BÀI TẬP GIẢI TÍCH HÀM

$\boxed{\textbf{1.1.2}}$ Cho A là một tập con của một không gian định chuẩn $(E, ||.||)$. Chứng minh A là một tập mở nếu và chỉ nếu mọi x trong A, có $r > 0$ sao cho $B(x, r) \subset A$.

Giải

- Giả sử mọi x trong A, có $r_x > 0$ sao cho $B(x, r_x) \subset A$. Ta chứng minh

$$A = \bigcup_{x \in A} B(x, r_x).$$

Cho z trong A, ta có $z \in B(z, r_z)$. Vậy

$$A \subset \bigcup_{x \in A} B(x, r_x).$$

Ch z trong $\bigcup_{x \in A} B(x, r_x)$, Có $x \in A$ sao cho $z \in B(x, r_x)$. Vì $B(x, r_x) \subset A$, ta có $z \in A$.

- Giả sử A là tập mở, ta chứng minh với mọi x trong A, có $r > 0$ sao cho $B(x, r) \subset A$.

Có một họ quả cầu mở $\{B(a_i, r_i)\}_{i \in I}$ trong E sao cho

$$A = \bigcup_{i \in I} B(a_i, r_i).$$

Cho x trong E, có i trong I sao cho $x \in B(a_i, r_i)$. Đặt $r = r_i - ||x - a_i||$, ta có

$$B(x, r) \subset B(a_i, r_i) \subset \bigcup_{i \in I} B(a_i, r_i) \subset A.$$

$\boxed{\textbf{1.1.4}}$ Cho A là một tập con của một không gian định chuẩn $(E, ||.||)$. Chứng minh A là một tập đóng nếu và chỉ nếu mọi dãy $\{x_n\}$ trong A hội tụ về x trong E thì $x \in A$.

Giải

Giả sử A là một tập đóng. Cho dãy $\{x_n\}$ trong A hội tụ về x trong E ta chứng minh $x \in A$. Ta dùng phản chứng: giả sử $x \in E \setminus A$. Ta có $E \setminus A$ là một tập mở, nên có $r > 0$ sao cho $B(x, r) \subset E \setminus A$, hay

$$y \in E \setminus A \qquad \forall\, y \in E, ||y - x|| < r. \qquad (1)$$

Mặt khác với $\varepsilon = r$, ta tìm được một số nguyên N sao cho

$$||x_n - x|| < \varepsilon \qquad \forall\, n \geq N. \qquad (2)$$

Từ đó ta có $x_N \in A \cap (E \setminus A)$: mâu thuẩn. Vậy $x \in A$. Nay giả sử mọi dãy $\{x_n\}$ trong A hội tụ về x trong E thì $x \in A$. Ta chứng minh A đóng, hay $E \setminus A$ là một tập mở. Ta dùng phản chứng: $E \setminus A$ không là một tập mở. Lúc đó có một x trong $E \setminus A$, và với mọi số thực dương r có một y_r sao cho $||y_r - x|| < r$ và $y_r \in A$.

Đặt $x_n = y_{1/n}$. Ta thấy $\{x_n\}$ trong A hội tụ về x trong E nhưng $x \in E \setminus A$: vô lý.

$\boxed{\textbf{1.3.10}}$ Cho A là một tập con của một không gian định chuẩn $(E, ||.||)$. Chứng minh A là một tập đóng nếu và chỉ nếu $A = \overline{A}$.

Giải

Giả sử A là một tập đóng. Ta chứng minh $A = \overline{A}$.

- Chứng minh $A \subset \overline{A}$:

Cho x trong A, ta chứng minh $x \in \overline{A}$, hay $B(x, r) \cap A \neq \emptyset$. Vì $x \in B(x, r) \cap A$, ta có kết quả

- Chứng minh $\overline{A} \subset A$:

Cho x trong $\overline{A}$, chứng minh x trong A. Với mọi $r > 0$ có $y_r \in A \cap B(x, r)$. Đặt $x_n = y_{1/n}$ với mọi số nguyên n. Ta có

$$||x_n - x|| < \frac{1}{n} \qquad \forall\ n \in \boldsymbol{N}.$$

Từ đó $\{x_n\}$ hội tụ về x. áp dụng bài 1.1.4, ta thấy x ở trong A.

