

1 – 10. Tính đạo hàm của các hàm số một biến số sau:

1. $y = \frac{2}{x^3} - \sqrt{x+1} + \frac{1}{3}x\sqrt{x}$

2. $y = -4(t-2)\sqrt{6-t}$

3. $y = \frac{4x+3}{\sqrt{x^2+2}}$

4. $y = \arccos\sqrt{1-t}$ tại $t = \frac{1}{4}$

5. $y = \log_2\left(\frac{x}{1-x}\right)$

6. $y = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$ tại $x=0$

7. $y = \arctan\left(\frac{2x}{1-x^2}\right)$

8. $y = (\sin x + 3\cos 2x)^3$ tại $x = \frac{\pi}{2}$

9. $y = e^{x+\tan 2x}$

10. $y = (1+x^2)\arctan x - \frac{1}{x^2}$ tại $x=1$

ĐÁP SỐ

1. $y' = \frac{-6}{x^4} - \frac{1}{2\sqrt{x+1}} + \frac{1}{2}\sqrt{x}$

2. $y' = \frac{-2(14-3t)}{\sqrt{6-t}}$

3. $y' = \frac{8-3x}{(x^2+2)\sqrt{x^2+2}}$

4. $y' = \frac{1}{2\sqrt{x(1-x)}}; y'\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{2}{\sqrt{3}}$

5. $y' = \frac{1}{\ln 2} \cdot \frac{1}{x(1-x)}$

6. 1

7. $y' = \frac{2}{1+x^2}$

8. 0

9. $y' = \left(1 + \frac{2}{\cos^2 2x}\right)e^{x+\tan 2x}$

10. $3 + \frac{\pi}{2}$

11 – 20. Tính vi phân của các hàm số một biến số sau:

11. $y = x \cdot \tan x$ tại $x = \pi$

12. $y = 2x^4 - \frac{1}{3}x^3 + 2\sqrt{x} - 5$

13. $y = e^{\sin 3x} + \ln(2+x^3)$ tại $x=0$

14. $y = \arctan\left(\frac{t-1}{t+1}\right)$ tại $t=2$

15. $y = \ln(1 - \arcsin x)$ tại $x=0$

16. $y = (3x+5)3^{3x}$ tại $x = -\frac{1}{3}$

17. $y = \frac{e^x}{1+x^2}$

18. $y = 3\sqrt{\cot 2x}$ tại $x = \frac{\pi}{8}$

19. $y = \ln \frac{s+1}{\sqrt{s-2}}$

20. $y = (1 + \sqrt{1-2x})^3$ tại $x=0$

ĐÁP SỐ

11. $dy(\pi) = \pi dx$

12. $dy = \left(8x^3 - x^2 + \frac{1}{\sqrt{x}} \right) dx$

13. $dy(0) = 3dx$

14. $dy(2) = \frac{1}{5} dx$

15. -1

16. $dy\left(\frac{-1}{3}\right) = (1 + 4\ln 3) dx$

17. $dy = \frac{e^x(1-2x+x^2)}{(1+x^2)^2} dx$

18. $dy\left(\frac{\pi}{8}\right) = -6dx$

19. $dy = \frac{-3}{(s+1)(s-2)} ds$

20. $dy(0) = -12dx$

21 – 24. Tìm đa thức Taylor bậc 3 của các hàm số sau:

21. $f(x) = \ln(1-2x)$ tại $x=0$

23. $f(x) = x\cos 3x$ tại $x=0$

22. $f(x) = e^{3x+1}$ tại $x = -\frac{1}{3}$

24. $f(x) = \frac{1}{x^2+2x}$ tại $x = -1$

ĐÁP SỐ

21. $f(x) = -2x - 2x^2 - \frac{8}{3}x^3$

22. $f(x) = 1 + 3\left(x + \frac{1}{3}\right) + \frac{9}{2!}\left(x + \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{27}{3!}\left(x + \frac{1}{3}\right)^3$

23. $f(x) = x - \frac{27}{3!}x^3$

24. $f(x) = -1 - (x+1)^2$

25 – 37. Tính các tích phân sau:

25. $\int \frac{x+2}{\sqrt{x}} dx$

33. $\int \ln(x+1) dx$

26. $\int \frac{2x-1}{\sqrt{1-x^2}} dx$

34. $\int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1} dx$

27. $\int \frac{2x+3}{x^2+2x+2} dx$

35. $\int_1^2 \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} dx$

28. $\int \frac{x^2+2}{x^2-4x+3} dx$

36. $\int_1^e x^2 \ln^2 x dx$

29. $\int \frac{dx}{2e^x+1}$

37. $\int_0^1 \frac{xe^x dx}{(x+1)^2}$

30. $\int \frac{dx}{\sqrt{x-x^2}}$

31. $\int \frac{dx}{\sqrt{9+4x+x^2}}$

32. $\int (2x+1)e^{-x} dx$

ĐÁP SỐ

25. $\frac{2}{3}x\sqrt{x} + 4\sqrt{x} + C$

26. $-2\sqrt{1-x^2} - \arcsin x + C$

27. $\ln(x^2 + 2x + 2) + \arctan(x + 1) + C$

28. $x - \frac{3}{2}\ln|x-1| + \frac{11}{2}|x-3| + C$

29. $\ln \frac{2e^x}{2e^x + 1} + C$

30. $2\arcsin \sqrt{x} + C$

31. $\ln(x + 2 + \sqrt{9 + 4x + x^2}) + C$

32. $e^{-x}(-2x - 3) + C$

33. $(x + 1)\ln(x + 1) - x + C$

34. $2 - \frac{\pi}{2}$

35. $\sqrt{3} - \frac{\pi}{3}$

36. $\frac{5e^3 - 2}{27}$

37. $\frac{e}{2} - 1$

38 – 44. Tính tích phân suy rộng sau:

38. $\int_1^{+\infty} \frac{3\sqrt{x} + 2}{x^3} dx$

40. $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{9x^2 + 6x + 4}$

42. $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2 + 1}}$

44. $\int_{-\infty}^0 (2x + 1)e^x dx$

39. $\int_{-\infty}^0 \frac{dx}{4x^2 + 1}$

41. $\int_0^{+\infty} \frac{x dx}{x^4 + 5x^2 + 6}$

43. $\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2} dx$

ĐÁP SỐ

38. 3

39. $\frac{\pi}{4}$

40. $\frac{\pi}{9\sqrt{3}}$

41. $\frac{1}{2} \ln \frac{3}{2}$

42. $\ln(\sqrt{2} + 1)$

43. 1

44. -1

45 – 50. Tính độ dài đường cong:

45. $y = \frac{1}{2\sqrt{2}}(x^2 - \ln x) \quad (1 \leq x \leq e)$

46. $y = \frac{\sqrt{x}}{3}(x - 3) \quad (1 \leq x \leq 4)$

47. $y = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}) \quad (\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{5})$

48. $y = \ln(1 - x^2) \quad (0 \leq x \leq \frac{1}{2})$

49. $y = \ln x \quad (\sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{8})$

50. $y = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) \quad (0 \leq x \leq 1)$

ĐÁP SỐ

45. $\frac{e^2 - 2}{2\sqrt{2}}$

46. $\frac{10}{3}$

47. 1

48. $\ln 3 - \frac{1}{2}$

49. $1 + \frac{1}{2} \ln \frac{3}{2}$

50. $\frac{1}{2} \left(e - \frac{1}{e} \right)$

51– 53. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường sau:

51. $y = x^2, y = \frac{x^2}{2}, y = 2x$

52. $y = x^2 + 1; y = \frac{1}{2}x^2; y = 2$

53. $y^2 = x; y = 2 - x; y \geq 0$, trục hoành.

ĐÁP SỐ

51. 4

52. 4

53. $\frac{7}{6}$

54 – 58. Tính vi phân toàn phần của hàm số:

54. $z = \ln \frac{x}{x+y} + \frac{1}{y}$ tại $(1; 2)$

55. $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} + \frac{1}{\sqrt{xy}}$

56. $f(x, y) = (x + y)e^{xy+1}$ tại $(1; -1)$

57. $z = \arctan \frac{x+y}{x-y}$ tại $(1; 1)$

58. $z = \frac{x+y}{y} - e^{-2x} \arctan y$ tại $(0; 1)$

ĐÁP SỐ

54. $dz(1;2) = \frac{2}{3}dx - \frac{1}{3}dy$

55. $df = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} - \frac{1}{2x\sqrt{xy}} \right) dx + \left(\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} - \frac{1}{2y\sqrt{xy}} \right) dy$

