Bộ Giáo dục và Đào tạo
Trường Đại học Sư phạm TP.Hồ Chí Minh

------oooOOOooo------

Báo cáo nghiệm thu đề tài khoa học cấp cơ sở

ĐỘ ĐO - TÍCH PHÂN VÀ DUNG LƯỢNG

Mã số: CS.2007.19.04

Chủ nhiệm đề tài:
PGS.TS Đậu Thế Cấp

TP Hồ Chí Minh – 2008

I. Giới thiệu đề tài

Lý thuyết Độ đo và Tích phân có nhiều ứng dụng không chỉ trong Giải tích Toán học mà còn trong nhiều ngành Toán học khác đặc biệt là trong Xác suất – Thống kê. Vì lý do đó, Độ đo và Tích phân là một môn học quan trọng của sinh viên ngành toán.

Là một môn học khó nhưng tài liệu tiếng Việt để học tập môn Độ đo - Tích phân không nhiều, tài liệu bài tập để tham khảo lại còn hiếm hơn.

Từ thực tế đó, mục đích chính của đề tài này là biên soạn một quyển sách về Độ đo và Tích phân có thể sử dụng làm giáo trình giảng dạy cho sinh viên, tham khảo cho học viên cao học. Quyển sách đã được Nhà xuất bản Giáo dục phát hành rộng rãi, phục vụ bạn đọc toàn quốc.

Quyển sách Độ đo và Tích phân cũng có thể coi là kiến thức chuẩn bị để nghiên cứu về Dung lượng, một biến dạng của Độ đo. Trong khuôn khổ đề tài, chúng tôi đã nghiên cứu dung lượng trong không gian tôpô tổng quát, đóng góp mới của chúng tôi là đưa ra và khảo sát khá triệt để dung lượng có giá trị rời rạc. Kết quả này đã viết thành một bài báo đã được nhận đăng ở tạp chí Khoa học, trường Đại học Sư phạm TP.Hồ chí Minh. Chúng tôi đang bổ sung thêm để gửi công bố ở một tạp chí chuyên ngành.

Liên quan đến đề tài, chúng tôi đã hướng dẫn hai học viên cao học làm luận văn tốt nghiệp, một người đã bảo vệ, người còn lại sẽ bảo vệ vào tháng 9/2008.

Đề tài đã thực hiện đúng tiến độ và các chỉ tiêu đăng ký.

II. Các kết quả đã thực hiện

§1. Các sản phẩm

1. Giáo trình "Độ đo và Tích phân"

Giáo trình có ba chương: Chương 1: Độ đo; Chương 2: Tích phân; Chương 3: Các vấn đề bổ sung.

Giáo trình đã trình bày các vấn đề lý thuyết cơ bản của Độ đo và Tích phân với chứng minh đầy đủ và ngắn gọn.

Giáo trình có phần bài tập chọn lọc gồm 95 bài, có hướng dẫn giải tương đương với một quyển sách bài tập.

Giáo trình đã được Nhà Xuất bản Giáo dục ấn hành, gồm 164 trang khổ 14.3×20.3 cm.

2. Bài báo " Dung lượng trong không gian tôpô" (Capacities in topological spaces)

Bài báo này có sự cộng tác của Th.S.Bùi Đình Thắng, trường Đại học Sài Gòn.

Bài báo trình bày lý thuyết dung lượng trong không gian tôpô Hausdorff tổng quát. Phần dung lượng có giá trị rời rạc trong bài toán theo chúng tôi là mới và có ý nghĩa. Công việc tiếp theo của chúng tôi là khảo sát tích phân Choquet theo dung lượng có giá trị rời rạc.

Bài báo gồm 10 trang đã được nhận đăng ở Tạp chí Khoa học Tự nhiên trường Đại học Sư phạm TP.Hồ Chí Minh.

3.Luận văn thạc sỹ

Theo hướng đề tài chúng tôi đã hướng dẫn hai luận văn cao học

1) Định lý giới hạn trung tâm và ứng dụng trong Xác suất – Thống kê, của học viên cao học Nguyễn Đình Uông, đã bảo vệ tại trường Đại học Bách khoa TP Hồ Chí Minh, đã bảo vệ năm 2007.

Luận văn đã sử dụng biến đổi Fourier và biến diễn tích phân để chứng minh định lý giới hạn trung tâm tổng quát. Sau đó luận văn trình bày các ứng dụng của định lý trong Xác suất – Thống kê cả trong lý thuyết cũng như các vấn đề cụ thể.