Giả sử $A = \overline{A}$. Ta chứng minh A là một tập đóng.

Ta dùng bài 1.1.4. Cho dãy $\{x_n\}$ trong A hội tụ về x trong E ta chứng minh $x \in A$. Với giả thiết $A = \overline{A}$, ta chỉ cần chứng minh $x \in \overline{A}$. Ta có : với mọi $\varepsilon = r > 0$ có một số nguyên N sao cho

$$||x_n - x|| < \varepsilon \qquad \forall\ n \geq N.$$

Vậy $B(x, r) \cap A \neq \emptyset$ với mọi $r > 0 : x \in \overline{A}$

$\boxed{\textbf{1.3.1}}$ Cho a và b là hai vectơ trong một không gian định chuẩn $(E, ||.||)$. Chứng minh

$$|||a|| - ||b||| \leq ||a - b||. \qquad (1)$$

Suy ra hàm số f liên tục trên $(E, ||.||)$, nếu $f(x) = ||x||$ với mọi x trong E.

Giải

Ta thấy (1) tương đương với

$$\begin{cases} ||a|| - ||b|| \leq ||a - b||, \\ ||b|| - ||a|| \leq ||a - b||. \end{cases}$$

hay

$$\begin{cases} ||a|| \le ||a-b|| + ||b||, \\ ||b|| \le ||a-b|| + ||a||. \end{cases}$$

hay

$$\begin{cases} ||(a-b)+b|| \le ||a-b|| + ||b||, \\ ||(b-a)+a|| \le ||a-b|| + ||a||. \end{cases}$$

Vậy ta có (1). Từ (1) ta có

$$|f(y) - f(x)| \le ||y-x|| \qquad \forall\, x, y \in E.$$

Vậy với mọi $\varepsilon > 0$, chọn $\delta = \dfrac{\varepsilon}{2}$ ta có

$$|f(y) - f(x)| < \varepsilon \qquad \forall\, x, y \in E, ||x-y|| < \delta.$$

Vậy f liên tục trên E.

$\boxed{\textbf{1.3.2}}$ Cho A là một tập hợp bị chặn trong một không gian định chuẩn $(E, ||.||)$. Chứng minh có một số thực dương r sao cho $A \subset B(0, r)$.

Giải

Có số thực M sao cho

$$||x|| \le M \qquad \forall\, x \in A.$$

Đặt $r = M + 1$, ta có

$$||x - 0|| = ||x|| < r \qquad \forall\, x \in A.$$

Vậy $x \in B(0, r)$, từ đó $A \subset B(0, r)$.

$\boxed{\textbf{1.3.11}}$ Cho A là một tập hợp compắc trong một không gian định chuẩn $(E, ||||)$. Chứng minh

(i) A đóng.

(ii) A bị chặn.

Giải

Cho một dãy $\{y_n\}$ trong A, ta có một dãy con $\{y_{n_k}\}$ của $\{y_n\}$, sao cho $\{y_{n_k}\}$ hội tụ về y trong A. Áp dụng bài 1.1.4, ta thấy A là một tập đóng trong E.

Ňay ta chứng minh A bị chặn. Ta dùng phản chứng : giải sử A không bị chặn. Dùng qui nạp toán học ta tìm được một dãy $\{x_n\}$ có tính chất

$$1 + ||x_1|| + \cdots + ||x_n|| < ||x_{n+1}|| \qquad \forall\, n \in \boldsymbol{N}.$$

Vậy

$$1 < ||x_m|| - ||x_n|| \leq ||x_m - |x_n|| \qquad \forall\, m, n \in \boldsymbol{N}, m > n.$$

hay

$$1 < ||x_m - |x_n|| \qquad \forall\, m, n \in \boldsymbol{N}, m \neq n. \qquad (1)$$

Cho $\{x_{n_k}\}$ là một dãy con của dãy $\{x_n\}$. Theo (1),

$$1 < ||x_{n_k} - |x_{n_{k'}}|| \qquad \forall\, k, k' \in \boldsymbol{N}, k \neq k'.$$

Vậy $\{x_{n_k}\}$ không là một dãyCauchy, nên không hội tụ : mâu thuẩn với giả thiết compắc của A.

