**ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI**
**TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN**

---------------------------------------

**ĐÀO PHƯƠNG BẮC**

# SỐ HỌC, HÌNH HỌC CỦA NHÓM ĐẠI SỐ VÀ CÁC KHÔNG GIAN THUẦN NHẤT LIÊN QUAN TRÊN TRƯỜNG SỐ HỌC

**Chuyên ngành: Đại số và Lý thuyết số**
**Mã số : 62.46.05.01**

**TÓM TẮT LUẬN ÁN TIẾN SĨ TOÁN HỌC**

**HÀ NỘI - 2010**

Công trình được hoàn thành tại:
Trường Đại học Khoa học Tự nhiên, Đại học Quốc Gia Hà Nội.

Người hướng dẫn khoa học: **PGS. TS. Nguyễn Quốc Thắng**

Phản biện: **GS. TSKH. Đỗ Ngọc Diệp**

Phản biện: **PGS. TS. Nguyễn Tiến Quang**

Phản biện: **TS. Lê Minh Hà**

Luận án sẽ được bảo vệ trước Hội đồng cấp nhà nước chấm luận án Tiến sĩ họp tại . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .
vào hồi . . . . . giờ . . . . . ngày . . . . . tháng . . . . . năm . . . . .

Có thể tìm hiểu luận án tại:

- Thư viện Quốc gia Việt Nam
- Trung tâm Thông tin - Thư viện, Đại học Quốc gia Hà Nội

# Danh mục công trình của tác giả liên quan đến luận án


1. N. Q. Thắng, Đ. P. Bắc (2005), "Some rationality properties of observable groups and related questions", *Illinois J. Math.* **49** (2), pp. 431-444.

2. Đ. P. Bắc, N. Q. Thắng (2008), "Relative versions of theorems of Bogomolov and Sukhanov over perfect fields", *Proc. Japan Acad.*, **84**, Ser. A, No. 7, pp. 101-106.

3. Đ. P. Bắc, N. Q. Thắng (2009), *"On the topology of group cohomology of algebraic groups over local fields"*, Proceedings of 4th International Conference on Research and Education in Mathematics, ISBN 978-967-344-092-4, pp. 524-531.

4. Đ. P. Bắc, N. Q. Thắng (2010), "On a relative version of a theorem of Bogomolov over perfect fields and its applications", *J. Algebra* **324** (2010)-doi:10.1016/j.jalgebra.2010.04.020, 20 pp.

5. Đ. P. Bắc, N. Q. Thắng, "On the topology of relative orbits for action of algebraic tori over local fields", Preprint, 8pp.

6. Đ. P. Bắc, N. Q. Thắng, "On the topology on group cohomology and the topology of relative orbits for action of algebraic groups over local fields", Preprint, 49 pp.

7. Đ. P. Bắc, "On some topological properties of relative orbits of subsets", Preprint, 25 pp.


## Các kết quả trong luận án đã được báo cáo và thảo luận tại:

- Hội nghị Quốc tế Osaka-Hanoi, Hà Nội (2005).

- Hội nghị Đại số-Hình học-Tôpô, Thành phố Hồ Chí Minh (2005).

- Hội nghị Khoa học kỷ niệm 50 năm thành lập Khoa Toán-Cơ-Tin học, Hà Nội (2006).

- Hội nghị Đại số-Hình học-Tôpô, Vinh (2007).

- Hội nghị Toán học Toàn quốc, Quy Nhơn (2008).

- Seminar của Phòng Lý thuyết số, Viện Toán học.

- Seminar của Phòng Đại số, Viện Toán học.

- Seminar của Bộ môn Đại số-Hình học-Tô pô, ĐHKHTN-ĐHQG Hà Nội.

