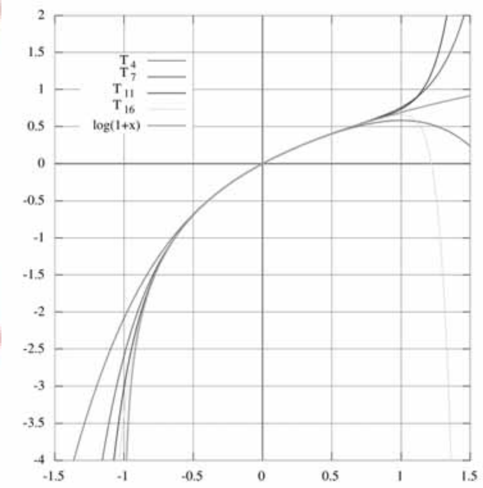
BÀI 2: ĐẠO HÀM VÀ VI PHÂN



Mục tiêu

- Hiểu được khái niệm đạo hàm, vi phân của hàm số.
- Giải được các bài tập về đạo hàm, vi phân.
- Biết vận dụng linh hoạt các định lý, khai triển và các quy tắc trong giải bài tập.
- Khảo sát tính chất, dáng điệu của các hàm cơ bản.
- Hiểu ý nghĩa hình học cũng như ý nghĩa thực tiễn của đạo hàm và vi phân.

Thời lượng

- Bài này được trình bày trong khoảng 4 tiết bài tập và 3 tiết lý thuyết.
- Bạn nên dành mỗi tuần khoảng 120 phút trong vòng hai tuần để học bài này.

Nội dung

- Ôn tập, củng cố khái niệm đạo hàm, vi phân của hàm số một biến số.
- Các tính chất, ứng dụng của lớp hàm khả vi trong toán học.

Hướng dẫn học

- Bạn cần đọc kỹ các ví dụ để nắm vững lý thuyết.
- Bạn nên học thuộc một số khái niệm cơ bản, bảng đạo hàm của các hàm số sơ cấp và các định lý Cauchy, Lagrange, Fermat,…

2.1. Đạo hàm

2.1.1. Khái niệm đạo hàm

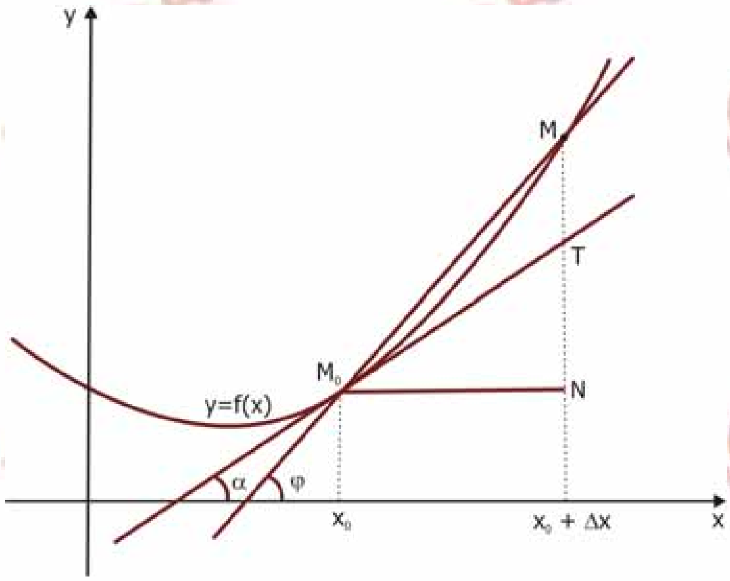
Cho hàm số $f(x)$ xác định trong khoảng (a,b) và $x_0 \in (a,b)$. Nếu tồn tại giới hạn của tỉ số $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ khi $x \to x_0$ thì giới hạn ấy được gọi là đạo hàm của hàm số $y = f(x)$ tại điểm x_0, kí hiệu là: $f'(x_0)$ hay $y'(x_0)$.

Đặt: $\Delta x = x - x_0, \Delta y = y - y_0$ ta được: $y'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$.

Nếu hàm số $f(x)$ có đạo hàm tại x_0 thì $f(x)$ liên tục tại x_0.

