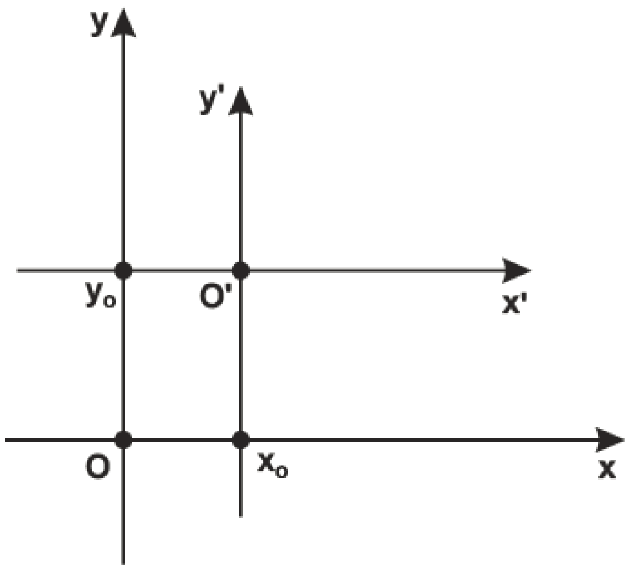
# GAN: Geometria Analítica

## Aula 5: Cônica - Parábola

Professora: Elisandra Bar de Figueiredo

# Translação de eixos

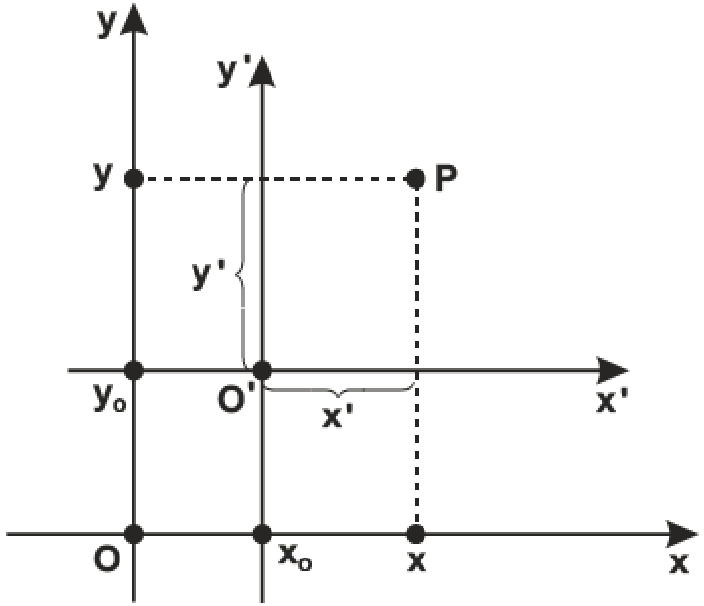
No plano cartesiano $xOy$ considere um ponto $O' = (x_0, y_0)$. Introduza um **novo** sistema $x'O'y'$ tal que $O'$ seja a nova origem e o eixo $O'x'$ tenha a mesma direção e sentido de $Ox$ e $O'y'$ tenha a mesma direção e sentido de $Oy$.




Dizemos que o **novo** sistema $x'O'y'$ foi obtido por uma **translação** do **antigo** sistema $xOy$. Em ambos os sistemas se conservam as unidades de medida.

# Translação de eixos

Um ponto $P$ do plano tem coordenadas $(x, y)$ em relação ao sistema $xOy$ e $(x', y')$ em relação ao sistema $x'O'y'$.




$$\begin{cases} x = x_0 + x' \\ y = y_0 + y' \end{cases}$$

$$\begin{cases} y' = y - y_0 \\ x' = x - x_0 \end{cases}$$

Obtemos facilmente da figura as **fórmulas de translação**: $\begin{cases} x' = x - x_0 \\ y' = y - y_0 \end{cases}$.

