TRƯỜNG ĐẠI HỌC CÔNG NGHIỆP THÀNH PHỐ HỒ CHÍ MINH
KHOA KHOA HỌC CƠ BẢN

BÀI TẬP THƯỜNG KỲ

HÀM PHỨC VÀ PHÉP BIẾN ĐỔI LAPLACE

GVHD: *ThS. Đoàn Vương Nguyên*
Lớp học phần:………………………..Khoa: KHCB
Học kỳ:………Năm học: 2011 – 2012
Danh sách nhóm: (*ghi theo thứ tự ABC*)
1. **Nguyễn Văn A**
2. **Lê Thị B**

………..

HƯỚNG DẪN TRÌNH BÀY

1) Trang bìa như trên (***đánh máy, không cần in màu, không cần lời nói đầu***).
2) Trong phần làm bài tập, chép đề câu nào xong thì giải rõ ràng ngay câu đó.
3) Trang cuối cùng là Tài liệu tham khảo:

1. Nguyễn Kim Đính – ***Hàm phức và ứng dụng*** – ĐH Kỹ thuật TP.HCM – 1998
2. Nguyễn Kim Đính – ***Phép biến đổi Laplace*** – NXB Khoa học và Kỹ thuật – 1998
3. Võ Đăng Thảo – ***Hàm phức và Toán tử Laplace*** – ĐH Kỹ thuật TP.HCM – 2000
4. Phan Bá Ngọc – ***Hàm biến phức và phép biến đổi Laplace*** – NXB Giáo dục – 1996
5. Trương Văn Thương – ***Hàm số biến số phức*** – NXB Giáo dục – 2007
6. Đậu Thế Cấp – ***Hàm biến phức và phép tính Toán tử*** – NXB ĐH Quốc gia – 2006
7. Nguyễn Văn Khuê – Lê Mậu Hải – ***Hàm biến phức*** – NXB Đại học Quốc gia Hà Nội – 2006
8. Theodore. W. Gamelin – ***Complex Analysis*** – Department of Mathematics UCLA
9. Trương Thuận – ***Tài liệu Hàm phức và phép biến đổi Laplace*** – ĐH Công nghiệp TP.HCM

<u>Chú ý</u>

- Phần làm bài ***bắt buộc phải viết tay*** (*không chấp nhận đánh máy*) trên 01 hoặc 02 mặt giấy A4 và đóng thành tập cùng với trang bìa.
- Thời hạn nộp bài: ***Tiết học cuối cùng*** (Sinh viên phải tự đọc trước bài học cuối để làm bài!).
- Nếu ***nộp trễ*** hoặc ***ghi sót tên của thành viên trong nhóm*** sẽ ***không được giải quyết và bị cấm thi***.
- Mỗi nhóm chỉ ***từ* 01 *đến tối đa là* 07** sinh viên. Sinh viên ***tự chọn nhóm*** và nhóm ***tự chọn bài tập***.
- Phần làm bài tập, sinh viên phải ***giải bằng hình thức tự luận*** rõ ràng.

* Nếu làm ***đạt yêu cầu mà chỉ chọn toàn câu hỏi dễ*** thì điểm tối đa của nhóm là **8 *điểm***.

• Cách chọn bài tập như sau

1) Nhóm chỉ có 1 sinh viên thì chọn làm **32 câu hỏi nhỏ** (***các câu hỏi nhỏ phải nằm trong các câu hỏi khác nhau***) gồm:
   Chương 1: chọn 7 trong 9 câu hỏi, trong mỗi câu đã chọn thì chọn làm 1 câu hỏi nhỏ.
   Chương 2: mỗi câu hỏi chọn làm 1 câu hỏi nhỏ.
   Chương 3: chọn 6 trong 7 câu hỏi, trong mỗi câu đã chọn thì chọn làm 1 câu hỏi nhỏ.
   Chương 4: chọn 5 trong 8 câu hỏi, trong mỗi câu đã chọn thì chọn làm 1 câu hỏi nhỏ.
   Chương 5: chọn 10 trong 11 câu hỏi, trong mỗi câu đã chọn thì chọn làm 1 câu hỏi nhỏ.

2) Nhóm có từ 2 đến tối đa 7 sinh viên thì làm như nhóm có 1 sinh viên, đồng thời ***mỗi sinh viên tăng thêm*** phải chọn làm thêm **16 câu hỏi nhỏ khác** (***nằm trong các câu hỏi khác nhau***).

