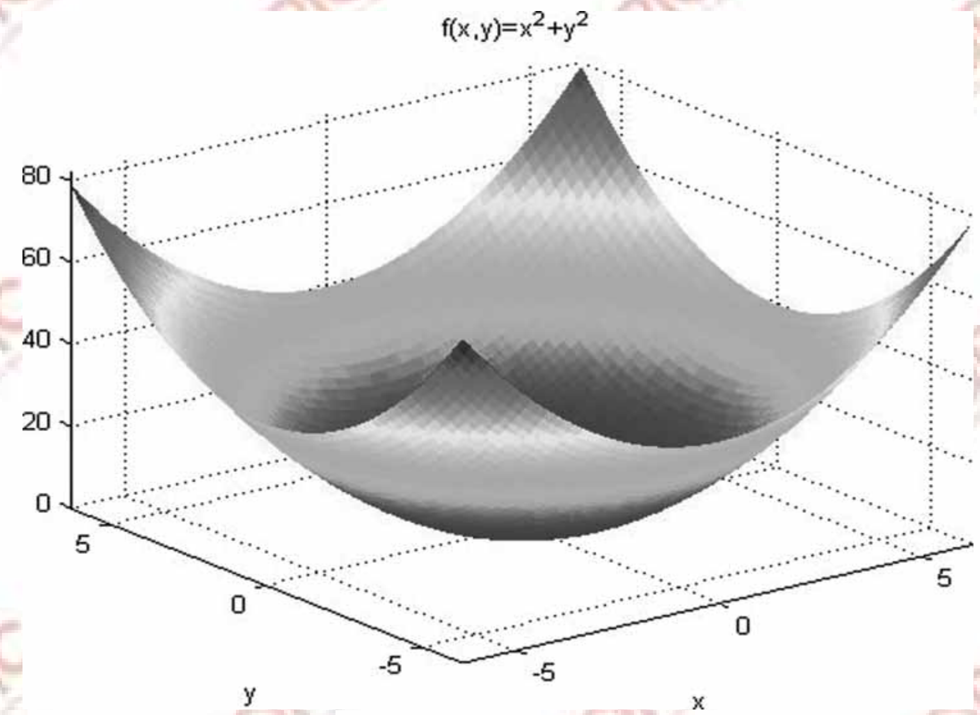
BÀI 4: HÀM NHIỀU BIẾN



Mục tiêu

Nắm được các khái niệm về hàm nhiều biến, đạo hàm riêng, vi phân, cực trị nhiều biến .

Làm được bài tập về hàm nhiều biến, đặc biệt là phần cực trị hàm nhiều biến.

Nội dung

Bài này trình bày về hàm số nhiều biến số, phép tính giới hạn, tính chất liên tục và phép tính đạo hàm, vi phân của hàm nhiều biến. Sau đó áp dụng các kiến thức này vào bài toán cực trị, bài toán này có ý nghĩa rất lớn về mặt ứng dụng, tạo cơ sở toán học cho các bài toán tối ưu hoá trong kinh tế.

Thời lượng

Bài này được trình bày trong 3 tiết lý thuyết và 6 tiết bài tập. Bạn nên dành khoảng 3 đến 4 giờ đồng hồ mỗi tuần để học bài này.

Các kiến thức cần có

Các bạn cần có kiến thức về tính giới hạn hàm số (bài 1), phép tính đạo hàm vi phân (bài 2).

Hướng dẫn học

Các bạn cần xem kỹ các ví dụ và làm phần bài tập kèm theo.

