Giải tích hàm nâng cao

1. Dạng giải tích của định lý Hahn-Banach.

Ta có $\|g\| = \sup_{x \in G} \dfrac{|g(x)|}{\|x\|} = \sup_{x \in G} \dfrac{|g(x+\lambda v)|}{\|x+\lambda v\|} \leq 1$

Vì $d(v, M) = \delta > 0$, neân

$(\exists z \in M, 0 < r < 1) \ \|v - z\| \leq r^{-1}\delta$

$\Leftrightarrow r\|v - z\| \leq \delta$

Khi đó $|g(v - z)| = \delta \geq r\|v - z\|$

Vậy $\|g\| \geq \dfrac{|g(v-z)|}{\|v - z\|} \geq r$

Vì *r* tùy ý, *r* < *1*, nên $\|g\| \geq 1$

$\Rightarrow \|g\| = 1$

1. Dạng giải tích của định lý Hahn-Banach.

Theo hệ quả 1, tồn tại phiếm hàm tuyến tính liên tục *F* trên *E*:

$F|_G = g$

$\Rightarrow (\forall x \in M) \ F(x) = g(x) = 0$

và $\|F\| = \|g\| = 1$ ■.

Hệ quả 3

Giả sử M là không gian con của không gian định chuẩn E và

$$v \in E \setminus M: \ d(v, M) = \inf_{x \in M} \| v - x \| = \delta > 0$$

Khi đó tồn tại một phiếm hàm tuyến tính liên tục F trên E, sao cho

1. $(\forall x \in M) \ \ F(x) = 0$
2. $F(v) = 1$
3. $\| F \| = \dfrac{1}{d(v, M)}$

Chứng minh

Đặt $G = \langle M, v \rangle$

$$g : G \to R$$

$$g(x + \lambda v) = \lambda$$

Tương tự phần chứng minh hệ quả 3.

Bài tập 1

Với mọi $v \neq 0$ của không gian định chuẩn *E*, tồn tại phiếm hàm tuyến tính liên tục *F* trên *E* sao cho

1. $\|F\| = 1$

2. $F(v) = \|v\|$

Giải

Sử dụng Hệ quả 2 (slide 19), đặt $M = \{0\}$

Bài tập 2

Cho M là không gian con đóng của không gian định chuẩn *E*, $v \notin M$. Khi đó tồn tại phiếm hàm tuyến tính liên tục *F* trên *E* sao cho

1. $F(v) = 1$

2. $(\forall x \in M)\ F(x) = 0$

Giải

Vì *M* đóng, $v \notin M$. Khi đó tồn tại hình cầu $B(v, M)$ nằm ngoài *M*, suy ra $d(v, M) > 0$

Sử dụng hệ quả 3.

1. Dạng giải tích của định lý Hahn-Banach.

Bài tập 3

Cho x và y là hai véctơ khác nhau của không gian định chuẩn E. Khi đó tồn tại phiếm hàm tuyến tính liên tục F trên E sao cho

$$F(x) \neq F(y)$$

Giải

$$x \neq y \Leftrightarrow x - y \neq 0$$

Sử dụng bài tập 1.

1. Dạng giải tích của định lý Hahn-Banach.

Bài tập 4

Cho họ véctơ $M = \{x_1, x_2, ..., x_m\}$ của không gian định chuẩn E, véctơ x không là tổ hợp tuyến tính của M. Chứng minh rằng tồn tại phiếm hàm tuyến tính liên tục F trên E sao cho

1. $F(x) = 1$
2. $(\forall x_1 \in M)\ F(x_i) = 0$

Giải

$$L(M) = < x_1, x_2, ..., x_m >$$

Khi đó $L(M)$ là không gian con đóng của E. Sử dụng bài tập 2.

Bài tập 6

Cho E là không gian định chuẩn và f là phiếm hàm tuyến tính liên tục trên E, f khác không. Chứng minh rằng siêu phẳng

$$\{x \in E : f(x) = \lambda\}$$

là một tập khác rỗng.

Hướng dẫn. Sử dụng bài tập 1.