………………………………………………

ĐỀ BÀI TẬP

Chương 1. SỐ PHỨC

Câu 1. Thực hiện các phép tính sau dưới dạng đại số

1) $\dfrac{\overline{3}i-(1+i)^3}{(2+i)^2.\overline{\overline{1+2i}}}$ 2) $\dfrac{(1+i)(2-i)^3}{\overline{(2+i)^2}-(1+2i)}$ 3) $\dfrac{(1+i)^2-\overline{5}i}{(1-i)^3+\overline{\overline{(1+i)^2}}}$ 4) $\dfrac{(2+3i)^2+(2-3i)^2}{(5+4i)^2.\overline{5+4i}}$

5) $\dfrac{\overline{3-i}.\left(\overline{3+i}\right)^2}{(4-3i)^2}$ 6) $\dfrac{(1+3i)^2-\overline{-2i}}{\overline{(3-i)(2+3i)}}$ 7) $\dfrac{(-4i)^5+\overline{5i+i^3}}{\overline{(2-i)^2}}$ 8) $\dfrac{\overline{(1+4i)^2-(3-2i)}}{\overline{\overline{(-i)+\overline{(1+2i)^2}}}}$

Câu 2. Tính modun của các số phức sau

1) $z=\dfrac{(4-3i)^{12}(5+7i)^3}{\left(\overline{2+i}\right)^{24}}$ 2) $z=\dfrac{(5+12i)^{26}\left(\overline{\sqrt{3}+2i\sqrt{6}}\right)^2}{\left(\overline{10-24i}\right)^{20}}$ 3) $z=\dfrac{\left(\overline{\sqrt{3}+i\sqrt{6}}\right)^{22}}{\overline{\sqrt{2}+i\sqrt{2}}\left(3+3i\sqrt{3}\right)^{20}}$

4) $z=\dfrac{\left(\sqrt{3}-i\right)^{30}(-5+4i)^5}{\left(\overline{\sqrt{6}-i\sqrt{3}}\right)^{32}}$ 5) $z=\dfrac{\left(3\sqrt{3}-3i\right)^{12}\left(\overline{5-12i}\right)^5}{\left(\overline{-2+2i\sqrt{3}}\right)^{10}}$ 6) $z=\dfrac{\left(\overline{-\sqrt{6}+i\sqrt{3}}\right)^{32}}{\left(\overline{1+i\sqrt{2}}\right)^7\left(3-i\right)^{28}}$

Câu 3. Thực hiện các phép tính sau dưới dạng lượng giác và dạng mũ

1) $\dfrac{\left(1-i\sqrt{3}\right)(5+5i)^3}{\left(\overline{\sqrt{3}+i\sqrt{6}}\right)^2}$ 2) $\dfrac{\left(3+3i\sqrt{3}\right)^2\left(\overline{\sqrt{3}+i\sqrt{6}}\right)^2}{\overline{\sqrt{2}+i\sqrt{2}}}$ 3) $\dfrac{\left(\overline{\sqrt{3}+i\sqrt{6}}\right)^2}{\overline{\sqrt{2}+i\sqrt{2}}\left(3+3i\sqrt{3}\right)^2}$

4) $\dfrac{\left(\sqrt{3}-i\right)(-4+4i)^3}{\left(\overline{\sqrt{6}+i\sqrt{3}}\right)^2}$ 5) $\dfrac{\left(3\sqrt{3}-3i\right)^2\left(\overline{\sqrt{8}+i\sqrt{8}}\right)^2}{\overline{-\sqrt{2}+i\sqrt{2}}}$ 6) $\dfrac{\left(\overline{-\sqrt{6}+i\sqrt{3}}\right)^2}{\overline{-\sqrt{2}+i\sqrt{2}}\left(3-3i\right)^2}$

Câu 4. Xác định argument chính $\varphi \in (-\pi;\, \pi]$ của các số phức sau

1) $z=\dfrac{(1+i)^4\left(\sqrt{3}-i\sqrt{6}\right)^3}{\overline{\sqrt{3}+i}}$ 2) $z=\dfrac{\left(\overline{1+i}\right)\left(\sqrt{3}+i\right)^3}{(-1-i)^4}$ 3) $z=\dfrac{(1+i)^7}{(1-i)^5\left(2\sqrt{6}-2i\sqrt{3}\right)^4}$

4) $z=\dfrac{(1+i)^4.\overline{\sqrt{3}+i}}{\left(\sqrt{3}-i\sqrt{6}\right)^3}$ 5) $z=\dfrac{\left(\overline{1+i}\right)^4}{(-1-i)^4\left(\sqrt{3}+i\right)^3}$ 6) $z=\dfrac{(1+i)^7(1-i)^5}{\left(2\sqrt{6}-2i\sqrt{3}\right)^4}$

Câu 5*. Cho các số phức z sau có argument chính là $\varphi \in (-\pi;\, \pi]$. Hãy viết z dưới dạng đại số và dạng mũ, từ đó suy ra $\cos\varphi$ và $\sin\varphi$ (không dùng máy tính!)

1) $z = \dfrac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{2}-i\sqrt{2}}$ 2) $z = \dfrac{\sqrt{2}-i\sqrt{2}}{1+i\sqrt{3}}$ 3) $z = \dfrac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{2}-i\sqrt{6}}$ 4) $z = \dfrac{\sqrt{2}-i\sqrt{6}}{1+i\sqrt{3}}$

5) $z = \dfrac{\sqrt{3}-i}{-\sqrt{2}+i\sqrt{2}}$ 6) $z = \dfrac{-\sqrt{2}-i\sqrt{2}}{1+i\sqrt{3}}$ 7) $z = \dfrac{\sqrt{3}-i}{\sqrt{2}-i\sqrt{6}}$ 8) $z = \dfrac{\sqrt{2}-i\sqrt{6}}{\sqrt{3}+i}$

Câu 6. Dùng công thức Moirve, hãy tìm căn bậc bốn của các số phức trong câu 5 ở trên.