Về mặt hình học, đạo hàm của hàm số $f(x)$ tại điểm x_0 biểu diễn hệ số góc của đường tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại điểm $M_0(x_0, f(x_0))$.

Phương trình tiếp tuyến tại điểm x_0 là: $y = f(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$.



Hình 2.1

2.1.2. Các phép toán về đạo hàm

Nếu các hàm số $u(x), v(x)$ có các đạo hàm tại x thì:

- $u(x)+v(x)$ cũng có đạo hàm tại x và $(u(x)+v(x))' = u'(x)+v'(x)$.
- $u(x)v(x)$ cũng có đạo hàm tại x và $(u(x).v(x))' = u'(x).v(x)+u(x).v'(x)$.
- $\frac{u(x)}{v(x)}$ cũng có đạo hàm tại x, trừ khi $v(x) = 0$ và

$$\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)' = \frac{u'(x).v(x)-u(x).v'(x)}{v^2(x)}.$$

Nếu hàm số $u = g(x)$ có đạo hàm theo x, hàm số $y = f(u)$ có đạo hàm theo u thì hàm số hợp $y = f(g(x))$ có đạo hàm theo x và $y'(x) = y'(u).u'(x)$.

2.1.3. Bảng đạo hàm của các hàm số sơ cấp cơ bản

Ta có bảng tương ứng đạo hàm của hàm hợp.

$(c)' = 0$ (c là hằng số)	$\left((u(x))^{\alpha}\right)' = \alpha u(x)^{\alpha-1} u'(x)$ $(\alpha \in \mathbb{R}, x > 0)$
$(x^{\alpha})' = \alpha x^{\alpha-1}$ $(\alpha \in \mathbb{R}, \alpha > 0)$	$(a^{u(x)})' = a^{u(x)} \ln a\,(u'(x))$ $(a > 0, a \neq 1)$
$(a^x)' = a^x \ln a$ $(a > 0, a \neq 1)$	$(e^{u(x)})' = e^{u(x)} u'(x)$
$(e^x)' = e^x$	$(\log_a u(x))' = \dfrac{u'(x)}{u(x)\ln a}$ $(a > 0, a \neq 1, u(x) > 0)$
$(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$ $(a > 0, a \neq 1, x > 0)$	$(\ln u(x))' = \dfrac{u'(x)}{u(x)}$ $(u(x) > 0)$
$(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$ $(x > 0)$	$(\sin u(x))' = \cos u(x)(u'(x))$
$(\sin x)' = \cos x$	$(\cos u(x))' = -\sin u(x)(u'(x))$
$(\cos x)' = -\sin x$	$(\mathrm{tg} u(x))' = \dfrac{u'(x)}{\cos^2 u(x)}$ $(u(x) \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z})$
$(\mathrm{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$ $(x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z})$	$(\mathrm{cotg} u(x))' = -\dfrac{u'(x)}{\sin^2 u(x)}$ $(u(x) \neq k\pi, k \in \mathbb{Z})$
$(\mathrm{cotg} x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$ $(x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z})$	$(\arcsin u(x))' = \dfrac{u'(x)}{\sqrt{1 - u(x)^2}}$ $(\lvert u(x) \rvert < 1)$
$(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$ $(\lvert x \rvert < 1)$	$(\arccos u(x))' = -\dfrac{u'(x)}{\sqrt{1 - u(x)^2}}$ $(\lvert u(x) \rvert < 1)$
$(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$ $(\lvert x \rvert < 1)$	$(\mathrm{arctg} u(x))' = \dfrac{u'(x)}{1 + u(x)^2}$
$(\mathrm{arctg} x)' = \dfrac{1}{1 + x^2}$	$(\mathrm{arcotg} u(x))' = -\dfrac{u'(x)}{1 + u(x)^2}$
$(\mathrm{arcotg} x)' = -\dfrac{1}{1 + x^2}$	

2.2. Vi phân

2.2.1. Định nghĩa vi phân

Cho hàm số $y = f(x)$, có đạo hàm tại x, theo định nghĩa của đạo hàm ta có:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

trong đó: $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$.

Vậy khi: $\Delta x \to 0$, $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + k, k \to 0$ khi $\Delta x \to 0$.

Do đó: $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = f'(x)\Delta x + k\Delta x$.

