Modelo

Depredador - Presa Lotka - Volterra

Linces y Liebres

Laura Mariana Jiménez
Paula Valentina Sanchez
Sebastián Gutiérrez

Contenido

Modelo Depredador-Presa de Lotka-Volterra

Modelo biomatemático que busca responder la dinámica de las poblaciones de presa y depredador bajo hipótesis:

- Ecosistema aislado
- La población de presas en ausencia de depredadores crece de manera exponencial
- La población de depredadores en ausencia de presas decrece de manera exponencial.
- La población de depredadores afecta a la de presas haciéndola decrecer
- La población de presas afecta a la de depredadores

[1]

Modelo Depredador-Presa de Lotka-Volterra

Sistema de dos ecuaciones diferenciales de primer orden, acopladas, autónomas y no lineales

$$\frac{dx}{dt} = \alpha x - \beta xy$$
$$\frac{dy}{dt} = -\gamma y + \delta yx$$

X = número de presas
Y = número de depredadores

Parámetros:

α Tasa de natalidad de las presas

β Tasa de muerte de las presas debido a los depredadores

γ Tasa de éxito de caza

δ Tasa de mortalidad del depredador

[1]

Metodología

Dinámica de poblaciones con dos especies:

Enfoque biológico: Relación **++** (mutualismo) **--** (competencia) o **00** (neutra)

Enfoque matemático: Siendo $P(t)$ el tamaño de la población en el instante t, el modelo exponencial presupone que la tasa de aumento de la población es proporcional a la población en ese instante, donde k es una constante de proporcionalidad:

$$\frac{dP}{dt} = kP(t)$$

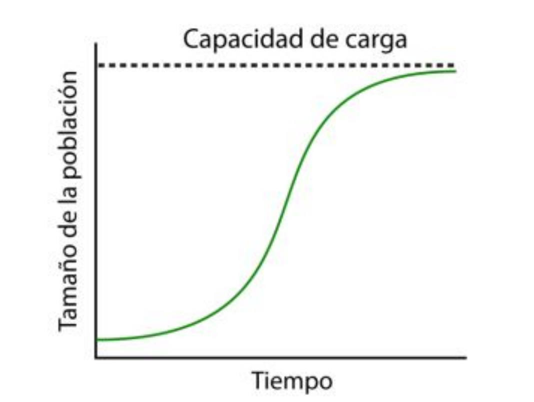
Ecuación conocida como ***ecuación malthusiana.***
Adecuada cuando el tamaño de la población es pequeño en relación a dimensiones del ecosistema

[2]

Metodología

Modelo logístico:

Este modelo es adecuado para describir el crecimiento de una población de personas tanto como el de bacterias en un cultivo o la forma en que se propaga una epidemia



Donde r es la tasa de crecimiento de la población y K la capacidad de carga del entorno, es decir, la cantidad máxima de población que es capaz de sostener el entorno de forma indefinida.

$$\frac{dP}{dt} = r\,P\left(1 - \frac{P}{K}\right)$$

[2]

Metodología

Modelo logístico:

Modelo que busca obtener estabilidad en la población a medida que pasa el tiempo disminuyendo la oscilación hasta llegar a una función lo más constante posible..

Ecuaciones para el análisis en R

```
MuertesPorDepredacion    <- beta  * Presas * Depredador
NatalidadPresas    <- alpha * Presas * (1 - Presas/K)
MuertesDepredador <- delta * Depredador
dPresas          <- NatalidadPresas - MuertesPorDepredacion
dDepredador      <- MuertesPorDepredacion * gamma - MuertesDepredador
```

[3]

Metodología

Descripción del ecosistema

- Linces como depredadores
- Liebres como presas
- Linces solo se alimentan de liebres (96%)
- Ecosistema cerrado con solo la interacción de estas dos especies
- Variable de carga sobre la presa

[2]

Metodología

Métodos numéricos utilizados para resolver las ecuaciones diferenciales

- Adams Bashforth
- Runge kutta grado 4

Valores iniciales:

α 1.0 **β** 0.2 ***K*** 50 ***Cantidad presas*** 30 ***Tiempo*** 200 días

γ 0.5 **δ** 0.2 ***Cantidad depredadores*** 4

Prueba 1:

α 2.0

Prueba 2:

δ 0.6

[2]

Simulaciones numéricas

Método Runge Kutta grado 4

- Desarrollado en 1900 por Carl David Tolmé Runge y Martin Wilhelm Kutta.
- Miembro de la familia del método Runge Kutta conocido como RK4.
- Convergencia de O(h^4)

- Cálculo de cada pendiente k_i

$$\begin{cases} k_1 & = f\left(x_i, y_i\right) \\ k_2 & = f\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_1 h\right) \\ k_3 & = f\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_2 h\right) \\ k_4 & = f\left(x_i + h, y_i + k_3 h\right) \end{cases}$$

- Problema de valor inicial:

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0$$

- Ecuación del método RK4:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}h\left(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4\right)$$

[4]

Simulaciones numéricas

Método Adams Bashforth

- Método multipasos (combinación lineal de pasos anteriores)
- Método explícito
- Por John Couch Adams y Francis Bashforth