Câu 7. Trong mặt phẳng phức, hãy xác định tập hợp các điểm z thỏa mãn điều kiện sau

1) $1 \le |\,z+i\,| < 3$ 2) $|\,z-1+i\,| \le 1$ 3) $\mathrm{Im}(\overline{z}-i) \le 2$ 4) $\mathrm{Re}(iz) > 1$

5) $|\,2z-i\,| = 4$ 6) $|\,z-1\,|+|\,z+1\,| = 4$ 7) $0 < \mathrm{Re}(iz) \le 1$ 8) $\mathrm{Im}(z-i) \ge 3$

Câu 8. Giải các phương trình sau trên trường số phức

1) $z^4 - 5z^2 + 7 = 0$ 2) $z^4 - 7z^2 + 25 = 0$ 3) $z^4 - 3z^2 + 9 = 0$ 4) $z^4 + 3z = 0$

5) $z^4 + 3z^2 + 7 = 0$ 6) $z^4 + 4z^2 + 17 = 0$ 7) $z^4 + 6z^2 + 17 = 0$ 8) $z^4 - 8z = 0$

Câu 9*. Giải các phương trình sau trên trường số phức

1) $z^3 + (3+2i)z^2 + (5+8i)z + 3 + 6i = 0$ 2) $z^3 + (1+2i)z^2 + (1+4i)z - 3 - 6i = 0$

3) $z^3 + (4-3i)z^2 + (1-9i)z - 2 - 6i = 0$ 4) $z^3 + (2-3i)z^2 - (5+3i)z + 2 + 6i = 0$

5) $z^3 + (2+4i)z^2 + (5+8i)z + 10 = 0$ 6) $z^3 - (2-4i)z^2 + (5-8i)z - 10 = 0$

………………………………………………………………………..

Chương 2. HÀM BIẾN PHỨC

Câu 1. Tính các giá trị $f(z_0)$ sau

1) $f(z) = i\,\mathrm{Re}(i.\overline{z} - 2z^3)$, $z_0 = \sqrt{2}.e^{-i\frac{\pi}{6}}$ 2) $f(z) = \dfrac{z^2 - iz}{\overline{z}}$, $z_0 = \cos\dfrac{\pi}{6} - i\sin\dfrac{\pi}{6}$

3) $f(z) = i\,\mathrm{Im}(\overline{z}^3 + iz)$, $z_0 = \sqrt{2}.e^{-i\frac{2\pi}{3}}$ 4) $f(z) = \dfrac{z^2}{3z - i.\overline{z}}$, $z_0 = \cos\dfrac{\pi}{6} + i\sin\dfrac{\pi}{6}$

5) $f(z) = \dfrac{i(\overline{z}^2 - 2iz^3)}{z}$, $z_0 = \sqrt{3}.e^{i\frac{5\pi}{6}}$ 6) $f(z) = \dfrac{\mathrm{Re}(z^2 - iz)}{i.\overline{z}}$, $z_0 = 2e^{i\frac{3\pi}{4}}$

7) $f(z) = (i.\overline{z}^2 + z^2)^4$, $z_0 = i\sqrt{3} - 1$ 8) $f(z) = 2iz^3 + 4\overline{z}^2$, $z_0 = 3 - i\sqrt{2}$

Câu 2. Xác định phần thực và phần ảo của các hàm biến phức sau

1) $f(z) = i(i.\overline{z} - 2z^3)$ 2) $f(z) = -i\dfrac{z-1}{\overline{z}}$ 3) $f(z) = ie^{i.\overline{z}}$ 4) $f(z) = \dfrac{z}{z - i.\overline{z}}$

5) $f(z) = \cos(iz) - i.\sin(iz)$ 6) $f(z) = \cos(i.\overline{z}) - \sin(i.\overline{z})$ 7) $f(z) = \overline{e^{i.\overline{z}}}$ 8) $f(z) = \dfrac{e^{\overline{z}^2}}{i}$

Câu 3. Xét tính khả vi của hàm $f(z)$ và tính đạo hàm (nếu có) tại điểm $z_0 = x_0 + iy_0$ thuộc miền khả vi

1) $f(z) = \overline{z}^2.\mathrm{Im}(iz)$ 2) $f(z) = e^{i.\overline{z}^2}$ 3) $f(z) = z.\mathrm{Im}(i.\overline{z}^2)$ 4) $f(z) = i.\overline{e^{\overline{z}}}$

5) $f(z) = z\,\mathrm{Re}(iz - |\,z\,|^2)$ 6) $f(z) = e^{|z-1|^2}$ 7) $f(z) = |\,z\,|.(iz)$ 8) $f(z) = e^{|\overline{z}^2 - i|}$