1.1.6 Cho A là một tập hợp khác trống trong một không gian định chuẩn $(E, ||||_E)$ và f là một ánh xạ từ A vào một không gian định chuẩn $(F, ||||_F)$. Chứng minh f liên tục trên A nếu và chỉ nếu với mọi tập mở V trong F, có một tập mở W trong E sao cho $f^{-1}(V) = W \cap A$.

Giải

• Giả sử f liên tục trên A. Cho một tập mở V trong F, ta tìm một tập mở W trong E sao cho $f^{-1}(V) = W \cap A$.

Cho x trong $B \equiv f^{-1}(V)$, ta có $y = f(x) \in V$. Do bài 1.1.2 và sự liên tục của f tại x, ta thấy có $r_x > 0$ sao cho $B(y, r_x) \subset V$, và với $\varepsilon = r_x$, có một $\delta_x > 0$ sao cho

$$||f(z) - f(x)||_F < \varepsilon \qquad \forall\, z \in A, ||z - x||_E.$$

hay $f(z) \in B(y, \varepsilon)$ với mọi $z \in A \cap B(x, \delta_x)$, hay $f(A \cap B(x, \delta_x)) \subset B(y, \varepsilon) = B(y, r_x) \subset V$.

Đặt $W = \bigcup_{x \in B} B(x, \delta_x)$. Ta có $W \cap A = \bigcup_{x \in B} B(x, \delta_x) \cap A$ và

$$f(W \cap A) = f(\bigcup_{x \in B} B(x, \delta_x) \cap A) \subset \bigcup_{x \in B} f(B(x, \delta_x) \cap A) \subset V$$

$$V = \bigcup_{x \in B} \{f(x)\} \subset f(W \cap A).$$

Vậy

$$f(W \cap A) = V.$$

• Giả sử với mọi tập mở V trong F, có một tập mở W trong E sao cho $f^{-1}(V) = W \cap A$. Ta chứng minh f liên tục trên A.

Cho x trong A, và $\varepsilon > 0$, ta tìm δ sao cho

$$||f(z) - f(x)||_F < \varepsilon \qquad \forall\, z \in A, ||z - x||_E.$$

hay

$$f(A \cap B(x,\delta)) \subset B(f(x),\varepsilon).$$

hay

$$A \cap B(x,\delta) \subset f^{-1}(B(f(x),\varepsilon)).$$

Đặt $V = B(f(x),\varepsilon)$. Theo giả thiết có một tập mở W trong E sao cho $f^{-1}(V) = W \cap A$. Vậy $x \in W$. Theo bài 1.1.2, ta có $r > 0$ sao cho $B(x,r) \subset W$. Đặt $\delta = r$, ta có

$$A \cap B(x,\delta) \subset W \cap A = f^{-1}(B(f(x),\varepsilon)).$$

1.1.6 Cho A là một tập hợp compắc trong một không gian định chuẩn $(E, ||||_E)$ và f là một ánh xạ liên tục từ A vào một không gian định chuẩn $(F, ||||_F)$. Chứng minh $f(A)$ compắc trong F.

Giải

Cho $\{y_n\}$ là một dãy trong $f(A)$. Ta sẽ tìm một dãy con $\{y_{n_k}\}$ của $\{y_n\}$ hội tụ về y trong $f(A)$. Chọn x_n trong A sao cho $f(x_n) = y_n$. Vì A compắc, có một dãy con $\{x_{n_k}\}$ của $\{x_n\}$ hội tụ về x trong A. Do tính liên tục của f, $\{f(x_{n_k})\}$ hội tụ về $y = f(x)$.

