Phương trình vi phân

Bài 8B

PGS. TS. NGUYỄN XUÂN THẢO

Chương 7
HỆ PHI TUYẾN VÀ CÁC HIỆN TƯỢNG

§ 7.1. Nghiệm cân bằng và tính ổn định

• Sự ổn định của nghiệm kì dị

1. Đặt vấn đề

• Đối với một phương trình vi phân bất kì không phải luôn tìm được nghiệm tường minh

• Ngay cả khi không tìm được nghiệm tường minh thì vẫn cần nhận được những thông tin có giá trị về nghiệm; chẳng hạn như tính không bị chặn, bị chặn, tuần hoàn của nghiệm, ... minh hoạ qua một số ví dụ dưới đây

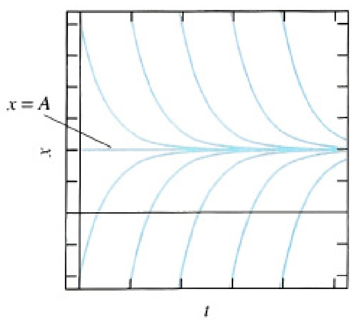
Ví dụ 1. Gọi x(t) là nhiệt độ của một vật thể với nhiệt độ ban đầu $x(0) = x_0$. Ở thời điểm t = 0 vật thể được nhúng trong một dung dịch có nhiệt độ không đổi bằng A. Theo định lý làm nguội của Newton thì

$$\frac{dx}{dt} = -k(x - A) \qquad (k > 0,\ k = \text{const})$$

• Sử dụng phương pháp tách biến, nhận được nghiệm

$$x(t) = A + (x_0 - A)e^{-kt}$$

rõ ràng rằng $\lim\limits_{t\to\infty} x(t) = A$



Hình 7.1.1. Các đường cong nghiệm điển hình của phương trình làm nguội của Newton $\frac{dx}{dt} = -k(x - A)$

Ví dụ 2. Xét phương trình về tăng trưởng dân số $\frac{dx}{dt} = f(x)$

ở đó $f(x)$ là tỷ lệ sinh và tỷ lệ tử vong của các cá thể trong một đơn vị thời gian.

• Đây là phương trình Otonom cấp 1.

• Nếu $f(c) = 0$ thì có x(t) = c là nghiệm. Nghiệm hằng số của một phương trình vi phân còn được gọi là nghiệm cân bằng.

• Như vậy đặc trưng nghiệm của phương trình otonom cấp 1 có thể được mô tả qua các điểm kỳ dị của phương trình.

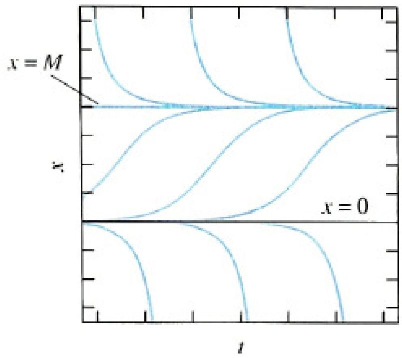
Ví dụ 3. Xét phương trình Logistic $\frac{dx}{dt} = kx(M - x)$, ở đó k > 0, M > 0.

• Có 2 điểm kỳ dị, đó là các nghiệm x = 0 và x = M

• Có nghiệm (từ mục 1.7) là

$$x(t) = \frac{Mx_0}{x_0 + (M - x_0)e^{-kMt}}$$

• Từ đó có $x(t) = 0$ và $x(t) = M$ là nghiệm cân bằng



Hình 7.1.3. Các đường cong nghiệm điển hình của phương trình $\frac{dx}{dt} = kx(M - x)$

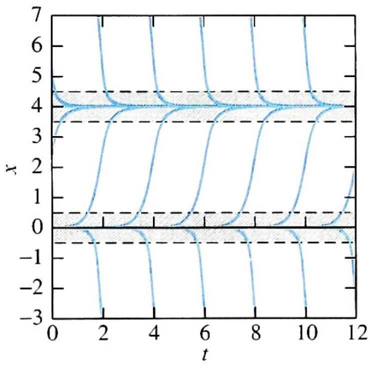
2. Sự ổn định của các điểm kỳ dị

• Điểm kỳ dị x = c của 1 phương trình vi phân cấp 1, otonom, được gọi là ổn định nếu ∀ε > 0, ∃δ > 0 sao cho:

$$|x_0 - c| < \delta \text{ thì có } |x(t) - c| < \varepsilon, \forall t > 0.$$

• Điểm kỳ dị x = c được gọi là không ổn định, nếu nó không là điểm ổn định.