4.1. Giới hạn và tính liên tục của hàm số

4.1.1. Khái niệm hàm nhiều biến

Khái niệm hàm số một biến số phản ánh sự phụ thuộc của một đối tượng (hàm số) vào một đối tượng khác (biến số), sự phụ thuộc này không phổ biến trong thực tế. Ví dụ như sản lượng của một nhà sản xuất luôn phụ thuộc vào nhiều yếu tố gồm có lao động, vốn…; giá cả của một hàng hoá trên thị trường không chỉ phụ thuộc vào chi phí sản xuất mà còn phụ thuộc vào yếu tố cung – cầu… Để phản ánh chính xác các hiện tượng thực tế, trong phần này chúng ta sẽ xét khái niệm hàm số nhiều biến số, phản ánh sự phụ thuộc của một đối tượng (hàm số) vào nhiều đối tượng khác (nhiều biến số). Đối với hàm một biến số, mỗi giá trị của biến độc lập sẽ đặt tương ứng với một giá trị của hàm. Đối với hàm số nhiều biến, mỗi bộ giá trị xác định của n biến số đặt tương ứng với một giá trị của hàm số. Nếu ta coi mỗi một bộ n biến số là một điểm (biến điểm) thì ta lại quay về định nghĩa hàm nhiều biến như hàm số của một biến điểm. Ta cần tìm hiểu một số khái niệm về bộ n biến số.

4.1.1.1. Không gian n chiều

Trong chương trình phổ thông, chúng ta đã biết trong mặt phẳng với hệ toạ độ Descartes vuông góc Oxy cho trước, mỗi một điểm M được đặt tương ứng với một bộ hai số sắp thứ tự (x, y) cũng chính là toạ độ của M trong hệ toạ độ đã chọn; trong không gian ba chiều với hệ tọa độ Descartes vuông góc Oxyz cho trước, mỗi một điểm M được đặt tương ứng với một bộ ba số sắp thứ tự (x, y, z). Khái quát lên chúng ta cũng có khái niệm điểm trong không gian n chiều.

Định nghĩa:

Mỗi bộ n số thực sắp thứ tự $(x_1, x_2, ..., x_n)$ được gọi là một điểm n chiều. Ta ký hiệu điểm bởi chữ in hoa $M(x_1, x_2, ..., x_n)$.

Định nghĩa:

Không gian điểm n chiều (không gian n chiều) là tập hợp tất cả các điểm n chiều, trong đó khoảng cách giữa hai điểm $M(x_1, x_2, ..., x_n)$ và $N(y_1, y_2, ..., y_n)$ được cho bởi công thức:

$$d(M, N) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + ... + (x_n - y_n)^2}.$$

Không gian n chiều được ký hiệu bởi $\mathbb{R}^n$

Trong trường hợp $n = 2, n = 3$ ta thấy rằng công thức tính khoảng cách nói trên cũng chính là khoảng cách Euclide đã biết trong mặt phẳng và không gian.

4.1.1.2. Hàm nhiều biến

Định nghĩa:

Một hàm n biến số là một quy tắc $f : D \to \mathbb{R}$, với D là một tập hợp con của không gian n chiều $\mathbb{R}^n$, cho tương ứng mỗi điểm $M(x_1, x_2, ..., x_n) \in D$ với một và chỉ một giá trị $f(M) \in \mathbb{R}$. D được gọi là miền xác định của hàm số.

Ta cũng sử dụng ký hiệu $u = f(x_1, x_2, ..., x_n); (x_1, x_2, ..., x_n) \in D$ để chỉ hàm số này.

Ví dụ 1:

Cho hàm số $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f(x_1, x_2, ..., x_n) = \sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2 - ... - x_n^2}$.

Miền xác định của hàm số này là:

$$D = \{M(x_1, ..., x_n) : x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2 \le 1\}.$$

Miền xác định tự nhiên của một hàm nhiều biến là các bộ n số sao cho khi thay vào biểu thức của hàm số thì các phép toán đều có ý nghĩa.

Trong nội dung của giáo trình chúng ta thường xét các hàm số hai biến làm ví dụ, các hàm số này ký hiệu bởi $z(x,y); f(x,y); u(x,y)...$, với $(x,y) \in D \subset \mathbb{R}^2$.

Định nghĩa:

Miền giá trị của hàm số $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ là tập hợp tất cả các giá trị của hàm số khi điểm $M(x_1, x_2, ..., x_n)$ biến thiên trong miền xác định D.

