Cơ sở hình học vi phân, A. Pressley

Phó Đức Tài

Ngày 9 tháng 9 năm 2007

Mục lục

Lời ngỏ

Hình học vi phân trong tựa đề cuốn sách này đề cập đến việc nghiên cứu hình học của đường cong và mặt cong trong không gian 3 chiều dùng các kỹ thuật tính toán giải tích. Môn học này hàm chứa một số kết quả đẹp đẽ nhất trong Toán học, ngoài ra để có thể hiểu hầu hết các kết quả này chúng ta chỉ cần một số kiến thức nền tảng về giải tích (bao gồm đạo hàm riêng), véctơ và đại số tuyến tính (bao gồm ma trận và định thức).

Rất nhiều kết quả về đường cong và mặt cong mà chúng ta sẽ thảo luận trong cuốn sách này là dạng sơ khai của các kết quả tổng quát trong trường hợp chiều cao, chẳng hạn định lý Gauss-Bonnet, trong chương 11, là dạng sơ khai của một số lớn các kết quả về mối quan hệ của các tính chất 'địa phương' và 'toàn cục' của các đối tượng hình học. Việc nghiên cứu các quan hệ như thế đã tạo ra một mảng chính của Toán học trong thế kỷ XX.

Chúng tôi muốn nhấn mạnh rằng, các phương pháp sử dụng trong cuốn sách này không nhất thiết có thể mở rộng lên chiều cao. (Chẳng hạn khái niệm 'liên kết' sẽ không được bàn đến trong suốt cuốn sách). Chúng tôi cố gắng dùng những hướng tiếp cận đơn giản nhất để chứng minh các kết quả. Nó không chỉ nhằm hạn chế kiến thức cần phải bổ sung, mà còn giúp chúng ta tránh những khái niệm khó thường gặp trong khi nghiên cứu Hình học vi phân trong chiều cao. Chúng tôi hy vọng cách tiếp cận này sẽ làm cho môn học đẹp đẽ có thể đến được với nhiều độc giả hơn.

Một sự thật là không thể học toán bằng cách chỉ đọc lý thuyết mà còn phải thực hành. Có khoảng 200 bài tập trong sách, độc giả nên cố gắng giải càng nhiều càng tốt.

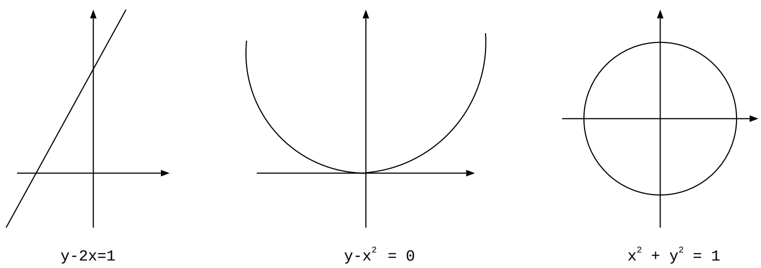
Chương 1

Đường cong trong mặt phẳng và trong không gian

Trong chương này chúng ta sẽ thảo luận hai định nghĩa về khái niệm (trực giác) của một đường cong. Quan hệ giữa chúng khó nhận ra, vì vậy chúng ta sẽ bắt đầu bằng một vài ví dụ của đường cong với mỗi định nghĩa, và từ thực hành ta sẽ có mối liên kết giữa chúng.

1.1 Đường cong là gì?

Nếu có ai hỏi cho ví dụ một đường cong, bạn có thể cho ngay một đường thẳng, chẳng hạn $y - 2x = 1$ (mặc dù nó không cong), hoặc một đường tròn, chẳng hạn $x^2 + y^2 = 1$, hoặc có lẽ một parabôn, chẳng hạn $y - x^2 = 0$.



Tất cả các đường cong này được mô tả thông qua phương trình của chúng trong hệ tọa độ Descartes

$$f(x, y) = c,$$

trong đó f là hàm có biến x, y và c là hằng số. Theo quan điểm đó, một đường cong là một tập hợp các điểm, đó là

$$\mathcal{C} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | f(x, y) = 0\}. \tag{1.1}$$

Những ví dụ trên đều là các đường cong trong mặt phẳng $\mathbb{R}^2$, nhưng chúng ta cũng có thể xét các đường cong trong $\mathbb{R}^3$ - ví dụ, trục x trong hệ tọa độ 3 chiều là một đường thẳng được cho bởi

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | y = z = 0\},$$

và tổng quát hơn, một đường cong trong $\mathbb{R}^3$ có thể định nghĩa bằng một cặp phương trình

$$f_1(x, y, z) = c_1, f_2(x, y, z) = c_2.$$

Đường cong có dạng như thế được gọi là *đường định mức* (level curve), theo nghĩa, chẳng hạn đường cong cho bởi Pt. (1.1), gồm các điểm (x, y) trong mặt phẳng có đại lượng $f(x, y)$ đạt mức c.