1.2.5i Cho A là một tập hợp khác trống và $(E, ||||)$ là một không gian định chuẩn trên Φ. Đặt $B(A,E)$ là tập hợp các ánh xạ f từ A vào E sao cho $f(A)$ bị chặn trong E. Với mọi f và g trong $B(A,E)$, x trong A và α trong Φ ta đặt

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x),$$

$$(\alpha f)(x) = \alpha f(x),$$

$$||f||_\infty = \sup\{||f(y)|| : y \in A\}.$$

Chứng minh $(B(A,F), ||.||_\infty)$ là một không gian định chuẩn.

Giải

Cho f và g trong $B(A,E)$ và α trong Φ, ta chứng minh $f+g$ và αf ở trong $B(A,E)$. Có hai số thực dương M_1 và M_2 sao cho

$$||f(x)|| \leq M_1 \qquad \forall\, x \in A. \qquad (1)$$

$$||g(x)|| \leq M_2 \qquad \forall\, x \in A. \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có

$$||(f+g)(x)|| = ||f(x)+g(x)|| \leq ||||f(x)|| + ||g(x)||M_1 + M_2 \qquad \forall\, x \in A.)$$

$$||(\alpha f)(x)|| = ||\alpha f(x)|| = |\alpha|||f(x)|| \leq |\alpha| M_1 \qquad \forall\, x \in A.$$

Vậy $f+g$ và αf ở trong $B(A,E)$. Từ đó $B(A,E)$ là một không gian vectơ.

Nay ta chứng minh $||.||_\infty$ là một chuẩn trên $B(A,E)$. Cho f và g trong $B(A,E)$, x trong A và α trong Φ. Vì $||f(x)|| \geq 0$, nên

$$||f||_\infty = \sup\{||f(y)|| : y \in A\} \geq 0.$$

Nếu $||f||_\infty = 0$, ta có

$$\sup\{||f(y)|| : y \in A\} = 0.$$

Vậy

$$||f(y)|| = 0 \qquad \forall\, y \in A.$$

Vậy $f(y) = 0$ với mọi y trong A hay $f = 0$. Ta có

$$\begin{aligned} ||\alpha f||_\infty &= \sup\{||\alpha f(y)|| : y \in A\} = \sup\{|\alpha|||f(y)|| : y \in A\} \\ &= \sup|\alpha|\{||f(y)|| : y \in A\} = \alpha|\sup|\{||f(y)|| : y \in A\} = ||\alpha|||f||_\infty. \end{aligned}$$

Đặt $C = \{||f(y)|| : y \in A\}$ và $D = \{||g(y)|| : y \in A\}$, ta có

$$\begin{aligned} ||f+g||_\infty &= \sup|\{||f(y)+g(y)|| : y \in A\} \leq \sup|\{||f(y)|| + ||g(y)|| : y \in A\} \\ &\leq \sup(C+D) \leq \sup C + \sup D = ||f||_\infty + ||g||_\infty. \end{aligned}$$

Vậy $||.||_\infty$ là một chuẩn trên $B(A,E)$.

$\boxed{\textbf{1.2.7i,ii}}$ Cho $[a,b]$ là một khoảng đóng bị chặn trong $\boldsymbol{R}$. Đặt $X = C([a,b],\boldsymbol{R})$ là tập các hàm số thực liên tục trên $[a,b]$. Với mọi f và g trong X, x trong $[a,b]$ và α trong $\boldsymbol{R}$ ta đặt

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x),$$

$$(\alpha f)(x) = \alpha f(x),$$

$$||f||_\infty = \sup\{|f(y)| : y \in [a,b]\}.$$

Chứng minh $(X, ||.||_\infty)$ là một không gian định chuẩn con của $B([a,b],\boldsymbol{R})$, và $(X, ||.||_\infty)$ là một không gian Banach.