- Primer paso con método de Euler

$$y_{n+1} = y_n + hf(t_n, y_n)$$

- Pasos 2 a 5:

$$y_{n+2} = y_{n+1} + h\left(\frac{3}{2}f(t_{n+1}, y_{n+1}) - \frac{1}{2}f(t_n, y_n)\right),$$

$$y_{n+3} = y_{n+2} + h\left(\frac{23}{12}f(t_{n+2}, y_{n+2}) - \frac{4}{3}f(t_{n+1}, y_{n+1}) + \frac{5}{12}f(t_n, y_n)\right),$$

$$y_{n+4} = y_{n+3} + h\left(\frac{55}{24}f(t_{n+3}, y_{n+3}) - \frac{59}{24}f(t_{n+2}, y_{n+2}) + \frac{37}{24}f(t_{n+1}, y_{n+1}) - \frac{3}{8}f(t_n, y_n)\right),$$

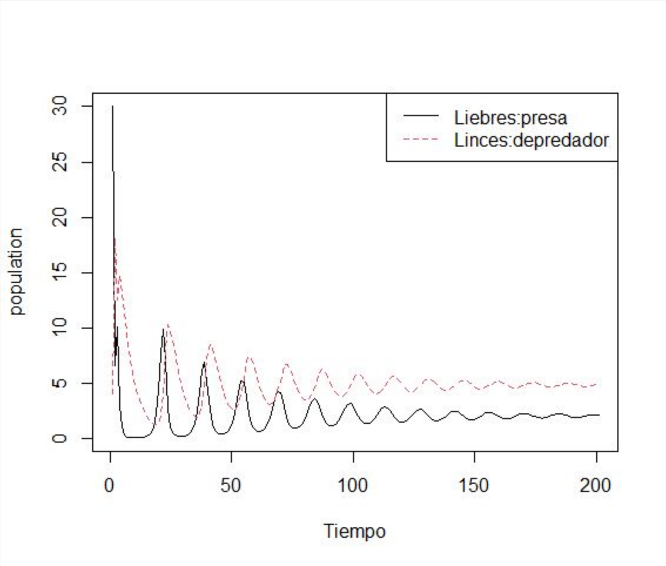
$$y_{n+5} = y_{n+4} + h\left(\frac{1901}{720}f(t_{n+4}, y_{n+4}) - \frac{1387}{360}f(t_{n+3}, y_{n+3}) + \frac{109}{30}f(t_{n+2}, y_{n+2}) - \frac{637}{360}f(t_{n+1}, y_{n+1}) + \frac{251}{720}f(t_n, y_n)\right)$$

[4]