Ví dụ 4.



Hình 7.1.4. Các đường cong nghiệm, phễu và vòi của phương trình

$$\frac{dx}{dt} = 4x - x^2$$

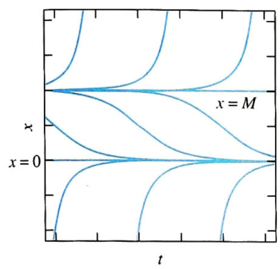
• Hình 7.1.4 cho cách nhìn "rộng hơn" về đường cong nghiệm của một phương trình logistic với k = 1 và M = 4. Chú ý rằng dải 3,5 < x < 4,5 (bao lấy đường x = 4) giống như cái phễu của các đường cong nghiệm: khi di chuyển từ trái sang phải thì các đường cong nghiệm chui vào phễu và ở lại trong đó. Ngược lại, dải -0,5 < x < 0,5 (bao lấy đường cong nghiệm không ổn định x = 0) giống như 1 cái vòi: các đường cong nghiệm đi vào dải rồi sau đó đi ra khỏi dải. Vậy điểm kỳ dị x = M = 4 là điểm ổn định, còn điểm kỳ dị x = 0 là điểm không ổn định.

Ví dụ 5. Xét phương trình nổ/tắt $\dfrac{dx}{dt} = kx(x-M)$, $x(0) = x_0$.

• Có 2 điểm kỳ dị là x = 0 và x = M tương ứng với các nghiệm cân bằng

x(t) = 0 và x(t) = M.

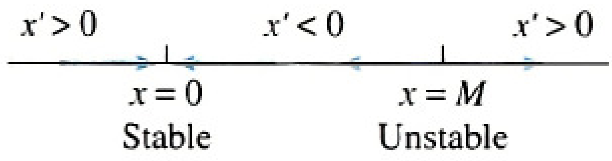
• Nghiệm thoả mãn điều kiện ban đầu là $x(t) = \dfrac{Mx_0}{x_0 + (M - x_0)e^{kMt}}$



Hình 7.1.6. Các đường cong nghiệm điển hình của phương trình

$$\frac{dx}{dt} = kx(x-M)$$

• Một dải hẹp quanh nghiệm ổn định x = 0 được xem như một cái phễu, trong khi một dải dọc theo đường cong nghiệm x = M được xem như một cái vòi của các đường cong nghiệm. Tính chất các nghiệm của phương trình (9) được tóm tắt bởi sơ đồ pha ở Hình 7.1.7. Điểm kỳ dị x = 0 là điểm ổn định, còn điểm kỳ dị x = M là điểm không ổn định.



Hình 7.1.7. Biểu đồ pha điển hình của phương trình $\frac{dx}{dt} = f(x) = kx(x - M)$

a) Bùng nổ dân số

Phương trình vi phân otonom $\frac{dx}{dt} = ax - bx^2 - h$

với a > 0, b > 0, h > 0 được coi là phương trình mô tả việc bùng nổ dân số.

Ví dụ 6. Xét phương trình vi phân $\frac{dx}{dt} = kx(M - x) - h$ (2.1)

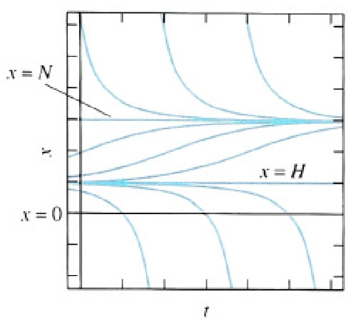
• Phương trình này thể hiện số dân tới hạn M khi h = 0 mà không có bùng nổ dân số.

