: Tập rỗng là tập con của mọi tập.

Chú ý Mỗi phần tử x của A tạo thành tập con $\{x\}$ của A. Cần phân biệt phần tử x của tập hợp A (viết là $x \in A$) với tập con $\{x\}$ của tập hợp A (viết là $\{x\} \subset A$).

1.2. Các phép toán

1.2.1. Hợp của hai tập

Hợp của hai tập A và B được ký hiệu $A \cup B$ (đọc: A hợp B) là tập gồm tất cả các phần tử thuộc A hoặc thuộc B. Nghĩa là, $A \cup B = \{x : x \in A \text{ hoặc } x \in B\}$.

Thí dụ $A = \{1,2,10,\{a,b\}\}$, $B = \{a,2,\{a,b\}\}$, $A \cup B = \{1,2,10,\{a,b\},a\}$.

Chú ý $\{a,b\}$ là một tập nhưng nó lại là một phần tử của A và của B.

1.2.2. Giao của hai tập

Giao của hai tập A và B được ký hiệu $A \cap B$ (đọc: A giao B) là tập gồm tất cả các phần tử vừa thuộc A lại vừa thuộc B. Vậy $A \cap B = \{x : x \in A \text{ và } x \in B\}$.

Thí dụ Với $A = \{a,b,c\}$, $B = \{\{a\},b,d\}$, thì $A \cap B = \{b\}$.

1.2.3. Phần bù

Phần bù của A trong B được ký hiệu $B \setminus A$ là tập gồm tất cả các phần tử thuộc B nhưng không thuộc A. Đôi khi người ta gọi $B \setminus A$ là hiệu của B và A.
Vậy $B \setminus A = \{x : x \in B \text{ và } x \notin A\}$.

Thí dụ $A = \{1,5,10,b\}$, $B = \{5,b\}$. Khi đó $B \setminus A = \varnothing$.

Minh họa hình học:

1.2.4. Tính chất của các phép tính

Cho A, B và C là ba tập hợp bất kỳ. Khi đó ta có:

Tính kết hợp

(1) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$,

(1') $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$.

Tính giao hoán

(2) $A \cup B = B \cup A$,

(2') $A \cap B = B \cap A$.

Tính phân phối

(3) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$,

(3') $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$,

(4) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$,

(4') $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$.

Chứng minh Để chứng minh đẳng thức $X = Y$ giữa hai tập X và Y ta chỉ ra rằng với $x \in X$ thì suy ra $x \in Y$ tức là $X \subseteq Y$, và ngược lại với $y \in Y$ thì suy ra $y \in X$, tức là $Y \subseteq X$.

Trước hết ta chứng minh (3). Cho x là phần tử bất kỳ của $A \cup (B \cap C)$. Khi đó $x \in A$ hoặc $x \in (B \cap C)$. Nếu $x \in A$ thì $x \in A \cup B$ và $x \in A \cup C$, có nghĩa là $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$. Nếu $x \in (B \cap C)$ thì $x \in B$ và $x \in C$. Lúc đó $x \in A \cup B$ và $x \in A \cup C$, có nghĩa là $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$. Ngược lại, cho y là phần tử bất kỳ của $(A \cup B) \cap (A \cup C)$. Khi đó $y \in A \cup B$ và $y \in A \cup C$. Vậy hoặc $y \in A$ tức là $y \in A \cup (B \cap C)$, hoặc $y \notin A$. Nhưng $y \notin A$ thì $y \in B$ và $y \in C$, có nghĩa là $y \in B \cap C$. Rút cuộc $y \in A \cup (B \cap C)$ và (3) là đúng.

Những đẳng thức khác chứng minh tương tự.

Chú ý 1) Dùng cách diễn tả, chứng minh trên có thể viết ngắn gọn như sau:

$$\begin{aligned} A \cup (B \cap C) &= \{x : x \in A \text{ hoặc } x \in (B \cap C)\} \\ &= \{x : x \in A \text{ hoặc } \{x \in B \text{ và } x \in C\}\} \\ &= \{x : \{x \in A \text{ hoặc } x \in B\} \text{ và } \{x \in A \text{ hoặc } x \in C\}\} \\ &= \{A \cup B\} \cap \{A \cup C\}. \end{aligned}$$

2) Do tính kết hợp, với ba tập *A*, *B*, *C* cho trước ta có thể lấy hợp hai tập bất kỳ sau đó mới hợp với tập còn lại và kết quả đều cho ta một tập, đó là hợp $A \cup B \cup C$. Tương tự như thế đối với phép giao, cũng như phép hợp và phép giao của nhiều tập hơn.

