Ý tưởng giải và sự tường minh lời giải qua một số bài toán tổ hợp

Lê Văn Quang

Trong các kỳ thi IMO, các bài toán tổ hợp (Combinatorics) được đặt trước đầu bài bằng chữ "C". Ví dụ: Bài 6 IMO 2005 do Rumani đề nghị được ghi: C6(ROM).

Khi đọc đầu bài của các BTTH (Bài toán tổ hợp) thì học sinh đều có thể hiểu các giả thiết và kết luận khá dễ dàng, nhưng giải được chúng là điều khó khăn. Từ bảng kết quả điểm cho thấy số học sinh giải được điểm tối đa rất ít, điều đó chứng tỏ đây là loại bài toán khó, thậm chí có trong tay lời giải của tác giả ra bài toán đó thì không phải học sinh nào cũng hiểu đầy đủ và cặn kẽ lời giải. Những người tự giải bài toán đó bằng một cách khác thường hiểu được lời giải của tác giả một cách khá dễ dàng. Tại sao lại như vậy?

Một số BTTH thường đề cập một số yếu tố ràng buộc theo những quy tắc nào đó. Yêu cầu của bài toán là đánh giá một đại lượng nào đó liên quan đến các yếu tố đã đề cập, hoặc chứng minh một quy tắc nào đó luôn thực hiện được, hoặc chứng minh một quy luật nào đó nghiệm đúng.

Lược đồ tự nhiên để tiếp cận việc giải loại bài toán này đã được hình thành cho học sinh từ các lớp dưới gồm các bước:

1. Chọn ẩn để mô tả các yếu tố trong đầu bài thành một phương trình, một bất phương trình hoặc một hệ hỗn hợp chứa ẩn đã chọn.

2. Xử lý các điều vừa mô tả theo yêu cầu của bài toán bằng cách giải ra nghiệm hoặc biến đổi thành những kết quả giúp cho việc hình thành quy tắc hay quy luật thỏa yêu cầu bài toán.

Từ ý tưởng giải như thế thì khâu then chốt nhất là thể hiện tường minh ra một lời giải cụ thể. Do bài toán khó, người giải được bài toán chắc chắn phải chỉ ra được mối quan hệ nội tại của các yếu tố trong bài toán thông qua các kỹ năng biến đổi tinh xảo hoặc những nhận xét tinh tế, bản chất nhất từ hệ đã mô tả được.

Ngay ở bước 1, việc khéo chọn ẩn, hoặc đặt thêm ẩn phụ hoặc tích hợp các yếu tố trong đầu bài... là sự sáng tạo rất cá biệt riêng của người giải.

Hoàn thành bước 1 đã là một thành công mà không phải học sinh nào cũng làm tốt, nhưng điều cốt yếu là xử lý thành công ở bước 2. Trong bước này thường nảy sinh một số vấn đề là các kết quả thu được thường là do các phép biến đổi hệ quả. Việc khảo sát ngược lại là cần thiết, hoặc ít ra giải quyết được vấn đề tồn tại tình huống mà đã chỉ ra. Đưa ra một ví dụ cụ thể để chứng tỏ tồn tại tình huống cũng không phải dễ dàng, còn tạo được một quy trình hợp lý, chặt chẽ, có hệ thống để xây dựng được tình huống đôi lúc lại khó hơn yêu cầu của đầu bài.

Các BTTH này đều do các nhà toán học lừng danh trên thế giới sáng tác nên trong lời giải của họ thường thông báo một khám phá mới về tri thức toán, một "bất biến" nào đó, hoặc kiến thiết một thuật toán nào đó... Đọc các lời giải của họ, học sinh học tập được những cách đặt vấn đề một cách sáng tạo, những kỹ năng biến đổi điêu luyện bậc thầy, những hoạt động về tích hợp các dữ kiện riêng lẻ thành những kết quả sâu sắc mà từ đó có thể đưa ra những kết luận xác đáng, các khẳng định mà họ thường đặt tên là các "bổ đề".