Ta có số hạng $k.\Delta x$ là một VCB bậc cao hơn Δx. Do đó Δy và $f'(x)\Delta x$ là hai VCB tương đương. Biểu thức $f'(x)\Delta x$ gọi là vi phân của hàm số $y = f(x)$ tại x. Kí hiệu là dy hay $df(x)$.

Vậy: $dy = f'(x)\Delta x$. (2.1)

Nếu hàm số có vi phân tại x, ta nói $f(x)$ khả vi tại x. Như vậy, đối với hàm số một biến số khái niệm hàm số có đạo hàm tại x và khái niệm hàm số khả vi tại x tương đương nhau.

Nếu $y = x$ thì $dy = dx = 1.\Delta x$. Vậy đối với biến độc lập x, ta có $dx = \Delta x$. Do đó, công thức (2.1) có thể viết là: $dy = f'(x)dx$ (2.2).

Ví dụ 1:

Nếu $y = \sqrt{1 + \ln x}$ thì $y' = \dfrac{1}{2\sqrt{1+\ln x}}.\dfrac{1}{x}$. Do đó $dy = \dfrac{1}{2x\sqrt{1+\ln x}}dx$.

2.2.2. Vi phân của tổng, tích, thương

Từ công thức đạo hàm của tổng, tích, thương của hai hàm số suy ra:

$$d(u+v) = du + dv$$

$$d(u.v) = u.dv + vdu$$

$$d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - udv}{v^2} \quad (v \neq 0)$$

2.2.3. Vi phân của hàm hợp - tính bất biến về dạng của biểu thức vi phân

Nếu $y = f(x)$ là hàm số khả vi của biến độc lập x thì vi phân của nó được tính theo công thức (2.2), ta hãy xét trường hợp x là hàm số khả vi của một biến độc lập t nào đó:

$$x = \varphi(t).$$

Khi đó y là hàm số của biến độc lập t: $y = f(\varphi(t))$

Theo công thức tính vi phân và theo quy tắc tính đạo hàm của hàm hợp, ta có:

$$dy = y'_t\,dt = (y'_x\,x'_t)dt = y'_x(x'_t\,dt) = y'_x\,dx.$$

Như vậy biểu thức vi phân vẫn giữ nguyên dạng trong trường hợp x không phải là biến độc lập, mà phụ thuộc vào một biến độc lập khác. Nói cách khác, biểu thức vi phân bất biến đối với phép đổi biến số: $x = \varphi(t)$.

2.2.4. Ứng dụng vi phân vào tính gần đúng

Vì khi $\Delta x \to 0$; $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ là một VCB tương đương với $f'(x_0)\Delta x$, nên khi $|\Delta x|$ khá nhỏ, ta có công thức tính gần đúng:

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0).\Delta x..$$

Ví dụ 2:

Tính gần đúng $\sqrt[4]{15,8}$

Ta cần tính gần đúng: $y = f(x) = x^{\frac{1}{4}}$ tại $15,8 = 16 - 0,2$.

Đặt $x_0 = 16, \Delta x = -0,2$

Ta có: $f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0).\Delta x.$

Vì: $f(x_0) = \sqrt[4]{16} = 2, f'(x) = \frac{1}{4}x^{\frac{-3}{4}} = \frac{1}{4\sqrt[4]{x^3}}, f'(x_0) = \frac{1}{4\sqrt[4]{16^3}} = \frac{1}{32}$.

Ta được: $\sqrt[4]{15,8} \approx \sqrt[4]{16} - \frac{0,2}{32} = 2 - 0,00625 \approx 1,9938.$

2.3. Các định lý cơ bản về hàm số khả vi

2.3.1. Định lý Fermat

Giả sử hàm số $f(x)$ xác định trong khoảng (a,b) và đạt cực trị (cực đại hay cực tiểu) tại $c \in (a,b)$. Khi đó nếu tại c hàm số $f(x)$ có đạo hàm thì $f'(c) = 0$.

Chứng minh:

Giả sử hàm số $f(x)$ nhận giá trị lớn nhất tại c. Với mọi $x \in (a,b)$ ta có:

$$f(x) \le f(c) \Rightarrow f(x) - f(c) \le 0.$$

Nếu hàm số $f(x)$ có đạo hàm tại c thì $f'(c) = \lim\limits_{x \to c\pm} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$.

