TRƯỜNG ĐẠI HỌC ĐÀ LẠT
KHOA TOÁN - TIN HỌC

GIẢI TÍCH SỐ

(*Bài giảng tóm tắt*)

NGƯỜI BIÊN SOẠN

LÊ MINH LƯU

Đà Lạt 2009

MỤC LỤC

Chương 1

Lý Thuyết Sai Số

1.1 Các loại sai số

Trên thực tế khi đo một đại lượng hoặc xác định một đại lượng mà ta ký hiệu là a^*, thông thường không xác định được giá trị đúng mà chỉ biết được giá trị gần đúng a. Vậy ta đã gặp phải sai số. Có nhiều loại sai số:

1. Sai số thực sự: Đại lượng

$$\triangle := |a - a^*|$$

gọi là sai số thực sự của a.

2. Sai số tuyệt đối: Nếu biết $\triangle_a \geq 0$ sao cho

$$a - \triangle_a \leq a^* \leq a + \triangle_a$$

thì $\triangle_a$ gọi là sai số tuyệt đối của a.

3. Sai số tương đối: Đại lượng

$$\delta_a := \frac{\triangle_a}{|a|}$$

gọi là sai số tương đối của a.

1.2 Qui tắc thu gọn số

Giả sử ta có số gần đúng a được viết dưới dạng thập phân

$$a = \pm(\beta_p 10^p + ... + \beta_j 10^j + ... + \beta_{p-s} 10^{p-s})$$

trong đó $\beta_j \in \{0, 1, 2, ..., 9\}, \beta_p > 0$. Ta muốn thu gọn số a đến hàng thứ j. Gọi số $\overline{a}$ là số thu gọn đến hàng thứ j của số a và phần vứt bỏ là μ. Đặt:

$$\overline{a} = \beta_p 10^p + ... + \beta_{j+1} 10^{j+1} + \overline{\beta}_j 10^j.$$

Trong đó: $\overline{\beta}_j$ bằng $\beta_j + 1$ nếu $0,5 \times 10^j < \mu < 10^j$ và bằng β_j nếu $0 \leq \mu < 0,5 \times 10^j$. Trường hợp $\mu = 0.5 \times 10^j$ thì $\overline{\beta}_j = \beta_j$ nếu β_j chẵn và $\overline{\beta}_j = \beta_j + 1$ nếu β_j lẻ. Như vậy sai số thu gọn là đại lượng $\Gamma_a \geq 0$ thỏa

$$|\overline{a} - a| \leq \Gamma_a.$$

Do

$$a = \pm(\beta_p 10^p + ... + \beta_j 10^j + \mu),$$
$$\overline{a} = \pm(\beta_p 10^p + ... + \beta_j 10^j + \overline{\beta}_j 10^j),$$

ta có

$$|a - \overline{a}| = |(\beta_j - \overline{\beta}_j) \times 10^j + \mu| < 0.5 \times 10^j.$$

Ví dụ: Số $\pi \simeq 3,1415 \simeq 3,142 \simeq 3,14$.

Chú ý

1. Sai số tuyệt đối không đặc trưng cho độ chính xác của phép đo mà chỉ cho phép ta hình dung được độ gần nhau giữa giá trị đúng và giá trị gần đúng.
2. Sai số tuyệt đối cùng thứ nguyên với đại lượng đo.
3. Sai số tương đối đặc trưng cho độ chính xác của phép đo và không có thứ nguyên.
4. Sau khi thu gọn số thì sai số tuyệt đối tăng lên.

Gọi a^* là giá trị đúng, a là giá trị gần đúng và gọi $\overline{a}$ là số sau khi thu gọn của a thì

$$|a^* - \overline{a}| \leq |a^* - a| + |a - \overline{a}| \leq \triangle_a + \Gamma_a.$$

1.3 Chữ số chắc và không chắc

Giả sử có số gần đúng a viết ở dạng

$$a = \pm(\beta_p 10^p + ... + \beta_j 10^j + ... + \beta_{p-s} 10^{p-s}).$$

Với sai số tuyệt đối của a là $\triangle_a$. Cho số $0 < \omega \leq 1$. Nếu $\triangle_a \leq \omega \times 10^i$ thì chữ số β_i gọi là chữ số chắc, ngược lại chữ số β_i gọi là chữ số không chắc.
Chữ số chắc với $\omega = 1$ gọi là chắc theo nghĩa rộng. Chữ số chắc với $\omega = 0,56$ gọi là chắc theo nghĩa hẹp.