Cùng ý tưởng giải nhưng có thể có nhiều cách để thực hiện sự tường minh lời giải. Trong đó có lời giải mà học sinh cho là khó hiểu. Việc gợi ý cho học sinh một ý tưởng giải và động viên học sinh nỗ lực thực hiện theo cách của mình, để tường minh ra một lời giải cụ thể cho BTTH, phải chăng là cách hợp lý để giúp cho các em học sinh mới bắt đầu làm quen với các BTTH hóc búa này.

Sau đây là các bài toán minh họa cho các điều vừa đề cập.

Ba BTTH được chọn minh họa nằm trong các kỳ thi: Chọn học sinh giỏi Quốc gia 2005 của Việt Nam, USAMO lần thứ 30 và IMO 2005. Chúng ta sẽ xem xét chúng ở hai khía cạnh: ý tưởng giải và sự tường minh lời giải.

Bài toán 1 (HSGQG 2005, Bài 3) *Trong mặt phẳng, cho bát giác lồi $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7A_8$ mà không có ba đường chéo nào của nó cắt nhau tại một điểm. Ta gọi mỗi giao điểm của hai đường chéo của bát giác là một nút. Xét các tứ giác lồi mà mỗi tứ giác đều có cả bốn đỉnh là đỉnh của bát giác đã cho. Ta gọi mỗi tứ giác như vậy là tứ giác con.*

Hãy tìm số nguyên n nhỏ nhất có tính chất: có thể tô màu nút sao cho với mọi $i, k \in \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ và $i \neq k$, nếu ký hiệu $s(i,k)$ là số tứ giác con nhận A_i, A_k làm đỉnh và đồng thời có giao điểm hai đường chéo là một nút đã được tô màu thì tất cả các giá trị $s(i,k)$ đều bằng nhau.

Giải.

Gọi n là số nguyên nhỏ nhất thoả bài toán. Ta có $s(i,k) = s(1,2)$ với mọi $i, k \in \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ và $i \neq k$.

Do một nút tương ứng với C_4^2 cặp đỉnh nên:

$$n.C_4^2 = \sum_{i<j} s(i,j) = C_8^2.s(1,2) \Leftrightarrow 3n = 14s(1,2)$$

Suy ra n chia hết cho 14. Từ đó: $n \geqslant 14$.

Cách tô màu 14 nút thoả mãn bài toán sau:

$\{1,2,3,4\}\{1,2,5,6\}\{1,2,7,8\}\{2,3,5,8\}\{2,3,7,6\}\{3,4,7,8\}\{3,4,5,6\}\{1,4,8,5\}\{1,4,7,6\}\{5,6,$

Nhận xét.

- Với một hình lập phương có thể ghi lại mỗi đỉnh một số chọn trong tập $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, hai đỉnh khác nhau ghi hai số khác nhau.

- Mỗi cạnh hình lập phương có thể tương ứng với đúng 3 cạnh song song với nó.

- Mỗi đường chéo của mặt hình lập phương có thể tương ứng với đúng 3 đường chéo của mặt cùng nằm trong mặt chứa nó hoặc trong mặt đối diện với nó.

- Mỗi đường chéo (chính) của hình lập phương có thể tương ứng với đúng 3 đường chéo (chính) còn lại.

Với ý tưởng trên có thể hiểu lý do tại sao lại chỉ ra được cách tô màu như trên.

Bài toán 2 (USAMO 2001, Bài 1) *Có 8 cái hộp, mỗi hộp chứa 6 trái banh. Tìm số nhỏ nhất sao cho mỗi banh tuỳ ý đều được tô một trong n màu thoả mãn đồng thời hai điều kiện sau:*

1. Trong mỗi hộp, không có hai banh nào được tô cùng một màu.

2. Hai hộp bất kỳ có chung khôg quá một màu.

Giải.

