ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

– – – – – – – – – – –

ĐOÀN THỊ HỒNG CẨM

MỘT SỐ LỚP ĐẲNG THỨC TRONG ĐA THỨC VÀ ÁP DỤNG

LUẬN VĂN THẠC SỸ TOÁN HỌC

THÁI NGUYÊN - NĂM 2015

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

\- - - - - - - - - - -

ĐOÀN THỊ HỒNG CẨM

MỘT SỐ LỚP ĐẲNG THỨC TRONG ĐA THỨC VÀ ÁP DỤNG

LUẬN VĂN THẠC SỸ TOÁN HỌC

Người hướng dẫn khoa học
PGS.TS. TRỊNH THANH HẢI

THÁI NGUYÊN - NĂM 2015

Mục lục

Mở đầu

Trong chương trình Toán THPT nói chung, trong các dạng bài tập dành cho học sinh khá, giỏi nói riêng thì các bài tập liên quan đến việc khai thác các tính chất của đa thức rất phong phú, đa dạng. Tuy nhiên các dạng bài tập nghiên cứu sâu về một số lớp đẳng thức trong đa thức và áp dụng thì còn rất ít. Xuất phát từ thực tế đó, dưới sự hướng dẫn nhiệt tình của PGS.TS Trịnh Thanh Hải, tôi chọn hướng nghiên cứu của luận văn thạc sĩ với đề tài: "Một số lớp đẳng thức trong đa thức và áp dụng" nhằm góp một phần nhỏ bé vào việc bổ sung tài liệu tham khảo cho giáo viên và học sinh trong giảng dạy và học tập. Luận văn tìm hiểu một số vấn đề về đa thức như: Biểu diễn một số lớp đa thức một biến; Một số đồng nhất thức giữa các đa thức nhiều biến; Xác định đa thức theo đặc trưng của chúng cũng như các ứng dụng trong việc giải một số bài toán bất đẳng thức, bài toán cực trị trong đa thức và bài toán giải bằng phương pháp đa thức...
Luận văn gồm 3 chương

Chương 1. Một số kiến thức chuẩn bị.

Chương 2. Vấn đề biểu diễn, xác định đa thức.

Chương 3. Một số bài toán áp dụng liên quan.

Luận văn này được hoàn thành dưới sự giúp đỡ tận tình của GS.TSKH Nguyễn Văn Mậu cùng với sự hướng dẫn nhiệt tình của PGS.TS Trịnh Thanh Hải. Em xin bày tỏ sự kính trọng và biết ơn sâu sắc đến các thầy.

Em xin chân thành cảm ơn quý thầy cô trong trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên mà trực tiếp là khoa Toán – Tin và các thầy ở Viện Toán học, ĐHKHTN - ĐHQG Hà Nội đã tận tình giảng dạy và tạo điều kiện thuận lợi cho chúng tôi có những kiến thức cơ sở đủ vững để thực hiện đề tài.

Do một số điều kiện chủ quan và khách quan, luận văn cũng chưa thực sự hoàn thiện theo ý muốn. Em kính mong các Thầy, Cô giáo chỉ bảo để em được hoàn thiện luận văn. Em xin được kính chuyển tới các Thầy, Cô giáo lời cảm ơn trân trọng nhất.

Em xin trân trọng cảm ơn.

Học viên

Đoàn Thị Hồng Cẩm

Chương 1

Một số kiến thức chuẩn bị

Trong chương này chúng tôi trình bày một số vấn đề cơ bản liên quan đến đa thức được trình bày từ các tài liệu [1]-[7] để sử dụng trong những chương sau.

1.1 Một số tính chất cơ bản của đa thức

Định lí 1.1. Giả sử A là một trường ($A = \mathbb{R}$ hoặc $A = \mathbb{C}$) và $A\left[x\right]$ là vành các đa thức trên A, $f(x)$ và $g(x) \neq 0$ là hai đa thức của vành $A\left[x\right]$. Khi đó luôn tồn tại cặp đa thức duy nhất $q\left(x\right)$ và $r\left(x\right)$ thuộc $A\left[x\right]$ sao cho

$$f\left(x\right) = g\left(x\right) q\left(x\right) + r\left(x\right) \text{ với } \deg r\left(x\right) < \deg g\left(x\right).$$

Nếu $r\left(x\right) = 0$ ta nói $f\left(x\right)$ chia hết cho $g(x)$.

Giả sử $a \in A$, $f\left(x\right) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ là đa thức tùy ý của vành $A\left[x\right]$, phần tử $f\left(a\right) = a_n a^n + a_{n-1} a^{n-1} + \cdots + a_1 a + a_0$ có được bằng cách thay x bởi a được gọi là giá trị của $f(x)$ tại a.

Nếu $f(a) = 0$ thì ta gọi a là nghiệm của $f(x)$. Bài toán tìm nghiệm của $f(x)$ trong A gọi là giải phương trình đại số bậc n

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0 \quad (a_n \neq 0)$$

trong A.

