<u>CHỦ ĐỀ I</u>

KHOẢNG CÁCH VÀ GÓC TRONG KHÔNG GIAN

I. TÓM TẮT KIẾN THỨC

<u>A. KHỎANG CÁCH.</u>

1) Khỏang cách từ một điểm M đến một đường thẳng a trong không gian là độ dài đọan thẳng MH, trong đó MH $\perp$ a với H $\in$ a.

2) Khỏang cách từ một điểm M đến mặt phẳng (P) là độ dài đọan MH, trong đó MH $\perp$ (P) với H $\in$ (P).

3) Nếu đường thẳng a // (P) thì khỏang cách từ a đến (P) là khỏang cách từ một điểm M bất kì của a đến (P).

4) Nếu hai mặt phẳng song song thì khỏang cách giữa chúng là khỏang cách từ một điểm bất kì của mặt phẳng này đến mặt phẳng kia

5) Hai đường thẳng chéo nhau a và b luôn luôn có đường thẳng chung Δ. Nếu Δ cắt a và b lần lượt tại A và B thì độ dài đọan thẳng AB gọi là khỏang cách giữa a và b chéo nhau nói trên.

Muốn tìm khỏang cách giữa hai đường thẳng chéo nhau người ta còn có thể:

a) hoặc tìm khỏang cách từ đường thẳng thứ nhất đến mặt phẳng chứa đường thẳng thứ hai và song song với đường thẳng thứ nhất.
b) hoặc tìm khỏang cách giữa hai mặt phẳng lần lượt chứa hai đường thẳng đó và song song với nhau.

<u>B. GÓC.</u>

1) Góc $\varphi\,(0 \le \varphi \le 90^0)$ giữa hai đường thẳng trong không gian là góc giữa hai đường thẳng cùng đi qua một điểm tùy ý trong không gian và lần lượt song song với hai đường thẳng đã cho.

2) Góc giữa một đường thẳng và một mặt phẳng là góc giữa đường thẳng đó và hình chiếu vuông góc của nó trên mặt phẳng.

3) Góc giữa hai mặt phẳng là góc giữa hai đường thẳng bất kì lần lượt vuông góc với hai mặt phẳng đó.

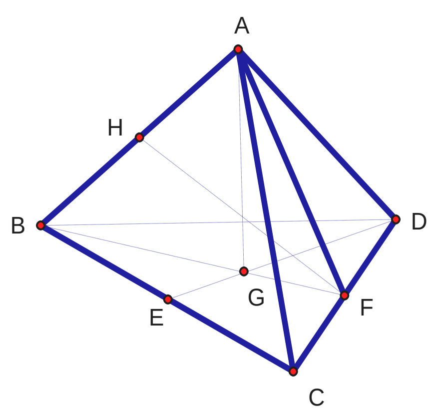
II. RÈN LUYỆN

<u>Bài 1</u>: Cho tứ diện đều ABCD cạnh a.

a) Tính khỏang cách từ điểm A tới mặt phẳng BCD.
b) Tính khỏang cách giữa hai cạnh đối diện AB và CD.

Giải

a) Gọi G là trọng tâm tam giác đều BCD và E = BC $\cap$ DG , F = CD $\cap$ BG



Ta có : BF = DE = AF = a = $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ và $\begin{cases} CD \perp BF \\ CD \perp AF \end{cases} \Rightarrow CD \perp (ABF) \Rightarrow CD \perp AG$

Chứng minh tương tự ta có BC$\perp$AG

Vậy AG$\perp$(BCD) và AG là khỏang cách từ A đến (BCD).

Ta có: $AG^2 = AB^2 - BG^2 = a^2$ - $\left(\frac{2}{3}\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{2a^2}{3}$. Vậy AG = $\frac{a\sqrt{6}}{3}$

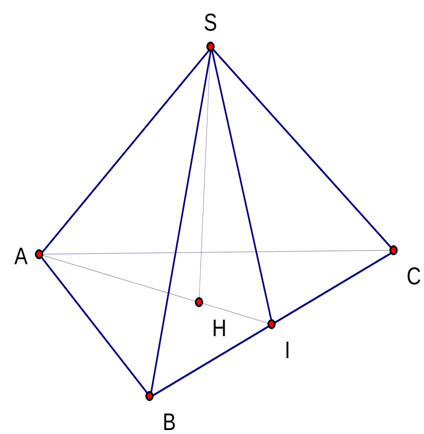
b) Gọi H là trung điểm AB . Vì CD$\perp(ABF)$ nên CD$\perp HF$. Mặt khác FA = FB nên FH$\perp AB$. Vậy FH là khỏang cách giữa hai cạnh đối AB và CD.