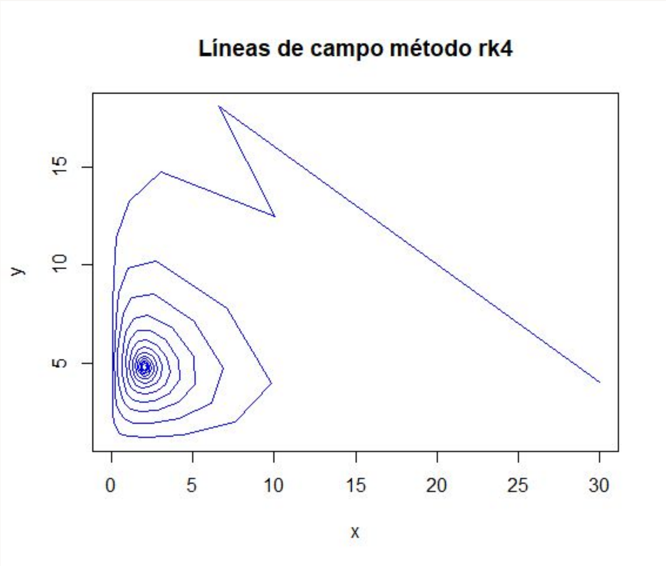
Resultados

Método Runge Kutta grado 4

Tiempo vs. Población



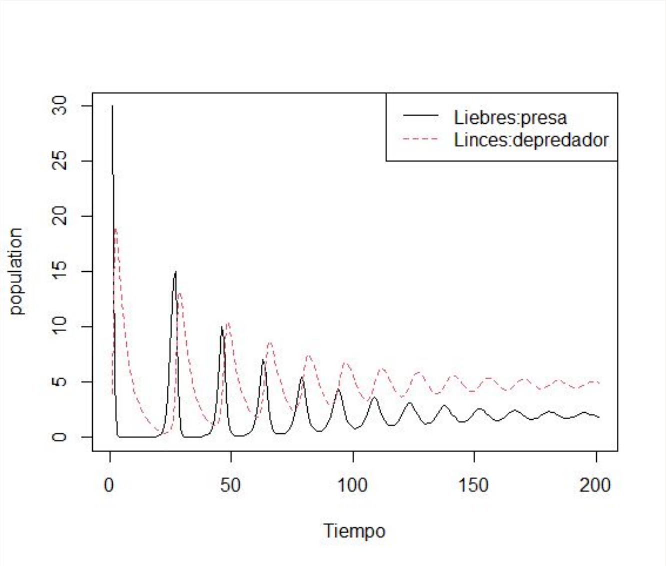
Líneas de campo



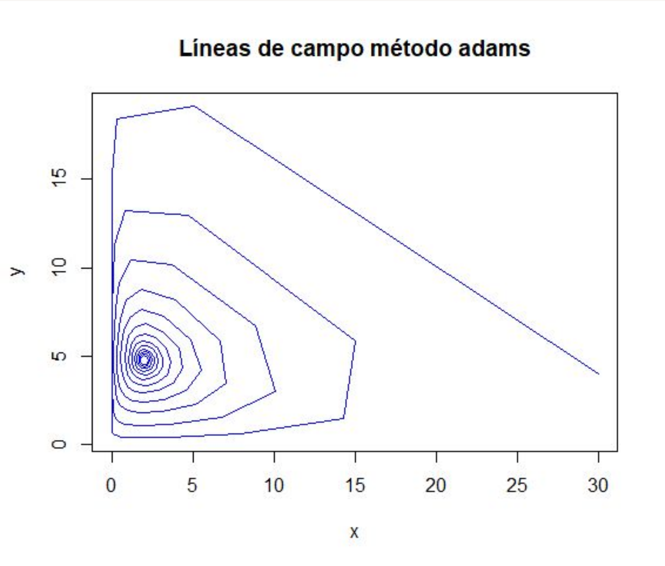
Resultados

Método Adams Bashforth

Tiempo vs. Población



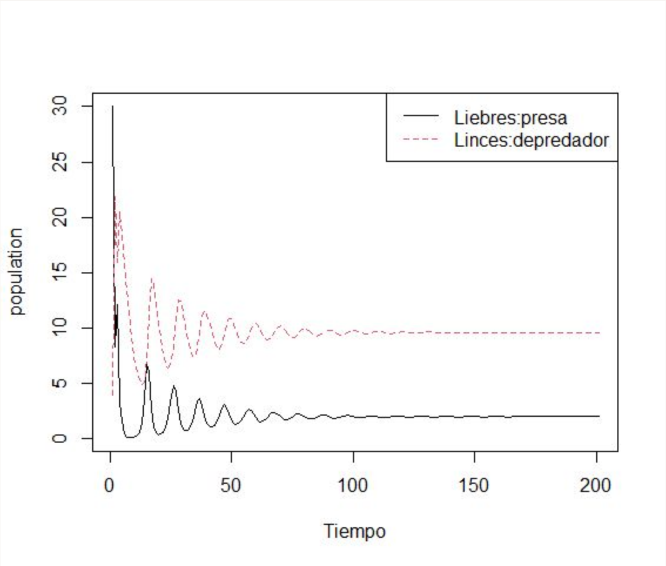
Líneas de campo



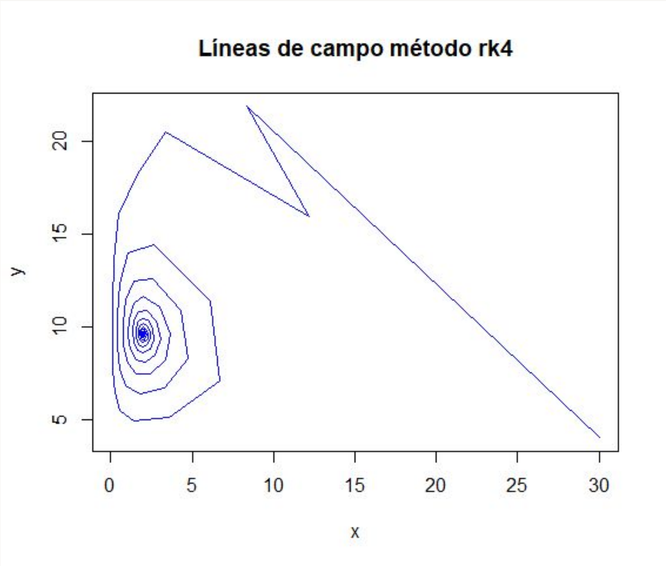
Comportamiento e influencia de la entrada de datos

Método Runge Kutta grado 4 duplicando la tasa de natalidad de las presas

Tiempo vs. Población



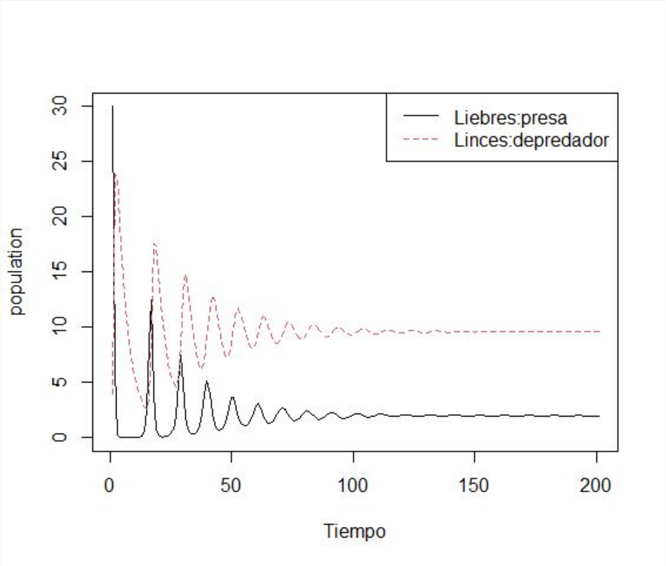
Líneas de campo



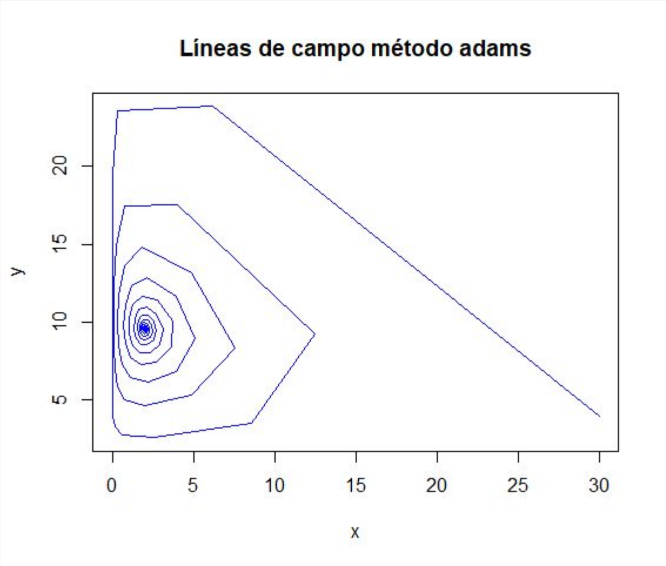
Comportamiento e influencia de la entrada de datos