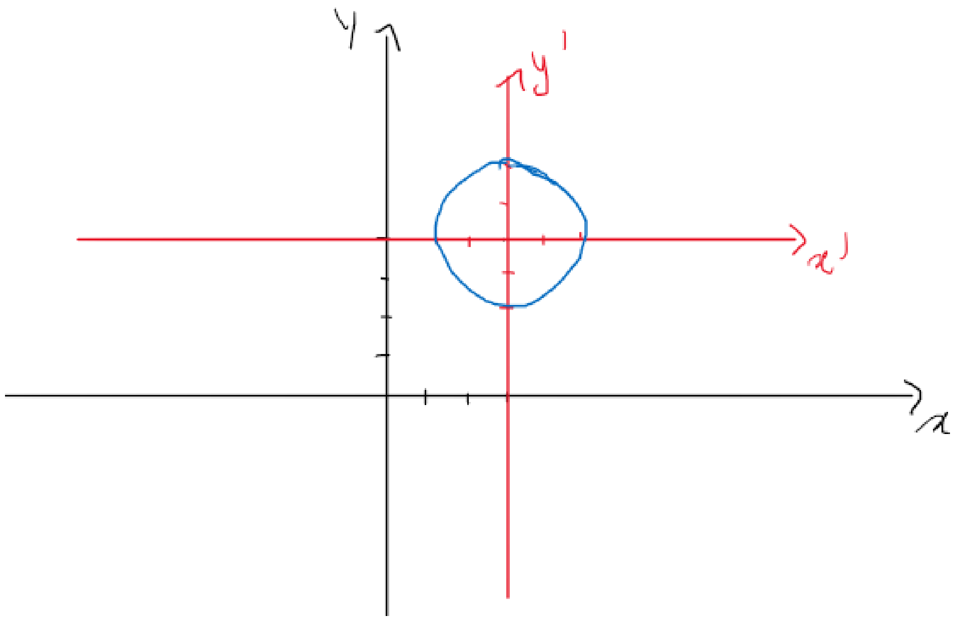
# Translação de eixos

Exemplo 4. A equação de uma circunferência no sistema $x'O'y'$ é dada por $x'^2 + y'^2 = 4$. Se esse sistema foi obtido mediante uma translação de dos eixos $x$ e $y$ de tal forma que $O' = (3,4)$ seja a origem desse novo sistema. Determine a equação dessa circunferência no sistema $xOy$.

Solução:

A equação $x'^2 + y'^2 = 4$, transladada para o ponto $O' = (3,4)$ como origem do sistema, teremos:

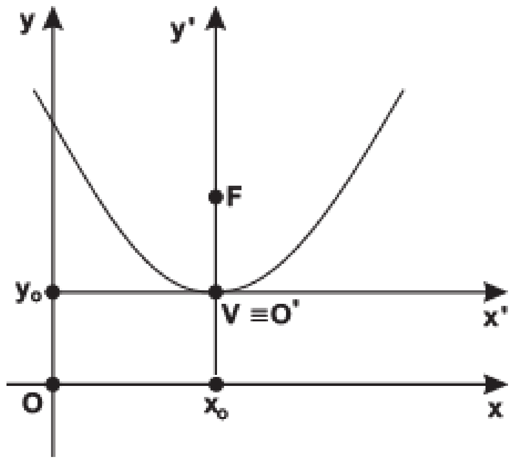
$$(x-3)^2 + (y-4)^2 = 4 \Rightarrow x^2 - 6\text{x} + 9 + y^2 - 8\text{x} + 16 = 4 \Rightarrow x^2 + y^2 - 6x - 8y + 21 = 0.$$



# Equação da parábola com $V(x_0, y_0)$

## Caso 1: eixo de simetria é paralelo ao eixo $y$.

Através de uma translação de eixos, obtemos um novo sistema $x'O'y'$, cuja origem $O'$ coincide com o vértice $V(x_0, y_0)$.