Câu 4. Chứng tỏ các hàm sau là hàm điều hòa và tìm hàm giải tích $f(z) = u + iv$ theo biến z, biết

1) $u(x,y) = x^2y - \frac{1}{3}y^3$ và $f(-i) = \frac{i}{2}$

2) $v(x,y) = x^2y - \frac{1}{3}y^3$ và $f(i) = \frac{2i}{3}$

3) $u(x,y) = x^3 - 3xy^2$ và $f(1-i) = 1$

4) $v(x,y) = x^3 - 3xy^2$ và $f(1+i) = -i$

5) $u(x,y) = e^x \cos y - y$

6) $v(x,y) = e^y \cos x + 2x$

7) $u(x,y) = e^x \sin y - y$

8) $v(x,y) = e^y \sin x + 2x$

…………………………………………………………………..

Chương 3. TÍCH PHÂN HÀM PHỨC

Câu 1. Viết phương trình tham số của các đoạn thẳng (hoặc đường parabol) C theo tham số t và tìm khoảng biến thiên của t dưới dạng $t : a \to b$ trong các trường hợp sau

1) C là đoạn thẳng nối từ điểm $z = 3 - 2i$ đến điểm $z = -1 + 3i$.
2) C là đoạn thẳng nối từ điểm $z = -5 - 2i$ đến điểm $z = -7 + 3i$.
3) C là đoạn thẳng nối từ điểm $z = 3 + 2i$ đến điểm $z = -1 - 3i$.
4) C là đoạn thẳng nối từ điểm $z = -1 - 4i$ đến điểm $z = -4 - i$.
5) C là parabol $y = x^2 - 2x$ nối từ điểm $z = 1 - i$ đến điểm $z = -2 + 8i$.
6) C là parabol $y = -x^2 - 3x$ nối từ điểm $z = 1 - 4i$ đến điểm $z = -1 + 2i$.
7) C là parabol $y = 2x^2 - x$ nối từ điểm $z = 1 + i$ đến điểm $z = -2 + 10i$.
8) C là parabol $y = 2x^2 + x$ nối từ điểm $z = 1 + 3i$ đến điểm $z = -1 + i$.

Câu 2. Viết phương trình tham số của các đường tròn (hoặc đường elip) C theo tham số t và tìm khoảng biến thiên của t dưới dạng $t : a \to b$ trong các trường hợp sau

1) C là đường tròn $|z - 1 - i| = 1$ nối từ điểm $z = 2 + i$ đến điểm $z = 1 + 2i$ theo chiều âm.
2) C là đường tròn $|z - 1 - i| = 1$ nối từ điểm $z = 1$ đến điểm $z = i$ theo chiều dương.
3) C là đường tròn $|z + 2i| = 1$ nối từ điểm $z = -3i$ đến điểm $z = 1 - 2i$ theo chiều âm.
4) C là đường tròn $|z + 1 + 2i| = 1$ nối từ điểm $z = -2i$ đến điểm $z = -2 - 2i$ theo chiều âm.
5) C là đường elip $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ nối từ điểm $z = 2$ đến điểm $z = -i$ theo chiều dương.
6) C là đường elip $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$ nối từ điểm $z = 2i$ đến điểm $z = -1$ theo chiều âm.
7) C là đường elip $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ nối từ điểm $z = -3i$ đến điểm $z = -2$ theo chiều âm.
8) C là đường elip $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ nối từ điểm $z = -2i$ đến điểm $z = 3$ theo chiều dương.

Câu 3. Tính các tích phân sau

1) $I = \int\limits_C \overline{z}^2.\mathrm{Re}(iz)dz$, C là đoạn thẳng nối từ điểm $z = -2i$ đến điểm $z = -1 + 3i$.
2) $I = \int\limits_C \overline{z}^2.\mathrm{Im}(iz)dz$, C là đoạn thẳng nối từ điểm $z = i$ đến điểm $z = -1 - i$.
3) $I = \int\limits_C \overline{z}^2.(z^2 - iz)dz$, C là đoạn thẳng nối từ điểm $z = 2i$ đến điểm $z = -3i$.

4) $I = \int\limits_C \overline{z}^2.(2z - iz^2)dz$, C là đoạn thẳng nối từ điểm $z = 3$ đến điểm $z = -1$.

5) $I = \int\limits_C \overline{z}dz$, C có phương trình $\begin{cases} x = 2t^2 - 2t \\ y = t \end{cases}$ nối từ điểm $A(4;-1)$ đến điểm $B(4;\, 2)$.

6) $I = \int\limits_C \overline{z}dz$, C có phương trình $\begin{cases} x = 2\cos t \\ y = \sin t \end{cases}$ nối từ điểm $A(0;-1)$ đến điểm $B(-2;\, 0)$ theo chiều âm.

7) $I = \int\limits_C \overline{z}^2 dz$, $C: |\, z - i \,| = 1$ nối từ điểm $z = 0$ đến điểm $z = 1 + i$ theo chiều âm.