Có một cách khác để mô tả một đường cong mà hóa ra rất tiện ích trong nhiều trường hợp. Đó là quỹ tích của một điểm chuyển động. Do đó, nếu $\gamma(t)$ là vị trí vectơ của điểm tại thời điểm t thì đường cong được mô tả bởi hàm γ của biến số t nhận giá trị véctơ (trong $\mathbb{R}^2$ cho đường cong phẳng, $\mathbb{R}^3$ cho đường cong trong không gian). Chúng ta sử dụng ý tưởng này để đưa ra định nghĩa hình thức đầu tiên cho một đường cong trong $\mathbb{R}^n$ (chúng ta sẽ chỉ quan tâm trong hai trường hợp $n = 2$ hoặc 3, nhưng để thuận tiện xét chúng đồng thời):

Định nghĩa 1.1. Một *đường cong được tham số* (hoặc còn gọi là *cung được tham số*) trong $\mathbb{R}^n$ là một ánh xạ $\gamma : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}^n$, với α, β thỏa mãn $-\infty \le \alpha < \beta \le \infty$.

Kí hiệu (α, β) là khoảng mở

$$(\alpha, \beta) = \{t \in \mathbb{R} | \alpha < t < \beta\}.$$

Một đường cong tham số có ảnh chứa trong một đường cong định mức được gọi là một tham số hóa (thành phần) của $\mathcal{C}$. Các ví dụ dưới đây sẽ minh họa một cách thực hành làm thế nào từ đường cong định mức để có đường cong tham số và ngược lại.

Ví dụ 1.1. Tìm một tham số hóa $\gamma(t)$ cho parabôn $y = x^2$. Nếu $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t))$, các thành phần γ_1 và γ_2 của γ phải thỏa mãn

$$\gamma_2(t) = \gamma_1(t)^2 \tag{1.2}$$

với mọi t trong khoảng (α, β) mà γ được định nghĩa (chưa được xác định), như vậy mỗi điểm nằm trên parabôn phải có tọa độ $(\gamma_1(t), \gamma_2(t))$ với $t \in (\alpha, \beta)$. Rõ ràng, có thể nhận ra ngay một nghiệm của Pt. (1.2) là $\gamma_1(t) = t, \gamma_2(t) = t^2$. Để xác định tất cả các điểm trên parabôn, chúng ta cho t nhận mọi giá trị số thực (vì $\gamma(t)$ có tọa độ đầu chính bằng t, mà tọa độ đầu của một điểm trên parabôn có thể là một số thực bất kỳ), bởi vậy chúng ta lấy $(\alpha, \beta) = (-\infty, \infty)$. Do đó, ta có tham số hóa:

$$\gamma : (-\infty, \infty) \to \mathbb{R}^2, \quad \gamma(t) = (t, t^2).$$

Nhưng đây không phải là tham số hóa duy nhất của parabôn đã cho. Chẳng hạn một tham số hóa khác, chẳng hạn $\gamma(t) = (t^3, t^6)$ (với $(\alpha, \beta) = (-\infty, \infty)$). Hoặc một dạng khác là $(2t, 4t^2)$, và dĩ nhiên có (vô số) các dạng khác nữa. Như vậy, tham số hóa của một đường cong định mức cho trước là không duy nhất.

Ví dụ 1.2. Xét đường tròn $x^2 + y^2 = 1$. Nếu làm tương tự như ví dụ trên, lấy $x = t$ khi đó $y = \sqrt{1 - t^2}$ (chúng ta cũng có thể chọn $y = -\sqrt{1 - t^2}$). Như vậy chúng ta có tham số hóa

$$\gamma(t) = (t, \sqrt{1 - t^2}).$$

Nhưng đây chỉ là tham số hóa của nửa trên của đường tròn, vì $\sqrt{1 - t^2}$ luôn luôn ≥ 0. Tương tự, nếu chúng ta chọn $y = -\sqrt{1 - t^2}$ thì chỉ phủ được nửa dưới của đường tròn.