Eixo de simetria: $x = x_0$

$F\left(x_0, y_0 + \frac{p}{2}\right)$

$d: \ y = y_0 - \frac{p}{2}$

A equação dessa parábola no sistema $x'O'y'$ é:

$$x'^2 = 2py',$$

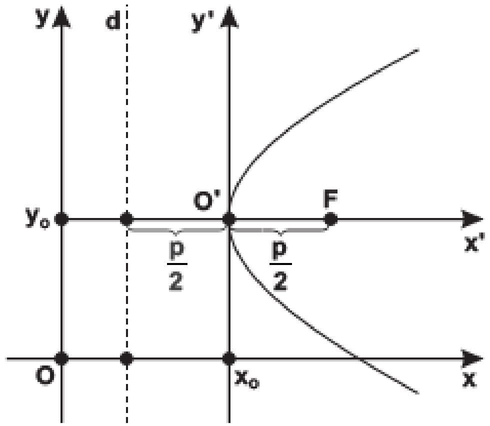
usando as fórmulas de translação temos que $(x - x_0)^2 = 2p(y - y_0)$.

Se a concavidade for para baixo teremos $(x - x_0)^2 = -2p(y - y_0)$.

# Equação da parábola com $V(x_0, y_0)$

Caso 2: eixo de simetria é paralelo ao eixo $x$.

Através de uma translação de eixos, obtemos um novo sistema $x'O'y'$, cuja origem $O'$ coincide com o vértice $V(x_0, y_0)$.




Eixo: $e: y = y_0$

$F\left(x_0 + \frac{p}{2}, y_0\right)$

$d: x = x_0 - \frac{p}{2}$

A equação dessa parábola no novo sistema $x'O'y'$ é:

$$y'^2 = 2px',$$

usando as fórmulas de translação temos que $(y - y_0)^2 = 2p(x - x_0)$.

Se a concavidade for para esquerda teremos $(y - y_0)^2 = -2p(x - x_0)$.

# Equação da parábola com $V(x_0, y_0)$

Exemplo 5: Determine a equação padrão da parábola e identifique seus elementos:

$a)\quad x^2 - 6x - 4y + 17 = 0$

Solução: temos que completar quadrados para determinar o vértice da parábola e o valor de $p$.

$$(x^2 - 6x) = 4y - 17 \Rightarrow (x^2 - 6x + 9 - 9) = 4y - 17 \Rightarrow (x-3)^2 = 4y - 8 \Rightarrow (x-3)^2 = 2 \cdot 2(y-2)$$

O vértice da parábola é $V(3,2)$ e ela tem concavidade para cima.

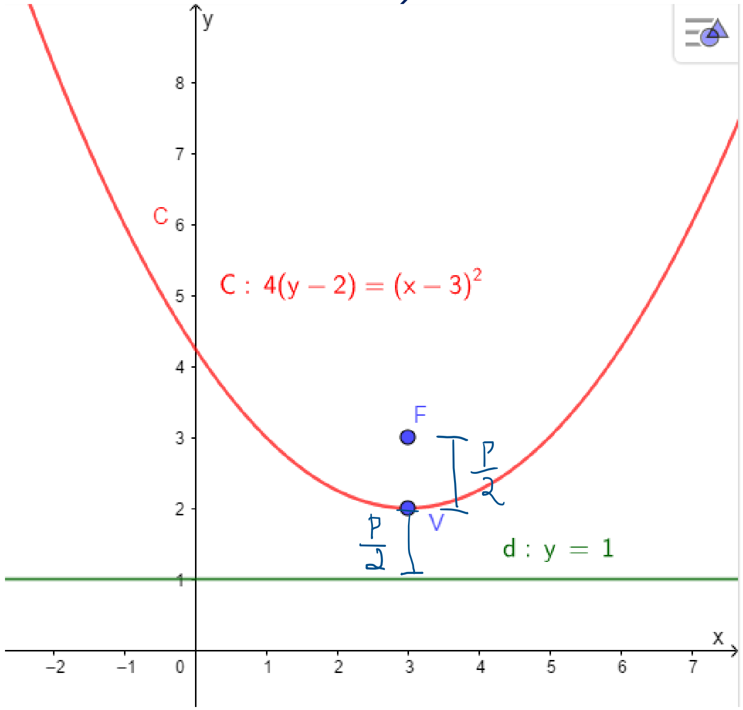
A distância do vértice ao foco é igual a distância do vértice a reta diretriz e é $\frac{p}{2}$. Como $p = 2$, segue que:

Vértice: $V(3,2)$;

Foco: $F(3,3)$;

Diretriz $d$: $y = 1$;

Eixo de simetria: $e$: $x = 3$.