Ví dụ 2:

- Hàm số $f: D \to \mathbb{R}$, trong đó $D: x^2 + y^2 \le 1$, $z = f(x,y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$, miền giá trị là: $z \ge 0$.
- Hàm số $f: D \to \mathbb{R}$ trong đó $D: x + y < 1$, $f(x,y) = \ln(1 - x - y)$, miền giá trị là: $(-\infty, +\infty)$.

4.1.1.3. Ý nghĩa hình học của hàm hai biến

Định nghĩa:

Đồ thị của hàm số $z = z(x,y)$ là tập hợp tất cả các điểm $M'(x,y,z)$ trong không gian $\mathbb{R}^3$, trong đó (x,y) là toạ độ của điểm M thuộc miền xác định D và z là giá trị của hàm số tại điểm đó.

Đồ thị của hàm hai biến số là một mặt trong không gian ba chiều $\mathbb{R}^3$.

Ví dụ 3:

- Đồ thị của hàm số $z = z(x,y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ là nửa mặt cầu có tâm tại gốc toạ độ O và bán kính $R = 1$ nằm trong nửa không gian $z \ge 0$.
- Đồ thị của hàm số $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ là mặt nón tròn xoay trục Oz, nằm trong nửa không gian $z \ge 0$.

4.1.2. Giới hạn của hàm nhiều biến

4.1.2.1. Định nghĩa

Định nghĩa:

Ta nói dãy điểm $\{M_k(x_1^k, x_2^k, ..., x_n^k)\}$ có giới hạn là (hội tụ đến) điểm $M_0(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0)$ nếu $\lim\limits_{k\to\infty} d(M_k, M) = 0$; hay tương đương $\lim\limits_{k\to\infty} x_i^k = x_i^0; 1 \le i \le n$.

Ví dụ 4:

Dãy điểm $\left\{M_n\left(\frac{n}{n+1}, \frac{1}{n}\right)\right\}$ hội tụ về điểm $(1,0)$ khi $n \to +\infty$, vì:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1;\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0.$$

Cho hàm số $f(x_1,x_2,...,x_n):D\to\mathbb{R}$, và một điểm $M_0(x_1^0,x_2^0,...,x_n^0)$ trong không gian sao cho tồn tại các dãy điểm $\{M_n\}$ thuộc D hội tụ về điểm M_0 khi $n\to\infty$.

Định nghĩa: Nếu với mọi dãy số $\{M_n\}$ hội tụ về điểm M_0, tồn tại giới hạn:

$$\lim_{n\to\infty} f(M_n)=l$$

thì ta nói hàm số $u=f(x_1,x_2,...,x_n)$ có giới hạn l khi $M\to M_0$. Ký hiệu:

$$\lim_{x_i\to x_i^0} f(x_1,x_2,...,x_n)=l \text{ hoặc } \lim_{M\to M_0} f(M)=l.$$

Ví dụ 5:

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ y\to 0}}(x+y^2)=1.$$

Thật vậy chọn dãy điểm $\{M_n(x_n,y_n)\}$ bất kỳ hội tụ đến điểm $(1,0)$; tức là:

$$\lim_{n\to\infty}x_n=1;\lim_{n\to\infty}y_n=0.$$

Thì: $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n+y_n^2)=1$.

Theo định nghĩa ta có:

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ y\to 0}}(x+y^2)=1.$$

4.1.2.2. Tính chất

Định lý:

Giả sử $f(M);g(M)$ là hai hàm số có giới hạn khi $M\to A$. Khi đó:

- $\lim\limits_{M\to A}[f(M)\pm g(M)]=\lim\limits_{M\to A}f(M)\pm\lim\limits_{M\to A}g(M)$
- $\lim\limits_{M\to A}[kf(M)]=k\lim\limits_{M\to A}f(M)$ (k là hằng số)
- $\lim\limits_{M\to A}[f(M)g(M)]=\lim\limits_{M\to A}f(M)\lim\limits_{M\to A}g(M)$
- $\lim\limits_{M\to A}\dfrac{f(M)}{g(M)}=\dfrac{\lim\limits_{M\to A}f(M)}{\lim\limits_{M\to A}g(M)}$ nếu $\lim\limits_{M\to A}g(M)\neq 0$.

