ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

PHẠM THỊ PHƯƠNG THẢO

CÔNG THỨC EULER - POINCARÉ TRONG HÌNH HỌC LỒI

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

THÁI NGUYÊN - 2017

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

PHẠM THỊ PHƯƠNG THẢO

CÔNG THỨC EULER - POINCARÉ TRONG HÌNH HỌC LỒI

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Chuyên ngành: Phương pháp Toán sơ cấp
Mã số: 60 46 01 13

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC
TS. HOÀNG LÊ TRƯỜNG

THÁI NGUYÊN - 2017

Mục lục

MỞ ĐẦU

Hình học lồi là bộ môn nghiên cứu tính lồi của các hình hình học trong không gian thực, không gian vectơ và các không gian trừu tượng khác. Về mặt lý thuyết, hình học lồi là cơ sở lý luận cho nhiều ngành toán học khác nhau (chẳng hạn như Đại số, Giải tích, Lý thuyết tối ưu, ...). Về mặt ứng dụng, các cấu trúc lồi của các hình hình học tồn tại nhiều trong các bài toán thực tế. Trong trường hợp các bài toán có cấu trúc không lồi, người ta đã chỉ ra rằng có thể xấp xỉ bởi bài toán có cấu trúc lồi. Điều đó cho thấy rằng việc hiểu biết và nghiên cứu hình học lồi là hết sức bổ ích cả trong lý luận và thực tiễn.

Công thức Euler-Poincaré trong hình học lồi là một công thức tổ hợp và có nhiều ứng dụng trong giải các bài toán thi học sinh giỏi, trong giảng dạy hình học phẳng, hình học ba chiều và là khởi đầu cho các nghiên cứu sâu sắc hơn trong toán học hiện đại. Công thức này còn được ứng dụng lý thuyết vật lý và hóa học về mạng tinh thể.

Với mục đích học tập để hiểu rõ hơn bộ môn và tập dượt nghiên cứu khoa học nhằm thu hoạch một cách có hệ thống hiểu biết về hình học lồi, chúng tôi cố gắng tiếp cận bộ môn trên cơ sở tài liệu hiện có. Do thời gian và năng lực có hạn nên chúng tôi xin được hạn chế phạm vi đề tài với tiêu đề "Công thức Euler - Poincaré trong hình học lồi".

Trong luận văn này, chúng tôi trình bày lại khái niệm, định nghĩa, công thức Euler - Poincaré, và cách chứng minh công thức này. Đặc biệt là vận dụng công thức này trong việc tính toán các ví dụ cụ thể để cho thấy sức mạnh của công thức. Ngoài phần mở đầu, kết luận và tài liệu tham khảo, nội dung luận văn gồm hai chương.

Chương 1: Kiến thức chuẩn bị. Trong chương này, chúng tôi trình bày các khái niệm cơ bản về hình học lồi như tập lồi, bao lồi, đa diện và mặt để sử dụng trong chương 2.

Chương 2: Đặc trưng Euler-Poincaré. Trong chương này chúng tôi trình bày định nghĩa của hàm định giá, các đặc trưng Euler-Poincaré, từ đó đưa ra công thức Euler - Poincaré trong hình học lồi.

Mặc dù đã có nhiều cố gắng, nhưng do thời gian và trình độ còn hạn chế nên bản luận văn không tránh khỏi những thiếu sót nhất định. Tác giả rất mong nhận được ý kiến đóng góp của quý độc giả để bản luận văn này được hoàn thiện hơn.

Thái Nguyên, ngày 22 tháng 5 năm 2017

Tác giả

Phạm Thị Phương Thảo

Lời cảm ơn

Luận văn này được thực hiện tại trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên và hoàn thành dưới sự hướng dẫn của TS. Hoàng Lê Trường. Tác giả xin trân trọng bày tỏ lòng kính trọng và biết ơn sâu sắc tới thầy, người đã tận tình chỉ bảo, hướng dẫn, động viên khích lệ và tạo điều kiện thuận lợi cho tác giả trong suốt quá trình học tập và nghiên cứu luận văn.