+) Gọi x_i là số màu xuất hiện i lần. $i = 1, 2, \ldots, k,\ (k \leqslant n)$. Ta có:

$$n = x_1 + x_2 + \cdots + x_k \tag{1}$$
$$48 = 1x_1 + 2x_2 + \cdots + kx_k \tag{2}$$

+) Gọi y là số cách chọn hai hộp không có chung màu nào. Do hai hộp bất kỳ có chung không quá một màu nên:

$$C_8^2 = C_2^2 x_2 + C_3^2 x_3 + \cdots + C_k^2 x_k + y \tag{3}$$

+) Với $i > 1$ ta có:

$$1 - \frac{2}{3}i + \frac{1}{3}C_i^2 = \frac{(i-2)(i-3)}{6}.$$

Lấy (1) trừ $\frac{2}{3}$.(2) rồi cộng với $\frac{1}{3}$.(3) ta được:

$$n - \frac{68}{3} = \frac{1}{3}x_1 + \sum_{i\ 2} \frac{(i-2)(i-3)}{6} x_i + \frac{1}{3}y \geqslant 0.$$

Từ đó:

$$n \geqslant 23.$$

+) Cách tô sau của 23 màu thỏa bài toán (gọi tên màu là: $1, 2, \ldots, 23$)

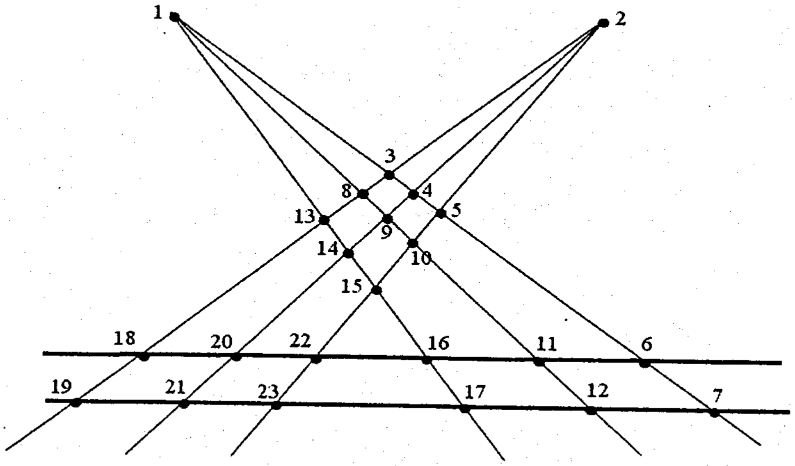
Hộp I	1	3	4	5	6	7
Hộp II	1	8	9	10	11	12
Hộp III	1	13	14	15	16	17
Hộp IV	2	3	8	13	18	19
Hộp V	2	4	9	14	20	21
Hộp VI	2	5	10	15	22	23
Hộp VII	6	11	16	18	20	22
Hộp VIII	7	12	17	19	21	23

Nhận xét.

+) Ở hình dưới, mỗi đường tượng trưng cho mỗi hộp, các giao điểm ở trên đường tượng trưng cho các banh.

+) Có đúng 8 đường, mỗi đường chứa đúng 6 giao điểm và có tất cả 23 giao điểm. Hai đường bất kỳ có tối đa một điểm chung.

+) Mỗi cách đánh số 23 giao điểm, từ 1 đến 23, cho ta một cách tô màu trên các banh ở 8 hộp thỏa các điều kiện bài toán.



Bài toán 3 (IMO 2005, Bài 6) *Trong một kỳ thi học sinh giỏi, các thí sinh phải giải 6 bài toán. Biết rằng với hai bài toán bất kỳ luôn có nhiều hơn* $\frac{2}{5}$ *số thí sinh dự thi, giải được cả hai bài toán này. Ngoài ra không có thí sinh nào giải được cả 6 bài toán. Chứng minh rằng có ít nhất 2 thí sinh sao cho mỗi người trong họ giải được đúng 5 bài toán.*

Giải.

+) Gọi n là số thí sinh tham gia kỳ thi và x_k là số thí sinh giải được đúng k bài toán $(k = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6)$. Ta có:

$$x_6 = 0; \quad n = x_0 + x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5. \tag{4}$$

Ta cần chứng minh: $x_5 \geqslant 2$

+) Với i, j và $i \neq j$, gọi $s(i,j) = s(j,i)$ là số thí sinh giải được cả bài i và bài $j, (i,j = 1,2,3,4,5,6)$.