# Equação da parábola com $V(x_0, y_0)$

Exemplo 5: Determine a equação padrão da parábola e identifique seus elementos:

b) $y^2 + 6y - 8x + 1 = 0$

Solução: temos que completar quadrados para determinar o vértice da parábola e o valor de $p$.

$$(y^2+6y) = 8x - 1 \Rightarrow (y^2+6y + 9 - 9) = 8x - 1 \Rightarrow (y + 3)^2 = 8x + 8 \Rightarrow (y + 3)^2 = 2 \cdot 4(x + 1)$$

O vértice da parábola é $V(-1, -3)$ e ela tem concavidade para direita.

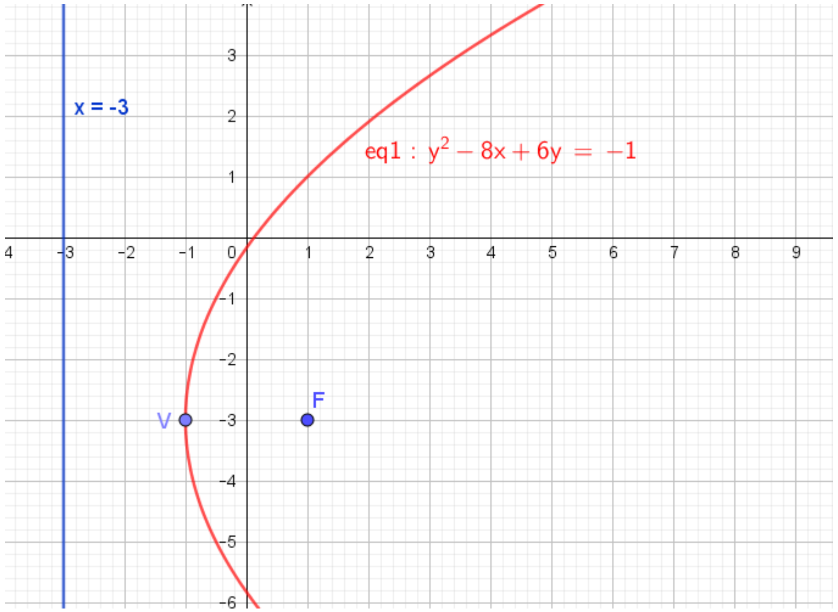
A distância do vértice ao foco é igual a distância do vértice a reta diretriz e é $\frac{p}{2}$. Como $p = 4$, segue que:

Vértice: $V(-1, -3)$;

Foco: $F(1, -3)$;

Diretriz $d: x = -3$;

Eixo de simetria: $e: y = -3$.



# Equação da parábola com $V(x_0, y_0)$

Exemplo 5: Determine a equação padrão da parábola e identifique seus elementos:

c) $y = 4x - x^2$

Solução: temos que completar quadrados para determinar o vértice da parábola e o valor de $p$.

$$-(x^2 - 4x) = y \Rightarrow (x^2 - 4x + 4 - 4) = -y \Rightarrow (x-2)^2 = -y + 4 \Rightarrow (x-2)^2 = -2 \cdot \frac{1}{2}(y-4)$$

O vértice da parábola é $V(2,4)$ e ela tem concavidade para cima.