Ta có $HF^2 = AF^2 - AH^2 = \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{2}$. Vậy HF = $\frac{a\sqrt{2}}{2}$

<u>Bài 2.</u> Cho hình chóp tam giác đều SABC có cạnh đáy bằng 3a, cạnh bên bằng 2a. Tính

a) Góc giữa cạnh bên và mặt đáy.
b) Góc giữa mặt bên và mặt đáy

Giải



a) Do SABC là hình chóp tam giác đều nên góc giữa các cạnh bên và đáy bằng nhau.

Gọi H là hình chiếu của S lên mp(ABC). Ta có H là trọng tâm của tam giác ABC.

AH là hình chiếu của SA lên mp(ABC) nên góc SAH là góc giữa cạnh bên SA và đáy.

Ta có: AI = $\frac{3a\sqrt{3}}{2}$, AH = $\frac{2}{3}AI = a\sqrt{3}$

Cos SAH =. $\frac{AH}{SA} = \frac{a\sqrt{3}}{2a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Vậy $\widehat{SAH} = 30^0$

b) Các mặt bên của hình chóp tao với đáy các góc bằng nhau.

Ta có $\begin{cases} AI \perp BC \\ SI \perp BC \end{cases} \Rightarrow \angle SIA$ là góc giữa mặt bên và mặt đáy.

SH = SA sin 30^0 = a , HI = $\frac{AH}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

Vậy tan SIH = $\frac{SH}{HI} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

CHỦ ĐỀ II

THỂ TÍCH KHỐI ĐA DIỆN

I.TÓM TẮT KIẾN THỨC

1. Thể tích của khối hộp chữ nhật.

$\boxed{V = abc}$ (a, b, c là 3 kích thước)

2. Thể tích của khối lập phương

$\boxed{V = a^3}$

3. Thể tích của khối lăng trụ

$\boxed{V = B.h}$

4. Thể tích của khối chóp.

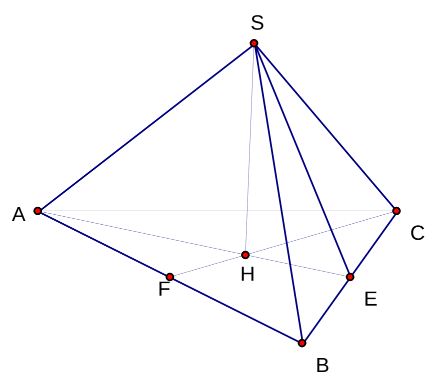
$\boxed{V = \frac{1}{3}B.h}$ (B là diện tích của đáy)

II. RÈN LUYỆN.

Bài 1: Cho hình chóp tam giác đều S.ABC có cạnh đáy bằng a, các cạnh bên SA, SB, SC đều tạo với đáy một góc 60^o.

a) Tính thể tích của khối chóp S.ABC.
b) Tính khỏang cách từ điểm A đến mp(SBC).

Giải



a) Gọi H là hình chiếu của S lên mp(ABC), ta có H là trọng tâm tam giác ABC

AH là hình chiếu của SA lên mp(ABC) nên g(SAH) = 60^o

$$\text{Ta có: } AE = \frac{a\sqrt{3}}{2},\ AH = \frac{a\sqrt{3}}{3},\ HE = \frac{a\sqrt{3}}{6}$$

$$SH = AH.\tan 60^o = \frac{a\sqrt{3}}{3}.\sqrt{3} = a$$

$$\text{Vậy } V_{SABC} = \frac{1}{3}\frac{a^2\sqrt{3}}{4}.a = \frac{a^3\sqrt{3}}{12}$$

b)Gọi AK là khỏang cách từ A đến mp(SBC)

$$\text{Ta có: } V_{SABC} = V_{ASBC} = \frac{1}{3}S_{SBC}AK \Rightarrow AK = \frac{3V_{SABC}}{S_{SBC}}$$