2) Lý thuyết dung lượng trong không gian tôpô, của học viên cao học Phan Phụng Hiệp, sẽ bảo vệ tại trường Đại học Sư phạm TP Hồ Chí Minh trong năm 2008.

Luận văn trình bày lý thuyết dung lượng trong không gian tôpô, định nghĩa tích phân Choquet theo dung lượng. Chứng minh các định lý tương tự dung lượng trong $\mathbb{R}^n$. Cho nhiều kết quả về dung lượng có giá trị hữu hạn, dung lượng đặc trưng và tích phân Choquet theo chúng.

§2. Địa chỉ ứng dụng

Giáo trình Độ đo và Tích phân đã được phát hành và được đông đảo bạn đọc đón nhận.

Chương 1 và chương 2 của giáo trình này có thể làm tài liệu giảng dạy cho sinh viên ngành toán, chương 3 của giáo trình này có thể làm tài liệu tham khảo cho sinh viên và học viên cao học.

Bài báo “ Dung lượng trong không gian tôpô ” có thể làm tiền đề để nghiên cứu tiếp về dung lượng theo hướng đó.

III. Các văn bản

1. Trang bìa, lời nói đầu, mục lục của sách “Độ đo và Tích phân”.

2. Toàn văn bài báo “ Dung lượng trong không gian tôpô ” sẽ in ở Tạp chí Khoa học Tự nhiên trường Đại học Sư phạm TP.Hồ Chí Minh, số 14(48).

3. Thuyết minh đề tài khoa học và công nghệ cấp trường.

DUNG LƯỢNG TRONG KHÔNG GIAN TÔPÔ

Dau The Cap[a] [1], Bui Dinh Thang[b]
[a]University of Pedagogy of HoChiMinh city, HoChiMinh city, VietNam.
[b] SaiGon University, HoChiMinh city, VietNam.

Abstract.

In this note we introduce a notion of capacities in Hausdorff topological spaces, that generalizes the notion of capacity in $\mathbb{R}^n$. The capacities for discrete support will also be investigated.

1 Mở đầu

Lý thuyết dung lượng được đưa ra bởi G.Choquet [1] và được tiếp tục phát triển bởi nhiều tác giả (xem tài liệu tham khảo).

Dung lượng đã được xét trong không gian đo được bất kỳ như là một khái quát của độ đo và gần đây là trong $\mathbb{R}^n$ với σ-đại số Borel. Trong bài này chúng tôi đưa ra khái niệm dung lượng trong không gian tôpô Hausdorff tổng quát. Sau đó chúng tôi đã khảo sát khá triệt để trường hợp dung lượng có giá là tập rời rạc. Trong $\mathbb{R}^n$ cũng mới xét trường hợp dung lượng có giá hữu hạn (xem [9]), do đó kết quả của chúng tôi là mới cả trong trường hợp không gian là $\mathbb{R}^n$.

2 Dung lượng trong không gian tôpô

Trong suốt bài này ta ký hiệu X là một không gian tôpô Hausdorff. $\mathcal{K}(X)$, $\mathcal{F}(X)$, $\mathcal{G}(X)$, $\mathcal{B}(X)$ theo thứ tự là họ các tập con compact, tập con đóng, tập con mở và tập con Borel của X. Ta có

$$\mathcal{K}(X) \subset \mathcal{F}(X) \subset \mathcal{F}(X) \cup \mathcal{G}(X) \subset \mathcal{B}(X)$$

Định nghĩa 2.1. *Hàm tập $T : \mathcal{B}(X) \mapsto [0; +\infty)$ gọi là một dung lượng trên X nếu thỏa mãn các điều kiện sau*

(C_1) $T(\emptyset) = 0$.

[1]Corresponding author.
E-mail addresses: dauthecap@yahoo.com (Dau The Cap),
buidinhthang1975@yahoo.com.vn (Bui Dinh Thang).

(C_2) *T đan dấu cấp hữu hạn, tức là với các tập $A_1, A_2, \ldots A_n \in \mathcal{B}(X)$, $n \geq 2$, đều có*

$$T(\bigcap_{i=1}^{n} A_i) \leq \sum_{I \in \mathcal{I}(n)} (-1)^{\#I+1} T(\bigcup_{i \in I} A_i) \qquad (2.1)$$

trong đó $\mathcal{I}(n) = \{I : \ I \subset \{1, \ldots n\}, \ I \neq \emptyset\}$, $\#I$ là số phần tử của tập I.

(C_3) $T(A) = \sup\{T(C) : \ C \in \mathcal{K}(X), \ C \subset A\}$ *với mọi* $A \in \mathcal{B}(X)$.