Với giả thiết $x > c$ ta có:

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} \le 0 \Rightarrow f'(c) = \lim_{x \to c+} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \le 0.$$

Với giả thiết $x < c$ ta có:

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} \ge 0 \Rightarrow f'(c) = \lim_{x \to c-} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \ge 0.$$

Do đó suy ra $f'(c) = 0$.

Trường hợp $f(x)$ đạt giá trị nhỏ nhất tại điểm $c \in (a,b)$ chứng minh hoàn toàn tương tự.

2.3.2. Định lý Rolle

Giả sử hàm số $f(x)$ thỏa mãn các điều kiện:

- Xác định và liên tục trên $[a,b]$
- Khả vi trong khoảng (a,b)
- $f(a) = f(b)$.

Khi đó, tồn tại điểm $c \in (a,b)$ sao cho $f'(c) = 0$.

Chứng minh:

Đặt f(x) = f(b) = d. Xét 3 trường hợp:

- Nếu $f(x)=d, \forall x\in[a,b]\Rightarrow f(x)$ là hàm hằng trên $[a,b]$. Khi đó c là điểm tùy ý thuộc $[a,b]$.
- Nếu $\exists x\in(a,b)$ sao cho f(x) > d, thì khi đó do f liên tục trên $[a,b]$ nên tồn tại giá trị lớn nhất M của f(x) trên $[a,b]$ đạt tại $c\in[a,b]$. Do M > d nên $c\in(a,b)$, do đó c là điểm tới hạn của f. Mặt khác do f khả vi trên (a,b) nên $f'(c)=0$.
- Trường hợp $\exists x\in(a,b)$, sao cho f(x) < d cũng lập luận tương tự.

Ý nghĩa hình học của định lý Rolle: Nếu hai điểm A,B có tung độ bằng nhau và được nối với nhau bằng một đường cong liên tục $y=f(x)$, có tiếp tuyến tại mọi điểm, thì trên đường cong có ít nhất một điểm mà tại đó tiếp tuyến song song với trục hoành.

2.3.3. Định lý Lagrange

Giả sử hàm số $f(x)$ thỏa mãn các điều kiện sau:

- Xác định và liên tục trên $[a,b]$.
- Khả vi trong khoảng (a,b).

Khi đó, tồn tại điểm $c\in(a,b)$ sao cho: $f'(c)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Chứng minh:

Đặt: $g(x)=f(x)-f(a)-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$, $x\in[a,b]$.

Từ các giả thiết của định lý Lagrange dễ dàng thấy rằng hàm số $g(x)$ thỏa mãn các điều kiện:

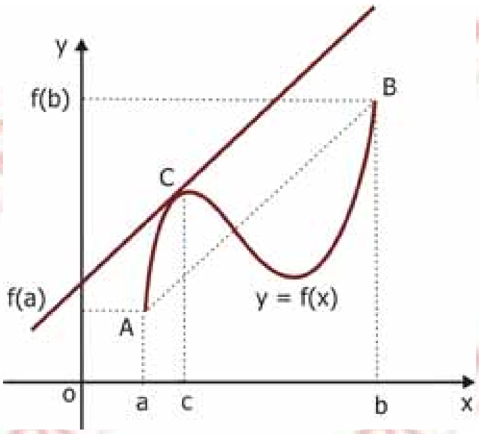
- Liên tục trên $[a,b]$.
- Có đạo hàm trong $(a,b): g'(x)=f'(x)-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}, \forall x\in(a,b)$.
- $g(a)=g(b)=0$.

Theo định lý Rolle, tồn tại $c\in(a,b)$ sao cho:

$$g'(c)=f'(c)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=0\Rightarrow f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

Định lý đã được chứng minh.

Ý nghĩa hình học của định lý Lagrange: Nếu hai điểm A và B được nối với nhau bằng một đường cong liên tục $y=f(x)$, có tiếp tuyến tại mọi điểm, thì trên đường cong đó có ít nhất một điểm mà tại đó tiếp tuyến song song với đường thẳng AB.



Hình 2.2

2.3.4. Định lý Cauchy

Giả sử các hàm số $f(x)$ và $g(x)$ thỏa mãn các điều kiện sau. Xác định và liên tục trên $[a,b]$.