Ví dụ 6:

a) Tìm $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

Ta có: $0 \le \frac{|xy|}{\sqrt{x^2+y^2}} = |x|\frac{|y|}{\sqrt{x^2+y^2}} \le |x| \to 0$ khi $x \to 0$.

Theo nguyên lý giới hạn kẹp suy ra:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0.$$

b) Tìm: $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x\sin y - y\sin x}{x^2+y^2}$.

Ta có: $0 \le \left|\frac{x\sin y - y\sin x}{x^2+y^2}\right| \le \left|\frac{x\sin y - y\sin x}{2xy}\right| \le \frac{1}{2}\left|\frac{\sin x}{x} - \frac{\sin y}{y}\right| \to 0$ Khi $x, y \to 0$.

Theo nguyên lý kẹp suy ra:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x\sin y - y\sin x}{x^2+y^2} = 0.$$

Ta thường sử dụng nguyên lý giới hạn kẹp để tìm giới hạn của hàm số.

c) Tìm $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$.

Ta chứng minh không tồn tại giới hạn nói trên.

Thật vậy, xét hai dãy điểm cùng hội tụ đến điểm $(0,0)$ khi $n \to \infty$ là:

$$\{M_n\}; M_n = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) \text{ và } \{M_n'\}; M_n'\left(\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right).$$

Ta có với: $f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$ thì

$$\lim_{n\to\infty} f(M_n) = \frac{1}{2}; \lim_{n\to\infty} f(M_n') = \frac{2}{5}.$$

Như vậy với hai dãy điểm khác nhau cùng tiến về điểm $(0,0)$ thì hai giới hạn tương ứng của hai dãy giá trị hàm số không bằng nhau. Vậy không tồn tại giới hạn nói trên.

d) Tìm: $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^4+3y^2}$.

Xét hai dãy điểm cùng tiến về điểm $(0,0)$ khi $n \to \infty$:

$$\{M_n\}; M_n = \left(\frac{1}{n}; \frac{1}{n^2}\right) \text{ và } \{M_n'\}; M_n' = \left(\frac{1}{n}; \frac{2}{n^2}\right).$$

Với: $g(x,y) = \frac{x^2y}{x^4+3y^2}$, ta tìm được giới hạn của hai dãy giá trị hàm số tương ứng là:

$$\lim_{n\to\infty} g(M_n) = \frac{1}{4}; \lim_{n\to\infty} g(M_n') = \frac{2}{13}.$$

Vậy không tồn tại giới hạn: $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2y}{x^4+3y^2}$.

CHÚ Ý :

Chúng ta cần phân biệt khái niệm giới hạn nói trên khi *x, y* đồng thời tiến đến điểm x_0, y_0 với hai giới hạn lặp, đó là khi ta lấy giới hạn theo *x* trước *y* sau; hoặc theo y trước x sau:

$$\lim_{x\to x_0} \lim_{y\to y_0} g(x,y) \text{ và } \lim_{y\to y_0} \lim_{x\to x_0} g(x,y)$$

Nói chung giới hạn đồng thời và giới hạn lặp không liên quan đến nhau, có thể giới hạn đồng thời tồn tại nhưng không tồn tại giới hạn lặp và ngược lại.

Ví dụ 7:

a) Trong ví dụ 6 ta đã thấy giới hạn khi x, y đồng thời tiến đến điểm 0 không tồn tại, tuy nhiên hai giới hạn lặp tồn tại:

$$\lim_{y\to 0} g(x,y) = 0\,(\forall x \neq 0) \Rightarrow \lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} g(x,y) = 0$$

$$\lim_{x\to 0} g(x,y) = 0\,(\forall y \neq 0) \Rightarrow \lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} g(x,y) = 0.$$

b) Xét giới hạn: $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} (x+y)\sin\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{y}$.