56. $df(1;-1) = dx + dy$

57. $dz(1,1) = -\frac{1}{2}dx + \frac{1}{2}dy$

58. $dz(0,1) = \left(1 + \frac{\pi}{2} \right) dx - \frac{1}{2}dy$

59 – 61. Tính các đạo hàm riêng cấp 2 của các hàm số sau:

59. $z = xy \ln x + \frac{x}{y}$

60. $z = \ln(x^2 + y^2)$

61. $z = (2x^2 + y^2)e^{x-y}$

ĐÁP SỐ

59. $z'_x = y(1 + \ln x); z'_y = x \ln x; z''_{xx} = \frac{y}{x}; z''_{yy} = 0; z''_{xy} = 1 + \ln x$

60. $z'_x = \frac{2x}{x^2 + y^2}; z'_y = \frac{2y}{x^2 + y^2}; z''_{xx} = \frac{2y^2 - 2x^2}{(x^2 + y^2)^2}; z''_{xy} = \frac{-4xy}{(x^2 + y^2)^2}$

61. $z'_x = (2x^2 + y^2 + 4x)e^{x-y}; z'_y = (2y - 2x^2 - y^2)e^{x-y};$
 $z''_{xx} = (4 + 8x + 2x^2 + y^2)e^{x-y}; z''_{xy} = (4x + 2y - 2x^2 - y^2)e^{x-y}; z''_{yy} = (2 - 4y + 2x^2 + y^2)e^{x-y};$

62 – 67. Tìm các điểm cực trị và giá trị cực trị (nếu có) của các hàm số sau:

62. $z = e^{2x}(x + y^2 + 2y)$

66. $z = 9x^3 + \frac{1}{3}y^3 - 3xy + 30$

63. $z = x^4 + y^4 - x^2 - y^2 - 2y + 12$

67. $z = x\sqrt{y} - x^2 - y + 6x + 3$

64. $z = x + y - xe^y$

65. $z = xy + \frac{50}{x} + \frac{20}{y}$

68. Điểm $M(1;1)$ và $N(-1;1)$ có là điểm cực trị của hàm số $z = x^4 + y^4 - 4xy + 2$ không? Nếu có thì nó là điểm cực đại hay cực tiểu của hàm số?

ĐÁP SỐ

62. Đạt cực tiểu tại $M\left(\frac{1}{2}; -1\right)$

66. Đạt cực tiểu tại $\left(\frac{1}{3}; 1\right)$

63. Đạt cực trị tại $M\left(\pm \frac{1}{\sqrt{2}}; 1\right)$

67. Đạt cực đại tại $(4; 4)$

64. Không có cực trị

65. Đạt cực đại tại $M(5; 2)$

68. N không là điểm cực trị, M là điểm cực tiểu.

69 – 72. Giải các phương trình vi phân với biến số phân ly sau:

69. $(1+x^2)y' - 3xy = 0$

72. $y' = \frac{1-y^2}{x^2}$

70. $xyy' = \sqrt{1+y^2}$

71. $\sqrt{1-x^2}y' = (1+y^2)$

ĐÁP SỐ

69. $\ln\left|\frac{y}{C}\right| = \frac{3}{2}\ln(1+x^2)$

70. $x \neq 0, \sqrt{1+y^2} - \ln x^2 = C$; $x=0$ không là nghiệm

71. $\arctan y - \arcsin x + C = 0, x \neq \pm 1$

72. $y \neq \pm 1, \ln \sqrt{\frac{1+y}{1-y}} + \frac{1}{x} = C$; $y = \pm 1$ cũng là nghiệm

73 – 76. Giải các phương trình vi phân đẳng cấp sau:

73. $y' = \frac{x-y}{x+y}; y(1) = 1$

76. $\left(x - y \cos \frac{y}{x}\right)dx + x \cos \frac{y}{x} dy = 0$

74. $y' = \frac{y}{x - \sqrt{xy}}, x \geq 0$

75. $xy' = y(1 + \ln y - \ln x)$ với $y(1) = e$.