8) $I = \int\limits_C \dfrac{dz}{z^2}$, $C: |\, z \,| = \sqrt{2}$ nối từ điểm $z = -1 - i$ đến điểm $z = 1 + i$ theo chiều dương.

Câu 4. Áp dụng tích phân Cauchy, tính các tích phân sau

1) $I = \oint\limits_{|z+2+i|=1} \dfrac{dz}{z^2 + 4z + 5}$ 2) $I = \oint\limits_{|z+3-i|=2} \dfrac{z-1}{z^2 + 4z}dz$ 3) $I = \oint\limits_{|z-4+i|=3} \dfrac{z+2}{z^2 - 3z}dz$

4) $I = \oint\limits_{|z+2i|=1} \dfrac{dz}{z^4 + 5z^2 + 4}$ 5) $I = \oint\limits_{|z+2i|=2} \dfrac{dz}{z^4 + 4z^2}$ 6) $I = \oint\limits_{|z-1|=1} \dfrac{dz}{z^3 - 1}$

Câu 5. Áp dụng tích phân Cauchy, tính các tích phân sau

1) $I = \oint\limits_{|z-1|=3} \dfrac{dz}{z^2 - 2z + 5}$ 2) $I = \oint\limits_{|z-2|=2} \dfrac{dz}{z^2 - 4z + 5}$ 3) $I = \oint\limits_{|z-1|=4} \dfrac{dz}{z^2 - 2z + 10}$

4) $I = \oint\limits_{|z-2i|=2} \dfrac{dz}{z^4 + 5z^2 + 4}$ 5) $I = \oint\limits_{|z-1-i|=2} \dfrac{dz}{z^4 - 1}$ 6) $I = \oint\limits_{|z-1|=2} \dfrac{dz}{z^3 - 3z}$

Câu 6. Áp dụng tích phân Cauchy, tính các tích phân sau

1) $I = \oint\limits_{|z+3|=2} \dfrac{z+3}{(z^2 + 4z)^2}dz$ 2) $I = \oint\limits_{|z-i|=2} \dfrac{z-1}{(z^2 + 4)^2}dz$ 3) $I = \oint\limits_{|z-4+i|=3} \dfrac{z-1}{(z^2 - 3z)^2}dz$

4) $I = \oint\limits_{|z+i|=1} \dfrac{dz}{z^2(z-i)^3}$ 5) $I = \oint\limits_{|z+2|=1} \dfrac{dz}{z^2(z-2)^3}$ 6) $I = \oint\limits_{|z|=1} \dfrac{dz}{z^3(z-1)}$

Câu 7*. Áp dụng tích phân Cauchy, tính các tích phân sau

1) $I = \int\limits_C \dfrac{dz}{z^2 + 1}$, C là cung tròn $\left(x - \dfrac{1}{2}\right)^2 + (y+3)^2 = \dfrac{45}{4}$ nối $z = 2$ với $z = -1$ theo chiều âm.

2) $I = \int\limits_C \dfrac{dz}{z^2 + 1}$, C là cung tròn $\left(x - \dfrac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \dfrac{9}{4}$ nối $z = -1$ với $z = 2$ theo chiều dương.

3) $I = \int\limits_C \dfrac{dz}{z^2 + 4}$, C là cung tròn $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 8$ nối $z = 3$ với $z = -1$ theo chiều âm.

4) $I = \int\limits_C \dfrac{dz}{z^2 + 4}$, C là cung tròn $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 8$ nối $z = -1$ với $z = 3$ theo chiều dương.

5) $I = \int\limits_C \dfrac{dz}{z^2 + 9}$, C là cung tròn $(x-1)^2 + (y+3)^2 = 13$ nối $z = 3$ với $z = -1$ theo chiều âm.

6) $I = \int\limits_C \dfrac{dz}{z^2+4}$, C là cung tròn $(x-1)^2+(y-3)^2=13$ nối $z=-1$ với $z=3$ theo chiều dương.

………………………………………………………………………..

Chương 4. CHUỖI VÀ THẶNG DƯ

Câu 1*. Tìm hình tròn hội tụ của các chuỗi

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(z-i)^n}{n^2}$ 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{z+n}{2nz}\right)^n$ 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{z^{n^2}}{n!}$ 4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(2n)!}{(n!)^2}(z-1)^n$

Câu 2*.

2.1. Khai triển Taylor các hàm số sau tại điểm $z=a$

1) $f(z)=\dfrac{1}{z}$, $a=i$ 2) $f(z)=\dfrac{z-1}{z+1}$, $a=0$ 3) $f(z)=\dfrac{1}{z^2+3z+2}$, $a=0$

2.2. Khai triển Laurent của hàm số $f(z)=\dfrac{1}{(z+1)(z+2)}$ trong các trường hợp sau

1) trong miền $|z|<1$ 2) trong miền $|z|>2$ 3) trong miền $0<|z+1|<1$

Câu 3*. Khai triển Laurent các hàm số sau trong lân cận điểm bất thường cô lập đã chỉ ra và gọi tên các điểm bất thường cô lập đó