Método Adams Bashforth duplicando la tasa de natalidad de las presas

Tiempo vs. Población



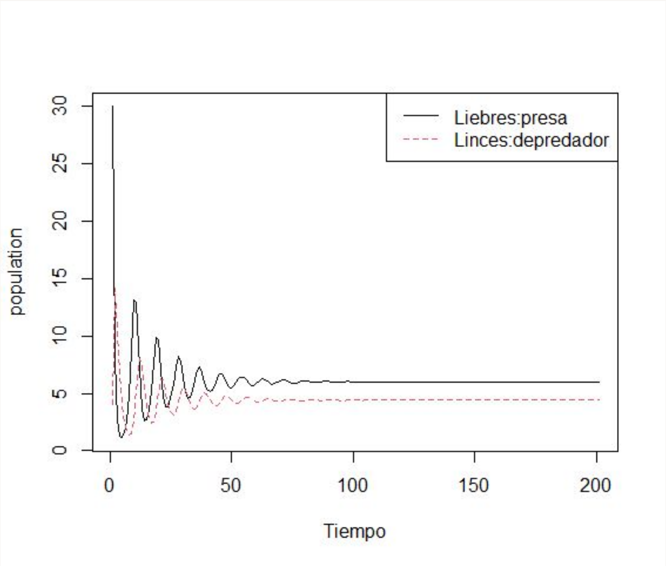
Líneas de campo



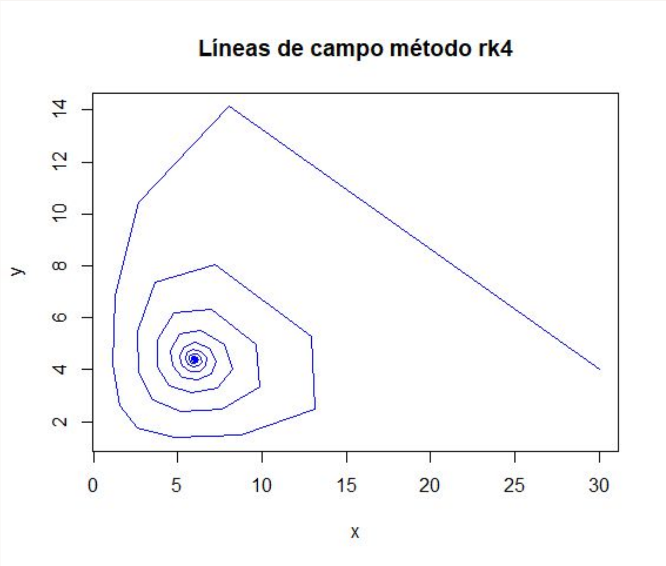
Comportamiento e influencia de la entrada de datos

Método Runge Kutta grado 4 aumentando a 0.6 la tasa de mortalidad de los depredadores

Tiempo vs. Población



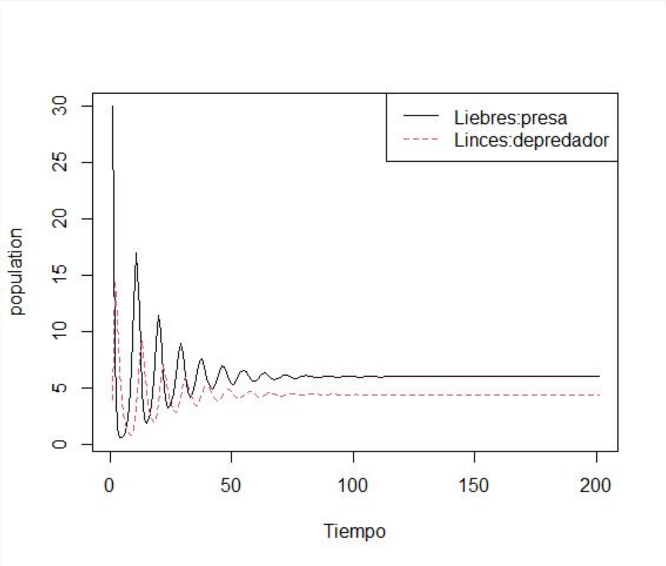
Líneas de campo



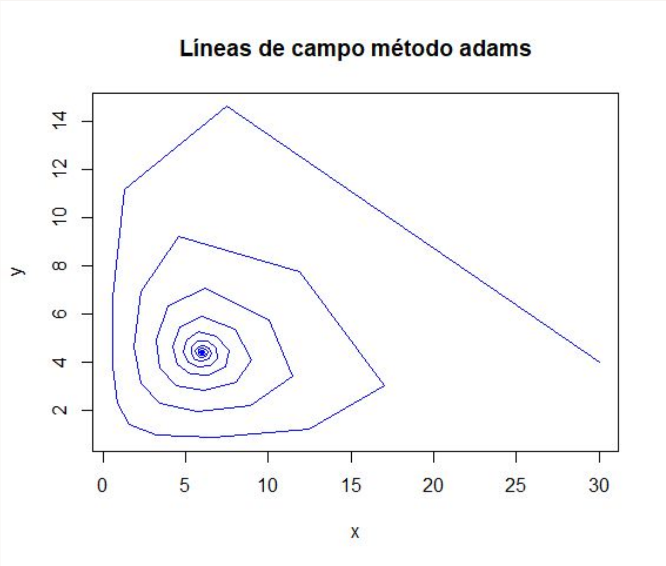
Comportamiento e influencia de la entrada de datos