# Mở đầu

Giả sử $G$ là một nhóm đại số tuyến tính xác định trên một trường $k$. Ta có thể hiểu đơn giản $G$ là một nhóm các ma trận vuông cấp $n$ với hệ số nằm trong bao đóng đại số của trường $k$ và $G$ đồng thời là tập không điểm của một họ các đa thức $n^2$ biến với hệ số trong $k$. Một trong những hướng nghiên cứu quan trọng nằm giữa Lý thuyết nhóm đại số tuyến tính và Hình học Đại số là Lý thuyết bất biến hình học. Một phần chủ yếu của lý thuyết này nghiên cứu các tác động (cấu xạ) của một nhóm đại số tuyến tính lên một đa tạp đại số cho trước, đặc biệt là nghiên cứu tính chất của các quỹ đạo. Lý thuyết bất biến hình học xuất hiện từ lâu với việc nghiên cứu Bài toán số 14 của Hilbert về tính chất hữu hạn sinh của đại số các hàm bất biến. Với những đóng góp của Mumford, Haboush, Nagata, ..., lý thuyết này khá phong phú trong trường hợp trường $k$ là đóng đại số. Tuy nhiên, ngay từ thời điểm ban đầu của Lý thuyết bất biến hình học hiện đại, mà Mumford là người đặt nền móng, ông đã đặt vấn đề nghiên cứu nó cả trong những tình huống tương đối, tức là khi $k$ là một trường bất kỳ nói chung không đóng đại số. Chẳng hạn, với động cơ nghiên cứu các bài toán số học (cụ thể là xây dựng không gian moduli của các đa tạp abel), Mumford (1965) đã xét nhiều vấn đề của lý thuyết này trên những lược đồ đủ tổng quát. Ngoài ra, Borel (1969) và Tits (1965), ... đã đặt ra một số câu hỏi (hay giả thuyết) khi mở rộng các kết quả đã biết của lý thuyết bất biến hình học trên trường đóng đại số cho cả trường không đóng đại số (chẳng hạn mở rộng một định lý nổi tiếng của Hilbert và Mumford). Những kết quả điển hình theo hướng này thuộc về Birkes (1971), Kempf (1978), Raghunathan (1974), ... đã cho câu trả lời (hoặc lời giải) của một số câu hỏi (hoặc giả thuyết) được đề cập ở trên. Những nghiên cứu theo cách như vậy nói chung được gọi là nghiên cứu về các tính chất hữu tỷ (của nhóm đại số, của đa tạp đại số, v.v...). Khó khăn gặp phải trong các bài toán nói trên tương tự như đối với một bài toán số học, ví dụ việc tìm nghiệm của đa thức trong trường đóng đại số ("bài toán hình học") và trong trường không đóng đại số ("bài toán số học").

Để hiểu rõ các tính chất của quỹ đạo, việc nghiên cứu các nhóm con dừng là rất quan trọng. Có một số lớp nhóm con quan trọng trong việc nghiên cứu Lý thuyết bất biến hình học, đó là lớp các nhóm con quan sát được, lớp các nhóm con toàn cấu, và lớp các nhóm con Grosshans. Từ một số nghiên cứu về Lý thuyết biểu diễn nhóm đại số, Bialynicki-Birula, Hochschild, Mostow (1963) đã đưa ra khái niệm các *nhóm con quan sát được*. Ta có thể hiểu một nhóm con đóng $H$ của $G$ là quan sát được nếu $H$ là nhóm con dừng của một vectơ $v$ trong một $G$-môđun hữu tỷ hữu hạn chiều $V$ nào đó. Các tác giả này đã đưa ra một số điều kiện cần và đủ để một nhóm là quan sát được. Sau đó, Grosshans (1973, 1997) đã tìm thêm được một số điều kiện tương đương khác. Tuy nhiên, hầu hết các kết quả ở đây đều mới chỉ được chứng minh cho trường hợp $k$ là một trường đóng đại số.