1.2.4. Tích của các tập hợp

Cho 2 tập hợp A và B. Tập hợp tất cả các cặp điểm (a,b), với $a \in A$ và $b \in B$, lập thành một tập hợp mới gọi là *tích của hai tập* A và B, và được ký hiệu là $A \times B$. Như vậy, mỗi phần tử z của tập tích $A \times B$ luôn biểu diễn dưới dạng $z=(a,b)$, với $a \in A$, $b \in B$, và người ta gọi a,b là các *thành phần* (hay *toạ độ*) của z.

1.3. Phép ứng và lực lượng

1.3.1. Phép ứng

Cho A và B là hai tập khác rỗng. *Phép ứng* từ A tới B là một quy tắc cho phép với mỗi phần tử $x \in A$ chỉ ra được một phần tử $y \in B$ ứng với nó. Thông thường người ta ký hiệu $f : A \to B$ có nghĩa f là phép ứng từ A tới B, và viết $y = f(x)$ có nghĩa y được ứng với x, hoặc x ứng với y (đôi lúc ta viết $x \mapsto y$). Tập A được gọi là *miền xác định* của phép ứng và tập B được gọi là *miền giá trị* của phép ứng. Khi B là một tập hợp số nào đó người ta còn gọi f là *hàm số*.

Chú ý Có thể nhiều phần tử của B được ứng với một phần tử của A và có thể một phần tử của B được ứng với nhiều phần tử của A.

Đơn ứng là một phép ứng cho phép với mỗi phần tử của A chỉ ra được *một và chỉ một* phần tử của B ứng với nó. (Điều này không loại trừ khả năng nhiều phần tử của A cùng được ứng với 1 phần tử của B).

Phép ứng từ A tới B được gọi là *phép ứng 1-1* (hay *phép tiêm*) nếu 2 phần tử khác nhau trong A thì được ứng với 2 phần tử khác nhau trong B.

Toàn ứng là một phép ứng mà mỗi phần tử của tập B đều được ứng với (ít nhất) một phần tử trong A.

Song ứng từ A tới B là một phép ứng mà mỗi $x \in A$ chỉ ứng với một $y \in B$ và mỗi $y \in B$ chỉ được ứng với một $x \in A$. Như vậy, *song ứng* vừa là *toàn ứng*, vừa là *phép ứng 1-1*.

Thí dụ a) $A = \{a,b,c,d\}, B = \{1,2,3\}$.

Phép ứng $a \mapsto 1, b \mapsto 1, c \mapsto 1$ v¡ $d \mapsto 2$ không phải song ứng từ A tới B.

b) $A = \{1,2,...,n,...\}$, $B = \{2,4,...,2n,...\}$.

Phép ứng $n \mapsto 2n$ là một song ứng từ A tới B.

Chú ý Nếu có một *song ứng* f từ A tới B thì ta có thể xây dựng một song ứng từ B tới A bằng cách với mỗi $y \in B$ ta cho ứng với $x \in A$ mà $f(x) = y$. Song ứng này có tên gọi là *song ứng ngược* của f và thường được ký hiệu là f^{-1}.

1.3.2. Tương đương

Hai tập A và B gọi là *tương đương* nếu có thể xây dựng được một *song ứng* giữa A và B. Khi đó ta viết $A \sim B$.

Thí dụ a) Với A là tập hợp các số thực dương, B là tập hợp các số thực âm, thì $A \sim B$ vì phép ứng $a \mapsto -a$ là một song ứng.

b) $A=\{1,2,...\}, B=\{\pm 1, \pm 2, ...\}$.

Khi đó $A \sim B$ vì phép ứng $2n \mapsto -n$ và $2n-1 \mapsto n$ là song ứng.

Chú ý Nếu A và B *hữu hạn* thì $A \sim B$ khi và chỉ khi số phần tử của A bằng số phần tử của B.

1.3.3. Lực lượng

Những tập *tương đương* thì được gọi là *cùng lực lượng*.

Khi A có *hữu hạn* phần tử thì người ta thường xem lực lượng của A là *số phần tử* của nó và ký hiệu là card(A) (đọc là cac-đi-nal của A) .