Qua bản luận văn này, tác giả xin gửi lời cảm ơn tới Ban Giám hiệu trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên, Ban chủ nhiệm khoa Toán - Tin, cùng các giảng viên đã tham gia giảng dạy và tạo mọi điều kiện tốt nhất để tác giả học tập và nghiên cứu trong suốt thời gian qua.

Tác giả cũng xin cảm ơn gia đình, bạn bè, đồng nghiệp và tất cả mọi người đã quan tâm, động viên và giúp đỡ để tác giả có thể hoàn thành luận văn của mình.

Tác giả xin chân thành cảm ơn!

Danh mục các hình vẽ

Chương 1

Kiến thức chuẩn bị

Trong chương này, chúng tôi định nghĩa các đối tượng ứng với các mối liên hệ giữa hình học lồi và tổ hợp. Chúng ta bắt đầu vấn đề đếm các tập cỡ d sao cho các phần tử thuộc tập $[n]$. Những tập như thế được gọi là d-đa tập con của $[n]$. Với mọi tập như vậy tương ứng với một d-bộ $(m_1, m_2, \ldots, m_d) \in \mathbb{Z}^d$ sao cho

$$1 \leq m_1 \leq m_2 \leq \ldots \leq m_d \leq n.$$

Nếu chúng ta bỏ qua tính nguyên của m_j thì ta sẽ có một đối tượng hình học. Đối tượng hình học đó chính là nghiệm của hệ $d+1$ bất phương trình tuyến tính

$$n\triangle_d = \{x \in \mathbb{R}^d : 1 \leq x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_d \leq n\}.$$

Những d-đa tập con chính xác là các điểm nguyên trong $n\triangle_d$. Tập $n\triangle_d$ là một khối đa diện. Tập đó được xác định bởi một số hữu hạn các bất đẳng thức tuyến tính. Khối đa diện là một lớp các đối tượng hình học mà nhiều tính chất liên quan đến lĩnh vực đếm trong tổ hợp.

Đối tượng chính của luận văn là đếm số mặt của khối đa diện cho trước. Tập các mặt có dạng một tập có thứ tự, được phân loại theo chiều và việc đếm các mặt trong cùng một chiều sẽ dẫn chúng ta đến một công thức nổi tiếng đó là công thức Euler - Poincaré.

1.1. Tập lồi

Trong tiết này, chúng ta sẽ đưa ra các khái niệm và tính chất cơ bản liên quan đến tập lồi. Các đối tượng hình học của chúng ta sẽ được xây dựng thông qua khái niệm nửa không gian.

Định nghĩa 1.1 Với các số thực $a_1, \ldots, a_n$ và $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n) \neq 0$, mặt phẳng afin là tập có dạng

$$H^{=} = H := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d : \langle \mathbf{a}, \mathbf{x} \rangle = b\},$$

với $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$, $b \in \mathbb{R}$. Ở đây $\langle\, .,.\, \rangle$ là kí hiệu tích vô hướng trong $\mathbb{R}^d$. Chúng ta gọi H là *một siêu phẳng tuyến tính* nếu $\mathbf{0} \in H$ hoặc là tương đương với $b = 0$. Bởi vì $\mathbf{0} \in H$ khi và chỉ khi $b = \langle \mathbf{a}, \mathbf{0} \rangle = 0$.

Phần bù $\mathbb{R}^n \setminus H$ có hai phần rời nhau

$$H^{>} := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : a_1x_1 + \ldots + a_nx_n > b\} \text{ và}$$

$$H^{<} := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : a_1x_1 + \ldots + a_nx_n < b\}.$$

Các phần rời nhau này được gọi là *nửa không gian afin mở* xác định bởi H, và được kí hiệu lần lượt là $H^{>}$ và $H^{<}$. Tương tự, tập

$$H^{\geq} := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : a_1x_1 + \ldots + a_nx_n \geq b\}, \text{ và}$$

$$H^{\leq} := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : a_1x_1 + \ldots + a_nx_n \leq b\}$$

được gọi là *nửa không gian afin đóng* xác định bởi H, và được kí hiệu lần lượt là $H^{\geq}$ và $H^{\leq}$

Định nghĩa 1.2 Một tập hợp $P \subseteq \mathbb{R}^n$ được gọi là một *đa diện* nếu nó là giao của một số hữu hạn các nửa không gian afin đóng.