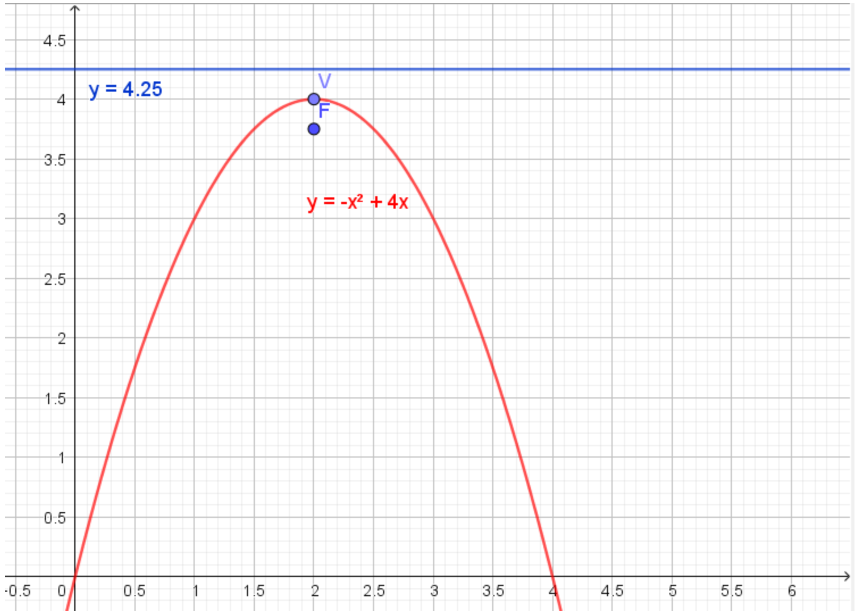
A distância do vértice ao foco é igual a distância do vértice a reta diretriz e é $\frac{p}{2}$. Como $p = \frac{1}{2}$, segue que:

Vértice: $V(2,4)$;

Foco: $F(2,3.75)$;

Diretriz $d$: $y \ = 4.25$;

Eixo de simetria: $e$: $x = 2$.



# Equação da parábola com $V(x_0, y_0)$

UDESC

Exemplo 5: Determine a equação padrão da parábola e identifique seus elementos:

d) $x + \frac{3y^2}{4} - 9y = 0$

Solução: temos que completar quadrados para determinar o vértice da parábola e o valor de $p$.

$$x + \frac{3y^2}{4} - 9y = 0 \Rightarrow \frac{3}{4}(y^2 - 12y) = -x \Rightarrow \frac{3}{4}(y^2 - 12y + 36 - 36) = -x \Rightarrow \frac{3}{4}(y-6)^2 = -x + 27 \Rightarrow (y-6)^2 = -\frac{4}{3}x + 36$$

$$\Rightarrow (y-6)^2 = -2 \cdot \frac{2}{3}(x - 27).$$

O vértice da parábola é $V(27,6)$ e ela tem concavidade para esquerda.

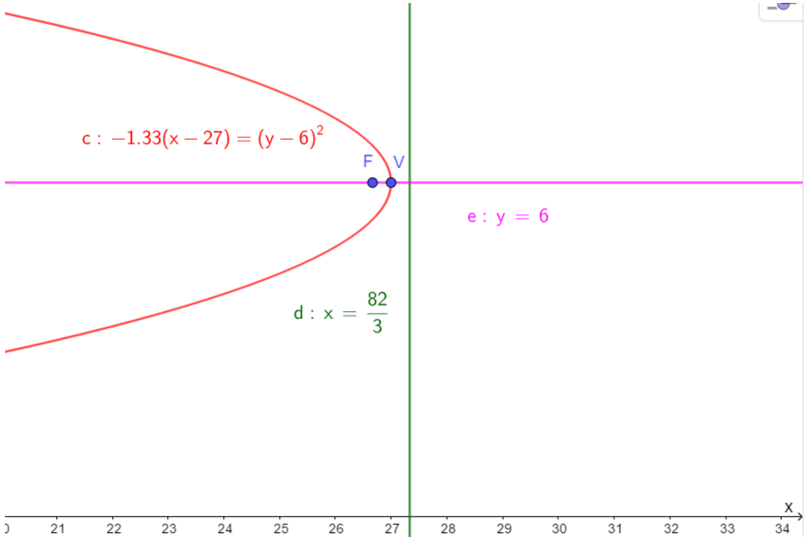
A distância do vértice ao foco é igual a distância do vértice a reta diretriz e é $\frac{p}{2}$. Como $p = \frac{2}{3}$, segue que:

Vértice: $V(27,6)$;

Foco: $F\left(\frac{80}{3}, 6\right)$;