Một lớp các nhóm con khác cũng khá quan trọng là lớp các *nhóm con toàn cầu* do Borel và Bien đưa ra (trước đó Bergman đã làm một công việc tương tự đối với các Đại số Lie). Ta định nghĩa một nhóm con đóng $H$ của $G$ là toàn cầu nếu đại số các hàm chính quy $k[G/H]$ của không gian thuần nhất $G/H$ chính bằng $k$. Những điều kiện cần và đủ để một nhóm con đóng là toàn cầu ban đầu được đưa ra bởi Bien và Borel (1992). Bên cạnh đó, Bien, Borel, Kollar (1996) cũng nghiên cứu mối liên hệ của tính chất $H$ là nhóm con toàn cầu với tính chất liên thông hữu tỷ của không gian thuần nhất $G/H$. Nhờ vào những nghiên cứu liên quan đến Bài toán số 14 của Hilbert, Grosshans (1973) đã đưa ra một lớp các nhóm con quan sát được mang tên ông. Đó là những nhóm con quan sát được $H$ của $G$ có tính chất đại số các hàm bất biến $k[G]^H$ là hữu hạn sinh, trong đó $H$ tác động tịnh tiến phải lên đại số các hàm chính quy $k[G]$. Chính Grosshans cũng tìm ra một số điều kiện cần và đủ khá thú vị cho khái niệm nói trên. Tuy nhiên, các kết quả nói trên mới chỉ được chứng minh trong trường hợp $k$ là trường đóng đại số.

Gần đây, vì sự cần thiết phải có những ứng dụng trong Số học và Lý thuyết ergodic, Weiss (1998) cũng có một số kết quả về tính chất hữu tỷ của các nhóm con quan sát được và những nhóm con toàn cầu. Như ta đã biết, một nhóm con đóng $H$ của $G$ là quan sát được nếu $H = G_v$, với $v \in V$, $V$ là một $G$-môđun hữu hạn chiều. Tuy nhiên, $H$ chỉ là nhóm con dừng của một vectơ (đối với biểu diễn đã cho), và ta khó có thể nói gì thêm về cấu trúc của $H$. Ở đây, Sukhanov (1990) đã có kết quả đi sâu hơn khẳng định nói trên. Ông đã chứng minh một định lý nói rằng, một nhóm con là quan sát được nếu và chỉ nếu nó là dưới parabolic. Để làm được điều này, Sukhanov phải dùng một kết quả quan trọng của Bogomolov về cấu trúc của nhóm con dừng của một vectơ thiếu ổn định (instable) $v$ (nghĩa là $0 \in \overline{G \cdot v}$). Tuy nhiên, các kết quả trên của Bogomolov và Sukhanov cũng mới chỉ được chứng minh trong trường hợp $k$ là trường đóng đại số. Nội dung của hai chương đầu tiên nói về kết quả của luận án (Chương 2, và Chương 3) là trình bày việc mở rộng những khẳng định này cho trường không đóng đại số. Vì một số lý do kỹ thuật, các kết quả của Bogomolov và Sukhanov trong Chương 3 chỉ được mở rộng lên cho trường hợp $k$ là trường hoàn thiện.