(C_4) $T(A) = \inf\{T(G) : \ G \in \mathcal{G}(X), \ G \supset C\}$ *với mọi* $C \in \mathcal{K}(X)$.

Ký hiệu $\mathcal{M}$ là một σ-đại số trên X.

Bổ đề 2.1. *Cho $\mu : \mathcal{M} \mapsto [0; +\infty)$ là một hàm tập thỏa mãn điều kiện sau đây: Với mọi $A, B \in \mathcal{M}$*

$$\mu(A \cap B) = \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cup B). \qquad (2.2)$$

Khi đó với mọi họ các tập $A_1, \ldots A_n \in \mathcal{M}$, $n \geq 2$ ta đều có

$$\mu(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{I \in \mathcal{I}(n)} (-1)^{\#I+1} \mu(\bigcup_{i \in I} A_i). \qquad (2.3)$$

Chứng minh. Ta chứng minh bằng qui nạp theo n. Theo giả thiết (2.2) ta có (2.3) đúng với $n = 2$. Giả sử (2.3) đúng với $n \geq 2$, ta sẽ chứng minh nó đúng với $n + 1$. Ký hiệu

$$\mathcal{I}(n+1) = \mathcal{I}(n) \cup \{n+1\} \cup (\mathcal{I}_n, n+1),$$

ở đây $(\mathcal{I}_n, n+1) = \{I \cup \{n+1\} : \ I \in \mathcal{I}(n)\}$. Đặt $A = \bigcap_{i=1}^{n} A_i$. Theo giả thiết qui nạp ta có

$$
\begin{aligned}
\mu(\bigcap_{i=1}^{n+1} A_i) &= \mu(A\bigcap A_{n+1}) \\
&= \mu(A) + \mu(A_{n+1}) - \mu(A\bigcup A_{n+1}) \\
&= \mu(A) + \mu(A_{n+1}) - \mu\left((\bigcap_{i=1}^{n} A_i)\bigcup A_{n+1}\right) \\
&= \mu(\bigcap_{i=1}^{n} A_i) + \mu(A_{n+1}) - \mu(\bigcap_{i=1}^{n}(A_i \cup A_{n+1})) \\
&= \sum_{I \in \mathcal{I}(n)} (-1)^{\#I+1}\mu(\bigcup_{i\in I} A_i) + \mu(A_{n+1}) - \sum_{I \in \mathcal{I}(n)} (-1)^{\#I+1}\mu(\bigcup_{i\in I'} A_i) \\
&= \sum_{I \in \mathcal{I}(n)} (-1)^{\#I+1}\mu(\bigcup_{i\in I} A_i) + \mu(A_{n+1}) \\
&\quad + \sum_{I' \in (\mathcal{I}(n), n+1)} (-1)^{\#I'+1}\mu(\bigcup_{i\in I'} A_i) \\
&= \sum_{I \in \mathcal{I}(n+1)} (-1)^{\#I+1}\mu(\bigcup_{i\in I} A_i),
\end{aligned}
$$

trong đó $I' = I \cup \{n+1\}$, $I \in \mathcal{I}(n)$. Vậy (2.3) đúng với $n+1$. □

Định nghĩa 2.2. *Một độ đo μ trên $\mathcal{B}(X)$ gọi là độ đo Borel chính qui nếu với mọi $E \in \mathcal{B}(X)$ đều có*

1. $\mu(E) = \inf\{\mu(U) : \ U \in \mathcal{G}(X), \ U \supset E\}$;
2. $\mu(E) = \sup\{\mu(C) : \ C \in \mathcal{K}(X), \ C \subset E\}$.

Từ bổ đề 2.1 và tính chính qui của độ đo Lebesgue trên $\mathbb{R}^n$ ta có

Định lý 2.1. a) *Hàm tập $\mu : \mathcal{B}(X) \mapsto [0, +\infty)$ thoả mãn (C_1), (C_3), (C_4) và (2.2) là một dung lượng trên X.*

b) *Mọi độ đo chính qui trên $\mathcal{B}(X)$ đều là dung lượng trên X. Đặc biệt độ đo Lebesgue m trên $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ là dung lượng trên $\mathbb{R}^n$.*

Định nghĩa 2.3. *Hàm tập* $T : \mathcal{M} \mapsto [0, +\infty)$ *gọi là cực đại nếu*

$$T(A \cup B) = \max\{T(A),\ T(B)\}$$

với mọi $A, B \in \mathcal{M}$.