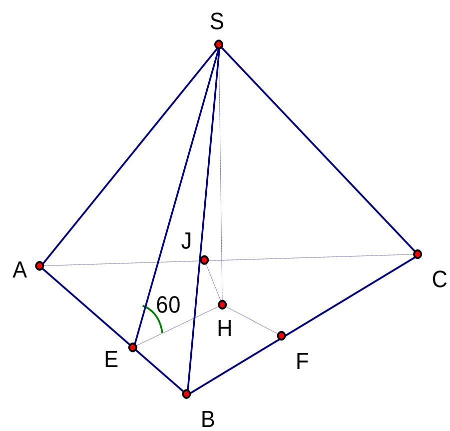
$$SE^2 = SH^2 + HE^2 = a^2 + \left(\frac{a\sqrt{6}}{6}\right)^2 = a^2 + \frac{6a^2}{36} = \frac{42a^2}{36} \Rightarrow SE = \frac{a\sqrt{42}}{6}$$

$$S_{SBC} = \frac{1}{2}a.\frac{a\sqrt{42}}{6} = \frac{a^2\sqrt{42}}{12}$$

$$\text{Vậy SK} = \frac{3.a^3\sqrt{3}}{12}.\frac{12}{a^2\sqrt{42}} = \frac{3a\sqrt{3}}{\sqrt{42}}$$

Bài 2: Cho hình chóp tam giác S.ABC có AB = 5a, BC = 6a, CA = 7a. Các mặt bên SAB, SBC, SCA tạo với đáy một góc 60^o .Tính thể tích khối chóp SABC.

Giải



Hạ SH $\perp (ABC)$, kẽ HE $\perp$ AB, HF $\perp$ BC, HJ $\perp$ AC suy ra SE $\perp$ AB, SF $\perp$ BC, SJ $\perp$ AC

Ta có $\angle SEH = \angle SFH = \angle SJH = 60^0 \Rightarrow \Delta SAH = \Delta SFH = \Delta SJH$ nên HE =HF = HJ = r (r là bán kính đường tròn ngọai tiếp ΔABC)

Ta có $S_{ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ với p = $\frac{a+b+c}{2} = 9a$

Nên $S_{ABC} = \sqrt{9.4.3.2}\ a^2$

Mặt khác S_{ABC} = p.r $\Rightarrow r = \frac{S}{p} = \frac{2\sqrt{6}\ a}{3}$

Tam giác vuông SHE: SH = r.tan 60^0 = $\frac{2\sqrt{6}\ a}{3}.\sqrt{3} = 2\sqrt{2}\ a$

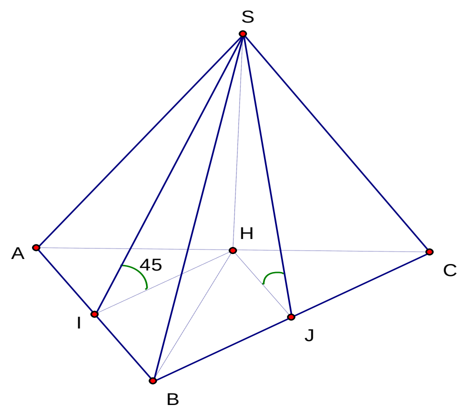
Vậy $V_{SABC} = \frac{1}{3}6\sqrt{6}\ a^2.2\sqrt{2}\ a = 8\sqrt{3}\ a^3$.

Bài 3: Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B, có BC = a. Mặt bên SAC vuông góc với đáy, các mặt bên còn lại đều tạo với mặt đáy một góc 45^0.

a) Chứng minh rằng chân đường cao khối chóp trùng với trung điểm cạnh AC.
b) Tính thể tích khối chóp SABC.

