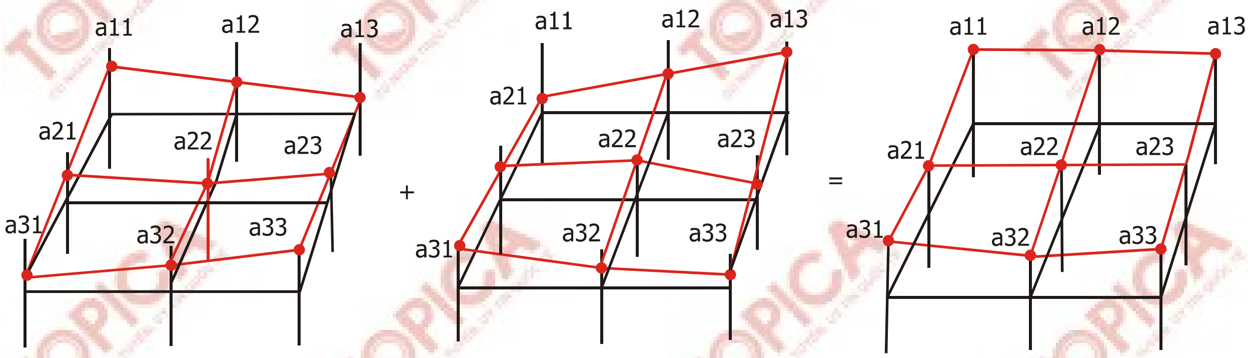
Bài 3: HỆ PHƯƠNG TRÌNH ĐẠI SỐ TUYẾN TÍNH



$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 \end{vmatrix}$$

Mục tiêu

- Nắm được khái niệm về các loại hệ phương trình đại số tuyến tính.
- Nắm được phương pháp giải hệ phương trình có số phương trình và số ẩn bằng nhau theo phương pháp Cramer và phương pháp Gauss.
- Nắm được phương pháp giải hệ phương trình đại số tuyến tính tổng quát; hệ phương trình thuần nhất.
- Giải được các bài toán về hệ phương trình đại số tuyến tính, theo cách tự luận và theo trắc nghiệm.

Thời lượng

Bạn đọc nên để 15 giờ để nghiên cứu LT + 8 giờ làm bài tập.

Nội dung

Hệ phương trình đại số tuyến tính là một trong những vấn đề quan trọng của Đại số tuyến tính. Các hệ số cũng như các giá trị của các ẩn số là các số thực.Trong dạng tổng quát số phương trình và số ẩn số có thể là bất kỳ và hai loại số này có thể không bằng nhau.

Bài 3 gồm những nội dung sau:

- Dạng của Hệ phương trình đại số tuyến tính
- Giải hệ phương trình đại số tuyến tính
- Hệ phương trình thuần nhất
- Phương pháp Gauss

Bài toán mở đầu: Mô hình cân bằng

Trong mô hình ma trận nói ở chương trước, ta đã có $a_{ij}x_j$ là lượng sản phẩm ngành i cung cấp cho ngành j. Tổng lượng sản phẩm ngành i coi là chi phí để sản xuất sản phẩm cho cả n ngành là:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j$$

Lượng sản phẩm ngành i còn lại kí hiệu là y_i thường được gọi là sản phẩm cuối cùng của ngành i. Nếu mô hình là cân bằng thì ta có

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + y_i = x_i,\ i = 1,2,\dots, n$$

Ta có một hệ phương trình đại số tuyến tính n phương trình và n ẩn số. Ở đây

x_i, $i = 1,2,\dots, n$ là các ẩn số

a_{ij} và y_i là các hằng số đã biết.

3.1. Dạng của hệ phương trình đại số tuyến tính

Dạng tổng quát của hệ phương trình đại số tuyến tính được viết như sau

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \tag{3.1}$$

Hệ này được viết dưới dạng ma trận là

$$Ax = b \tag{3.2}$$

ở đây A là ma trận được thành lập từ các hệ số của các biến

$$A = \left(a_{ij}\right)_{m\times n}$$

x: véc tơ cột của các biến.