Giải

Cho f và g trong X và α trong $\boldsymbol{R}$. Ta thấy $f+g$ và αf là các hàm số thực liên tục, nên X là một không gian vectơ trên $\boldsymbol{R}$. Vì $f([a,b])$ bị chặn với mọi f trong X, nên X chứa trong $B([a,b],\boldsymbol{R})$. Vậy X là không gian vectơ con của $B([a,b],\boldsymbol{R})$. Suy ra $(X,||.||_\infty)$ là không gian vectơ định chuẩn con của $B([a,b],\boldsymbol{R})$.

Ta chứng minh $(X,||.||_\infty)$ là một không gian Banach. Cho $\{f_m\}$ là một dãy Cauchy trong X. Ta tìm một f trong X sao cho $\{f_m\}$ hội tụ về f trong X, hay

$$\lim_{m\to\infty}||f_m-f||_\infty=0. \qquad (1)$$

Trước hết ta xác định f. Vì $\{f_m\}$ là một dãy Cauchy trong X ta có

$$\forall\ \varepsilon>0, \exists N(\varepsilon)\in\boldsymbol{N} : |f_m-f_n||_\infty<\varepsilon \qquad m>n\geq N(\varepsilon).$$

hay

$$\forall\ \varepsilon>0, \exists N(\varepsilon)\in\boldsymbol{N} : |f_m(x)-f_n(x)|<\varepsilon \qquad m>n\geq N(\varepsilon), x\in[a,b]. \qquad (2)$$

Vậy, với mọi x trong $[a,b]$, $\{f_m(x)\}$ là một dãy Cauchy trong $\boldsymbol{R}$, và hội tụ về một số thực được ký hiệu là $f(x)$.

Ta đã xác định được một hàm số thực f trên $[a,b]$. Nay ta chứng minh f thuộc X, nghĩa là f liên tục trên $[a,b]$. Cho x trong $[a,b]$, ta có

$$\forall\ \varepsilon'>0, \exists M(x,\varepsilon')\in\boldsymbol{N} : |f_k(x)-f(x)|<\varepsilon' \qquad \forall\ k\geq M(x,\varepsilon'). \qquad (3)$$

Từ (2) và (3), ta thấy

$$|f_n(x)-f(x)|\leq|f_n(x)-f_m(x)|+|f_m(x)-f(x)|<\varepsilon'+\varepsilon$$

$$\forall\ n\geq N(\varepsilon), m\geq\max\{n,N(\varepsilon),M(x,\varepsilon')\}, x\in[a,b]. \qquad (4)$$

Cho ε, chọn $\varepsilon'=\dfrac{\varepsilon}{2}$ và $m=\max\{n,N(\varepsilon)\geq M(x,\varepsilon')\}$, ta có

$$|f_n(x)-f(x)|<2\varepsilon \qquad \forall\ n\geq N(\varepsilon), x\in[a,b]. \qquad (5)$$

Cho y và z trong $[a,b]$, từ (5)

$$\begin{aligned}|f(y)-f(z)| &\leq |f(y)-f_k(y)|+|f_k(y)-f_k(z)|+|f_k(z)-f(z)|\\ &\leq 4\varepsilon+|f_k(y)-f_k(z)| \qquad k\geq N(\varepsilon). \qquad (6)\end{aligned}$$

Chọn $k = N(\varepsilon)$, do tính liên tục đều của f_k, ta có

$$\forall\ \varepsilon" > 0, \exists \eta(\varepsilon") > 0 : |f_k(y) - f_k(z)| < \varepsilon" \qquad \forall\ y, z \in [a, b], |y - z| < \eta(\varepsilon"). \qquad (7)$$

Từ (6) và (7) ta có

$$\forall\ \varepsilon" > 0, \exists \eta(\varepsilon") > 0 : |f(y) - f(z)| < 4\varepsilon + \varepsilon" \qquad \forall\ y, z \in [a, b], |y - z| < \eta(\varepsilon"), \varepsilon > 0,$$

hay

$$\forall\ \varepsilon" > 0, \exists \eta(\varepsilon") > 0 : |f(y) - f(z)| \leq \varepsilon" \qquad \forall\ y, z \in [a, b], |y - z| < \eta(\varepsilon").$$