Método Adams Bashforth aumentando a 0.6 la tasa de mortalidad de los depredadores

Tiempo vs. Población



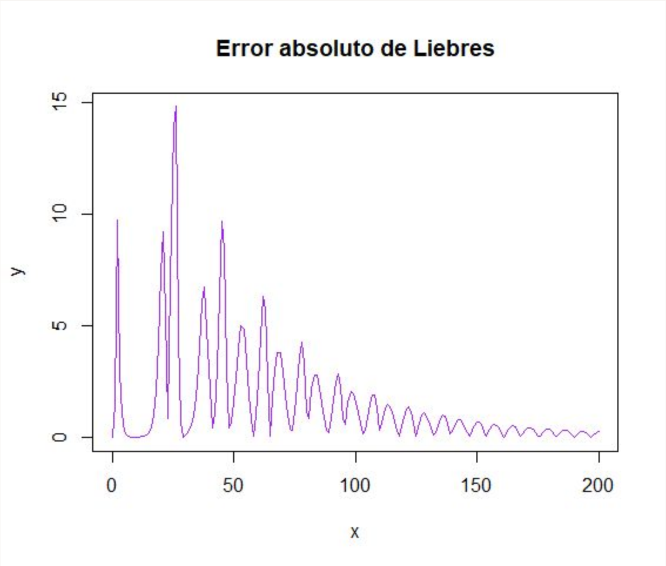
Líneas de campo



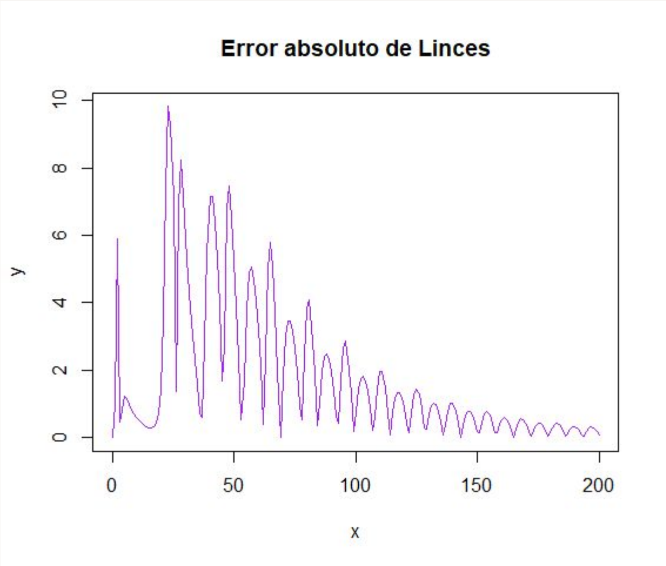
Errores entre métodos

Gráfica de error absoluto a lo largo del tiempo

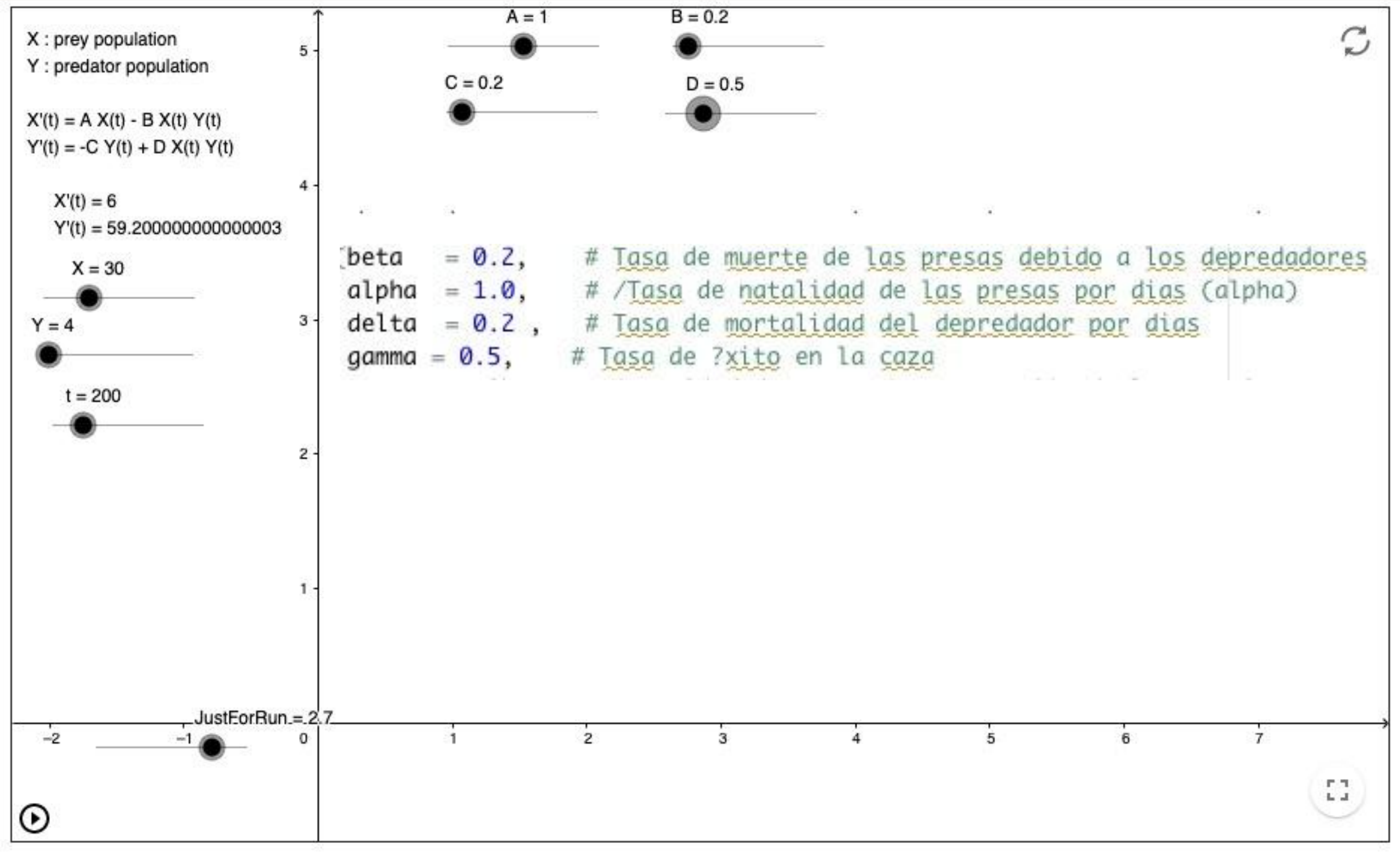
Población de Liebres

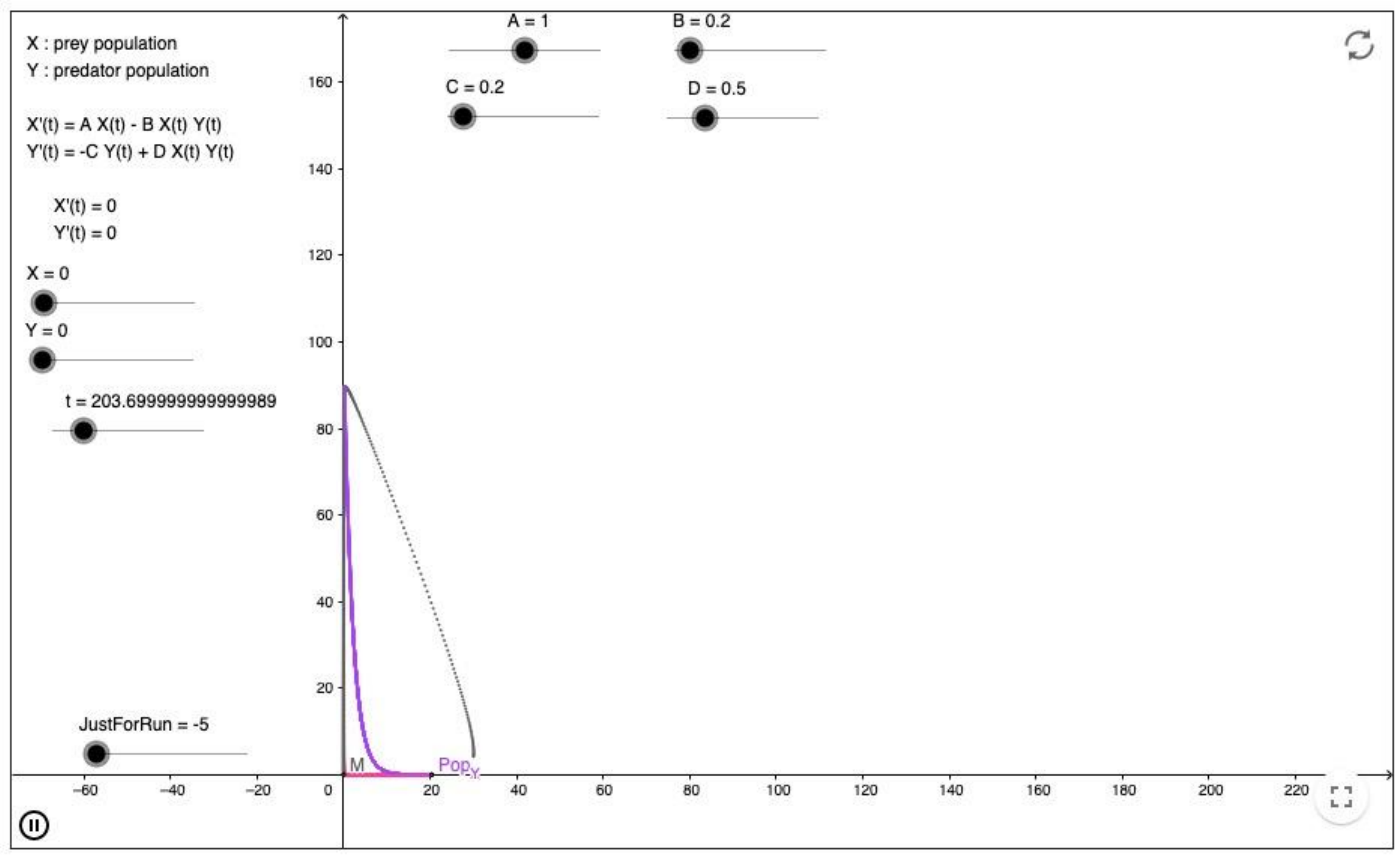


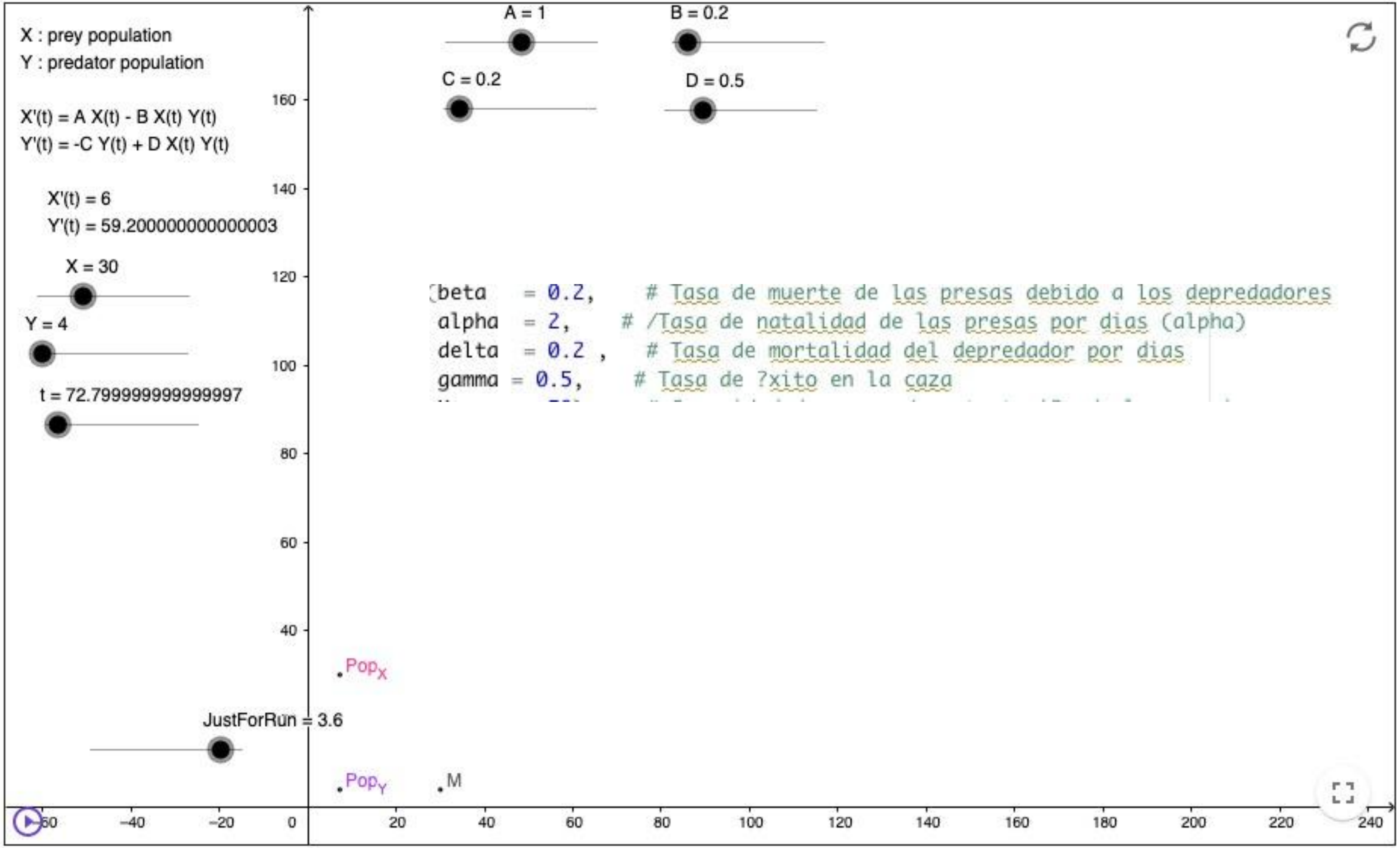
Población de Linces

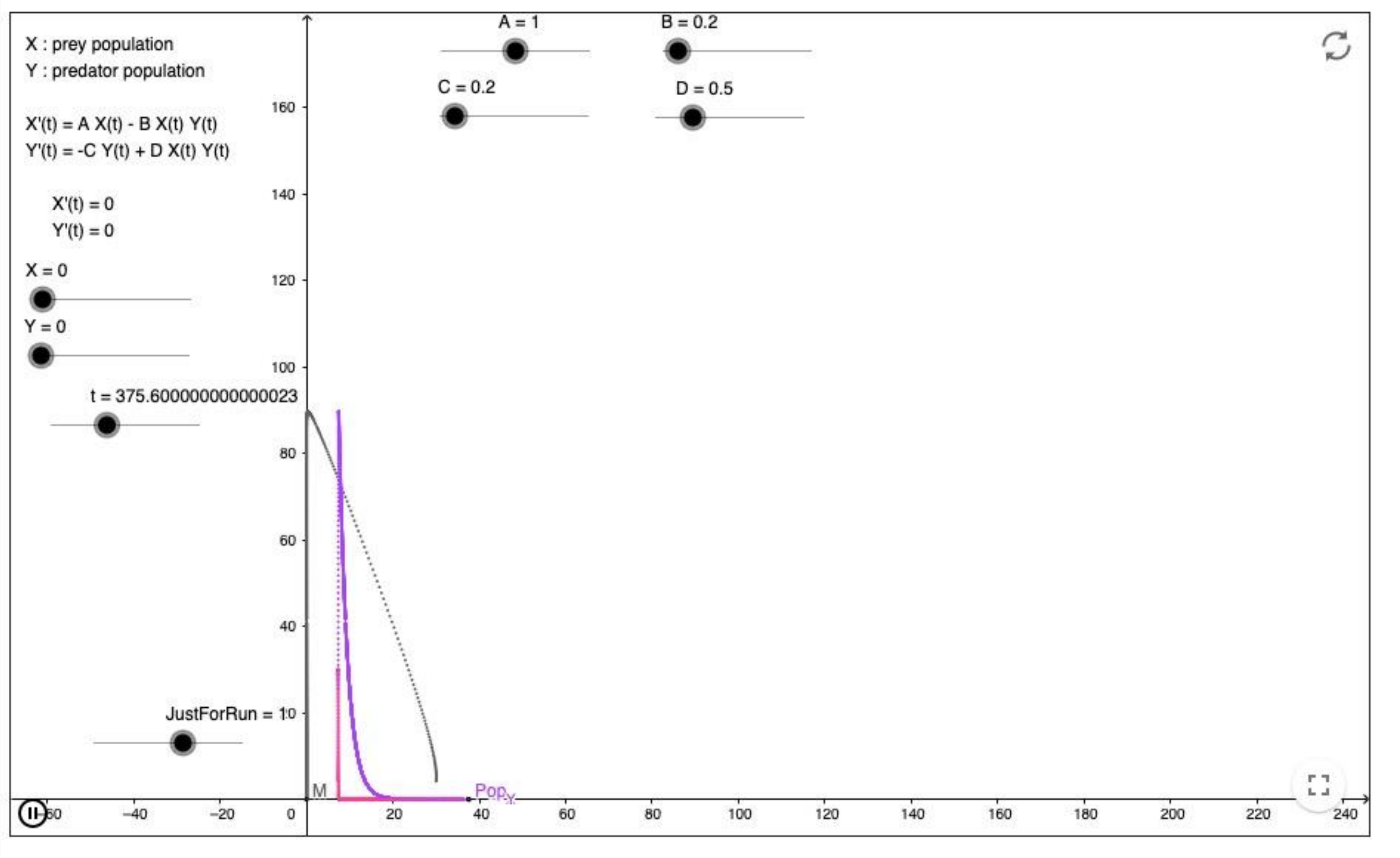


Solución analítica




X : prey population
Y : predator population
X'(t) = A X(t) - B X(t) Y(t)
Y'(t) = -C Y(t) + D X(t) Y(t)
X'(t) = 0
Y'(t) = 0
X = 0
Y = 0
t = 203.699999999999989
JustForRun = -5
A = 1
B = 0.2
C = 0.2
D = 0.5
M
Pop_Y


X : prey population
Y : predator population
X'(t) = A X(t) - B X(t) Y(t)
Y'(t) = -C Y(t) + D X(t) Y(t)