1) $f(z)=\dfrac{e^{2z}}{(z-1)^2}$, tại $z=1$ 2) $f(z)=\dfrac{1}{z(z+1)^2}$, tại $z=-1$

3) $f(z)=\dfrac{1}{z^2+3z+2}$, tại $z=-2$ 4) $f(z)=z^2e^{\frac{1}{z}}$, tại $z=0$

5) $f(z)=(z-1)\cos\dfrac{1}{z-1}$, tại $z=1$ 6) $f(z)=\dfrac{1}{(z^2+1)^2}$, tại $z=i$

Câu 4. Tìm, phân loại các điểm bất thường cô lập hữu hạn và tính thặng dư của các hàm số tại các điểm đó

1) $f(z)=\dfrac{z+2}{z(z-1)^3}$ 2) $f(z)=\dfrac{1-\cos z}{z^3(z^2-4)}$ 3) $f(z)=\dfrac{z}{(z^2+1)^2}$

4) $f(z)=\dfrac{1}{(z^2-2z+2)^2}$ 5) $f(z)=\dfrac{z^4}{(z+1)^3}$ 6) $f(z)=\dfrac{e^z}{z^3-1}$

7) $f(z)=\dfrac{z}{z^4+5z^2+4}$ 8) $f(z)=\dfrac{z-2i}{(z^2+4)^2}$ 9) $f(z)=\dfrac{1}{z^4+i}$

Câu 5. Tính thặng dư tại ∞ của các hàm số sau

1) $f(z)=\dfrac{z^2}{z^4-2}$ 2) $f(z)=\dfrac{1}{z^7-z}$ 3) $f(z)=\dfrac{z^2}{z^9+2}$

4) $f(z)=\dfrac{1}{z^2(z^3-1)}$ 5) $f(z)=\dfrac{z^3}{2-z^7}$ 6) $f(z)=\dfrac{z}{z^{10}-3}$

7) $f(z)=\dfrac{1}{z^4(3-z^2)}$ 8) $f(z)=\dfrac{z^2}{1-3z^7}$ 9) $f(z)=\dfrac{1}{2z^6+1}$

Câu 6. Áp dụng thặng dư tính các tích phân phức sau

1) $I = \oint\limits_C \dfrac{\sin\dfrac{\pi z}{4}}{z^2 - 1}dz,\ C: x^2 + y^2 = 2x$.

2) $I = \oint\limits_C \dfrac{\cos z}{z^2 - 1}dz$, C là chu vi tam giác có các đỉnh là $z = 0$, $z = 2 - 2i$ và $z = 2 + 2i$.

3) $I = \oint\limits_C \dfrac{z^2 dz}{z^2 + 4}$, C là biên của hình vuông có các đỉnh là $z = \pm 2,\ z = \pm 2 + 4i$.

4) $I = \oint\limits_C \dfrac{e^{iz}dz}{4z^2 - \pi^2}$, $C: |z - i| = 2$.

5) $I = \oint\limits_C \dfrac{dz}{z^3 + 1}$, C là elip $2x^2 + y^2 = \dfrac{3}{2}$.

6) $I = \oint\limits_{|z| = 2} \dfrac{dz}{z^3(z^{10} - 2)}$.

Câu 7. Áp dụng thặng dư tính các tích phân thực dạng lượng giác sau

1) $I = \int\limits_0^{2\pi} \dfrac{dt}{5 - 3\sin t}$

2) $I = \int\limits_0^{\pi} \dfrac{dt}{5 + 4\cos t}$

3) $I = \int\limits_0^{2\pi} \dfrac{dt}{3 + \sin t}$

4*) $I = \int\limits_0^{\pi} \dfrac{\sin^2 t dt}{5 - 3\cos t}$.

5) $I = \int\limits_0^{2\pi} \dfrac{dt}{4 - 3\cos t}$

6) $I = \int\limits_0^{\pi} \dfrac{dt}{3 - 2\cos t}$

7) $I = \int\limits_0^{2\pi} \dfrac{dt}{2 + \cos t}$

8*) $I = \int\limits_0^{\pi} \dfrac{\sin^2 t dt}{3 - 2\cos t}$.

Câu 8. Áp dụng thặng dư tính các tích phân thực suy rộng sau

1) $I = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \dfrac{dx}{x^2 + 16}$

2) $I = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \dfrac{dx}{x^2 + 2x + 2}$

3) $I = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \dfrac{dx}{(x^2 - 2x + 5)^2}$

4) $I = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \dfrac{dx}{x^4 + 5x^2 + 4}$

5) $I = \int\limits_0^{+\infty} \dfrac{dx}{(x^2 + 9)^2}$

6) $I = \int\limits_0^{+\infty} \dfrac{x^2}{(x^2 + 1)(x^2 + 4)}dx$

7*) $I = \int\limits_0^{+\infty} \dfrac{\cos 3x}{x^2 + 1}dx$

8*) $I = \int\limits_0^{+\infty} \dfrac{x\sin x}{(x^2 + 4)^2}dx$

………………………………………………………………………

Chương 5. PHÉP BIẾN ĐỔI LAPLACE

Câu 1. Tìm biến đổi Laplace của các hàm gốc sau

1) $f(t) = e^t \cos 3t - 3e^{-2t}\sin 4t + \dfrac{t^3}{e^{5t}}$ 2) $f(t) = e^{-t}\sin 2t - 3e^{2t}\cos\dfrac{t}{2} + t^4 e^{-3t}$