• Các điểm kỳ dị $H, N = \frac{kM \pm \sqrt{(kM)^2 - 4hk}}{2k}$

• Giả sử tỷ lệ bùng nổ h đủ nhỏ sao cho $4h < kM^2$, khi đó các căn của H, N đều thực và khi 0 < H < N < M, ta viết lại phương trình dưới dạng:

$$\frac{dx}{dt} = k(N - x)(x - H)$$

• Có nghiệm $x(t) = \frac{N(x_0 - H) - H(x_0 - N)e^{-k(N-H)t}}{(x_0 - H) - (x_0 - N)e^{-k(N-H)t}}$



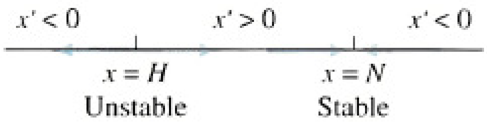
Hình 7.1.8. Các đường cong nghiệm điển hình của phương trình

$$\frac{dx}{dt} = k(N - x)(x - H)$$

• Vậy đường cong nghiệm được mô tả như ở Hình 7.1.8 (dễ thấy một phễu của nghiệm dọc theo đường x = N và một vòi của nghiệm dọc theo đường x = H).

Nghiệm hằng x(t) = N là nghiệm tới hạn cân bằng, còn nghiệm hằng x(t) = H là nghiệm ngưỡng cân bằng nghiệm này chia các nghiệm thành 2 nhánh: nếu x_0 > H thì dân số đạt đến giá trị N, nếu x_0 < H thì dân số giảm dần.

• Điểm kỳ dị ổn định x = N và điểm kỳ dị không ổn định x = H, được mô tả ở sơ đồ pha trong Hình 7.1.9



Hình 7.1.9. Sơ đồ pha của phương trình $\dfrac{dx}{dt} = f(x) = k(N - x)(x - H)$

Ví dụ 7. Chúng ta xét một ứng dụng cụ thể về các kết luận ổn định ở ví dụ 6, với giả thiết rằng k = 1 và M = 4 với lượng cá trong hồ là x(t) gồm hàng trăm lần kiểm tra sau t năm. Dù cá không bị câu thì cuối cùng trong hồ vẫn còn khoảng 400 con, cho dù số cá ban dầu với số lượng như thế nào. Bây giờ, giả sử h = 3 để cho hàng năm thu hoạch được 300 con (ở mức hằng số qua các năm), khi đó phương trình (2.1) trở thành $\dfrac{dx}{dt} = x(4 - x) - 3$, và phương trình bậc 2:

$$-x^2 + 4x - 3 = 0 = (3 - x).(x - 1) = 0$$

có các nghiệm là H = 1, N = 3. Do vậy lượng cá ngưỡng cân bằng là 100 con và ngưỡng tới hạn cân bằng là 300 con. Tóm lại, nếu trong hồ ban đầu có hơn 100 con, thì số cá sẽ đạt giá trị tới hạn 300 con khi thời gian t tăng lên. Nhưng nếu lượng cá ban đầu trong hồ ít hơn 100 con, thì hồ sẽ bị "câu hết" và số lượng cá sẽ hết sau một khoảng thời gian hữu hạn.

b) Sự rẽ nhánh và tính độc lập các tham số

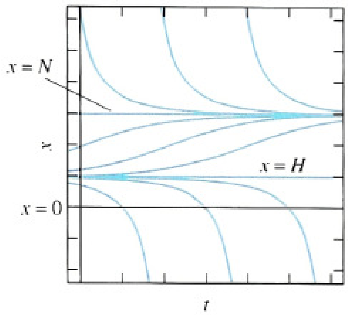
• Một hệ sinh học hoặc một hệ vật lý, được đặc trưng bởi một phương trình vi phân, sẽ phụ thuộc rất nhiều vào giá trị của các hệ số hay các tham số có mặt trong phương trình. Chẳng hạn, số lượng các điểm kỳ dị của một phương trình vi phân có thể bị thay đổi đột ngột khi thay đổi giá trị của một tham số.