Như đã nói ở trên, có rất nhiều kết quả của Lý thuyết bất biến (hình học) đề cập đến việc nghiên cứu tính chất đóng của quỹ đạo dưới tác động của nhóm $G$ thu được trong trường hợp hình học, tức là, trong trường hợp trường $k$ là đóng đại số. Bên cạnh đó, vì một số đòi hỏi nội tại của Lý thuyết số mà các trường địa phương, toàn cục được quan tâm đặc biệt. Chẳng hạn ta cho $G$ là một nhóm đại số tuyến tính tác động lên $k$-đa tạp $V$ và $x \in V(k)$. Khi đó một bước chính trong việc chứng minh một kết quả tương tự của Định lý siêu cứng (super-rigidity) Margulis trong trường hợp trường hàm toàn cục, được đưa ra bởi Venkataramana (1988), là chứng minh tính chất đóng (địa phương) của một số quỹ đạo tương đối $G(k) \cdot x$. Vì thế, chúng tôi quan tâm đến mối liên hệ giữa các tính chất đóng Zariski của các quỹ đạo dưới tác động bởi một nhóm đại số và tính chất đóng Hausdorff của các quỹ đạo tương đối. Cụ thể hơn, giả sử $k$ là một trường đầy đủ đối với một định giá không tầm thường $v$ có hạng thực bằng 1, ví dụ là các trường địa phương như trường $\mathfrak{p}$-adic hoặc trường số thực $\mathbb{R}$. Ta trang bị cho $X(k)$ tôpô $v$-adic Hausdorff, cảm sinh từ tôpô $v$-adic trên $k$. Cho $x \in X(k)$, chúng tôi muốn nghiên cứu mối liên hệ giữa tính chất đóng Zariski của quỹ đạo hình học $G \cdot x$ trong $X$ và tính chất đóng Hausdorff của quỹ đạo (tương đối) $G(k) \cdot x$ trong $X(k)$. Kết quả đầu tiên theo hướng này thuộc về Borel và Harish-Chandra (1963), tiếp đến là Birkes (1971) trong trường hợp trường số thực, và sau đó là Bremigan (1994). Thực tế, ở các bài báo đó đã chỉ ra nếu $G$ là một $\mathbb{R}$-nhóm reductive, thì $G \cdot x$ là đóng Zariski nếu và chỉ nếu $G(\mathbb{R}) \cdot x$ là đóng theo tôpô thực. Điều này cũng được mở rộng cho trường $\mathfrak{p}$-adic bởi Bremigan (1994). Mục đích của chúng tôi trong chương kết quả thứ ba (Chương 4) là mở rộng và nghiên cứu sâu hơn bài toán được đề cập ở trên.

Bản luận án gồm 4 chương. Trong Chương 1, chúng tôi trình bày một số kiến thức cơ bản, cần thiết cho luận án. Cụ thể là, trong Mục 1.1, 1.2, chúng tôi nhắc lại một số khái niệm về nhóm đại số tuyến tính, Lý thuyết bất biến hình học (nói rõ hơn, tác động của nhóm đại số lên đa tạp) và lược đồ nhóm affine. Trong Mục 1.3, 1.4, chúng tôi trình bày một số kiến thức cần thiết về đối đồng điều Galois và đối đồng điều phẳng, và trong Mục 1.5, chúng tôi trình bày một số định nghĩa, kết quả đã biết về tôpô trên tập đối đồng điều.

Các kết quả mới được chúng tôi trình bày trong các Chương 2, 3, và 4. Chương 2 (tương ứng, Chương 3, Chương 4) chúng tôi viết dựa theo các bài báo [1](tương ứng, ([2], [4]) và ([5], [6])). Trong Chương 2, chúng tôi nghiên cứu một số tính chất hữu tỷ của các nhóm con quan sát được, nhóm con toàn cầu, và nhóm con Grosshans. Ở đó, chúng tôi chỉ ra rằng một số tiêu chuẩn cần và đủ để một nhóm con là quan sát được và một nhóm con là toàn cầu đều có thể mở rộng được cho trường $k$ bất kỳ, không nhất thiết là đóng đại số. Nói riêng ra, các điều kiện cần và đủ để một nhóm là quan sát được bao gồm tính chất nhóm con dừng trên $k$, tính chất mở rộng được trên $k$, tính chất tựa affine trên $k$, ..., đều mở rộng được cho trường $k$ tùy ý. Phát biểu chính xác của kết quả này được cho trong Định lý 2.1.11. Tương tự như các nhóm con quan sát được, Bien và Borel (1992) cũng chứng minh một số tiêu chuẩn cần và đủ để một nhóm con là toàn cầu. Định lý chính thứ hai của Chương 2 khẳng định rằng, những tiêu chuẩn cần và đủ như đại số các hàm chính quy của đa tạp thương chỉ gồm những hàm hằng hoặc đại số các hàm chính quy của đa tạp thương là không gian vectơ hữu hạn chiều trên $k$, ... đều có thể mở rộng cho một trường $k$ tùy ý (xem Định lý 2.2.4). Dựa vào các kết quả trên chúng tôi thu được kết quả về tính chất hữu tỷ cho các nhóm con Grosshans. Định lý này nói rằng tính chất hữu hạn sinh của $k[G]^H$ là tương đương với tính chất đối chiều 2 (trên $k$) của nhóm con đóng $H$ và tính chất $k[G]^{H(k)}$ là hữu hạn sinh trong trường hợp trường $k$ là hoàn thiện gồm vô hạn phần tử (xem Định lý 2.3.5).