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \tag{3.3}$$

b: véc tơ cột các số hạng tự do.

$$b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \tag{3.4}$$

Hệ phương trình đại số tuyến tính được gọi là:

- thuần nhất nếu tất cả các $b_i = 0, i = 1, 2, \dots, m$;
- không thuần nhất nếu có ít nhất một $b_i \neq 0$;

- tương thích nếu hệ có ít nhất một nghiệm, tức là tồn tại một bộ giá trị của $x_1, x_2, ..., x_n$ mà khi thay vào sẽ có một đồng nhất thức;
- không tương thích nếu không có một nghiệm nào;
- xác định nếu hệ chỉ có một nghiệm duy nhất;
- bất định nếu tồn tại quá một nghiệm.

Muốn giải hệ phương trình đại số tuyến tính thì trước hết phải xác định xem hệ đã cho tương thích hay không tương thích. Nếu là hệ tương thích thì lại phải xem hệ là xác định hay bất định. Nếu hệ phương trình là xác định thì ta đi tìm nghiệm duy nhất của nó.

Ví dụ 1:

$$\begin{cases} x - 2y = 1 \\ x + 2y = 5 \end{cases}$$

là một hệ hai phương trình 2 ẩn.

Ví dụ 2:

$$\begin{cases} 2x - 3y + z = -1 \\ x + y + z = 6 \\ 3x + y - 2z = -1 \end{cases}$$

là một hệ 3 phương trình 3 ẩn.

Ví dụ 3:

$$\begin{cases} 2x - 3y + 4z = 5 \\ 3x + 2y - 7z = 6 \end{cases}$$

là một hệ hai phương trình 3 ẩn.

3.2. Giải hệ phương trình đại số tuyến tính

Khi giải hệ phương trình đại số tuyến tính có thể xảy ra hai trường hợp: $m = n$ và $m \neq n$.

- **Trường hợp $m = n$**

  Lúc này ma trận A có dạng

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Định nghĩa: Hệ (3.2) gọi là hệ Cramer nếu det $(A) \neq 0$ (ma trận A không suy biến) Khi đó sẽ tồn tại ma trận nghịch đảo A^{-1}.

Định lí 3.1 (Cramer): Hệ Cramer có nghiệm duy nhất tính bằng công thức

$$x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta} \qquad i = 1, 2, ..., n$$

Chứng minh

Ta nhân hai vế của đẳng thức (3.2) với A^{-1} về bên trái, ta được:

$$A^{-1}Ax = A^{-1}b$$

Bởi vì $A^{-1}A = E$, mà nhân bất cứ ma trận nào với E sẽ được đúng ma trận đó, nên

$$x = A^{-1}b \tag{3.5}$$

Sau khi thế A^{-1} bởi biểu thức của nó và thay các véc tơ cột x và b, ta có:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \frac{1}{|A|}\begin{bmatrix} A_{11}b_1 + A_{21}b_2 + \ldots + A_{n1}b_n \\ A_{12}b_1 + A_{22}b_2 + \ldots + A_{n2}b_n \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\ A_{1n}b_1 + A_{2n}b_2 + \ldots + A_{nn}b_n \end{bmatrix}$$

Vì hai ma trận chỉ bằng nhau khi các phần tử tương ứng của chúng bằng nhau nên

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{|A|}\left(A_{11}b_1 + A_{21}b_2 + \ldots + A_{n1}b_n\right) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_i = \dfrac{1}{|A|}\left(A_{1i}b_1 + A_{2i}b_2 + \ldots + A_{ni}b_n\right) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n = \dfrac{1}{|A|}\left(A_{1n}b_1 + A_{2n}b_2 + \ldots + A_{nn}b_n\right) \end{cases} \tag{3.6}$$