Ví dụ 8. Phương trình vi phân $\dfrac{dx}{dt} = x(4 - x) - h$

(x có giá trị hàng trăm) đặc trưng cho sự bùng nổ dân số (2.1) khi k = 1 và cho số dân tới hạn khi M = 4. Trong Ví dụ 7, chúng ta đã xét trường hợp h = 3 và thấy rằng ngưỡng tới hạn cân bằng là N = 300 và số dân ngưỡng cân bằng là H = 100. Các đường cong nghiệm điển hình, bao gồm cả các nghiệm cân bằng x(t) = 3 và x(t) = 1, được mô tả ở Hình 7.1.8.

• Khi k = 1 và M = 4, dân số tới hạn N và số dân đạt ngưỡng H là

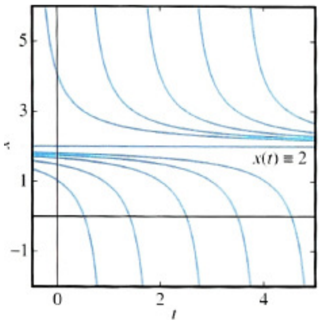
$$H, N = \frac{1}{2}(4 \pm \sqrt{16 - 4h}) = 2 \pm \sqrt{4 - h} \qquad (2.2)$$



Hình 7.1.8. Các đường cong nghiệm điển hình của phương trình $\dfrac{dx}{dt} = k(N-x)(x-H)$

• Nếu h < 4: khi đó chúng ta có các nghiệm cân bằng x(t) ≡ N và x(t) ≡ H, với N > H, như ở Hình 7.1.8.

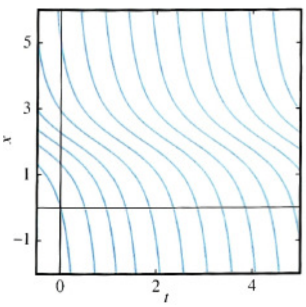
• Nếu h = 4: Khi đó phương trình (2.2) cho kết quả H = N = 2, nên phương trình vi phân chỉ có nghiệm cân bằng x(t) ≡ 2. Trong trường hợp này các đường cong nghiệm của phương trình được mô tả như ở hình 7.1.10.



Hình 7.1.10. Các đường cong nghiệm của phương trình $\dfrac{dx}{dt} = x(4-x) - h$ với h = 4

Nếu số cá ban dầu x_0 (đơn vị là 100) vượt quá 2, thì lượng cá đạt đến số lượng tới hạn 200 con. Tuy nhiên, với mọi lượng cá ban đầu x_0 < 200 sẽ dẫn đến tình trạng suy giảm do cá chết – một hậu quả của sự bội tăng 400 con/năm.

• Nếu h > 4: khi đó H, N không là số thực, nên bài toán không có nghiệm ổn định. Lúc này, các đường cong nghiệm giống như các đường cong ở Hình 7.1.11 và cá chết dần (dù với bất kỳ số lượng nào ban đầu), do hậu quả của bội tăng 400 con/năm.

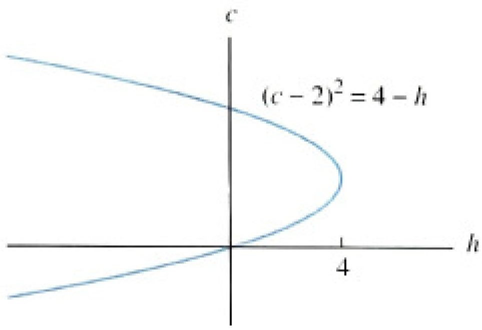


Hình 7.1.11. Các đường cong nghiệm của phương trình $\dfrac{dx}{dt} = x(4-x) - h$ với h = 5

• Nếu chúng ta tăng dần giá trị của tham số h thì hình dáng các đường cong nghiệm thay đổi từ Hình 7.1.8. với h < 4 đến Hình 7.1.10 với h = 4 và hình 7.1.11 với h > 4. Vậy phương trình vi phân đã cho:

- Có 2 điểm kỳ dị khi h < 4
- Có 1 điểm kỳ dị khi h = 4
- Không có điểm kỳ dị nào khi h > 4