Chú ý:

- Nếu β_i là chữ số chắc thì $\beta_j, \forall j \geq i$ cũng là chữ số chắc.
- Nếu β_i không chắc thì $\beta_j, \forall j \leq i$ cũng không chắc.
- Một chữ số là chắc sau khi thu gọn số có thể nó không còn là chắc.
- Trong kỹ thuật, người ta thường dùng $\omega = 1$ và nếu chữ số là chắc thì sau thu gọn nó vẫn là chắc $(0,56 \leq \omega \leq 1)$.
- Khi tính toán, ta thường giữ lại các chữ số chắc và lấy phụ thêm từ 1 đến 2 chữ số không chắc và có ký hiệu riêng để chỉ các chữ số không chắc này.

- Sai số tương đối của một số không phụ thuộc vào vị trí dấu phẩy của nó (dấu chấm thập phân).

1.4 Hai bài toán về sai số

Xét số gần đúng viết ở dạng thập phân

$$a = \pm(\beta_p 10^p + \beta_{p-1}10^{p-1} + ... + \beta_{p-s}10^{p-s}).$$

Có hai bài toán đặt ra:

Bài toán 1:

Biết số chữ số chắc của a là γ_a, tìm sai số tương đối δ_a của a. Gọi a^0 là số a mà sau khi dời dấu phẩy sao cho chữ số chắc cuối ở hàng đơn vị và toàn chữ số chắc. Ta có

$$\beta_p \times 10^{\gamma_a - 1} \leq a^0 \leq (\beta_p + 1) \times 10^{\gamma_a - 1} \leq 10^{\gamma_a}.$$

Vậy

$$\frac{1}{(\beta_p + 1) \times 10^{\gamma_a - 1}} \leq \delta_a \leq \frac{1}{\beta_p \times 10^{\gamma_1 - 1}}.$$

Nếu không biết β_p thì lấy

$$\frac{1}{10^s} \leq \delta_a \leq \frac{1}{10^{s-1}}.$$

Bài toán 2:

Biết sai số tương đối là δ_a, tìm số chữ số chắc γ_a. Giả sử biết $\delta_a > 0$, ta viết $\delta_a = \lambda 10^{-m}$ với $0.1 < \lambda < 1$ và m là số nguyên. Đặt a_m là số a nhưng dời dấu chấm thập phân sao cho a_m có $m + 1$ chữ số trước dấu chấm thập phân. Ta có:

$$a_m \leq (\beta_p + 1) \times 10^m,$$

suy ra

$$\triangle_a = a_m \delta a_m = a_m \delta_a = a_m \lambda 10^{-m} \leq \lambda(\beta_p + 1).$$

Bởi vì

$$0,2 < \lambda(\beta_p + 1) \leq 10.$$

Vậy có hai trường hợp xảy ra

a. Nếu $\lambda(\beta_p + 1) \leq 1$ thì $\triangle_{a_m} \leq 1$ và a_m có $m + 1$ chữ số chắc.

b. Nếu $\lambda \times (\beta_p + 1) > 1$ thì $\triangle_{a_m} \leq 10$ và a_m có m chữ số chắc.

Cuối cùng ta có thể kết luận, nếu $\delta_a = \frac{\lambda}{10^m}$, $0.1 < \lambda \leq 1$ và $\lambda(\beta_p + 1) \leq 1$ thì a có $m + 1$ chữ số chắc, ngược lại a có m chữ số chắc.

1.5 Sai số các phép toán

Giả sử phải tìm đại lượng y theo công thức

$$y = f(x_1, x_2, ..., x_n).$$

Gọi $x_i^*, y^*, i = 1, 2, ..., n$ và $x_i, y, i = 1, 2, ..., n$ là các giá trị đúng và gần đúng. Nếu f khả vi liên tục ta có

$$\begin{aligned} |y - y^*| &= |f(x_1, ..., x_n) - f(x_1^*, ..., x_n^*)| \\ &= \sum_{i=1}^{n} \frac{|\partial f(x_1, ..., \theta_i, ..., x_n)|}{\partial x_i} |x_i - x_i^*|, \end{aligned}$$

ở đây $\theta_i \in [x_i, x_i^*], i = 1, 2, ..., n$. Ta có thể coi (do f khả vi liên tục và x_i^* khá gần x_i),

$$\left| \frac{\partial f(x_1, ..., \theta_i, ..., x_n)}{\partial x_i} \right| \simeq \left| \frac{\partial f(x_1, ..., x_n)}{\partial x_i} \right|.$$