Theo giả thiết luôn có: $5s(i,j) > 2n$. Do đó: $5s(i,j) \geqslant 2n+1$. Có tất cả $C_6^2 = 15$ cặp (i,j) mà $i < j$ nên:

$$\sum_{i<j} 5s(i,j) \geqslant 15(2n+1).$$

Do đó:

$$S = \sum_{i<j} s(i,j) \geqslant 3(2n+1) \tag{5}$$

+) Ta cũng có:

$$S = C_2^2 x_2 + C_3^2 x_3 + C_4^2 x_4 + C_5^2 x_5 = x_2 + 3x_3 + 6x_4 + 10x_5 \tag{6}$$

Từ (4), (5), (6):

$$x_2 + 3x_3 + 6x_4 + 10x_5 \geqslant 6(x_0 + x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5) + 3$$

hay

$$4x_5 \geqslant 6x_0 + 6x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 3 \geqslant 3 \tag{7}$$

Từ đó:

$$x_5 \geqslant 1.$$

+) Ta chứng minh thêm x_5 không thể bằng 1.

Giả sử $x_5 = 1$. Lúc đó từ (7) cho $x_0 = x_1 = x_2 = x_3 = 0$, và $x_4 = n - 1$.

Từ (6) cho:

$$S = 6n + 4. \tag{8}$$

Trường hợp này có duy nhất một thí sinh A làm được đúng 5 bài, còn lại tất cả đều làm được đúng 4 bài.

+) Gọi bài duy nhất mà thí sinh A không làm được là bài r và k là số thí sinh giải được bài r. Mỗi thí sinh trong k thí sinh này ngoài việc giải được bài r còn giải được đúng 3 bài nữa trong số các bài toán còn lại nên:

$$3k = \sum_{j=1, j\neq r}^{6} s(r,j) \tag{*}$$

+) Đặt $2n + 1 = 5a$. Ta có: $s(i,j) \geqslant a$.

Nếu a không phải là số nguyên thì:

$$s(i,j) > a \Leftrightarrow 5s(i,j) \geqslant 2n + 2.$$

Suy ra:

$$\sum_{i<j} 5s(i,j) \geqslant 15(2n+2) \Leftrightarrow S \geqslant 6n + 6.$$

Trái với (8).

+) Nếu a là số nguyên thì hiệu $s(i,j)-a$ là số nguyên không âm. Từ $S=6n+4$ viết lại $\sum_{i<j}(s(i,j)-a)=1$, suy ra trong 15 số hạng $s(i,j)$ với $i<j$, phải có 14 số hạng có cùng giá trị là a và đúng một số hạng có giá trị là $a+1$. Gọi $s(p,q)=a+1$. Do đó giá trị của $\sum_{j=1,j\neq r}^{6} s(r,j)$ chỉ có thể là $5a$ hoặc $5a+1$ tùy theo r không thuộc hoặc thuộc $\{p,q\}$.

Kết hợp với (*), ta có hoặc $5a$ chia hết cho 3 hoặc $5a+1$ chia hết cho 3 (**).

+) vì thí sinh A giải được 5 bài, nên tồn tại một bài t khác với các bài p,q,r mà thí sinh A giải được. Gọi h là số thí sinh giải được bài t. Trong số h thí sinh này, thì thí sinh A giải được bài t và thêm đúng 4 bài nữa, và $h-1$ thí sinh còn lại cũng giải được bài t và thêm đúng 3 bài nữa.

Vì vậy:

$$4+3(h-1)=\sum_{j=1,j\neq t}^{6} s(t,j) \text{ hay } \sum_{j=1,j\neq t}^{6} s(t,j)=3h+1.$$

Do $t\notin\{p,q\}$ nên:

$$\sum_{j=1,j\neq t}^{6} s(t,j)=5a.$$

Suy ra $5a=3h+1$ và $5a+1=3h+2$.

Điều này mâu thuẫn với (**).

Qua lời giải bài toán trên, tôi cho rằng các bài toán sau cũng có cùng ý tưởng giải và các em học sinh có thể thực tập tường minh lời giải.