Ta có: $0 \le \left|(x+y)\sin\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{y}\right| \le |x+y| \to 0$ khi $x, y \to 0$.

Theo nguyên lý giới hạn kẹp:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} (x+y)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y} = 0.$$

Tuy nhiên từng giới hạn lặp không tồn tại. Thật vậy do vai trò của x, y như nhau nên ta xét giới hạn lặp theo x trước, y sau. Với $y \neq 0$:

$$I = \lim_{x\to 0}(x+y)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y} = \sin\frac{1}{y}\lim_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}$$

không tồn tại, nên cũng không tồn tại giới hạn $\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0}(x+y)\sin\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{y}$.

4.1.3. Hàm số liên tục

Khái niệm hàm nhiều biến số liên tục được định nghĩa như trong trường hợp của hàm số một biến số.

Định nghĩa:

Cho hàm số $f: D \to \mathbb{R}$ xác định trên miền $D \subset \mathbb{R}^n$, và M_0 là một điểm thuộc D. Hàm số $f(M)$ được gọi là liên tục tại M_0 nếu $\lim\limits_{M\to M_0} f(M) = f(M_0)$.

Hàm số không liên tục tại điểm M_0 được gọi là gián đoạn tại điểm đó.

Nếu hàm số $f(M)$ liên tục tại mọi điểm M_0 thuộc miền D ta nói $f(M)$ liên tục trên D.

Ví dụ 8:

Ta đã biết $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x\sin y - y\sin x}{x^2+y^2} = 0$, nên hàm số:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x\sin y - y\sin x}{x^2+y^2} & \text{khi } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{khi } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

liên tục tại điểm $(0,0)$.

Từ định lý về giới hạn của tổng, hiệu, tích, thương của các hàm nhiều biến số, ta chứng minh được định lý sau đây về hàm liên tục.

Định lý:

Giả sử $f(M); g(M)$ là hai hàm số của biến điểm n chiều $M(x_1, x_2..., x_n)$ liên tục tại điểm M_0. Ta có:

- Các hàm số $f(M) \pm g(M)$ và $f(M)g(M)$ cũng liên tục tại điểm M_0.
- Nếu $g(M_0) \neq 0$ thì hàm số $\dfrac{f(M)}{g(M)}$ cũng liên tục tại điểm M_0.

Các định lý về hàm một biến liên tục trên đoạn đóng $[a,b]$ cũng được mở rộng cho hàm nhiều biến liên tục trên tập D.

Định lý:

Giả sử hàm số $f(M)$ của biến điểm n chiều $M(x_1, x_2, ..., x_n)$ xác định và liên tục trên miền D với $D = \{(x_1, x_2, ..., x_n) : a_1 \le x_1 \le b_1; a_2 \le x_2 \le b_2; ...; a_n \le x_n \le b_n\}$.

Khi đó:

- Hàm số $f(M)$ bị chặn trên miền D, nghĩa là tồn tại một hằng số $K > 0$ sao cho:

  $$f(M) \le K; \forall M \in D.$$

- Hàm số $f(M)$ đạt giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất trên miền D.
- Giả sử A, B là hai điểm thuộc miền D sao cho $f(A)f(B) < 0$ thì tồn tại một điểm $C \in D$ sao cho $f(C) = 0$.

Nói riêng các định nghĩa và định lý nói trên đều đúng cho trường hợp $n = 2$.

Ví dụ 9:

a) Xét hàm số:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{khi } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{khi } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Tại những điểm $(x,y) \neq (0,0)$, $f(x,y)$ là thương của hai hàm số liên tục với mẫu số khác 0, nên $f(x,y)$ liên tục tại điểm đó.

Tại điểm $(0,0)$, theo ví dụ đã xét $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y) = 0 = f(0,0)$ nên hàm số liên tục tại $(0,0)$. Vậy $f(x,y)$ liên tục trên $\mathbb{R}^2$.

b) Xét tính liên tục của hàm số:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2(x^2-y^2)}{x^4+y^4} & \text{khi } (x,y) \neq (0,0) \\ a & \text{khi } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Tại những điểm $(x,y) \neq (0,0)$ hàm số $f(x,y)$ liên tục.