Theo định lí khai triển: Định thức bằng tổng các tích của các phần tử của hàng hoặc cột với các phần phụ đại số của chúng. Vì vậy bất cứ hàng nào trong biểu thức (3.6) cũng thay được bằng các định thức tương ứng với véc tơ b là một cột của nó, chẳng hạn đối với x_i sẽ có

$$A_{1i}b_1 + A_{2i}b_2 + \ldots + A_{ni}b_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1,i-1} & b_1 & a_{1,i+1} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2,i-1} & b_2 & a_{2,i+1} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{n,i-1} & b_n & a_{n,i+1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{3.7}$$

Điều đó có nghĩa là muốn tìm x_i thì phải chia định thức Δ_i thiết lập từ định thức $|A| = \Delta$ bằng cách thay cột i bởi cột số hạng tự do cho định thức Δ, tức là

$$x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta} \qquad i = 1, 2, \ldots, n \tag{3.8}$$

Vì vậy, có thể phát biểu quy tắc Cramer: Nếu định thức gồm các hệ số của hệ n phương trình tuyến tính với n ẩn khác 0 thì hệ có một nghiệm duy nhất được tính bằng công thức (3.8).

Ví dụ: Giải hệ $\begin{cases} x + 0y + 2z = 6 \\ -3x + 4y + 6z = 30 \\ -x - 2y + 3z = 8 \end{cases}$

Giải: Ta có:

$$A=\begin{pmatrix}1&0&2\\-3&4&6\\-1&-2&3\end{pmatrix},\ b=\begin{bmatrix}6\\30\\8\end{bmatrix}$$

$$A_1=\begin{pmatrix}6&0&2\\30&4&6\\8&-2&3\end{pmatrix},\ A_2=\begin{pmatrix}1&6&2\\-3&30&6\\-1&8&3\end{pmatrix},\ A_3=\begin{pmatrix}1&0&6\\-3&4&30\\-1&-2&8\end{pmatrix}$$

Ta tính được $\det(A) = 44 \neq 0$; $\det(A_1) = -40$; $\det(A_2) = 72$; $\det(A_3) = 152$.

Ta có nghiệm của hệ đã cho là:

$$x_1 = -\frac{40}{44} = -\frac{10}{11};\ x_2 = \frac{72}{44} = \frac{18}{11},\ x_3 = \frac{152}{44} = \frac{38}{11}.$$

- **Trường hợp $m \neq n$**

Ta gọi $A = (a_{ij})_{m\times n}$ là ma trận của hệ. Sau khi thêm cột các số hạng tự do b vào ma trận A, ta lập được ma trận mở rộng B.

$$B=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&\dots&a_{1n}&b_1\\a_{21}&a_{22}&\dots&a_{2n}&b_2\\\dots&\dots&\dots&\dots&\dots\\a_{m1}&a_{m2}&\dots&a_{mn}&b_m\end{bmatrix}$$

Để giải trường hợp này, ta dựa vào định lí sau:

Định lí 3.2 (Croneker – Capeli): Điều kiện cần và đủ để hệ (3.1) có nghiệm là hạng của ma trận A bằng hạng của ma trận mở rộng B. Nếu $r(A) = r(B) = n$ thì hệ (3.1) có một nghiệm duy nhất. Nếu $r(A) = r(B) < n$ thì hệ (3.1) có vô số nghiệm.

Chứng minh:

Cần: Giả sử hệ (3.1) có nghiệm. Ta phải chứng minh $r(A) = r(B)$.