Nếu muốn có một tham số hóa của toàn bộ đường tròn thì phải tìm cách khác. Chúng ta cần tìm các hàm số $\gamma_1(t)$ và $\gamma_2(t)$ sao cho chúng thỏa mãn

$$\gamma_1(t)^2 + \gamma_2(t)^2 = 1 \tag{1.3}$$

với mọi $t \in (\alpha, \beta)$. Có một nghiệm hiển nhiên của Pt. (1.3) là: $\gamma_1(t) = \cos t$ và $\gamma_2(t) = \sin t$ (vì $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$ với mọi t). Chúng ta có thể chọn $(\alpha, \beta) = (-\infty, \infty)$, nhưng như thế là hơi thừa. Chỉ cần lấy khoảng mở (α, β) có khoảng cách lớn hơn 2π bất kỳ là đủ.

Ví dụ sau đây chỉ cách làm thế nào để từ một đường cong tham số hóa ta tìm ra đường cong định mức.

Ví dụ 1.3. Xét đường cong được tham số hóa như sau, được gọi là *astroid* (đường hình sao):

$$\gamma(t) = (\cos^3 t, \sin^3 t).$$

Do $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$ với mọi t, nên các tọa độ $x = \cos^3 t, y = \sin^3 t$ của điểm $\gamma(t)$ thỏa mãn

$$x^{2/3} + y^{2/3} = 1.$$

Đường cong định mức này trùng với ảnh của ánh xạ γ.

Trong cuốn sách này chúng ta sẽ nghiên cứu các đường cong (và sau đó, các mặt cong) sử dụng các tính toán giải tích. Để lấy đạo hàm một hàm giá trị véctơ như $\gamma(t)$ (như trong Định nghĩa 1.1), chúng ta lấy đạo hàm từng phần: nếu

$$\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t), ..., \gamma_n(t))$$

thì

$$\begin{aligned} \frac{d\gamma}{dt} &= \left(\frac{d\gamma_1}{dt}, \frac{d\gamma_2}{dt}, ..., \frac{d\gamma_n}{dt}\right), \\ \frac{d^2\gamma}{dt^2} &= \left(\frac{d^2\gamma_1}{dt^2}, \frac{d^2\gamma_2}{dt^2}, ..., \frac{d^2\gamma_n}{dt^2}\right), \quad \text{v.v...} \end{aligned}$$

Để tiết kiệm, chúng ta sẽ dùng kí hiệu $\dot{\gamma}(t)$ thay cho $d\gamma/dt$, $\ddot{\gamma}(t)$ thay cho $d^2\gamma/dt^2$, v.v...

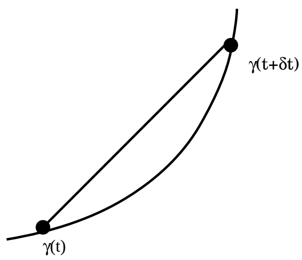
Chúng ta nói rằng γ là *trơn* nếu mỗi thành phần $\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_n$ của γ là trơn, tức là tất cả các đạo hàm $d\gamma_i/dt$, $d^2\gamma_i/dt^2$,$d^3\gamma_i/dt^3$,... tồn tại, với mọi $i = 1, 2, ..., n$. *Kể từ đây về sau, tất cả các đường cong tham số hóa được nói đến trong quyển sách này được giả thiết là trơn.*

Định nghĩa 1.2. Giả sử $\gamma(t)$ là một đường cong tham số hóa. Khi đó, đạo hàm cấp 1 của nó $d\gamma/dt$ được gọi là *véctơ tiếp xúc* của γ tại điểm $\gamma(t)$.

Để tìm hiểu ý nghĩa cho thuật ngữ này, xét vectơ

$$\frac{\gamma(t+\delta t) - \gamma(t)}{\delta t}$$

song song với cung nối giữa 2 điểm $\gamma(t)$ và $\gamma(t+\delta t)$ của ảnh $\mathcal{C}$ của γ:



Chúng ta mong chờ, khi δt tiến tới 0, dây cung sẽ song song với tiếp tuyến của $\mathcal{C}$ tại $\gamma(t)$. Do đó, tiếp tuyến phải song song với

$$\lim_{\delta t \to 0} \frac{\gamma(t+\delta t) - \gamma(t)}{\delta t} = \frac{d\gamma}{dt}.$$