Giải

a) Kẽ SH $\perp$ BC vì mp(SAC) $\perp$ mp(ABC) nên SH $\perp$ mp(ABC). Gọi I, J là hình chiếu của H lên AB và BC $\Rightarrow$ SI $\perp$ AB, SJ $\perp$ BC, theo giả thiết $\angle SIH = \angle SJH = 45^0$



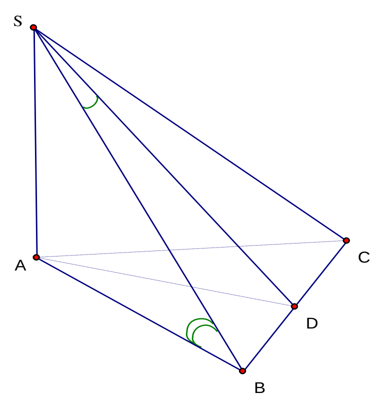
Ta có: $\Delta SHI = \Delta SHJ \Rightarrow HI = HJ$ nên BH là đường phân giác của $\angle ABC$, từ đó suy ra H là trung điểm của AC.

b) Ta có HI = HJ = SH = $\frac{a}{2}$

$V_{SABC} = \frac{1}{3} S_{ABC}.SH = \frac{a^3}{12}$

<u>Bài 4</u> : Cho hình chóp SABC, đáy ABC là tam giác cân tại A có trung tuyến AD = a, hai mặt bên SAB và SAC cùng vuông góc với đáy. Cạnh bên SB hợp với đáy một góc α và hợp với mặt phẳng SAD một góc β .Tính thể tích khối chóp SABC theo a, α, β .

Giải



Ta có : $\begin{cases} (SAB) \cap (SAC) = SA \\ (SAB) \perp (ABC) \\ (SAC) \perp (ABC) \end{cases} \Rightarrow SA \perp (ABC)$

+ AB là hình chiếu của SB lên mp(ABC) nên g(SB, (ABC)) = $\angle SBA = \alpha$

Ta có : $\begin{cases} BC \perp AD \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAD)$

+ SD là hình chiếu của SB lên mp(SAD) nên g(SB, (SAD)) = $\angle BSD = \beta$

Ta có : $SB^2 = SA^2 + AB^2 = SA^2 + AD^2 + BD^2$ (1)

Mà SA = SB.sinα , BD = SB.sinβ

$$(1) \Leftrightarrow SB^2 = SB^2.\sin^2\alpha + a^2 + SB^2.\sin^2\beta \Leftrightarrow SB^2 - SB^2.\sin^2\alpha - SB^2.\sin^2\beta = a^2$$

$$\Leftrightarrow SB^2(1-\sin^2\alpha - \sin^2\beta) = a^2 \Leftrightarrow SB^2(\cos^2\alpha - \sin^2\beta) = a^2$$

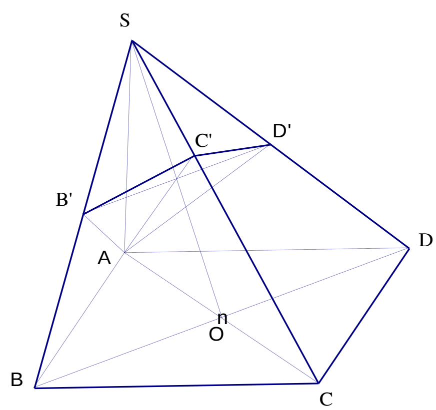
$$\Leftrightarrow SB = \frac{a}{\sqrt{\cos^2\alpha - \sin^2\beta}}$$

$$\Rightarrow SA = \frac{a\sin\alpha}{\sqrt{\cos^2\alpha - \sin^2\beta}}, \quad BD = \frac{a\sin\beta}{\sqrt{\cos^2\alpha - \sin^2\beta}}$$

$$V = \frac{1}{3}S_{ABC}SA = \frac{1}{3}BD.AD.SA = \frac{1}{3}.\frac{a^3\sin\alpha.\sin\beta}{(\cos^2\alpha - \sin^2\beta)} = \frac{a^3\sin\alpha.\sin\beta}{3\cos(\alpha+\beta).\cos(\alpha-\beta)}$$

Bài 5: Cho khối chóp SABCD có đáy là hình vuông cạnh a, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và SA = 2a.Gọi B’, D’lần lượt là hình chiếu của A lên SB và SD. Mặt phẳng (AB’D’) cắt SC tại C’. Tính thể tích khối chóp SAB’C’D’.