Thí dụ *a)* Tập A rỗng thì card(A) = 0.

b) $A = \{1, a, \{10, b\}\}$ thì $card\ (A) = 3$;

Khi A có *vô hạn* phần tử thì ta nói lực lượng của A là *vô hạn* (hay *siêu hạn*), và viết $\text{card}(A) = \infty$.

1.3.4. Tập đếm được

Ký hiệu tập số tự nhiên là $\mathbb{N}$. Đây là tập vô hạn.

Tập A gọi là *đếm được* nếu nó *hữu hạn* hoặc *tương đương với* $\mathbb{N}$.

Định lý *Tập con của tập đếm được là tập đếm được.*

Chứng minh Dùng phép *song ứng* ta chỉ cần chứng tỏ tập con của $\mathbb{N}$ là tập đếm được. Cho $A \subseteq \mathbb{N}$. Ký hiệu a_1 là phần tử đầu của A, a_2 là phần tử đầu của $A \setminus \{a_1\}$, v.v... a_n là phần tử đầu của $A \setminus \{a_1, ..., a_{n-1}\}$. Nếu như đến số n nào đó $A \setminus \{a_1, ..., a_{n-1}\}$ không có phần tử nào thì A hữu hạn (nó chỉ chứa (n-1) phần tử) và, theo định nghĩa, nó là đếm được. Nếu với mọi n tập $A \setminus \{a_1, ..., a_{n-1}\} \neq \varnothing$ thì ta thiết lập được phép ứng $f(n) = a_n$ với mọi n = 1,2,... Nó là một song ứng từ $\mathbb{N}$ tới A. Thật vậy, với mỗi $n \in \mathbb{N}$, $f(n)$ là phần tử đầu của $A \setminus \{a_1, ..., a_{n-1}\}$ nên số này là duy nhất. Ngược lại với mỗi $a \in A$, ta biết được số các phần tử đứng trước nó, thí dụ là k, vậy $f(k+1) = a$. Song ứng f chỉ ra rằng $A \sim \mathbb{N}$ khi A không hữu hạn.

Chú ý Không phải tập vô hạn nào cũng đếm được.

Thí dụ a) Họ các cặp số tự nhiên $\{(m,n)\}: m,n \in \mathbb{N}$ } là tập *đếm được*.

Thật vậy, xếp các phần tử của họ trên theo hàng và cột như sau :

$$\begin{array}{ccccc}
(1,1) & (1,2) & (1,3) & (1,4) & \dots \\
(2,1) & (2,2) & (2,3) & (2,4) & \dots \\
(3,1) & (3,2) & (3,3) & (3,4) & \dots \\
(4,1) & (4,2) & (4,3) & (4,4) & \dots \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots
\end{array}$$

Xây dựng phép ứng tới $\mathbb{N}$ theo quy tắc "đi theo đường xiên" :

$(1,1) \mapsto 1$

$(2,1) \mapsto 2$; $(1,2) \mapsto 3$;

$(1,3) \mapsto 4$; $(2,2) \mapsto 5$; $(3,1) \mapsto 6$....

Dễ kiểm tra đây là một song ứng. Do đó họ cặp các số tự nhiên là đếm được.

b) Họ $\aleph$ gồm tất cả các tập con của $\mathbb{N}$ là tập *không đếm được*. Giả sử trái lại nó là đếm được thì có một song ứng f từ $\aleph$ vào $\mathbb{N}$. Ký hiệu $x_n \in \aleph$ là phần tử ứng với n, nghĩa là $f(x_n) = n$. Khi ấy ta xây dựng được tập X gồm các số tự nhiên không nằm trong tập ứng với nó, nghĩa là $X:=\{n \in \mathbb{N} \mid n \notin x_n\}$. Ta sẽ chỉ ra rằng nó không được ứng với số tự nhiên nào. Thật vậy, giả sử ngược lại rằng X được ứng với số tự nhiên k nào đó, tức là $X = X_k$. Khi ấy chỉ có 2 khả năng: hoặc là k nằm trong X_k hoặc là k nằm ngoài X_k. Trong trường hợp thứ nhất thì k không thể là phần tử của X và điều này mâu thuẫn với việc $X = X_k$. Trong trường hợp thứ 2 thì k sẽ là phần tử của X và điều này cũng lại dẫn đến mâu thuẫn trên. Tất cả các mâu thuẫn này chứng tỏ rằng giả thiết $\aleph$ đếm được là không thể xảy ra.

Nhận xét Phương pháp chứng minh trên cũng cho phép ta đi đến một khẳng định tổng quát là: tập *tất cả các tập con* của một tập khác rỗng A (thường được ký hiệu là 2^A) là *không cùng lực lượng* với A.