Bằng trực giác dễ thấy kết quả sau đây:

Mệnh đề 1.1. *Nếu vectơ tiếp xúc của một đường cong tham số là vectơ hằng, thì ảnh của đường cong là (một phần) đường thẳng.*

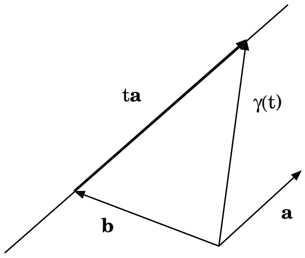
Chứng minh. Giả sử $\dot{\gamma}(t) = \mathbf{a}$ với mọi t, trong đó $\mathbf{a}$ là vectơ hằng. Lấy tích phân hai vế, ta có

$$\gamma(t) = \int \frac{d\gamma}{dt} dt = \int \mathbf{a} dt = t\mathbf{a} + \mathbf{b},$$

với $\mathbf{b}$ là vectơ hằng khác. Nếu $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$, thì đây là phương trình tham số của đường thẳng song song với $\mathbf{a}$ đi qua điểm đích của vectơ $\mathbf{b}$:

Nếu $\mathbf{a} = \mathbf{0}$ thì ảnh của γ là một điểm đơn, trùng với điểm đích của vectơ $\mathbf{b}$. □

BÀI TẬP



1.1. Hãy kiểm tra xem $\gamma(t) = (t^2, t^4)$ có phải là một tham số hóa của parabôn $y = x^2$ hay không?

1.2. Tìm tham số hóa của các đường cong định mức sau:

(i) $y^2 - x^2 = 1$;

(ii) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$.

1.3. Tìm phương trình trong hệ tọa độ Descartes của đường cong tham số:

(i) $\gamma(t) = (\cos^2 t, \sin^2 t)$;

(ii) $\gamma(t) = (e^t, t^2)$.

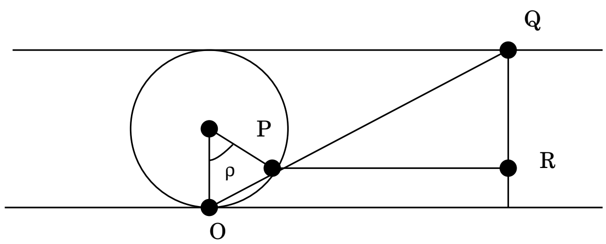
1.4. Tính véctơ tiếp xúc của các đường cong ở Bài tập 1.3.

1.5. Phác họa đường hình sao trong Ví dụ 1.3. Tính vectơ tiếp xúc của nó tại mỗi điểm. Tại những điểm nào thì có vectơ tiếp xúc bằng vectơ không?

1.6. Giả sử P là một điểm bất kỳ nằm trên đường tròn $\mathcal{C}$ có bán kính $a > 0$ và có tâm tại điểm $(0, a)$ trong hệ tọa độ Oxy. Đường thẳng qua P và gốc tọa độ cắt đường thẳng $y = 2a$ tại Q, đường thẳng qua P song song với trục x cắt đường thẳng qua Q song song với trục y tại R. Khi P chạy quanh $\mathcal{C}$ thì quỹ tích của R là một đường cong, được gọi là *ma thuật của Agnesi* (witch of Agnesi) [1] Đối với đường cong này:

(i) Tìm một tham số hóa;

(ii) Tìm phương trình trong hệ tọa độ Descartes.



1.7. Quỹ tích của một điểm cố định trên đường tròn khi đường tròn đó lăn (không trượt) dọc theo một đường thẳng được gọi là đường cong *xycloit* (cycloid). Chứng minh rằng nếu đường thẳng là trục x và đường tròn có bán kính $a > 0$ thì xycloit có thể tham số hóa bởi

$$\gamma(t) = a(t - \sin t, 1 - \cos t).$$

1.8. Tổng quát hóa bài tập trên, hãy tìm tham số hóa của một *êpixycloit* (tương ứng, hypôxycloit), quỹ tích của một điểm cố định trên đường tròn khi đường tròn đó lăn (không trượt) phía ngoài (tương ứng, bên trong) tựa theo một đường tròn.

[1] Nd: Đường cong "witch of Agnesi" được Maria Agnesi trình bày trong sách Toán bằng tiếng Ý của bà vào 1748 (được xem là tác phẩm Toán học đầu tiên do một phụ nữ viết).