Giải



Ta có AB’ $\perp$ SB, AB’ $\perp$ CB $\Rightarrow$ AB’ $\perp$ (SBC) $\Rightarrow$ AB’ $\perp$ SC (a)

Tương tự AD’ $\perp SC$ (b)

Từ (a) và (b) suy ra SC $\perp (AB'C'D') \Rightarrow SC \perp AC'$

Do tính đối xứng, ta có $V_{SAB'C'D'} = 2V_{SAB'C'}$

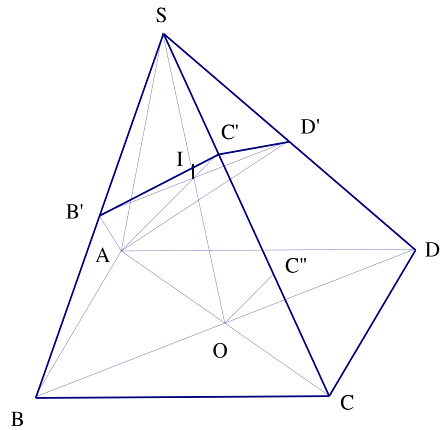
Ta có: $\frac{V_{S.AB'C'}}{V_{S.ABC}} = \frac{SB'}{SB}.\frac{SC'}{SC} = \frac{SB'.SB}{SB^2}.\frac{SC'.SC}{SC^2} = \frac{SA^2}{SB^2}.\frac{SA^2}{SC^2} = \frac{4a^2}{5a^2}.\frac{4a^2}{6a^2} = \frac{8}{15}$

Mà $V_{SABC} = \frac{1}{3}.\frac{a^2}{2}.2a = \frac{a^3}{3} \Rightarrow V_{SAB'C'} = \frac{8}{15}.\frac{a^3}{3} = \frac{8a^3}{45}$

Vậy $V_{SAB'C'D'} = \frac{16a^3}{45}$

Bài 6: Cho khối chóp SABCD có đáy ABCD là hình bình hành. Gọi B’, C’ lần lượt là trung điểm của SB và SD. Mặt phẳng AB’D’cắt SC tại C’.Tính tỉ số thể tích của hai khối chóp SAB’C’D’ và SABCD.

Giải



Gọi O = $AC \cap BD$.Ta có AC', B'D', SO đồng quy tại I và I là trung điểm của SO

Kẻ OC" // AC' .Ta có SC' = C'C" = C"C, nên $\frac{SC'}{SC} = \frac{1}{3}$.

Ta có $\frac{V_{SAB'C'}}{V_{SABC}} = \frac{SB'}{SB}.\frac{SC'}{SC} = \frac{1}{2}.\frac{1}{3} = \frac{1}{6} \Rightarrow \frac{V_{SAB'C'}}{V_{SABCD}} = \frac{1}{12}$

Tương tự ta cũng có: $\frac{V_{SAC'D'}}{V_{SABCD}} = \frac{1}{12}$

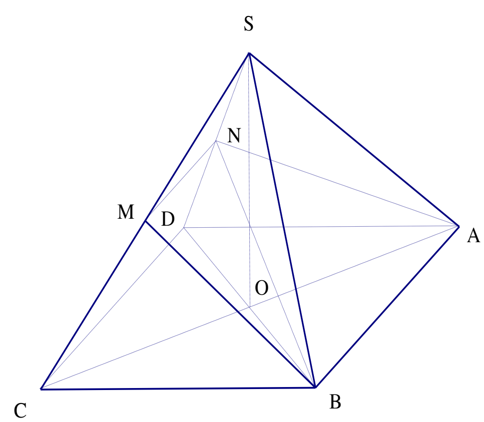
Vậy $\frac{V_{SAb'C'D'}}{V_{SABCD}} = \frac{V_{SAB'C'} + V_{SAC'D'}}{V_{SABCD}} = \frac{1}{12} + \frac{1}{12} = \frac{1}{6}$

Bài 7: Cho khối chóp tứ giác đều SABCD. Một mặt phẳng (α) qua A, B và trung điểm M của SC . Tính tỉ số thể tích của hai phần khối chóp bị phân chia bởi mặt phẳng đó.

Giải.

Kẻ MN // CD (N $\in SD$) thì hình thang ABMN là thiết diện của khối chóp khi cắt bởi mặt phẳng (ABM).