• Giá trị h = 4 mà ứng với nó, bản chất nghiệm của phương trình vi phân sẽ thay đổi khi h tăng, được gọi là điểm rẽ nhánh của phương trình vi phân có chứa tham số h. Một phương pháp chung để thấy được sự "rẽ nhánh" của các nghiệm, là vẽ sơ đồ rẽ nhánh gồm các điểm (h, c), trong đó c là điểm kỳ dị của phương trình x' =x(4 - x) +h. Chẳng hạn, nếu chúng ta viết (2.2) dưới dạng $c = 2 \pm \sqrt{4-h}$; $(c-2)^2 = 4-h$, trong đó C = N hoặc C = H, chúng ta sẽ có đường parabol như ở Hình 7.1.12. Parabol này là sơ đồ rẽ nhánh của phương trình vi phân mô tả sự tăng trưởng dân số.



Hình 7.1.12. Parabol $(c - 2)^2 = 4 - h$ là sơ đồ rẽ nhánh của phương trình x' = x(4 - x) - h

§ 7.2. Tính ổn định và mặt phẳng pha

- Ảnh pha
- Tính chất của điểm tới hạn

1. Đặt vấn đề

a) Nhiều hiện tượng tự nhiên được đặc trưng bởi hệ gồm hai phương trình vi phân cấp một hai chiều dưới dạng sau (hệ otonom)

$$\frac{dx}{dt} = F(x, y) \qquad \frac{dy}{dt} = G(x, y) \tag{1.1}$$

ở đó F và G khả vi liên tục trong miền R của mặt phẳng oxy (được gọi là mặt phẳng pha của hệ (1.1)).

- Với $\forall$ $(x_0, y_0) \in$ R, hệ trên luôn luôn tồn tại nghiệm duy nhất thoả mãn các điều kiện đầu $x(t_0) = x_0$; $y(t_0) = y_0$

- Các phương trình x = x(t), y = y(t) mô tả đường cong nghiệm dưới dạng tham số trong mặt phẳng pha

- Quỹ đạo của hệ (1.1) là mọi đường cong nghiệm như trên đi qua một điểm của miền R

- Điểm tới hạn của hệ (1.1) là điểm (x^*, y^*) sao cho $F(x^*, y^*) = G(x^*, y^*) = 0$, khi đó các hàm hằng $x(t) = x^*$, $y(t) = y^*$ là nghiệm cân bằng của hệ (có quỹ đạo chỉ gồm một điểm).

b) Trong những bài toán thực tế, những điểm đơn giản này cùng với các quỹ đạo là các đối tượng được quan tâm nhiều nhất.

- Chẳng hạn, giả sử hệ $\begin{cases} x' = F(x, y) \\ y' = G(x, y) \end{cases}$ đặc trưng cho 2 đàn súc vật với số lượng x(t), y(t) sống trong cùng một môi trường và cạnh tranh nhau về cùng loại thức ăn hoặc mồi.

Điểm (x^*, y^*) của hệ cho thấy số lượng x^* loại này và số lượng y^* của loài kia cùng tồn tại song song. Còn nếu (x_1, y_1) không phải là điểm tới hạn thì không thể có các số lượng hằng số x_1, y_1 của từng loài cùng chung sống mà phải xảy ra số lượng của một hoặc cả hai sẽ phải thay đổi theo thời gian.

c) Ví dụ 1. Tìm các điểm tới hạn của hệ $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 14x - 2x^2 - xy \\ \dfrac{dy}{dt} = 16y - 2y^2 - xy \end{cases}$

- Xét hệ phương trình sau

$$\begin{cases}14x-2x^2-xy=0\\16y-2y^2-xy=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x(14-2x-y)=0\\y(16-2y-x)=0\end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{l}x=0,\ 16-2y-x=0\\y=0,\ 14-2x-y=0\\14-2x-y=0,\ 16-2y-x=0\\x=0=y\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0,\ \ y=8\\x=7,\ \ y=0\\x=4,\ \ y=6\\x=0,\ \ y=0\end{array}\right.$$

- Hệ có 4 điểm tới hạn (0, 0); (0, 8); (7, 0); (4, 6).
- Nếu gọi x(t) là số lượng thỏ, y(t) là số lượng sóc và các số lượng ấy là những hằng số thì chỉ có 3 khả năng:

+) không có thỏ, chỉ có 8 sóc.