Bổ đề 2.2. *Nếu* T *là hàm tập cực đại thì mọi họ* $A_1, \dots A_n \in \mathcal{M}$ *ta đều có*

$$\sum_{I \in \mathcal{I}(n)} (-1)^{\#I+1} T(\bigcup_{i \in I} A_i) = \min\{T(A_i) :\ 1 \leq i \leq n\}$$

Chứng minh. Ta chứng minh bằng qui nạp theo n. Với mọi $A_1, A_2 \in \mathcal{M}$ ta có

$$\begin{aligned} T(A_1) + T(A_2) - T(A_1 \cup A_2) &= T(A_1) + T(A_2) - \max\{T(A_1), T(A_2)\} \\ &= \min\{T(A_1), T(A_2)\}, \end{aligned}$$

tức là khẳng định đúng với $n = 2$. Giả sử khẳng định đúng với $n \geq 2$. Với mọi họ $A_1, \dots A_{n+1} \in \mathcal{M}$, không mất tổng quát ta có thể giả thiết

$$T(A_1) = \min\{T(A_i) :\ 1 \leq i \leq n+1\}$$

$$T(A_{n+1}) = \max\{T(A_i) :\ 1 \leq i \leq n+1\}.$$

Bởi giả thiết qui nạp ta có

$$\begin{aligned} \sum_{I \in \mathcal{I}(n+1)} (-1)^{\#I+1} T(\bigcup_{i \in I} A_i) &= \sum_{I \in \mathcal{I}(n)} (-1)^{\#I+1} T(\bigcup_{i \in I} A_i) + T(A_{n+1}) \\ &\quad + \sum_{I' \in (\mathcal{I}_n, n+1)} (-1)^{\#I'+1} T(\bigcup_{i \in I'} A_i) \\ &= T(A_1) + T(A_{n+1}) \\ &\quad + (-C_n^1 + C_n^2 - \dots + (-1)^n C_n^n) T(A_{n+1}) \\ &= T(A_1) + (1-1)^n T(A_{n+1}) \\ &= T(A_1). \end{aligned}$$

Vậy khẳng định đúng với $n + 1$. □

Định nghĩa 2.4. *Hàm tập* $T : \mathcal{B}(X) \mapsto [0, +\infty)$ *gọi là độ đo cực đại nếu nó là hàm tập cực đại và thỏa mãn các điều kiện* (C_1), (C_3), (C_4).

Từ bổ đề 2.2 ta có định lý sau

Định lý 2.2. *Mọi độ đo cực đại trên X là dung lượng trên X.*

Định lý 2.3. *Cho T là một dung lượng trên X. Khi đó*

a) *T là hàm tập không giảm, tức là mọi A, $B \in \mathcal{B}(X)$, $A \subset B$ thì $T(A) \leq T(B)$.*

b) *Với mọi A, $B \in \mathcal{B}(X)$, $A \cap B = \emptyset$ đều có*

$$T(A) + T(B) \geq T(A \cup B).$$

Chứng minh. **a)** Theo (C_3)

$$\begin{aligned} T(A) &= \sup\{T(C) : \ C \subset A, \ C \in \mathcal{K}(X)\} \\ &\leq \sup\{T(C) : \ C \subset B, \ C \in \mathcal{K}(X)\} \\ &= T(B). \end{aligned}$$

b) $0 = T(A \cap B) \leq T(A) + T(B) - T(A \cup B)$.
Do đó $T(A) + T(B) \geq T(A \cup B)$.

□

Hệ quả 2.1. *Nếu A, $B \in \mathcal{B}(X)$ và $T(A) = 0$ thì $T(A \cup B) = T(B)$.*

Định nghĩa 2.5. *Ta gọi giá của dung lượng T, ký hiệu* supp T *là tập đóng S nhỏ nhất của X sao cho*

$$T(X \setminus S) = 0.$$

Hệ quả 2.2. *Với mọi dung lượng T trên X ta có*

a) $T(\text{supp } T) \geq T(B) \quad \forall B \in \mathcal{B}(X)$

b) $T(\text{supp } T) = T(X)$.

Chứng minh. **a)** Đặt $A = B \setminus \text{supp } T$, ta có $A \subset X \setminus \text{supp } T$ nên $T(A) = 0$.
Vì $B = A \cup (B \cap \text{supp } T)$ nên theo hệ quả 2.1

$$T(B) = T(B \cap \text{supp } T) \leq T(\text{supp } T).$$

b) Theo a) ta có $T(\text{supp } T) \geq T(X)$ và do tính không giảm nên $T(\text{supp } T) \leq T(X)$. Vậy $T(\text{supp } T) = T(X)$.

□

Định nghĩa 2.6. *Một dung lượng T trên X gọi là dung lượng xác suất nếu $T(\text{supp } T) = T(X) = 1$.*