Tại điểm (0,0), ta cần tính giới hạn: $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2(x^2-y^2)}{x^4+y^4}$.

Xét hai dãy điểm cùng tiến đến (0,0) khi $n \to \infty$

$$\{M_n\}; M_n\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) \text{ và } \{M_n'\}; M_n'\left(\frac{2}{n}, \frac{1}{n}\right).$$

Giới hạn của hai dãy giá trị hàm số tương ứng là:

$$\lim_{n\to\infty} f(M_n) = 0; \lim_{n\to\infty} f(M_n') = \frac{12}{17},$$

do đó không tồn tại giới hạn: $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2(x^2-y^2)}{x^4+y^4}$.

Vậy hàm số đã cho gián đoạn tại (0,0) .

4.2. Đạo hàm riêng và vi phân riêng

4.2.1. Số gia riêng và số gia toàn phần

Một hàm nhiều biến $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ có thể xem như là hàm số của một biến số khi ta cố định giá trị của các biến còn lại. Từ đây có thể định nghĩa số gia riêng của một hàm nhiều biến đối với một biến số nào đó. Trước hết ta xét với $n = 2$.

Xét hàm số $z = f(x,y)$ xác định trên miền D, và $M_0(x_0, y_0)$ là một điểm thuộc miền D. Cố định giá trị $y = y_0$ và cho x thay đổi một lượng Δx thì giá trị của hàm số thay đổi là:

$$\Delta_x z = f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0).$$

Ta gọi $\Delta_x z$ là số gia riêng theo biến x của hàm số $z = f(x,y)$.

Tương tự số gia riêng theo biến y của hàm số $z = f(x,y)$ tại điểm $M_0(x_0, y_0)$ là:

$$\Delta_y z = f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0).$$

Số gia toàn phần biểu thị sự thay đổi giá trị của hàm số khi cả hai biến đồng thời thay đổi. Nếu x thay đổi lượng Δx, y thay đổi lượng Δy, thì số gia toàn phần của hàm số là:

$$\Delta z(x_0, y_0) = \Delta f(x_0, y_0) = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0).$$

Ví dụ 10:

Cho hàm số: $z = f(x, y) = xy$

Các số gia riêng theo biến x và biến y tại điểm (x_0, y_0) là:

$$\Delta_x z(x_0, y_0) = (x_0 + \Delta x)y_0 - x_0y_0 = y_0\Delta x$$

$$\Delta_y z(x_0, y_0) = x_0(y_0 + \Delta y) - x_0y_0 = x_0\Delta y.$$

Số gia toàn phần của hàm số là:

$$\Delta z(x_0, y_0) = (x_0 + \Delta x)(y_0 + \Delta y) - x_0y_0 = x_0\Delta y + y_0\Delta x + \Delta x\Delta y.$$

Tổng quát, xét hàm số của biến điểm n chiều $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$. Số gia riêng theo biến x_i, $1 \le i \le n$, tại điểm $M_0(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0)$ là:

$$\Delta_{x_i} u = f(x_1^0, ..., x_{i-1}^0, x_i^0 + \Delta x_i, x_{i+1}^0 ..., x_n^0) - f(x_1^0, ..., x_{i-1}^0, x_i^0, x_{i+1}^0 ..., x_n^0).$$

Số gia toàn phần của hàm số tại điểm đó là:

$$\Delta u = f(x_1^0 + \Delta x_1, ..., x_i^0 + \Delta x_i, ..., x_n^0 + \Delta x_n) - f(x_1^0, ..., x_i^0, ..., x_n^0).$$

4.2.2. Đạo hàm riêng của hàm nhiều biến. Đạo hàm riêng của hàm hợp

4.2.2.1. Đạo hàm riêng

Định nghĩa:

Đạo hàm riêng của hàm n biến $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ theo biến $x_i; (1 \le i \le n)$ là giới hạn của tỉ số giữa số gia riêng theo biến x_i của hàm số và số gia của biến x_i khi số gia này tiến tới 0

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = \lim_{\Delta x_i \to 0} \frac{\Delta_{x_i} u}{\Delta x_i}.$$

Đạo hàm riêng thực chất là đạo hàm riêng theo một biến số khi tất cả các biến còn lại nhận giá trị cố định. Do đó khi tính đạo hàm riêng theo biến nào thì ta coi các biến còn lại như là hằng số, và tính đạo hàm theo biến đang xét.

Ví dụ 11:

Cho hàm số $u = x^2 + 3xy^2 - z^4$. Ta có:

$$u_x' = 2x + 3y^2; u_y' = 6xy; u_z' = -4z^3.$$

Trong trường hợp $n = 2$, xét hàm số $u = f(x, y)$ xác định trong một miền D; $M_0(x_0, y_0)$ là một điểm thuộc D. Đạo hàm riêng của f đối với biến x và biến y tại điểm M_0 là:

$$f'_x(x_0, y_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}$$

$$f'_y(x_0, y_0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y f}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y}.$$

Ta sử dụng công thức nói trên để tính đạo hàm tại một điểm, còn đối với hàm số cho bởi công thức, ta sẽ áp dụng cách tính đã nói ở trên: Khi tính f_x' ta coi hàm số chỉ phụ thuộc vào biến số x, ngược lại khi tính f_y' ta coi hàm số chỉ phụ thuộc vào biến số y.

Ví dụ 12:

a) Tính các đạo hàm riêng của $f(x,y) = x^2(y+2) + \text{tg}\,(xy) + \arcsin\frac{y-1}{x}$ tại điểm (0,1).

Ta có: $y_0 = 1$, $f(x,1) = 3x^2 + \text{tg}\,x$ suy ra:

$$f'_x(0,1) = (3x^2 + \text{tg}x)'(0) = 6.0 + \frac{1}{\cos^2 0} = 1$$

$$f'_x(x_0,1) = (3x^2 + \text{tg}x)'(x_0) = 6x_0 + \frac{1}{\cos^2 x_0}.$$

b) $z = x^3y + \text{arctg}\,(x+y)$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2y + \frac{1}{1+(x+y)^2};\ \frac{\partial f}{\partial y} = x^3 + \frac{1}{1+(x+y)^2}.$$

c) $z = x^y, (x > 0)$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = yx^{y-1}; \frac{\partial f}{\partial y} = x^y \ln x.$$

d) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{khi } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{khi } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

Tại điểm $(x,y) \neq (0,0)$ ta có:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{y(x^2+y^2) - 2x^2y}{(x^2+y^2)^2} = \frac{-yx^2+y^3}{(x^2+y^2)^2}; \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x(x^2+y^2) - 2xy^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^3 - xy^2}{(x^2+y^2)^2}.$$

Tại điểm $(x,y) = (0,0)$ ta có:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{x\to 0}\frac{f(x,0) - f(0,0)}{x-0} = 0; \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0.$$

4.2.2.2. Công thức đạo hàm hàm hợp

Trước hết ta nêu khái niệm hàm số hợp của hai hàm nhiều biến số.

Cho D là một tập hợp trong $\mathbb{R}^2$. Xét ánh xạ $\varphi : D \to \mathbb{R}^2; \varphi(x,y) = (u(x,y); v(x,y))$ và hàm số hai biến $f : \varphi(D) \to \mathbb{R}; f(u,v) \in \mathbb{R}$. Xét hàm số $F = f \circ \varphi : D \to \mathbb{R}$ được xác định như sau:

$$F : (x,y) \in D \overset{\varphi}{\mapsto} (u(x,y), v(x,y)) \in \varphi(D) \overset{f}{\mapsto} f(u(x,y), v(x,y)) = F(x,y).$$

Hàm số F được xác định như trên được gọi là hàm số hợp của hai hàm f và φ.