3) $f(t) = (t^5 - 2t^2 + 4)e^{-3t} + \dfrac{2\cos 3t}{e^{2t}}$ 4) $f(t) = (t^5 + t^2 - 3t)e^{2t} + \dfrac{\sin 3t}{e^{-t}}$

5) $f(t) = 3te^{2t}u(t-2)$ 6) $f(t) = (t-1)e^{-t}u(t-3)$

7) $f(t) = 3t^2\sin 2t - t\cos 3t$ 8) $f(t) = 2t^2\cos 3t + (t-1)\sin 2t$

Câu 2. Tìm biến đổi Laplace của các hàm gốc sau

1) $f(t) = \begin{cases} 0, & t < 3 \\ t^2 - 2t, & 3 \le t < 4 \\ 1 - 3t, & t \ge 4 \end{cases}$ 2) $f(t) = \begin{cases} 0, & t < 2 \\ t^2 + 5t, & 2 \le t < 5 \\ 4 - 3t, & t \ge 5 \end{cases}$

3) $f(t) = \begin{cases} 0, & t < 3 \\ -2t^2, & 3 \le t < 4 \\ t^2 - 2t, & t \ge 4 \end{cases}$ 4) $f(t) = \begin{cases} 0, & t < 2 \\ -4t^2, & 2 \le t < 5 \\ t^2 + 5t, & t \ge 5 \end{cases}$

5) $f(t) = \begin{cases} 0, & t < \pi \\ \sin 2t, & \pi \le t < \dfrac{3\pi}{2} \\ 0, & t \ge \dfrac{3\pi}{2} \end{cases}$ 6) $f(t) = \begin{cases} 0, & t < \pi \\ \cos 2t, & \pi \le t < \dfrac{3\pi}{2} \\ 0, & t \ge \dfrac{3\pi}{2} \end{cases}$

Câu 3. Tìm biến đổi Laplace của các hàm gốc tuần hoàn sau

1) $f(t) = \begin{cases} 2t, & 0 \le t < 3 \\ t^2 - 2t, & 3 \le t \le 4 \end{cases}, T = 4$ 2) $f(t) = \begin{cases} 3t, & 0 \le t < 2 \\ t^2 + 5t, & 2 \le t \le 5 \end{cases}, T = 5$

3) $f(t) = \begin{cases} t^2 - 2t, & 0 \le t < 1 \\ -2t^2, & 1 \le t \le 3 \end{cases}, T = 3$ 4) $f(t) = \begin{cases} 2 - t^2, & 0 \le t < 2 \\ 2t^2 + t, & 2 \le t \le 3 \end{cases}, T = 3$

5) $f(t) = \begin{cases} t, & 0 \le t < \pi \\ \sin 2t, & \pi \le t \le 2\pi \end{cases}, T = 2\pi$ 6) $f(t) = \begin{cases} t, & 0 \le t < \pi \\ \cos 2t, & \pi \le t \le 2\pi \end{cases}, T = 2\pi$

Câu 4. Tìm biến đổi Laplace ngược của các hàm ảnh sau

1) $F(s) = \dfrac{s-5}{s^2 + 8s + 25} + \dfrac{s}{s^2 + 8s + 16}$ 2) $F(s) = \dfrac{3-s}{s^2 - 8s + 25} + \dfrac{s}{s^2 - 8s + 16}$

3) $F(s) = \dfrac{s}{s^2 + 10s + 29} + \dfrac{4-s}{s^2 + 10s + 25}$ 4) $F(s) = \dfrac{s}{s^2 - 10s + 29} + \dfrac{4-s}{s^2 - 10s + 25}$

5) $F(s)=\dfrac{e^{-s}}{s^2+4}+\dfrac{e^{-3s}}{s^2+10s+25}$ 6) $F(s)=\dfrac{se^{-5s}}{s^2+9}+\dfrac{e^{-s}}{s^2-10s+25}$

7) $F(s)=\dfrac{e^{-3s}}{s^2+2s+5}$ 8) $F(s)=\dfrac{e^{-2s}}{s^2-6s+18}$

Câu 5. Bằng cách phân tích thành phân thức tối giản, tìm biến đổi Laplace ngược của các hàm ảnh sau