Trong Chương 3, chúng tôi nghiên cứu việc mở rộng các Định lý Bogomolov và Định lý Sukhanov cho trường không đóng đại số. Như đã biết, theo Bogomolov, một nhóm con dừng $H := G_v$ của một vectơ thiếu ổn định $v \in V$ đều chứa trong một nhóm con tựa parabolic $Q$ nào đó, nghĩa là tồn tại một $G$-môđun bất khả quy $W$ và một vectơ trọng cao nhất $w \in W$ sao cho $H \subseteq G_w$. Dùng kết quả này, Sukhanov đã chỉ ra một nhóm con đóng $H$ của $G$ là một nhóm con quan sát được nếu và chỉ nếu $H$ là một nhóm con dưới parabolic của $G$, nghĩa là tồn tại $Q$ là một nhóm con tựa parabolic của $G$ sao cho $H^0 \subseteq Q$ và $R_u(H) \subseteq R_u(Q)$ (trong đó, $H^0$ là thành phần liên thông của $H$, và $R_u(G)$ là căn lũy đơn của $G$). Hai kết quả chính của chương này là các Định lý 3.1.5, và Định lý 3.1.7. Nói riêng ra, chúng tôi đã mở rộng được các kết quả của Bogomolov và Sukhanov cho trường hoàn thiện bất kỳ, và chứng minh một kết quả cho mối liên hệ giữa các nhóm con quan sát được, nhóm con tựa parabolic, $k$-tựa parabolic, $k$-dưới parabolic, .... (Xem Định lý 3.1.7.)

Trong Chương 4, chúng tôi nghiên cứu câu hỏi về liên hệ giữa tôpô Zariski của quỹ đạo hình học $G \cdot v$ và tôpô Hausdorff của quỹ đạo tương đối $G(k) \cdot v$. Chúng tôi có hai định lý chính tương ứng với trường $k$ là hoàn thiện (xem Định lý 4.2.6) và trường $k$ không nhất thiết hoàn thiện (xem Định lý 4.3.1.3). Ngoài ra, chúng tôi cũng có các ví dụ, phản ví dụ để bổ sung cho những định lý nói trên. (Xem thêm các Mệnh đề 4.2.8, 4.4.1, và 4.4.2.) Chẳng hạn, chúng tôi khẳng định rằng, nếu $k$ là một trường đầy đủ, hoàn thiện thì điều kiện $G(k) \cdot v$ đóng (theo tôpô Hausdorff) kéo theo $G \cdot v$ đóng (theo tôpô Zariski) trong trường hợp $G = L \times U$ là tích trực tiếp của một nhóm reductive $L$ và một nhóm lũy đơn $U$ (một phần của Định lý 4.2.6) và nếu $G$ không là tích trực tiếp $L \times U$ thì khẳng định trên nói chung là sai (Mệnh đề 4.2.8). Đối với $k$ là trường đầy đủ bất kỳ, một phần của Định lý 4.3.1.3 khẳng định rằng điều kiện $G \cdot v$ là đóng Zariski kéo theo điều kiện $G(k) \cdot v$ đóng Hausdorff đúng trong trường hợp nhóm dừng $G_v$ là giao hoán và trơn. Đảo lại, nếu $G$ là reductive và tác động là tách mạnh tại $v$ (theo nghĩa của Ramanan và Ramanathan) thì điều kiện $G(k) \cdot v$ đóng Hausdorff cũng kéo theo $G \cdot v$ là đóng Zariski. Tuy nhiên, nếu tác động không còn là tách mạnh thì chúng tôi chỉ ra ví dụ nói rằng khẳng định trên là sai (Mệnh đề 4.4.2).