Định lí 1.2. Giả sử A là một trường số thực hoặc số phức, $a \in A$, và $f\left(x\right) \in A\left[x\right]$. Dư số của phép chia $f(x)$ cho $(x - a)$ chính là $f(a)$.

Định lí 1.3. Điều kiện cần và đủ để hai đa thức $P(x)$ và $Q(x)$ nguyên tố cùng nhau là tồn tại cặp đa thức $u(x)$ và $v(x)$ sao cho

$$P\left(x\right)u\left(x\right)+Q\left(x\right)v\left(x\right)\equiv 1.$$

Nếu hai đa thức $P(x)$ và $Q(x)$ (không trùng với đa thức 0) có ước chung $d(x)$ là đa thức chia hết cho tất cả các ước chung khác thì $d(x)$ được gọi là ước chung lớn nhất của $P(x)$ và $Q(x)$.

Tương tự, ta có khái niệm ước chung lớn nhất của bộ nhiều đa thức.

Tính chất 1.1. Nếu các đa thức $f(x)$ và $g(x)$ nguyên tố cùng nhau và các đa thức $f(x)$ và $h(x)$ cũng nguyên tố cùng nhau thì các đa thức $f(x)$ và $g(x)h(x)$ cũng nguyên tố cùng nhau.

Tính chất 1.2. Nếu các đa thức $f(x), g(x), h(x)$ thỏa mãn điều kiện $f(x)h(x)$ chia hết cho $g(x)$, $g(x)$ và $h(x)$ nguyên tố cùng nhau thì $f(x)$ chia hết cho $g(x)$.

Tính chất 1.3. Nếu đa thức $f(x)$ chia hết cho các đa thức $g(x)$ và $h(x)$ với $g(x)$ và $h(x)$ nguyên tố cùng nhau thì $f(x)$ chia hết cho $g(x)h(x)$.

Tính chất 1.4. Nếu các đa thức $f(x)$ và $g(x)$ nguyên tố cùng nhau thì $\left[f\left(x\right)\right]^m$ và $\left[g\left(x\right)\right]^n$ sẽ nguyên tố cùng nhau với mọi m, n nguyên dương.

1.2 Các định lý về nghiệm của đa thức

Định lí 1.4. a là nghiệm của $f(x)$ khi và chỉ khi $f(x)$ chia hết cho $(x-a)$.

Giả sử A là một trường, $a \in A, f\left(x\right) \in A\left[x\right]$ và m là một số tự nhiên lớn hơn hoặc bằng 1. Khi đó a là nghiệm bội cấp m của $f(x)$ khi và chỉ khi $f(x)$ chia hết cho $(x-a)^m$ và $f(x)$ không chia hết cho $(x-a)^{m+1}$.

Trong trường hợp $m = 1$ thì ta gọi a là nghiệm đơn còn khi $m = 2$ thì a được gọi là nghiệm kép. Số nghiệm của một đa thức là tổng số nghiệm của đa thức đó kể cả bội của các nghiệm (nếu có). Vì vậy, người ta coi một đa thức có một nghiệm bội cấp m như một đa thức có m nghiệm trùng nhau.

• **Lược đồ Horner**

Giả sử $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \in A[x]$ (với A là một trường). Khi đó thương gần đúng của $f(x)$ cho $(x-a)$ là một đa thức có bậc bằng $n-1$, có dạng

$$q(x) = b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_1 x + b_0,$$

trong đó $b_{n-1} = a_n, b_k = ab_{k+1} + a_{k+1}, k = 0, 1, \ldots, n-1$ và dư số $r = ab_0 + a_0$.

Định lí 1.5 (Định lý Viète)**.** Giả sử phương trình

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0 \quad (a_n \neq 0) \tag{1.1}$$

có n nghiệm (thực hoặc phức) $x_1, x_2, \ldots, x_n$ thì

$$\begin{cases} E_1(x) := x_1 + x_2 + \cdots + x_n = -\dfrac{a_{n-1}}{a_n} \\ E_2(x) := x_1x_2 + x_1x_3 + \cdots + x_{n-1}x_n = \dfrac{a_{n-2}}{a_n} \\ \ldots\ldots.. \\ E_n(x) := x_1x_2\ldots x_n = (-1)^n\dfrac{a_0}{a_n}. \end{cases} \tag{1.2}$$

Ngược lại nếu các số $x_1, x_2, \ldots, x_n$ thỏa mãn hệ trên thì chúng là nghiệm của phương trình (1.1). Hệ (1.2) có n thành phần và ở vế trái của thành phần thứ k có C_n^k số hạng.

Định nghĩa 1.1. Các hàm $E_1(x), E_2(x), \ldots, E_n(x)$ được gọi là hàm (đa thức) đối xứng sơ cấp Viète bậc $1, 2, \ldots, n$ tương ứng.

Sau đây ta sẽ nêu (không chứng minh) một số định lý cơ bản đối với đa thức.

Định lí 1.6. Mỗi đa thức thực bậc n đều có không quá n nghiệm thực.