Thật vậy, hệ (3.1) có nghiệm, tức là có $x_1 = c_1, x_2 = c_2, \dots, x_n = c_n$ để cho

$$\begin{aligned}&a_{11}c_1 + a_{12}c_2 + \dots + a_{1n}c_n = b_1\\&a_{21}c_1 + a_{22}c_2 + \dots + a_{2n}c_n = b_2\\&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\&a_{m1}c_1 + a_{m2}c_2 + \dots + a_{mn}c_n = b_m\end{aligned}$$

Hay

$$b = c_1A_1 + c_2A_2 + \dots + c_nA_n$$

Với $b=\begin{bmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_m\end{bmatrix}$ $\quad A_i=\begin{bmatrix}a_{1i}\\a_{2i}\\\vdots\\a_{mi}\end{bmatrix}$ $\quad i = 1, 2, \dots, n$

Điều đó chứng tỏ rằng cột cuối cùng của ma trận B là tổ hợp tuyến tính của n cột đầu. Theo tính chất hạng của ma trận, ta có thể bỏ cột cuối cùng mà không làm ảnh hưởng đến hạng của ma trận B. Vì vậy, $r(A)=r(B)$.

Đủ: Giả sử $r(A)=r(B)=k$. Ta phải chứng minh hệ (3.2) có nghiệm.

Không giảm tính tổng quát, có thể coi định thức cấp k khác 0 của A và B nằm ở góc trái. Khi đó, k cột đầu tiên độc lập tuyến tính và các cột còn lại có thể biểu diễn qua k cột đầu. Trong trường hợp riêng, cột b biểu diễn được qua k cột đầu

$$\begin{aligned}
&b=\lambda_1A_1+\lambda_2A_2+\ldots+\lambda_kA_k\\
&b_1=a_{11}\lambda_1+a_{12}\lambda_2+\ldots+a_{1k}\lambda_k\\
&b_2=a_{21}\lambda_1+a_{22}\lambda_2+\ldots+a_{2k}\lambda_k\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&b_m=a_{m1}\lambda_1+a_{m2}\lambda_2+\ldots+a_{mk}\lambda_k.
\end{aligned}$$

Thật vậy, nếu lấy $x_1=\lambda_1,\ldots,x_k=\lambda_k, x_{k+1}=x_{k+2}=\ldots=x_n=0$ thì chúng tạo nên một nghiệm của hệ (3.1). Đó là điều phải chứng minh.

Ví dụ: Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases}x_1+3x_2+x_3-x_4=7\\2x_1+5x_2-x_3+2x_4=22\\3x_1+8x_2+x_3-x_4=24\end{cases}$$

Giải:

Ở đây $m=3,\ n=4$.

$$B=\begin{bmatrix}1&3&1&-1&7\\2&5&-1&2&22\\3&8&1&-1&24\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&3&1&-1&7\\0&-1&-3&4&8\\0&-1&-2&2&3\end{bmatrix}$$

$$\to\begin{bmatrix}1&3&1&-1&7\\0&-1&-3&4&8\\0&0&1&-2&-5\end{bmatrix}$$

Ta có $r(A)=r(B)=3<n=4$.

Vậy hệ có vô số nghiệm.

Với ma trận cuối cùng ta có:

$$\begin{cases}x_1+3x_2+x_3-x_4=7\\-x_2-3x_3+4x_4=8\\x_3-2x_4=-5\end{cases}$$

Đặt $x_4=c$, ta được:

$$\begin{cases}x_1+3x_2+x_3=7+c\\-x_2-3x_3=8-4c\\x_3=-5+2c\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_3=-5+2c\\x_2=-8+4c+15-6c=7-2c\\x_1=7+c-21+6c+5-2c=-9+5c\end{cases}$$

Vậy các nghiệm có dạng

$$\begin{cases} x_1 = -9 + 5c \\ x_2 = 7 - 2c \\ x_3 = -5 + 2c \\ x_4 = c \end{cases}$$ với mỗi giá trị của c ta có một nghiệm.