# Chương 1

# Một số kiến thức chuẩn bị

Trong Chương 1, chúng tôi trình bày một số kiến thức chuẩn bị cần thiết cho toàn bộ luận án. Ở đây, chúng tôi chỉ xét những nhóm đại số affine (tuyến tính) và lược đồ nhóm đại số affine.

Trong Mục 1.1, chúng tôi nhắc lại một số khái niệm cơ bản về nhóm đại số tuyến tính trên một trường. Cụ thể là các định lý nhúng một nhóm đại số tuyến tính vào nhóm tuyến tính tổng quát $\mathrm{GL}_n$, phân tích Jordan trong một nhóm đại số tuyến tính, định nghĩa và một số tính chất của nhóm reductive, nhóm nửa đơn, nhóm lũy đơn, xuyến, ... . Sau đó, chúng tôi trình bày một số khái niệm cơ bản của lý thuyết bất biến hình học như: tác động của nhóm đại số tuyến tính lên đa tạp, thương hình học, thương phạm trù của một đa tạp theo tác động của một nhóm đại số.

Trong Mục 1.2, chúng tôi trình bày ngắn gọn về lý thuyết lược đồ nhóm affine. Chúng tôi điểm qua một số khái niệm cơ bản về lược đồ nhóm affine, lược đồ nhóm lũy đơn, lược đồ nhóm hữu hạn, étale, ..., các định lý cấu trúc của lược đồ nhóm lũy đơn trên một trường.

Trong Mục 1.3, chúng tôi trình bày về đối đồng điều Galois không giao hoán của một nhóm đại số tuyến tính: định nghĩa tập đối đồng điều bậc 1, phép xoắn của các đối xích, các định lý về dãy khớp của tập đối đồng điều liên kết với dãy khớp của nhóm đại số, ...

Trong Mục 1.4, chúng tôi trình bày vài nét về đối đồng điều phẳng của lược đồ nhóm trên trường: định nghĩa đối đồng điều phẳng bậc 1, liên hệ giữa đối đồng điều Galois với đối đồng điều phẳng, ...

Trong Mục 1.5, chúng tôi trình bày việc trang bị tôpô trên tập đối đồng điều Galois (hoặc đối đồng điều phẳng). Hai tôpô quan trọng được trình bày ở đây là tôpô chính tắc và tôpô đặc biệt.

# Chương 2

# Một số tính chất hữu tỷ của các nhóm con quan sát được và nhóm con Grosshans

Trong chương này, chúng tôi tiếp tục những nghiên cứu về các nhóm con quan sát được. Cụ thể hơn, chúng tôi quan tâm một số câu hỏi về tính chất hữu tỷ của các nhóm con quan sát được, nhóm con toàn cấu, và nhóm con Grosshans. Những kết quả ban đầu về tính chất hữu tỷ của các nhóm con quan sát được (tương ứng nhóm con toàn cấu) thu được bởi Bialynicki-Birula, Hochschild, Mostow (1963), và sau đó bởi Grosshans (1973, 1997) và Weiss (1998) (tương ứng bởi Weiss (1998), F. Bien và A. Borel (1992). Hơn nữa, cũng trong bài báo của Weiss (1998), một số ứng dụng về tác động ergodic cũng được nghiên cứu. Ở đây, chúng tôi chứng minh một số kết quả mới về tính chất hữu tỷ của các nhóm con quan sát được, nhóm con toàn cấu, nhóm con Grosshans mà ban đầu chỉ được chứng minh trong trường hợp $k$ là trường đóng đại số. Kết quả chính của chương này là các Định lý 2.1.11, 2.2.4, 2.3.5.

## 2.1 Các tính chất hữu tỷ của nhóm con quan sát được

Cho $k$ là một trường tùy ý, $\bar{k}$ là bao đóng đại số của $k$. Cho $H$ là một $k$-nhóm con đóng của một $k$-nhóm $G$. Khi đó, $G$ tác động lên đại số các hàm chính quy $\bar{k}[G]$ của nó thông qua phép tịnh tiến phải $r_g(f)(x) = f(xg)$, với $g, x \in G$. Ta ký hiệu $H' = \bar{k}[G]^H := \{f \in \bar{k}[G] \,|\, r_h(f) = f, \forall h \in H\}$. Với $R$ là một $\bar{k}$-đại số con của $\bar{k}[G]$, ta đặt $R' = \{g \in G \,|\, r_g(f) = f, \forall f \in R\}$. Định nghĩa sau đây được đưa ra bởi Bialynicki-Birula, Hochschild, và Mostow (1963).