Do đó

$$\triangle_y = \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial f(x_1, ..., x_n)}{\partial x_i} \right| \triangle_{x_i},$$

và

$$\delta_y = \frac{\triangle_y}{|y|} = \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial \ln f(x_1, ..., x_n)}{\partial x_i} \right| \triangle_{x_i}.$$

a. Sai số phép tính cộng, trừ:

$$y = f(x_1, x_2 ..., x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i,$$

$$\frac{\partial f(x_1, x_2 ..., x_n)}{\partial x_i} = 1 \Rightarrow \triangle_y = \sum_{i=1}^{n} \triangle x_i.$$

Giả sử $\triangle_{x_m} = \max_{i=\overline{1,n}}\{\triangle_{x_i}\}$, và chữ số chắc cuối của x_m ở hàng thứ k, $(\triangle_{x_m} = 10^k)$. Ta có:

$$\triangle_y \geq \triangle_{x_m} = 10^k.$$

Do đó khi làm phép cộng, trừ nên qui tròn các x_i đến mức giữ lại 1 hoặc 2 chữ số bên phải hàng thứ k.

Chú ý: Khi trừ hai số gần nhau cần lấy các số với nhiều chữ số chắc vì khi trừ hai số gần nhau kết quả mất chính xác.

b. Sai số phép toán nhân, chia:

Giả sử

$$y = \frac{x_1, ..., x_p}{x_{p+1}, ..., x_n} = f(x_1, ..., x_p, ..., x_n).$$

Khi đó

$$\ln y = \sum_{i=1}^{p} \ln x_i - \sum_{j=p+1}^{n} \ln x_j$$

suy ra

$$\delta y = \sum_{i=1}^{n} \delta x_i.$$

Nếu $\delta x_m = \max_{i=\overline{1,n}}\{\delta x_i\}$ và số chữ số chắc của x_m là k thì $\delta y \geq \delta x_m$ và số chữ số chắc của y không vượt quá k. Vì vậy khi làm phép toán nhân, chia ta chỉ cần lấy $k+1$ hoặc $k+2$ chữ số là đủ.

c. Sai số phép lũy thừa, khai căn và nghịch đảo:

Cho $y = x^\alpha, \alpha \in \mathbf{R}$,

$$\delta y = \left|\frac{d\ln y}{dx}\right| \triangle_x = |\alpha|\delta x.$$

- Nếu $\alpha > 1$ thì $\delta y > \delta x$ tức là phép lũy thừa làm giảm độ chính xác.
- Nếu $0 < \alpha < 1$ thì $\delta y < \delta x$ tức là phép khai căn làm tăng độ chính xác.
- Nếu $\alpha = -1$ thì $\delta y = \delta x$ và phép nghịch đảo có độ chính xác không đổi.

Chương 2

Xấp Xỉ Tốt Nhất

2.1. Xấp xỉ tốt nhất trong không gian định chuẩn

Giả sử X là không gian tuyến tính định chuẩn. $L \subset X$ là đa tạp tuyến tính đóng của X và $f \in X$. Bài toán đặt ra hãy tìm phần tử $f^* \in L$ sao cho:

$$\| f - f^* \| = \inf_{g \in L} \| g - f \| .$$

Định lý 2.1.1 *Nếu L là không gian con hữu hạn chiều của X thì với mọi $f \in X$ luôn tồn tại $f^* \in L$ thỏa*

$$\| f - f^* \| = \inf_{g \in L} \| g - f \| .$$

(Phần tử f^* gọi là phần tử xấp xỉ tốt nhất f trên L).

Chứng minh: Xét

$$\Omega = \{ g \in L : \| g \| \leq 2 \| f \| \} \subset L.$$

Dễ thấy Ω là tập đóng, giới nội trong không gian hữu hạn chiều nên Ω là Compact.
Xét hàm $\phi(g) := \| f - g \|$.
Ta có

$$|\phi(g) - \phi(h)| = |\| f - g \| - \| f - h \||$$
$$\leq \| (f - g) - (f - h) \| = \| h - g \| .$$

Do ϕ là hàm liên tục trên tập Compact Ω nên hàm ϕ đạt cực tiểu trên Ω. Từ đó

$$\exists f^* \in \Omega : \ \phi(f^*) = \min_{g \in \Omega} \phi(g).$$

Mặt khác: Nếu $g \in L \setminus \Omega$ tức là g không thuộc Ω thì

$$\| g - f \| \geq \| g \| - \| f \|$$

$$> 2 \| f \| - \| f \| = \| f \| = \| f - \theta \|$$

(ở đây θ chỉ phần tử không của không gian X). Bởi vậy $\forall g \in L \setminus \Omega$, thì $\| g - f \| > \| f - \theta \|$, tức là

$$\inf_{g \in L \setminus \Omega} \| g - h \| \geq \| f - \theta \| .$$

Suy ra

$$\| f - f^* \| = \min_{g \in \Omega} \| f - g \|$$