3.3. Hệ phương trình thuần nhất

Đây là trường hợp riêng của hệ (3.1), khi $b_i = 0$ với mọi $i = 1, 2, ..., n$ nên Định lí Croneke – Capeli vẫn đúng. Nhưng với trường hợp này, ta luôn có $r(A) = r(B)$ nên hệ thuần nhất luôn có nghiệm. Chẳng hạn, ta thấy ngay $x_1 = 0, x_2 = 0, ..., x_n = 0$ là một nghiệm của hệ, gọi là nghiệm tầm thường.

Vậy khi nào hệ thuần nhất có nghiệm không tầm thường?

Định lí 3.3: Nếu $r(A) = n$ thì hệ thuần nhất chỉ có nghiệm tầm thường, nếu $r(A) < n$ thì hệ thuần nhất có vô số nghiệm, nghĩa là ngoài nghiệm tầm thường phải có nghiệm không tầm thường.

Chứng minh:

Nếu $r(A) = n$ thì theo quy tắc Cramer, hệ có nghiệm duy nhất, chính là nghiệm tầm thường. Nếu $r(A) < n$ thì ta chuyển $n - r(A)$ tự do sang phải và hệ sẽ có vô số nghiệm.

Hệ quả: Đối với hệ thuần nhất n phương trình n ẩn số thì điều kiện cần và đủ để hệ có nghiệm không tầm thường là định thức $\Delta = 0$.

Thật vậy, vì $\Delta = 0$ thì $r(A) = r(B) < n$. Do đó, hệ thuần nhất có vô số nghiệm, tức là có nghiệm không tầm thường.

Ta cũng có các định nghĩa tương tự cho hệ (3.2) như đối với hệ (3.1).

Ví dụ: Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 0 \end{cases}$$

Giải :

Ta có $$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -4 \end{vmatrix} = -4 + 2 + 18 - 3 - 16 + 3 = 0.$$

Hệ có vô số nghiệm.

Xét định thức cấp 2 $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 4 = 5 \neq 0.$

Bởi vậy, ta lấy 2 phương trình đầu

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

Chuyển x_3 sang vế phải

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 = -3x_3 & (a) \\ 2x_1 + x_2 = x_3 & (b) \end{cases}$$

Lấy (b) nhân với 2 rồi cộng với (a), ta có:

$$5x_1 = -x_3 \Rightarrow x_1 = -\frac{1}{5}x_3$$

$$x_2 = x_3 - 2x_1 = x_3 + \frac{2}{5}x_3 = \frac{7}{5}x_3$$

Vậy hệ đã cho có vô số nghiệm xác định bởi

$$\begin{cases} x_1 = -\frac{1}{5}x_3 \\ x_2 = \frac{7}{5}x_3 \\ x_3 \in \mathbb{R} \end{cases}$$

3.4. Phương pháp Gauss

Nội dung của phương pháp Gauss là dùng cách khử dần các ẩn số để đưa hệ (2.18) về dạng tam giác

$$\begin{cases} x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 = \alpha_4 \\ \qquad x_2 + \beta_3 x_3 = \beta_4 \\ \qquad\qquad \gamma_3 x_3 = \gamma_4 \end{cases} \tag{3.9}$$

rồi giải hệ này.

Hệ tam giác (3.9) rất dễ giải: từ phương trình thứ 3, ta suy ra x_3, thế x_3 vào phương trình thứ 2, ta suy ra x_2, thế x_2 và x_3 vào phương trình thứ nhất, ta suy ra x_1. Sau đây, ta xét một ví dụ cụ thể rồi nêu ra các quy tắc thực hành

Ví dụ: Xét hệ

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 2 & (a) \\ 3x_1 - 2,5x_2 + 4x_3 = 10 & (b) \\ -4x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 2 & (c) \end{cases}$$

Giải :