**Định nghĩa.** Ta nói nhóm con đóng $H$ của $G$ là một *nhóm con quan sát được* (trên $\bar{k}$) nếu $H'' = (\bar{k}[G]^H)' = H$.

Chúng ta đã biết một số tiêu chuẩn cần và đủ về các nhóm con quan sát được trong trường hợp $k$ là trường đóng đại số. Sau đây, chúng tôi sẽ trình bày các kết quả là mở rộng của những tiêu chuẩn cần và đủ này cho trường hợp $k$ là trường bất kỳ.

**Định nghĩa 2.1.6** ([1])**.** Ta nói $H$ là *quan sát được tương đối trên* $k$ nếu $H = (k[G]^{H(k)})'$, và $H$ là $k$*-quan sát được* nếu $(k[G]^H)' = H$.

Dựa trên khẳng định không gian thuần nhất $G/H$, và cấu xạ thương $\pi : G \to G/H$ đều là xác định trên $k$, chúng ta có được kết luận sau.

**Mệnh đề 2.1.7** ([1])**.** *Cho $k$ là một trường tùy ý, và $H$ là một $k$-nhóm con đóng của một $k$-nhóm $G$. Khi đó:*

(a) $H' = \bar{k}[G]^H = \bar{k} \otimes_k k[G]^H$.

(b) *$H$ là quan sát được nếu và chỉ nếu $H$ là $k$-quan sát được.*

(c) *Giả sử $H(k)$ là trù mật Zariski trong $H$. Khi đó, một trong hai điều kiện tương đương ở* (b) *là tương đương với điều kiện $H$ là quan sát được tương đối trên $k$.*

Từ đó chúng ta thu được kết quả sau đây là một chi tiết quan trọng trong chứng minh Định lý chính 2.1.11.

**Mệnh đề 2.1.10** ([1])**.** *Cho $G$ là một $k$-nhóm, $H$ là một $k$-nhóm con đóng của $G$. Giả sử tồn tại một $k$-biểu diễn hữu hạn chiều $\rho : G \to GL(V)$ và $v \in V(k)$ sao cho $H = G_v$. Khi đó tồn tại một biểu diễn hữu tỷ hữu hạn chiều $\rho' : G \to GL(W)$ xác định trên $k$, $w \in W(k)$, sao cho $H = G_w$ và $G/H \overset{k}{\cong} G \cdot w$.*

**Nhận xét.** Nhìn chung chúng ta chỉ có một cấu xạ song ánh giữa không gian thuần nhất $G/H$ và không gian quỹ đạo $G \cdot v$. Trong trường hợp trường $k$ là đóng đại số, chúng ta phải lấy chuẩn tắc hóa của đa tạp $X := \overline{G \cdot v}$ trong trường hàm $k(G/H)$ và sử dụng Định lý chính của Zariski. Trong trường hợp $k$ là trường tùy ý, việc lặp lại chứng minh trên không thật đơn giản vì nhìn chung khó rút ra kết luận về tính chất đẳng cấu trên $k$. Vì thế, chúng ta chọn cách dựa trên kết quả đã có trong trường hợp trường $k$ là đóng đại số và Mệnh đề 2.1.7.

Từ những kết quả được chứng minh ở trên, chúng ta có định lý sau cho một số tiêu chuẩn cần và đủ để một nhóm con đóng là nhóm con quan sát được trên trường bất kỳ.

**Định lý 2.1.11** ([1])**.** *Cho $G$ là một nhóm đại số tuyến tính xác định trên một trường $k$ tùy ý và $H$ là một $k$-nhóm con đóng của $G$. Khi đó các khẳng định sau là tương đương:*