Vậy f liên tục trên $[a, b]$. Nay ta chứng minh (1). Theo (5), ta có

$$|f_n(x) - f(x)| < 2\varepsilon \qquad \forall\ n \geq N(\varepsilon), x \in [a, b].$$

Vậy

$$||f_n - f||_\infty = \sup\{|f_n(x) - f(x)| : x \in [a, b]\} < 2\varepsilon \qquad \forall\ n \geq N(\varepsilon).$$

1.2.7i,ii Cho $[a, b]$ là một khoảng đóng bị chặn trong $\boldsymbol{R}$. Đặt $X = C([a, b], \boldsymbol{R})$ là tập các hàm số thực liên tục trên $[a, b]$. Với mọi f và g trong X, x trong $[a, b]$ và α trong $\boldsymbol{R}$ ta đặt

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x),$$

$$(\alpha f)(x) = \alpha f(x),$$

$$||f||_1 = \int_a^b |f(t)| dt.$$

Chứng minh $(X, ||.||_1)$ là một không gian định chuẩn, nhưng không là một không gian Banach.

Giải

Cho f và g trong X, và s trong $\boldsymbol{R}$.

Vì $|f| \geq 0$, ta có

$$||f||_1 = \int_a^b |f(t)| dt \geq 0.$$

Giả sử $f \not\equiv 0$. Ta có y trong $[a, b]$ sao cho $f(y) = \alpha \neq 0$. Cho $\varepsilon = \dfrac{|\alpha|}{2} > 0$. Vì f liên tục nên có $\delta(y, \varepsilon) > 0$ sao cho

$$|f(y) - f(t)| < \varepsilon \qquad \forall\ t \in [a, b] \cap [y - \delta(y, \varepsilon), y + \delta(y, \varepsilon)]. \qquad (1)$$

Có $c < d$ sao cho $[a, b] \cap [y - \delta(y, \varepsilon), y + \delta(y, \varepsilon)] = [c, d]$. Với t trong $[c, d]$, do (1)

$$|f(y)| - |f(t)| < \varepsilon \qquad or \ \ \frac{|\alpha|}{2} < |f(t)|.$$

Suy ra

$$||f||_1 = \int_a^b |f(t)|dt \geq \int_c^d |f(t)|dt \geq \int_c^d \frac{|\alpha|}{2} dt \geq \frac{|\alpha|}{2}(d - c) > 0.$$

Vậy $f \equiv 0$ nếu $||f||_1 = 0$.

Ta có

$$||sf||_1 = \int_a^b |sf(t)|dt = \int_a^b |s||f(t)|dt = |s| \int_a^b |f(t)|dt = |s|||f||_1.$$

$$\begin{aligned} ||f + g||_1 &= \int_a^b |f(t) + g(t)|dt \leq \int_a^b [|f(t)| + |g(t)]dt \\ &= \int_a^b |f(t)|dt + \int_a^b |g(t)dt = ||f||_1 + ||g||_1. \end{aligned}$$

Vậy $||.||_1$ là một chuẩn trên X.

Nay ta chứng minh $(X, ||.||_1)$ không là một không gian Banach. Ta sẽ tìm một dãy Cauchy trong $(X, ||.||_1)$ nhưng không hội tụ. Đặt $c = \frac{1}{2}(a + b)$, $c_n = c + \dfrac{b - a}{4n}$ với mọi số nguyên dương n và

$$f_n(t) = \begin{cases} 0 & a \leq t \leq c, \\ \dfrac{t - c}{c_n - c} & c \leq t \leq c_n, \\ 1 & c_n \leq t \leq b. \end{cases}$$

Cho hai số nguyên dương m và n sao cho $m > n$. Ta có $c_m < c_n$ và

$$\begin{aligned} ||f_n - f_m||_1 &= \int_a^b |f_n(t) - f_m(t)|dt = \int_c^{c_n} |f_n(t) - f_m(t)|dt \\ &\leq \int_c^{c_n} (|f_n(t)| + |f_m(t)|)dt \leq \int_c^{c_n} 2dt = \frac{b - a}{2n}. \end{aligned}$$