Bài toán 4 *Cho n là số nguyên lớn hơn hoặc bằng 3. Trên mỗi cạnh và mỗi đường chéo của n-giác đều $A_1A_2\ldots A_n$ người ta muốn ghi một số nguyên dương nhỏ hơn hoặc bằng p, sao cho các điều kiện sau đều được thỏa mãn:*

i) Mọi số nguyên từ 1 đến p đều được ghi.

ii) Với mỗi tam giác $A_iA_jA_k$ tùy ý đều có hai cạnh được ghi hai số giống nhau và số này lớn hơn số được ghi trên cạnh còn lại.

Hãy xác định số nguyên p lớn nhất để có thể ghi các số thỏa mãn các điều kiện đặt ra.

Với giá trị này của p, hỏi có bao nhiêu cách ghi thỏa mãn điều kiện bài toán.

Bài toán 5 *Có $m+2$ cái hộp, mỗi hộp chứa m trái banh. Tìm số n nhỏ nhất sao cho mỗi banh được tô một trong n màu thỏa mãn đồng thời hai điều kiện sau:*

1. *Trong mỗi hộp, không có hai banh nào được tô cùng một màu.*
2. *Hai hộp bất kì có chung không quá một màu.*

Bài toán 6 *Trong một kỳ thi học sinh giỏi, các thí sinh phải giải 6 bài toán. Biết rằng* *với hai bài toán bất kỳ luôn có nhiều hơn* $\frac{2}{5}$ *số thí sinh dự thi giải được cả hai bài toán này. Ngoài ra không có thí nào giải được cả 6 bài toán.*

a. Gọi k là số thí sinh giải được đúng 5 bài toán. Tìm giá trị nhỏ nhất của k.

b. Chứng minh tồn tại ba bài toán mà có nhiều hơn $\frac{1}{5}$ *số thí sinh dự thi giải được.*

c. Chứng minh tồn tại bốn bài toán mà có nhiều hơn $\frac{1}{15}$ *số thí sinh dự thi giải được.*

Bài toán 7 *Cho một n-giác lồi có diện tích S. Chứng minh rằng tồn tại một cạnh AB của đa giác và một điểm M thuộc miền đa giác này sao cho khoảng cách từ điểm M đến đường thẳng AB không nhỏ hơn* $\frac{4S}{nAB}$.

Tài liệu tham khảo

[1] Toán học và Tuổi trẻ số 340/2005; 344/2006: Bài của Thầy Vũ Đình Hòa (ĐHSP Hà Nội).

[2] Toán học và Tuổi trẻ số 341/2005: Bài của Thầy Hoàng Ngọc Cảnh (THPT chuyên Hà Tĩnh).

[3] USA and International Mathematical Olympiads 2001 Titu Andreescu and Zuming Feng.

[4] http://www.mathlinks IMO Shotlist 2005.

[5] IMO 2006 Solutions.

Giới thiệu một số bài toán đại số có xuất xứ từ hình học

Nguyễn Đăng Phất

Bài viết này giới thiệu với bạn đọc một số bài toán đại số *đặc thù, có xuất xứ từ hình học*, mà nội dung bao gồm hai thể loại là *hệ phương trình đại số* và *cực trị đại số.*

1 Một số hệ phương trình đại số đặc biệt có xuất xứ từ hình học.

Trước hết, hãy xuất phát từ một số *hệ phương trình đại số bậc hai đơn giản* (có xuất xứ từ hình học).

Bài toán 1. Giải và biện luận hệ phương trình sau:

$$\frac{x^2-yz}{a}=\frac{y^2-zx}{b}=\frac{z^2-xy}{c},\quad (a\neq 0,\ b\neq 0,\ c\neq 0); \tag{1}$$

Lời giải sơ lược

Đặt $\dfrac{1}{t}$ là giá trị chung của ba tỷ số trong hệ phương trình (1) rồi tính t (mà ta thường gọi là *ẩn phụ*) và x, y, z. Ta được:

$$a=t(x^2-yz),\ \ b=t(y^2-zx),\ \ c=t(z^2-xy).$$

Từ đó suy ra (nếu $t<\infty$):

$$a^2-bc=t^2.x(x^3+y^3+z^3-3xyz); \tag{2}$$

và hai hệ thức nữa tương tự (đối với b^2-ca và c^2-ab), thu được nhờ hoán vị vòng quanh $a\to b\to c\to a$ và $x\to y\to z\to x$.