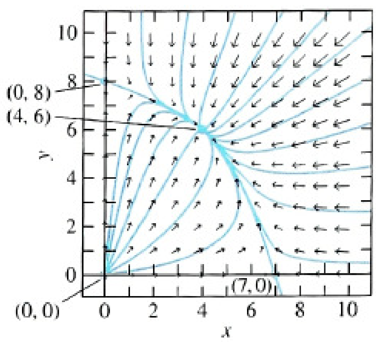
+) có 7 thỏ và không có sóc

+) có 4 thỏ và 6 sóc.

- Như vậy điểm tới hạn (4, 6) cho biết khả năng duy nhất mà thỏ và sóc cùng tồn tại với số lượng khác 0.

2. Ảnh pha

- Ảnh pha là một bức tranh trên mặt phẳng pha về các điểm tới hạn và các quỹ đạo không suy biến.
- Mỗi quỹ đạo (không gồm quỹ đạo chỉ có một điểm) là một đường cong không suy biến, không tự cắt.



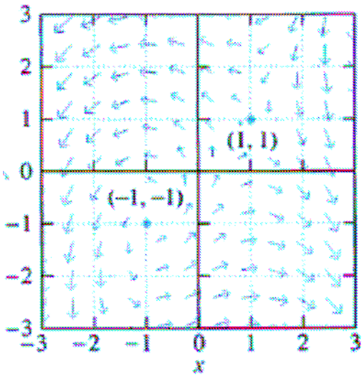
Hình 7.2.1. Trường véc tơ và ảnh pha của hệ $\begin{cases}x'=14x-2x^2-xy\\y'=16y-2y^2-xy\end{cases}$

Hình 7.2.1. thể hiện trường véc tơ và ảnh pha của hệ thỏ - sóc ở Ví dụ 1. Các mũi tên của trường véc tơ thể hiện hướng chuyển động của điểm (x(t), y(t)). Chúng ta thấy rằng khi cho số lượng thỏ $x_0 \neq 4$ và số lượng sóc $y_0 \neq 6$ thì điểm (x(t), y(t)) chuyển động dọc theo một quỹ đạo mà quỹ đạo đó tiến tới điểm (4, 6) khi t tăng lên.

Ví dụ 2. Tìm điểm tới hạn của hệ $\begin{cases} x' = x - y \\ y' = 1 - x^2 \end{cases}$

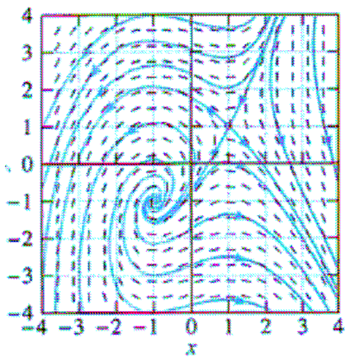
• Giải hệ: $\begin{cases} x - y = 0 \\ 1 - x^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 = y \\ x = -1 = y \end{array}\right.$

do đó hệ có 2 điểm tới hạn là (1, 1); (–1, –1).



Hình 7.2.2. Trường véc tơ của hệ

Trường véc tơ thể hiện trong hình 7.2.2 gợi lên ý tưởng rằng các quỹ đạo tựa tròn, đi ngược chiều kim đồng hồ quanh điểm (–1, –1), trong khi một số quỹ đạo đến điểm (–1, –1), còn một số quỹ đạo khác thì lùi xa khởi điểm đó. Quan sát này được xác thực bởi ảnh pha của hệ cho trong hình 7.2.3.



Hình 7.2.3. Ảnh pha của hệ

3. Tính chất của điểm tới hạn

• Người ta đặc biệt quan tâm tới tính chất của các quỹ đạo ở gần một điểm tới hạn riêng rẽ của hệ otonom.

Ví dụ 3. Hệ tuyến tính otonom $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -x, & & x(0) = x_0 \\ \dfrac{dy}{dt} = ky, & (k = const, k > 0), & y(0) = y_0 \end{cases}$

• Có $\begin{cases} -x = 0 \\ ky = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 0 = y$ nên hệ này chỉ có duy nhất một điểm tới hạn (0, 0).