ĐÁP SỐ

73. $|x^2 - 2xy - y^2| = \sqrt{2}$

76. $y = x \cdot \arcsin\left(\ln \frac{C}{x}\right)$

74. $\sqrt{\frac{x}{y}} + \ln|y| = C$

75. $y = x \cdot e^x$

77 – 80. Giải các phương trình vi phân tuyến tính sau:

77. $y' - \frac{2}{x}y = \frac{3}{x^2}$ với $y(1) = 1$.

79. $xy' - y = \frac{x^3}{x^2 + 4}$

78. $y' + 2xy = (x + x^2).e^{-x^2}$

80. $y' - \frac{y}{x \ln x} = \frac{\ln x}{x^2 - 4}$

ĐÁP SỐ

77. $y = \left(\frac{-1}{x^3} + 2 \right) x^2$

79. $y = \left(\frac{1}{2} \ln(x^2 + 4) + C \right) x, x \neq 0$

78. $y = \left(\frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{3} x^3 + C \right) . e^{-x^2}$

80. $y = \left(\frac{1}{4} \ln \left| \frac{x-2}{x+2} \right| + C \right) \ln x$

81 – 84. Giải các phương trình vi phân Bernoulli sau:

81. $xy^2 \frac{dy}{dx} + y^3 = \frac{1}{x^2}$

83. $x^2 y' + 2xy = 5y^3$

82. $y' - \frac{3}{x}y = -x^3 y^2$

84. $\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} = 5x^2 y^2$

ĐÁP SỐ

81. $y^3 - \frac{1}{x^3}(3x + C) = 0, x \neq 0$.

83. $\frac{1}{y^2} - x^4 \left(\frac{10}{3x^3} + C \right) = 0, x \neq 0; x = 0$

82. $\frac{1}{y} - \frac{x^4}{7} - \frac{C}{x^3} = 0$

không là nghiệm của pt

84. $\frac{1}{y} + \frac{5}{4} x^3 - \frac{C}{x} = 0$

85 – 89. Tính tổng của các chuỗi số sau:

85. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + n}$

88. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n + 2^n}{6^n}$

86. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$

89. $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+2} - 2\sqrt{n+1} + \sqrt{n})$

87. $\sum_{n=2}^{\infty} \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$

ĐÁP SỐ

85. 1

88. $\frac{7}{2}$

86. $\frac{1}{3}$

89. $1 - \sqrt{2}$

87. $-\ln 2$

90 – 99. Xét sự hội tụ của các chuỗi số sau:

$$90. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2n^2+3n-4}$$

$$91. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin \frac{\pi}{\sqrt{5n}}$$

$$92. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n(2n+1)}{5^n}$$

$$93. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n+1)!}$$

$$94. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{5n^2+2n+1}{2n^2-2n+4} \right)^n$$

$$95. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\arctan \frac{1}{n} \right)^n$$

$$96. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}}$$

$$97. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln n}$$

$$98. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin na}{2^n}$$

$$99. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos na}{\sqrt{n^4+1}}$$

ĐÁP SỐ

90. Phân kì (tiêu chuẩn so sánh)

91. Hội tụ (tiêu chuẩn so sánh)

92. Hội tụ (tc Đalambert)

93. Hội tụ (tc Đalambert)

94. Phân kì (tiêu chuẩn Côsi)

95. Hội tụ (tiêu chuẩn Côsi)

96. Hội tụ (tiêu chuẩn Leibnitz)

97. Hội tụ (tiêu chuẩn Leibnitz)

98. Hội tụ tuyệt đối

99. Hội tụ tuyệt đối

100 – 104. Tìm miền hội tụ của các chuỗi lũy thừa sau:

$$100. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(5x)^n}{n!}$$

$$101. \sum_{n=1}^{\infty} (2n+5)x^n$$

$$102. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^n x^n}{\sqrt{n+1}}$$

$$103. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{3n+1} \right)^n (x-4)^n$$

$$104. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-5)^n}{n5^n}$$

$$105. \sum_{n=0}^{\infty} n! x^n$$

ĐÁP SỐ

100. \mathbb{R}

101. $(-1; 1)$

102. $\left(-\frac{1}{3}; \frac{1}{3} \right]$

103. $(1; 7)$

104. $[0; 10)$

105. 0