Cuối cùng ta đi đến kết quả sau đây:

Trả lời.
1°) Nếu ba số a, b, c khác không đã cho và khác nhau đôi một thì x, y, z cũng vậy

($x \neq 0,\ y \neq 0,\ z \neq 0$ $x,\ y,\ z$ đôi một khác nhau). Khi đó, t cũng khác không và *hệ phương trình (1) là vô định*), có biểu thức nghiệm như sau:

$$\frac{x}{a^2 - bc} = \frac{y}{b^2 - ca} = \frac{z}{c^2 - ab} \ (= \lambda \text{ tùy ý}); \tag{3}$$

2°) Nếu $a = b = c$ thì hệ phương trình (1) cũng là *vô định*, vì khi đó $x = y = z$ và lấy giá trị tùy ý, kể cả 0.

Nhận xét: 1°) Biểu thức nghiệm của hệ (1) có tính chất *đối xứng*, được suy ra từ (1) bằng cách thay các hằng số a, b, c lần lượt bởi các ẩn x, y, z, và ngược lại, thay x, y, z bởi a, b, c tương ứng. Ta nói rằng hệ (1) có tính chất *đối hợp*.
2°) Từ lời giải của hệ (1) ta dễ dàng suy ra hai hệ phương trình sau (hệ ba phương trình ba ẩn) có nghiệm duy nhất:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2 - yz}{a} = \dfrac{y^2 - zx}{b} = \dfrac{z^2 - xy}{c}; \\ x + y + z = a + b + c; \quad (abc \neq 0) \end{cases} \tag{1'}$$

$$\begin{cases} \dfrac{x^2 - yz}{a} = \dfrac{y^2 - zx}{b} = \dfrac{z^2 - xy}{c}; \\ xyz = abc; \quad (abc \neq 0) \end{cases} \tag{1''}$$

Bài toán 2. Giải hệ phương trình (ẩn là x, y, z):

$$\frac{x - a}{a' - a} = \frac{y - b}{b' - b} = \frac{z - c}{c' - c} = (x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2. \tag{*}$$

Đồng thời, chứng minh rằng: Nếu $a = b = c = 0$ và giữa a', b', c' có hệ thức

$$A(a'^2 + b'^2 + c'^2) + 2(pa' + qb' + rc') + B = 0, \tag{i}$$

(trong đó $A \neq 0,\ B \neq 0;\ a' \neq a,\ b' \neq b,\ c' \neq c;\ p \neq 0,\ q \neq 0,\ r \neq 0$) thì giữa x, y, z cũng có hệ thức sau đây:

$$B(x^2 + y^2 + z^2) + 2(px + qy + rz) + A = 0, \tag{ii}$$

Hướng dẫn. Đặt t là giá trị chung của ba tỉ số ở vế trái của (*), cũng có nghĩa đặt $t = (x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2$ là *ẩn phụ*. Lưu ý rằng đặt ẩn phụ như thế này cũng là phương pháp chung để giải hệ phương trình đại số có dạng (*) như hệ phương trình trên đây. Sau khi thực hiện một số phép biến đổi đại số tương đương ta thu được đáp số của bài toán. Phần này dành cho bạn đọc tự kiểm nghiệm.

Trả lời. Biểu thức nghiệm của hệ có thể được viết (sắp đặt) dưới dạng sau đây:

$$\frac{a' - a}{x - a} = \frac{b' - b}{y - b} = \frac{c' - c}{z - c} = (a' - a)^2 + (b' - b)^2 + (c' - c)^2; \tag{**}$$

Nhận xét. Biểu thức (**) của hệ (*) có tính chất đối xứng cũng giống như biểu thức nghiệm (3) của hệ (1) được chỉ ra trong bài toán 1 ở trên. Cụ thể là (**) được suy ra từ (*) bằng cách giữ nguyên các hằng số dữ kiện (đã cho) a, b, c nhưng lại thay các hằng số a', b', c' lần lượt bởi các ẩn x, y, z và ngược lại, thay x, y, z lần lượt bởi a', b', c'.