Lưu ý rằng đa diện là một tập đóng trong $\mathbb{R}^n$ theo tô pô thông thường nhưng có thể không là tập bị chặn. Ví dụ một nửa không gian afin đóng là đa diện không không bị chặn. Chúng ta nhận xét tầm thường rằng, tất cả không gian con afin, bao gồm $\mathbb{R}^d$ và $\varnothing$ là đa diện. Chúng ta gọi một đa diện P là **thực sự** nếu nó không là không gian afin.

Định nghĩa 1.3 Một *tập lồi* S trong $\mathbb{R}^n$ là một tập trong $\mathbb{R}^n$ sao cho với mọi $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in S$ và $\lambda \in [0,1]$, ta có

$$\lambda \mathbf{x}_1 + (1-\lambda)\mathbf{x}_2 \in S.$$

Ví dụ 1.1

i) Trong $\mathbb{R}^2$, các hình đa lồi, hình tròn, hình elip là các tập lồi. Trong $\mathbb{R}^3$ thì khối đa diện, hình cầu là các tập lồi.

ii) Hình cầu $B = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{x}\| \leq 1\}$ là tập lồi. Thật vậy, với mọi $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in B$ và $\lambda \in [0,1]$, ta có

$$\begin{aligned}\|(1-\lambda)\mathbf{x} + \lambda\mathbf{y}\| &\leq \|(1-\lambda)\mathbf{x}\| + \|\lambda\mathbf{y}\| \\ &= (1-\lambda)\|\mathbf{x}\| + \lambda\|\mathbf{y}\| \leq (1-\lambda) + \lambda = 1.\end{aligned}$$

Do đó $(1-\lambda)\mathbf{x} + \lambda\mathbf{y} \in B$.

iii) Hình cầu $B(\mathbf{a}, r) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| \leq r\}$ là một tập lồi (ở đây $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ và $r \geq 0$). Thật vậy, với mọi $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in B(\mathbf{a}, r)$ và mọi $\lambda \in [0,1]$ ta có

$$\begin{aligned}\|\lambda\mathbf{x} + (1-\lambda)\mathbf{y} - \mathbf{a}\| &= \|\lambda(\mathbf{x} - \mathbf{a}) + (1-\lambda)(\mathbf{y} - \mathbf{a})\| \\ &\leq \lambda\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| + (1-\lambda)\|\mathbf{y} - \mathbf{a}\| \\ &\leq \lambda r + (1-\lambda) r = r.\end{aligned}$$

Do đó $(1-\lambda)\mathbf{x} + \lambda\mathbf{y} \in B(\mathbf{a}, r)$.

iv) Siêu phẳng afin $H := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d : \langle \mathbf{a}, \mathbf{x} \rangle = b\}$ là tập lồi. Thật vậy, cho $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in H$, Khi đó ta có

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{x} \rangle = b \qquad \text{và} \qquad \langle \mathbf{a}, \mathbf{y} \rangle = b$$

Do đó với moi $0 \leq \lambda \leq 1$, ta có

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{a}, \lambda\mathbf{x} + (1-\lambda)\mathbf{y} \rangle &= \lambda\langle \mathbf{a}, \mathbf{x} \rangle + (1-\lambda)\langle \mathbf{a}, \mathbf{y} \rangle \\ &= \lambda b + (1-\lambda) b = b.\end{aligned}$$

Vậy $\lambda\mathbf{x} + (1-\lambda)\mathbf{y} \in H$ và H là tập lồi.

v) Tương tự iv), chúng ta có

$$H^{>} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \langle \mathbf{a}, \mathbf{x} \rangle > b\} \text{ và}$$