X'(t) = 6
Y'(t) = 59.200000000000003
X = 30
Y = 4
t = 72.799999999999997
JustForRun = 3.6
A = 1
B = 0.2
C = 0.2
D = 0.5
beta = 0.2, # Tasa de muerte de las presas debido a los depredadores
alpha = 2, # /Tasa de natalidad de las presas por dias (alpha)
delta = 0.2 , # Tasa de mortalidad del depredador por dias
gamma = 0.5, # Tasa de ?xito en la caza
Pop_X
Pop_Y
M


X : prey population
Y : predator population
X'(t) = A X(t) - B X(t) Y(t)
Y'(t) = -C Y(t) + D X(t) Y(t)
X'(t) = 0
Y'(t) = 0
X = 0
Y = 0
t = 375.600000000000023
JustForRun = 1
A = 1
B = 0.2
C = 0.2
D = 0.5
M
Pop

Características de HW y SW para la implementación de los modelos

Hardware

- RAM 8 GB
- Procesador Intel Core i5 8va Generación
- Memoria Intel Optane

Software

- Windows 10
- RStudio versión 1.3.1056
- R 4.0.3

Recomendaciones/conclusiones

- La población de presas en ausencia de depredadores crece exponencialmente y decrece en presencia de estos.
- La población de depredadores en ausencia de presas decrece de manera exponencial.
- La tasa de natalidad de las presas es una variable sensible dentro del sistema ya que este varía mucho si se cambia dicha variable.
- Se tienen numerosas herramientas para poder predecir el comportamiento de una o varias poblaciones.

REFERENCIAS

- [1] J. Gutiérrez Expósito, "Lotka-Volterra Prey-Predator model", Licenciatura, Universidad de la Laguna, 2017.
- [2] M. Begon, J. L. Harper y C. R. Townsend (2006). Ecology: From Individuals to Ecosystem (4ª ed.). United States: Blackwell
- [3] Miriam. K. A. Al-Moqbali, Nasser. S. Al-Salti and Ibrahim. M. Elmojtaba, "Prey–Predator Models with Variable Carrying Capacity", Matemathics, pp. 2 - 12, 2018.
- [4] Fathoni, M. F., & Wuryandari, A. I. (2015, December). Comparison between Euler, Heun, Runge-Kutta and Adams-Bashforth-Moulton integration methods in the particle dynamic simulation. In 2015 4th International Conference on Interactive Digital Media (ICIDM) (pp. 1-7)
- [5] LINCE IBÉRICO Y CONEJO: UNA RELACIÓN CLAVE EN LA CONSERVACIÓN DEL LINCE. Iberlinx.com. (2020). Retrieved 24 November 2020, from http://www.iberlinx.com/esp/index.php?option=com_content&view=article&id=8:lince-iberico-e-coelho-bravo-uma-relacao-chave-na-conservacao-do-lince&catid=6:artigo&Itemid=9.
- [6] Á. Sáez, "Ecuaciones de Lotka-Volterra: modelo presa depredador – Pybonacci", *Pybonacci.org*, 2020. [Online]. Available: https://pybonacci.org/2015/01/05/ecuaciones-de-lotka-volterra-modelo-presa-depredador/. [Accessed: 26- Nov- 2020].