1) $F(s)=\dfrac{s^2-5s}{s^3+2s^2-11s-12}$ 2) $F(s)=\dfrac{s^2-5s+3}{s^3-13s+12}$

3) $F(s)=\dfrac{s}{s^3+3s^2-10s-24}$ 4) $F(s)=\dfrac{s}{s^3-s^2-14s+24}$

5) $F(s)=\dfrac{s-1}{(s^2+1)(s-4)}$ 6) $F(s)=\dfrac{s+2}{(s^2+4)(s+9)}$

7) $F(s)=\dfrac{s-3}{s(s-1)^2}$ 8) $F(s)=\dfrac{s+1}{s(s+2)^2}$

Câu 6. Sử dụng thặng dư, tìm biến đổi Laplace ngược của các hàm ảnh sau

1) $F(s)=\dfrac{s}{(s-1)^2(s+2)^2}$ 2) $F(s)=\dfrac{s}{(s-1)^3(s+2)}$

3) $F(s)=\dfrac{s-2}{(s-3)^2(s+2)^2}$ 4) $F(s)=\dfrac{s-1}{(s-2)(s+1)^3}$

5) $F(s)=\dfrac{s}{(s-i)(s^2+1)}$ 6) $F(s)=\dfrac{s}{(s-2i)(s^2+4)}$

7) $F(s)=\dfrac{1}{(s-i)(s^2+2is+3)}$ 8) $F(s)=\dfrac{1}{(s+3i)(s^2+2is+3)}$

Câu 7*. Sử dụng tích chập, tìm biến đổi Laplace ngược của các hàm ảnh sau

1) $F(s)=\dfrac{s}{(s^2+1)(s^2+2)}$ 2) $F(s)=\dfrac{s}{(s^2+4)(s^2+3)}$

3) $F(s)=\dfrac{3}{(s^2+1)s^3}$ 4) $F(s)=\dfrac{1}{s^3(s^2+4)}$

5) $F(s)=\dfrac{s}{(s+1)^2(s^2+1)}$ 6) $F(s)=\dfrac{s}{(s-2)^2(s^2+4)}$

7) $F(s) = \dfrac{2-s}{(s^2+4)^2}$ 8) $F(s) = \dfrac{3-s}{(s^2+9)^2}$

Câu 8. Dùng biến đổi Laplace giải các phương trình vi phân cấp một sau

1) $y' + 2y = 3e^{-2t};\ y(0) = 1$ 2) $y' - 2y = 3e^{2t};\ y(0) = -1$

3) $y' + 5y = 3e^{-5t};\ y(0) = -2$ 4) $y' - 6y = -e^{6t};\ y(0) = 3$

5) $y' + 4y = -2e^{-t}$ 6) $y' - 7y = -e^{t}$

7) $y' + 2y = t;\ y(0) = 1$ 8) $y' - 2y = t;\ y(0) = -2$

Câu 9. Dùng biến đổi Laplace giải các phương trình vi phân cấp hai sau

1) $y'' - 3y' + 2y = e^{3t};\ y(0) = 1,\ y'(0) = -1$ 2) $y'' + 4y' + 3y = e^{-2t};\ y(0) = 1,\ y'(0) = 2$

3) $y'' - 3y' + 2y = e^{t};\ y(0) = 0,\ y'(0) = -1$ 4) $y'' + 4y' + 3y = e^{-3t};\ y(0) = 0,\ y'(0) = 2$

5) $y'' - 4y' + 4y = e^{t};\ y(0) = 0,\ y'(0) = -1$ 6) $y'' + 4y' + 4y = e^{-3t};\ y(0) = 0,\ y'(0) = 2$

7) $y'' - 3y' + 2y = t;\ y(0) = 0,\ y'(0) = 0$ 8) $y'' + 4y' + 3y = t;\ y(0) = 0,\ y'(0) = 0$

Câu 10*. Dùng biến đổi Laplace giải các phương trình vi phân cấp hai sau

1) $y'' - 2y' + 5y = 3;\ y(0) = 0,\ y'(0) = 0$ 2) $y'' + 4y' + 8y = -1;\ y(0) = 0,\ y'(0) = 0$

3) $y'' + 4y = te^{t};\ y(0) = 0,\ y'(0) = 0$ 4) $y'' + 9y = te^{-3t};\ y(0) = 0,\ y'(0) = 0$

5) $y'' - 4y' + 4y = t;\ y(0) = 0,\ y'(0) = 0$ 6) $y'' + 6y' + 9y = 2t;\ y(0) = 0,\ y'(0) = 0$

7) $y'' - 2y' + 5y = 3t;\ y(0) = 0,\ y'(0) = 0$ 8) $y'' + 4y' + 8y = -t;\ y(0) = 0,\ y'(0) = 0$

Câu 11. Dùng biến đổi Laplace giải các hệ phương trình vi phân cấp một sau

1) $\begin{cases} x' = 2x - 3y \\ y' = y - 2x \end{cases};\ x(0) = 8,\ y(0) = 3$ 2) $\begin{cases} x' + 4x + 4y = 0 \\ y' + 2x + 6y = 0 \end{cases};\ x(0) = 3,\ y(0) = 15$

3) $\begin{cases} x' + 3x - 4y = 9e^{2t} \\ y' + 2x - 3y = 3e^{2t} \end{cases};\ x(0) = 2,\ y(0) = 0$ 4) $\begin{cases} x' - 2x - 4y = \cos t \\ y' + x + 2y = \sin t \end{cases};\ x(0) = y(0) = 0$

……………………………………Hết……………………………………