1.4. Số thực

Để tập trung trình bày các phương pháp cơ bản của Giải tích toán học, chúng ta không đi sâu vào việc xây dựng khái niệm số thực, một việc đòi hỏi nhiều công phu và thời gian. Trong phần này chúng ta chỉ nhắc lại một số tính chất quan trọng của số thực cần thiết cho việc thiết lập các nguyên lý cơ bản của Giải tích và các ứng dụng của chúng.

1.4.1. Số hữu tỷ và số vô tỷ

Như trên, ký hiệu $\mathbb{N}$ là tập các số *tự nhiên* và $\mathbb{Z}$ là tập các *số nguyên*. Theo định nghĩa số hữu tỷ là số có dạng $\frac{m}{n}$ trong đó $n \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{Z}$ và $(m, n) = 1$ (ước số chung lớn nhất của m và n là 1, hay m và n là hai số nguyên tố cùng nhau). Ta ký hiệu $\mathbb{Q}$ là tập các số *hữu tỷ*. Những số không biểu diễn được dạng trên gọi là số *vô tỷ*. Như vậy, tập các *số thực* bao gồm tất cả số vô tỷ và hữu tỷ, và sẽ được ký hiệu là $\mathbb{R}$.

Thí dụ 0,5 là số hữu tỷ vì $0,5 = \frac{1}{2}$.

$q = \sqrt{2}$ là số vô tỷ vì không thể biểu diễn dưới dạng $\frac{m}{n}$ nêu ở trên. Thật vậy nếu $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$ thì $m^2 = 2n^2$. Chứng tỏ m^2 là số chẵn, do đó m là số chẵn: $m = 2m'$. Khi ấy $n^2 = 2(m')^2$ và có nghĩa n cũng là số chẵn. Điều này phi lý vì $(m,n) = 1$.

1.4.2. Biểu diễn số thực

Để dễ hình dung người ta hay biểu diễn số thực trên trục số Ox. Mỗi điểm trên trục này sẽ biểu diễn một số thực. Điểm O là gốc và là biểu diễn của *số không*. Số *1* được biểu diễn bởi điểm bên phải gốc sao cho đoạn $[0,1]$ có độ dài bằng đơn vị. Khi đó số hữu tỷ $q = \frac{m}{n}$ với $m > 0$ sẽ là điểm nằm phía bên phải gốc sao cho đoạn $[0, q]$ có độ dài $\frac{m}{n}$ lần đơn vị. Số hữu tỷ $q = \frac{m}{n}$ với $m < 0$ sẽ là điểm đối xứng với $\frac{-m}{n}$ qua gốc. Những điểm khác trên trục số biểu diễn những số vô tỷ.

Thí dụ $\sqrt{2}$ là điểm bên phải gốc tọa độ và cách gốc tọa độ một đoạn bằng độ dài đường chéo của hình vuông với cạnh đơn vị. Ta biết rằng khoảng cách này không thể biểu diễn được dưới dạng tỷ số của hai số nguyên, cho nên nó biểu diễn một số vô tỷ.

1.4.3. Các phép tính

Trong $\mathbb{R}$ cũng như trong $\mathbb{Q}$ có bốn phép tính số học cơ bản: cộng, trừ, nhân và chia. Các phép tính này có tính chất sau:

Giao hoán : $a + b = b + a$ *và* $ab = ba$.

Kết hợp : $(a + b) + c = a + (b + c)$ *và* $ab(c)=a(bc)$.

Phân phối : $a(b + c) = ab + ac$.

1.4.4. Thứ tự

Bất cứ hai phần tử a, b (thuộc $\mathbb{Q}$ hoặc $\mathbb{R}$) đều có thể so sánh $a > b$ (a lớn hơn b), $a = b$ hoặc $a < b$ (a nhỏ hơn b). Thứ tự (>) có tính chất sau:

Bắc cầu : $a > b, b > c$ thì $a > c$,

Trù mật : $a > b$ thì có c để $a > c > b$.

Tiên đề (Archimedes): *Với mọi số* $c > 0$ *tồn tại số tự nhiên* $n > c$.

Ngoài ra số hữu tỷ còn có tính chất trù mật mạnh hơn sau đây: Cho a, b thuộc $\mathbb{R}$. Nếu $a > b$ thì có q thuộc $\mathbb{Q}$ để $a > q > b$.