- Khả vi trong khoảng (a,b).
- $g'(x) \neq 0, \forall x \in (a,b)$.

Khi đó tồn tại điểm $c \in (a,b)$ sao cho: $\dfrac{f'(c)}{g'(c)} = \dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$.

Chứng minh:

Trước hết ta thấy rằng, với các giả thiết của định lý thì $g(b) \neq g(a)$. Thật vậy, nếu $g(b) = g(a)$ thì theo định lý Rolle, tồn tại điểm c sao cho $g'(c) = 0$, điều này trái với giả thiết rằng $g'(x) \neq 0\ \forall x \in (a,b)$.

Xét hàm số: $\varphi(x) = f(x) - \dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}.g(x), x \in [a,b]$.

Dễ thấy rằng:

- $\varphi(x)$ liên tục trên $[a,b]$.
- $\varphi(x)$ khả vi trong (a,b).
- $\varphi(a) = \varphi(b)$.

Theo định lý Rolle, tồn tại điểm $c \in (a,b)$ sao cho

$$\varphi'(c) = f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}g'(c) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}.$$

Định lý đã được chứng minh.

Nhận xét: Định lý Lagrange là một trường hợp riêng của định lý Cauchy (với $g(x) = x$)

2.4. Đạo hàm và vi phân cấp cao

2.4.1. Đạo hàm cấp cao

Nếu hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm thì $y' = f'(x)$ gọi là đạo hàm cấp một của $f(x)$. Đạo hàm, nếu có của đạo hàm cấp một gọi là đạo hàm cấp hai.

Kí hiệu là: $y'' = f''(x)$.

Vậy: $y'' = f''(x) = \left(f'(x)\right)'$.

Tương tự, đạo hàm của đạo hàm cấp $(n-1)$ của $f(x)$ gọi là đạo hàm cấp n, kí hiệu là: $f^{(n)}(x)$ Vậy $y^{(n)} = f^{(n)}(x) = \left(f^{(n-1)}(x)\right)'$

2.4.2. Vi phân cấp cao

Nếu hàm số $y = f(x)$ khả vi tại mọi điểm thuộc khoảng (a,b) thì vi phân dy là một hàm số của biến $x: dy = f'(x)dx$, trong đó vi phân dx của biến độc lập x là số gia Δx không phụ thuộc x. khái niệm vi phân cấp cao được định nghĩa tương tự như đạo hàm cấp cao.

Định nghĩa:

Vi phân cấp n của hàm số $y = f(x)$ là vi phân của vi phân cấp $(n-1)$ của hàm số đó (ta gọi vi phân dy là vi phân cấp 1).

Vi phân cấp n của hàm số $y = f(x)$ được kí hiệu là $d^n y, d^n f(x)$:

$$d^n y = d(d^{n-1}y).$$

Trong công thức vi phân $dy = y'dx$, đạo hàm y' phụ thuộc x, còn $dx = \Delta x$ là số gia bất kỳ của biến độc lập x, không phụ thuộc x. Do đó, khi xem dy như một hàm số của x thì dx được xem như hằng số. Ta có:

$$d^2y = d(dy) = d\left(y'(x)dx\right) = dx.d(y'(x)) = dx.(y'(x))'dx = y''(x)(dx)^2.$$

Bằng phương pháp quy nạp, ta có thể chứng minh công thức tính vi phân cấp n của một hàm số theo đạo hàm cấp n của nó:

$$d^n y = y^{(n)}(dx)^n \text{ hoặc } d^n f(x) = f^{(n)}(x)(dx)^n.$$

CHÚ Ý :

Biểu thức vi phân cấp cao không có tính bất biến về dạng như biểu thức vi phân cấp một. Tức là với, n >1 công thức này chỉ đúng khi x là biến độc lập.

2.5. Công thức Taylor và công thức Maclaurin

2.5.1. Công thức Taylor

Ở phần 2.2, khi nghiên cứu về vi phân ta đã biết rằng hàm số $f(x)$ xác định ở lân cận của x_0, có đạo hàm tại x_0, thì ta có công thức tính gần đúng:

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Nếu đặt $x = x_0 + \Delta x$, công thức đó trở thành:

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Vậy ở lân cận của x_0 ta xem $f(x)$ gần đúng bằng một đa thức bậc 1. Vấn đề đặt ra là: Nếu hàm số $f(x)$ có đạo hàm cấp cao hơn tại x_0, liệu có thể xấp xỉ $f(x)$ bằng một đa thức có bậc lớn hơn 1 được không? Công thức Taylor mà ta thừa nhận sau đây sẽ giải quyết vấn đề đó.