Xuất xứ của bài toán 2. Từ bài toán đại số 1 trên đây, nhân nhận xét về tính chất "*đối lập*" của biểu thức giữa nghiệm ("ẩn") và hằng số dữ kiện, tác giả bài viết này liên tưởng đến tính chất "đối hợp" của phép biến hình nghịch đảo trong mặt phẳng cũng như trong không gian. Trước hết, viết phương trình véctơ của phép nghịch đảo trong không gian cực O và phương tích $p = r^2 = 1$) rồi đề xuất thành bài toán 2 trên đây.

$$\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{OM'} = 1\ (\overrightarrow{OM'} \nearrow\!\nearrow \overrightarrow{OM}) \Leftrightarrow \overrightarrow{OM'} = \frac{\overrightarrow{OM}}{OM^2} \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = \frac{\overrightarrow{OM'}}{OM'^2},$$

hay là:

$$\overrightarrow{x'} - \overrightarrow{x_o} = \frac{\overrightarrow{x} - \overrightarrow{x_o}}{(\overrightarrow{x} - \overrightarrow{x_o})^2} \Leftrightarrow \overrightarrow{x} - \overrightarrow{x_o} = \frac{\overrightarrow{x}' - \overrightarrow{x_o}}{(\overrightarrow{x}' - \overrightarrow{x_o})^2}.$$

Sau đó, viết phương trình véctơ của mặt cầu (hay đường tròn trong mặt phẳng) $A\overrightarrow{x}^2 + 2\overrightarrow{C}.\overrightarrow{x} + B = 0$ rồi đề xuất bài toán chứng minh tiếp theo (Phép nghịch đảo biến mặt cầu thành mặt cầu hay mặt phẳng).

Bài toán 3. Giải và biện luận hệ phương trình (ẩn x, y, z):

$$\begin{cases} (a - x)\cos\alpha\tan^2\alpha + (y - b)\cos\beta + (z - c)\cos\gamma = 0, \\ (x - a)\cos\alpha + (b - y)\cos\beta\tan^2\beta + (z - c)\cos\gamma = 0, \\ (x - a)\cos\alpha + (y - b)\cos\beta + (c - z)\cos\gamma\tan^2\gamma = 0. \\ (\cos\alpha \neq 0,\quad \cos\beta \neq 0,\quad \cos\gamma \neq 0;\quad 0 < \alpha, \beta, \gamma < \frac{\pi}{2}) \end{cases} \tag{***}$$

Hướng dẫn. Thay $\tan^2\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha} - 1$, $\tan^2\beta = \dfrac{1}{\cos^2\beta} - 1$, $\tan^2\gamma = \dfrac{1}{\cos^2\gamma} - 1$ vào hệ phương trình (***) thì đưa được hệ này về dạng sau đây:

$$(x - a)\cos\alpha + (y - b)\cos\beta + (z - c)\cos\gamma = \frac{x - a}{\cos\alpha} = \frac{y - b}{\cos\beta} = \frac{z - c}{\cos\gamma}; \tag{***'}$$

Trả lời. 1°) Nếu α, β và γ không có mối liên hệ gì với nhau, cụ thể là: $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma \neq 1$ thì hệ phương trình *có nghiệm duy nhất*: $x = a,\ y = b,\ z = c$.
2°) Nếu $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$, hệ phương trình có vô số nghiệm, dạng:

$$\begin{cases} x = a + \lambda\cos\alpha, \\ y = b + \lambda\cos\beta, \\ z = c + \lambda\cos\gamma, \end{cases} \qquad \text{(trong đó } \lambda \text{ là một tham số tùy ý, } \lambda \in \mathbb{R})$$

Xuất xứ của bài toán 3. Bài toán trên đây được phát hiện đồng thời với bài toán 4 (được trình bày ngay sau đây), nảy sinh từ việc đặt bài toán 4. Bài toán này cố nhiên