+ $\frac{V_{SAND}}{V_{SADB}} = \frac{SN}{SD} = \frac{1}{2} \Rightarrow V_{SANB} = \frac{1}{2}V_{SADB} = \frac{1}{4}V_{SABCD}$



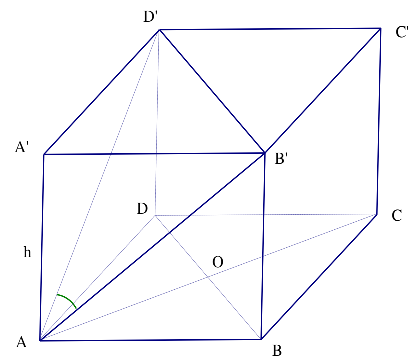
$$+\ \frac{V_{SBMN}}{V_{SBCD}}=\frac{SM}{SC}.\frac{SN}{SD}=\frac{1}{2}.\frac{1}{2}=\frac{1}{4}\Rightarrow V_{SBMN}=\frac{1}{4}V_{SBCD}=\frac{1}{8}V_{SABCD}$$

Mà $V_{SABMN} = V_{SANB} + V_{SBMN} = \frac{3}{8}V_{SABCD}$. Suy ra $V_{ABMN.ABCD} = \frac{5}{8}V_{SABCD}$

Do đó : $\frac{V_{SABMN}}{V_{ABMN.ABCD}}=\frac{3}{5}$

<u>Bài 7:</u> Cho hình lăng trụ tứ giác đều ABCD.A'B'C'D' có chiều cao bằng h và góc của hai đường chéo của hai mặt bên kề nhau phát xuất từ một đỉnh là α. Tính thể tích của lăng trụ.

Giải



Gọi x là cạnh của đáy, ta có B'D' = x$\sqrt{2}$, $AB' = AD' = \sqrt{h^2+x^2}$

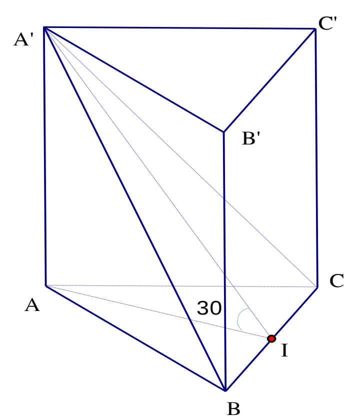
$$\Delta AB'D': B'D'^2 = AB'^2 + AD'^2 - 2AB'.AD'.\cos\alpha = 2AB'^2 - 2AB'^2\cos\alpha$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 = 2(h^2+x^2) - 2(h^2+x^2)\cos\alpha \Leftrightarrow x^2 = (h^2+x^2) - (h^2+x^2)\cos\alpha$$

$$\Leftrightarrow x^2 = \frac{h^2(1-\cos\alpha)}{\cos\alpha}$$ .Vậy V = x^2.h = $\frac{h^3(1-\cos\alpha)}{\cos\alpha}$

<u>Bài 8:</u> Đáy của lăng trụ đứng tam giác ABC.A'B'C' là tam giác đều . Mặt (A'BC) tạo với đáy một góc 30^0 và diện tích tam giác A'BC bằng 8. Tính thể tích khối lăng trụ.

Giải.



Giả sử BI = x $\Rightarrow AI = \dfrac{2x\sqrt{3}}{2} = x\sqrt{3}$

Ta có $\begin{cases} AI \perp BC \\ A'I \perp BC \end{cases} \Rightarrow \angle A'IA = 30^0$

$\Delta A'AI : A'I = AI : \cos 30^0 = \dfrac{2AI}{\sqrt{3}} = \dfrac{2x\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 2x$

A’A = AI.tan 30^0 = $x\sqrt{3}.\dfrac{\sqrt{3}}{3} = x$

Vậy $V_{ABC.A'B'C'}$ = CI.AI.A’A = $x^3\sqrt{3}$

Mà $S_{A'BC}$ = BI.A’I = x.2x = 8 $\Rightarrow x = 2$

Do đó $V_{ABC.A'B'C'} = 8\sqrt{3}$

Bài 9: Cho hình hộp ABCD.A’B’C’D’ có đáy là hình chữ nhật với AB = $\sqrt{3}$, AD = $\sqrt{7}$. Hai mặt bên (ABB’A’) và (ADD’A’) lần lượt tạo với đáy những góc 45^0 và 60^0. Tính thể tích khối lăng trụ đó nếu biết cạnh bên bằng 1.