Trước hết, ta chia (a) cho hệ số của x_1, tức là cho 2, ta được:

$$x_1 + 1,5x_2 + 2,5x_3 = 1 \qquad (a')$$

Sau đó khử x_1 khỏi (b). Muốn thế ta nhân (a') với hệ số của x_1 ở (b), tức là với 3, ta có:

$$3x_1 + 4,5x_2 + 7,5x_3 = 3 \qquad (b')$$

Sau đó, đem phương trình (b') này trừ đi phương trình (b) theo từng vế, ta được:

$$7x_2 + 3,5x_3 = -7 \qquad (b'')$$

Tương tự, ta khử x_1 ra khỏi (c): nhân (a') với hệ số của x_1 ở (c), tức là với (–4), ta có

$$-4x_1 - 6x_2 - 10x_3 = -4. \qquad (c')$$

Sau đó đem (c') trừ (c) ta được:

$$-9x_2 - 12x_3 = -6. \qquad (c'')$$

Bây giờ, ta chú ý đến hai phương trình (b'') và (c''), trong đó chỉ còn hai ẩn là x_2 và x_3. Lặp lại quá trình như trên.

Trước hết, ta chia (b'') cho hệ số của x_2, tức là cho 7, ta được:

$$x_2 + 0,5x_3 = -1. \qquad (b''')$$

Sau đó, ta khử x_2 khỏi (c'') bằng cách nhân (b''') với hệ số của x_2 ở (c''), tức là với (–9)

$$-9x_2 - 4,5x_3 = 9. \qquad (b'''')$$

Sau đó đem (b'''') trừ đi (c'') ta được:

$$7,5x_3 = 15. \qquad (c''')$$

Kết hợp các phương trình $(a'),(b'''),(c''')$ ta được tam giác mong muốn.

Từ (c''') ta suy ra $x_3 = \dfrac{15}{7,5} = 2$.

Thế $x_3 = 2$ vào (b''') ta được:

$$x_2 + 0,5 \times 2 = -1 \Rightarrow x_2 = -2.$$

Thế $x_3 = 2, x_2 = -2$ vào (a') ta được:

$$x_1 + 1,5 \times (-2) + 2,5 \times 2 = 1$$
$$x_1 - 3 + 5 = 1 \Rightarrow x_1 = -1.$$

Vậy nghiệm của hệ đã cho là: $\begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = -2 \\ x_3 = 2. \end{cases}$

Trên đây, ta đã trình bày phương pháp Gauss một cách trình tự. Trong thực hành, ta có thể thực hiện biến đổi ma trận như sau:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 & 2 \\ 3 & -2,5 & 4 & 10 \\ -4 & 3 & 2 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_1 \cdot \frac{1}{2} \to L_1} \begin{bmatrix} 1 & 1,5 & 2,5 & 1 \\ 3 & -2,5 & 4 & 10 \\ -4 & 3 & 2 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_3+4L_1 \to L_3]{L_2-3L_1 \to L_2} \begin{bmatrix} 1 & 1,5 & 2,5 & 1 \\ 0 & -7 & -3,5 & 7 \\ 0 & 9 & 12 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_2 \times \left(-\frac{1}{7}\right) \to L_2} \begin{bmatrix} 1 & 1,5 & 2,5 & 1 \\ 0 & 1 & 0,5 & -1 \\ 0 & 9 & 12 & 6 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_3 - 9L_2 \to L_3} \begin{bmatrix} 1 & 1,5 & 2,5 & 1 \\ 0 & 1 & 0,5 & -1 \\ 0 & 0 & 7,5 & 15 \end{bmatrix}$$

Từ đây, ta có ngay nghiệm của hệ $\begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = -2 \\ x_3 = 2. \end{cases}$

TÓM LƯỢC CUỐI BÀI

- Nắm được phương pháp giải hệ phương trình có số phương trình và số ẩn bằng nhau theo phương pháp Cramer và phương pháp Gauss;
- Nắm được phương pháp giải hệ phương trình đại số tuyến tính tổng quát. Nắm được phương pháp giải hệ phương trình thuần nhất;
- Giải được các bài toán về hệ phương trình đại số tuyến tính.

Bài tiếp theo các bạn sẽ được học về Phép toán và Cấu trúc đại số.