

ĐỀ THI MÔN: HÀM PHỨC VÀ PHÉP BIẾN ĐỔI LAPLACE
MÃ MÔN HỌC: 1001060

THỜI GIAN: 75 PHÚT NGÀY THI: 04/06/2015
Đề thi gồm 02 trang bao gồm 10 câu hỏi trắc nghiệm và 3 câu hỏi tự luận
(Được phép sử dụng tài liệu)
MÃ ĐỀ THI: 1001-060-132

PHẦN TRẮC NGHIỆM LỰA CHỌN (5 ĐIỂM)

Câu 1: Tìm biến đổi Laplace $\mathcal{L}\left[te^{-2t} \sin(5t)\right]$:

A. $\mathcal{L}\left[te^{-2t} \sin(5t)\right] = \frac{10p + 20}{(p^2 + 4p + 29)^2}$

B. $\mathcal{L}\left[te^{-2t} \sin(5t)\right] = \frac{10p - 20}{(p^2 - 4p + 29)^2}$

C. $\mathcal{L}\left[te^{-2t} \sin(5t)\right] = \frac{10p - 20}{\left((p + 2)^2 + 25\right)^2}$

D. $\mathcal{L}\left[te^{-2t} \sin(5t)\right] = \frac{10(p + 2)}{\left((p - 2)^2 + 25\right)^2}$

Câu 2: Cho hàm phức $f(z) = \frac{\bar{z} \operatorname{Re}(e^z)}{\operatorname{Im}(z)}$. Tìm phần thực $\operatorname{Re}(f)$ với $z = x + iy$.

A. $\operatorname{Re}(f(z)) = -\frac{xe^x \cos y}{y}$

B. $\operatorname{Re}(f(z)) = e^x \cos y$

C. $\operatorname{Re}(f(z)) = \frac{xe^x \cos y}{y}$

D. $\operatorname{Re}(f(z)) = -e^x \cos y$

Câu 3: Cho hàm số $u(x, y) = ax + e^x \cos(ay)$. Xác định hằng số phức a sao cho $u(x, y)$ là phần thực của một hàm giải tích trên \mathbb{C} .

A. $a = 1$ hoặc $a = 2$

B. $a = 0$

C. $a = 1$ hoặc $a = -1$

D. Không tồn tại a

Câu 4: Khai triển Laurent của hàm $f(z) = (2z + 1) \cos\left(\frac{1}{z}\right)$ trong lân cận của điểm $z = 0$ là:

A. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{2}{(2n+2)!} + \frac{1}{(2n)!} \right) \frac{1}{z^{2n}}$

B. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{2}{(2n)! z^{2n-1}} + \frac{1}{(2n)! z^{2n}} \right)$

C. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{2}{(n+1)! z^{2n-1}} + \frac{1}{n! z^{2n}} \right)$

D. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{2}{(2n+2)!} + \frac{1}{(2n)!} \right) \frac{1}{z^{2n}}$

Câu 5: Cho hàm $f(z)$ có khai triển Laurent tại trong lân cận của điểm $z = 0$ là

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{2^{2n}}{(2n)! z^{2n+1}} + \frac{1}{(2n)! z^{2n}} \right).$$

Tính tích phân $I = \oint_{|z|=2} z^5 f(z) dz$.

A. $2\pi i \left(\frac{4}{5!} - \frac{1}{6!} \right)$

B. $\frac{2\pi i}{6!}$

C. $\frac{8\pi i}{5!}$

D. $-\frac{2\pi i}{6!}$

Câu 6: Cho hàm phức $f(z) = \frac{e^{\frac{3}{z}}}{z(z^2 + 6z + 18)}$. Hãy chọn phát biểu **SAI**:

- A. $z = -3 - 3i$ là cực điểm cấp 1
 B. $z = -3 + 3i$ và $z = -3 - 3i$ là các điểm bất thường cô lập
 C. $z = -3 + 3i$ là cực điểm cấp 1
 D. $z = 0$ là cực điểm cấp 2

Câu 7: Cho hàm phức $f(z) = \frac{\sin \pi z}{z^2(2z-1)}$. Hãy chọn phát biểu **ĐÚNG**:

- A. $\text{Res}\left(f(z), 0\right) = -\pi$ và $\text{Res}\left(f(z), \frac{1}{2}\right) = 2$ B. $\text{Res}\left(f(z), 0\right) = -\pi$ và $\text{Res}\left(f(z), \frac{1}{2}\right) = 4$
 C. $\text{Res}\left(f(z), 0\right) = -\pi i$ và $\text{Res}\left(f(z), \frac{1}{2}\right) = 2$ D. $\text{Res}\left(f(z), 0\right) = 2$ và $\text{Res}\left(f(z), \frac{1}{2}\right) = -\pi$

Câu 8: Biến đổi Laplace ngược nào sau đây là **SAI**?

- A. $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{p^2 - 3p + 2}\right] = e^{2t} - e^t$ B. $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2}{p-1} - \frac{3}{2p+3}\right] = 2e^t - 3e^{\frac{3}{2}t}$
 C. $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2p-1}{(p-1)^2 + 4}\right] = e^t \left(2\cos(2t) + \frac{1}{2}\sin(2t)\right)$ D. $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{3p-2}{p^2 + 9}\right] = 3\cos(3t) - \frac{2}{3}\sin(3t)$

Câu 9: Giả sử hàm gốc $f(t)$ có ảnh là $F(p)$, $\mathcal{L}[f(t)] = F(p)$. Hãy chọn phát biểu **ĐÚNG**:

- A. $\mathcal{L}\left[e^{3t}f(t)\right] = F(p-3)$ B. $\mathcal{L}\left[\int_0^t e^{3u}f(u)du\right] = \frac{F(p-3)}{p-3}$
 C. $\mathcal{L}\left[e^t f(3t)\right] = F\left(\frac{p}{3}\right)$ D. $\mathcal{L}\left[e^{3t} * f(t)\right] = \frac{F(p-3)}{p}$

Câu 10: Tìm ảnh của hàm gốc $e^{2t} * \int_0^t \sin(3u)du$:

- A. $\frac{3}{p(p-2)(p^2+9)}$ B. $\frac{3}{(p-2)(p^2+9)}$
 C. $\frac{1}{p-2} + \frac{3}{p(p^2+9)}$ D. $\frac{1}{p} + \frac{1}{p-2} + \frac{3}{p^2+9}$

PHẦN TỰ LUẬN (5 ĐIỂM)

Câu 11 (1.5 điểm). Áp dụng phép biến đổi Laplace giải phương trình vi phân sau:

$$y'' + y = te^t + 1 \text{ với điều kiện } y(0) = y'(0) = 0.$$

Câu 12 (2.0 điểm). Áp dụng phép biến đổi Laplace giải phương trình tích phân:

$$y + e^{2t} * \int_0^t y(u)du = t + e^{2t}.$$

Câu 13 (1.5 điểm). Cho hàm phức $f(z) = ze^{\frac{3}{z-1}}$.

- a) Khai triển Laurent hàm f trong lân cận của điểm $z = 1$.
 b) Sử dụng kết quả này tính tích phân $I = \oint_{|z-i|=3} f(z)dz$.

TaiLieuTuoit.com

TailieuTuoit.com

TaiLieuTuoit.com

TailieuTuoit.com