Hệ quả 1.1. Đa thức có vô số nghiệm là đa thức không.

Hệ quả 1.2. Nếu đa thức có bậc $\leq n$ mà nhận cùng một giá trị tại $n+1$ điểm khác nhau thì chúng đồng nhất bằng hằng số.

Hệ quả 1.3. Hai đa thức bậc $\leq n$ mà nhận giá trị bằng nhau tại $n+1$ điểm phân biệt thì chúng đồng nhất bằng nhau.

Định lí 1.7. Mọi đa thức $f(x) \in \mathbb{C}[x]$ bậc n có đúng n nghiệm (tính cả bậc của nghiệm).

Định lí 1.8. Mọi đa thức $f(x) \in \mathbb{R}[x]$ có bậc n và có hệ số chính (hệ số bậc cao nhất) $a_n \neq 0$ đều có thể phân tích (duy nhất) thành nhân tử

$$f(x) = a_n \prod_{i=1}^{m} (x - d_i) \prod_{k=1}^{s} \left(x^2 + b_k x + c_k\right)$$

với $d_i, b_k, c_k \in \mathbb{R}, 2s + m = n, b_k^2 - 4c_k < 0, m, n \in \mathbb{N}^*$.

Tính chất 1.5. Mọi nghiệm x_0 của đa thức

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \quad (a_0 \neq 0)$$

đều thỏa mãn bất đẳng thức $|x_0| \leq 1 + \dfrac{A}{|a_n|},\ A = \max\limits_{1 \leq k \leq n} |a_k|$.

Tính chất 1.6. Nếu a_m là hệ số âm đầu tiên của đa thức $P_n(x)$ thì số $1 + \sqrt[m]{\dfrac{B}{a_0}}$ là cận trên của các nghiệm dương của đa thức đã cho, trong đó B là giá trị lớn nhất của trị tuyệt đối các hệ số âm.

1.3 Ước, ước chung lớn nhất

Định nghĩa 1.2. Khi đa thức $P_n(x)$ viết được dưới dạng

$$P_n(x) = g(x)\, q(x)$$

với $\deg g > 0$ và $\deg q > 0$, thì ta nói g là ước của $P_n(x)$ và ta viết $g(x) | P_n(x)$ hay $P_n(x) \vdots g(x)$.

Nếu $g(x) | P(x)$ và $g(x) | Q(x)$ thì ta nói $g(x)$ là ước chung của $P(x)$ và $Q(x)$.

Nếu hai đa thức $P(x)$ và $Q(x)$ chỉ có ước chung là các đa thức bậc 0 thì ta nói rằng chúng nguyên tố cùng nhau và ta viết dưới dạng $(P(x), Q(x)) = 1$.

Bài toán 1.1. Chứng minh rằng hai đa thức $P(x) = x^{2015} - 1$ và $Q(x) = x^{2015} + 1$ nguyên tố cùng nhau.

Lời giải. Nhận xét rằng $P(x) - Q(x) = 2$. Suy ra nếu $d(x)$ là ước chung của $P(x)$ và $Q(x)$ thì $d(x)$ là ước của đa thức hằng bằng 2. Suy ra hai đa thức đã cho nguyên tố cùng nhau.

Bài toán 1.2. Tìm ước chung lớn nhất của hai đa thức $P(x) = (x-1)^{2015}$ và $Q(x) = x^{2015} - 1$.
Lời giải. Vì $x = 1$ là nghiệm đơn của đa thức $Q(x)$. Suy ra nếu $d(x)$ là ước chung của $P(x)$ và $Q(x)$ thì $d(x)$ là ước của $x - 1$. Suy ra

$$(P(x), Q(x)) = 1.$$

Bài toán 1.3. Cho đa thức $P(x)$ và hai số a, b phân biệt. Biết rằng $P(x)$ chia cho $x-a$ dư A, $P(x)$ chia cho $x-b$ dư B. Hãy tìm phần dư của phép chia $P(x)$ cho $(x-a)(x-b)$.

Lời giải. Giả sử $P(x) = (x-a)(x-b)Q(x) + Cx + D$. Lần lượt thay $x = a$, b, ta được $A = Ca + D, B = Cb + D$.
Từ đó suy ra

$$\begin{aligned} &C = (A-B)/(a-b) \\ &D = A - (A-B)a/(a-b) = (aB - bA)/(a-b). \end{aligned}$$

Bài toán 1.4. Tìm phần dư trong phép chia x^{100} cho $(x-1)^2$.

Lời giải. Giả sử $x^{100} = (x-1)^2 Q(x) + Ax + B$. Thay $x = 1$, ta được

$$1 = A + B.$$

Lấy đạo hàm hai vế rồi cho $x = 1$, ta được $100 = A$. Từ đó suy ra phần dư là $100x - 99$.

Bài toán 1.5. Tìm a, b, c biết rằng đa thức $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ chia hết cho $x - 2$ và chia $x^2 - 1$ dư $2x$.