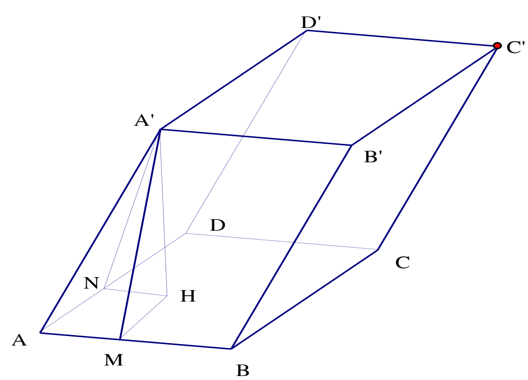
Giải

Kẻ A’H $\perp (ABCD)$, HM $\perp AB$, $HN \perp AD \Rightarrow A'M \perp AB$, $A'N \perp AD$ (định lý 3 đường vuông góc) $\Rightarrow \angle A'MH = 45^0, \angle A'NH = 60^0$

Đặt A’H = x . Khi đó A’N = x : sin 60^0 = $\dfrac{2x}{\sqrt{3}}$

AN = $\sqrt{AA'^2 - A'N^2} = \sqrt{\dfrac{3-4x^2}{3}} = HM$

Mà HM = x.cot 45^0 = x



Nghĩa là x = $\sqrt{\dfrac{3-4x^2}{3}} \Rightarrow x = \sqrt{\dfrac{3}{7}}$

Vậy $V_{ABCD.A'B'C'D'}$ = AB.AD.x = $\sqrt{3}.\sqrt{7}.\sqrt{\dfrac{3}{7}} = 3$

CHỦ ĐỀ III

DIỆN TÍCH HÌNH TRÒN XOAY- THỂ TÍCH KHỐI TRÒN XOAY

I.TÓM TẮC KIẾN THỨC.

1. Diện tích xung quanh hình trụ: $S_{xq} = 2.\pi.R.l$ (R: bán kính đáy, l : độ dài đường sinh)
2. Thể tích khối trụ: V = $\pi.R^2.h$ (h : độ dài đường cao)
3. Diện tích xung quanh hình nón: $S_{xq} = \pi.R.l$
4. Thể tích khối nón: V = $\frac{1}{3}.\pi.R^2.h$
5. Diện tích mặt cầu: S = $4.\pi.R^2$
6. Thể tích khối cầu: V = $\frac{4}{3}\pi.R^3$

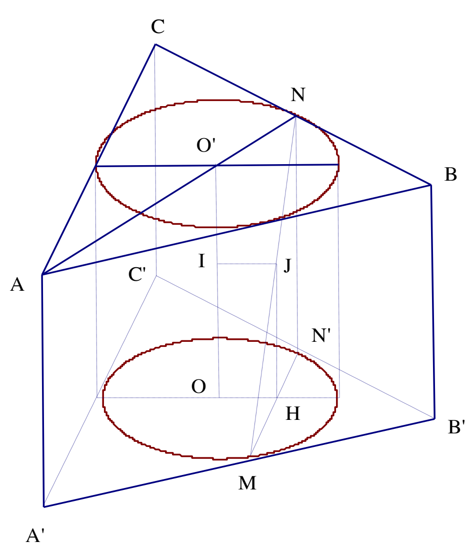
II.RÈN LUYỆN.

Bài 1: Cho hình trụ có bán kính đáy bằng a và đường cao bằng a$\sqrt{2}$.

a) M và N là hai điểm lưu động trên hai đáy sao cho góc của MN và đáy bằng α . Tính khỏang cách từ trục đến MN.

b) Tính thể tích và diện tích xung quanh của lăng trụ tam giác đều ngọai tiếp hình trụ

Giải.



a) Kẻ đường sinh NN’ ta có $\angle NMN' = \alpha$, kẻ $OH \perp MN'$ thì OH bằng khỏang cách giữa trục OO’ và MN.

Ta có: MN’ = NN’. cotα = $a.\sqrt{2}.\cot\alpha$

Δ vuông OMH : $OH^2 = OM^2 - MH^2 = a^2 - \frac{a^2}{2}\cot^2\alpha = \frac{a^2}{2}(2-\cot^2\alpha)$

$\Rightarrow OH = a\sqrt{\frac{2-\cot^2\alpha}{2}}$

b) Gọi x là cạnh của tam giác đều ngọai tiếp đường tròn đáy của hình trụ.