Định lý:

Nếu hàm số $f(x)$ thỏa mãn các điều kiện:

- Có đạo hàm đến cấp n trên đoạn $[a,b]$.
- Có đạo hàm cấp $(n+1)$ trong khoảng (a,b)

  thì tồn tại điểm $c \in (a,b)$ sao cho với điểm $x_0 \in (a,b)$ và với mọi $x \in (a,b)$ ta có

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1} \qquad (2.3)$$

với $c = x_0 + \theta(x - x_0), 0 < \theta < 1$.

Công thức (2.3) gọi là công thức Taylor. Số hạng cuối ở vế phải gọi là số dư dạng Lagrange. Biểu diễn của hàm số $f(x)$ dưới dạng (2.3) gọi là khai triển hữu hạn của f(x) ở lân cân của điểm x_0.

Nhận xét:

Nếu đặt $P_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$ thì công thức Taylor cho phép ta biểu diễn $f(x)$ gần đúng bằng đa thức $P_n(x)$ ở lân cận của x_0 với sai số:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}.$$

Nếu hàm số $f(x)$ thỏa mãn điều kiện:

$$\left|f^{(n+1)}(x)\right| \le M_{n+1}, \forall x \in [a,b]$$

với M_{n+1} là một số dương nào đó, thì ta có đánh giá sau đối với $R_n(x)$:

$$R_n(x) \le \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}|x - x_0|^{n+1}.$$

Có thể chứng minh được rằng với một giá trị xác định của x, vế phải của bất đẳng thức trên dần tới 0 khi $n \to \infty$. Khi đó ta có thể xấp xỉ $f(x)$ bởi một đa thức $P_n(x)$ với độ chính xác bất kỳ.

2.5.2. Công thức Maclaurin

Trong công thức Taylor, khi $x_0 = 0 \in (a,b)$ ta thu được khai triển:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + ... + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}x^{n+1}, \forall x \in (a,b) \qquad (2.4)$$

Công thức trên gọi là công thức Mac Laurin.

Khai triển Maclaurin của một số hàm sơ cấp thường dùng

- $f(x) = (1+x)^\alpha, \alpha \in \mathbb{R}, x > -1$.

  Ta có:

$$f'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1}$$
$$f''(x) = \alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2}$$
$$...$$
$$f^{(n)}(x) = \alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n}$$
$$f^{(n+1)}(x) = \alpha(\alpha-1)...(\alpha-n)(1+x)^{\alpha-n-1}$$

Do đó: $f'(0) = \alpha, f''(0) = \alpha(\alpha-1), ..., f^{(n)}(0) = \alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)$.

Thay vào công thức (2.4) ta được:

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + ... + \frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)}{n!}x^n + \frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n)}{(n+1)!}(1+\theta x)^{\alpha-n-1}x^{n+1}$$

$$0 < \theta < 1, x > -1.$$

Đặc biệt nếu $\alpha = n \in \mathbb{N}^*$ thì $\left[(1+x)^n\right]^{(n+1)} = 0$, nên $R_n(x) = 0$ ta được:

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + ... + \frac{n(n-1)(n-k+1)}{k!}x^k + ... + x^n.$$

Đó chính là công thức tính nhị thức Newton quen thuộc.

Thay $\alpha = -1$ vào công thức ta nhận được:

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - ... + (-1)^n x^n + (-1)^{n+1}\frac{x^{n+1}}{(1+\theta x)^{n+2}}; 0 < \theta < 1.$$

Thay $x = -x$ vào công thức trên ta có:

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + ... + x^n + \frac{x^{n+1}}{(1-\theta x)^{n+2}}; \quad 0 < \theta < 1.$$

- $f(x) = e^x$

  Ta có: $f^{(n)}(x) = e^x, f^{(n)}(0) = 1$

  Vậy: $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + ... + \frac{x^n}{n!} + \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}, 0 < \theta < 1.$