Từ đó $\{f_n\}$ là một dãy Cauchy trong $(X, ||.||_1)$. Nay giả sử có f trong X sao cho $\{f_n\}$ hội tụ về f trong $(X, ||.||_1)$. Lúc đó, cho một số dương ε, ta tìm được một số nguyên dương $N(\varepsilon)$ sao cho

$$\int_a^b |f_n(t) - f(t)|dt = ||f_n - f||_1 < \varepsilon \qquad \forall \ n \geq N(\varepsilon).$$

Vậy

$$\begin{aligned} \int_a^c |f(t)|dt + \int_{c_n}^b |1 - f(t)|dt &= \int_a^c |f_n(t) - f(t)|dt + \int_{c_n}^b |f_n(t) - f(t)|dt \\ &\leq \int_a^b |f_n(t) - f(t)|dt < \varepsilon \qquad \forall \ n \geq N(\varepsilon). \end{aligned}$$

Cố định một số nguyên dương k, ta tìm được một số nguyên dương $n \geq \max\{k, N(\varepsilon)\}$. Lúc đó $c_n < c_k$ và

$$\int_a^c |f(t)|dt + \int_{c_k}^b |1 - f(t)|dt \leq \int_a^c |f(t)|dt + \int_{c_n}^b |1 - f(t)|dt < \varepsilon$$

hay

$$\int_a^c |f(t)|dt + \int_{c_k}^b |1 - f(t)|dt < \varepsilon \qquad \forall\ \varepsilon > 0, k \in \boldsymbol{N}$$

hay

$$\int_a^c |f(t)|dt + \int_{c_k}^b |1 - f(t)|dt = 0 < \varepsilon \qquad \forall\ k \in \boldsymbol{N}$$

Như bên trên ta có với mọi số nguyên dương k

$$f(t) = \begin{cases} 0 & a \leq t \leq c, \\ 1 & c_n \leq t \leq b. \end{cases}$$

Từ đó ta có $f(c) = 0$ và $f(c_k) = 1$. Nhưng f liên tục tại c và $\{c_k\}$ hội về c. Ta có mâu thuẩn.

1.3.7i Cho n là một số nguyên ≥ 2, Φ là $\boldsymbol{R}$ hay C, $(E_1, ||.||_1)$, $\cdots$, $(E_n, ||.||_n)$ là n không gian định chuẩn trên Φ. Đặt

$$\begin{aligned} E &= E_1 \times \cdots E_n, \\ x + y &= (x_1 + y_1, \cdots, x_n + y_n) \quad \forall\ x = (x_1, \cdots, x_n), y = (y_1, \cdots, y_n) \in E, \\ \alpha x &= (\alpha x_1, \cdots, \alpha x_n) \quad \forall\ \alpha \in \Phi, x = (x_1, \cdots, x_n) \in E, \\ ||x|| &= ||x_1||_1 + \cdots + ||x_n||_n \quad \forall\ x = (x_1, \cdots, x_n) \in E. \end{aligned}$$

Chứng minh E là một không gian vectơ định chuẩn trên Φ.

Giải

Ta dùng qui nạp toán học. Xét trường hợp $n = 2$. Cho $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$, $z = (z_1, z_2)$ trong $E = E_1 \times E_2$ và α trong Φ. Ta có

$$x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2) = (y_1 + x_1, y_2 + x_2) = y + x.$$

$$x + (y + z) = (x_1 + (y_1 + z_1), x_2 + (y_2 + z_2)) = ((x_1 + y_1) + z_1, (x_2 + y_2) + z_2) = (x + y) + z.$$

Cho 0_1 và 0_2 là các vectơ không trong E_1 và E_2. Đặt $0 = (0_1, 0_2)$, ta có

$$x + 0 = (x_1 + 0_1, x_2 + 0_2) = (x_1, x_2) = x \ \ \forall\ x = (x_1, x_2) \in E.$$