Diretriz $d$: $x = \frac{82}{3}$;

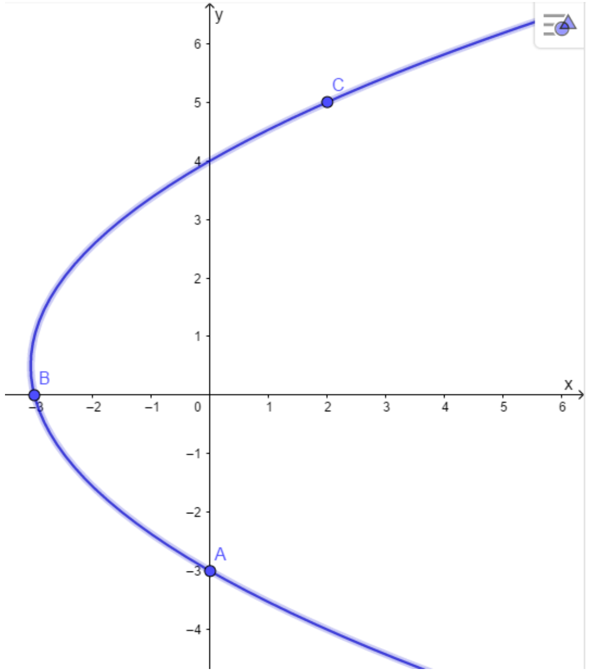
Eixo de simetria: $e: y = 6$.

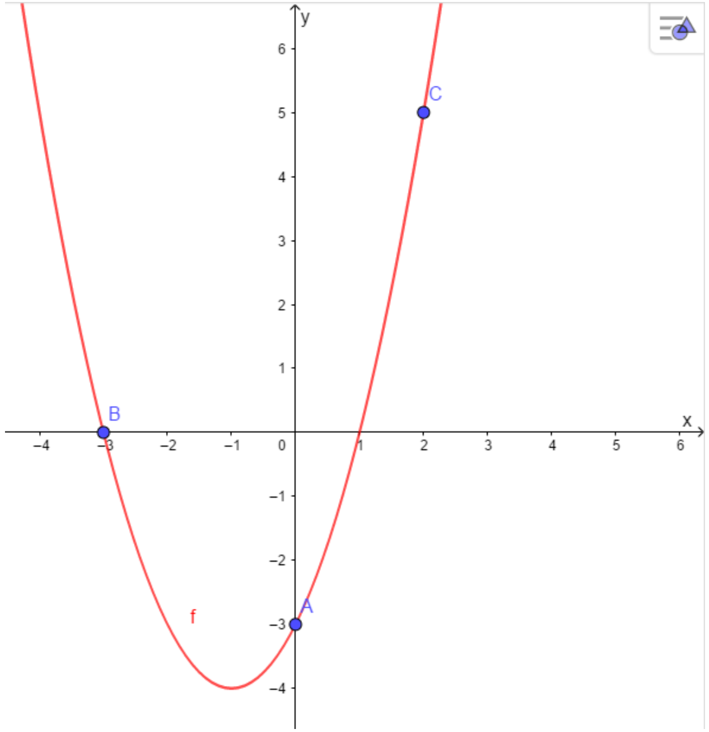


# Equação da parábola com $V(x_0, y_0)$

Exemplo 6: Determine a(s) equação(ões) da(s) parábola(s) que contém os pontos $A(0,-3), B(-3,0)$ e $C(2,5)$.

Solução: Dica: como temos 3 pontos, é possível montar um sistema linear para cada tipo de parábola: $y = ax^2 + bx + c$ e $x = ay^2 + by + c$.



# Equação da parábola com $V(x_0, y_0)$

Exemplo 6: Determine a(s) equação(ões) da(s) parábola(s) que contém os pontos $A(0,-3), B(-3,0)$ e $C(2,5)$.

Solução: como temos 3 pontos, é possível montar um sistema linear para cada tipo de parábola.

Em primeiro lugar, resolveremos as equações do tipo $y = ax^2 + bx + c$, substituindo os valores dos pontos em $x$ e $y$:

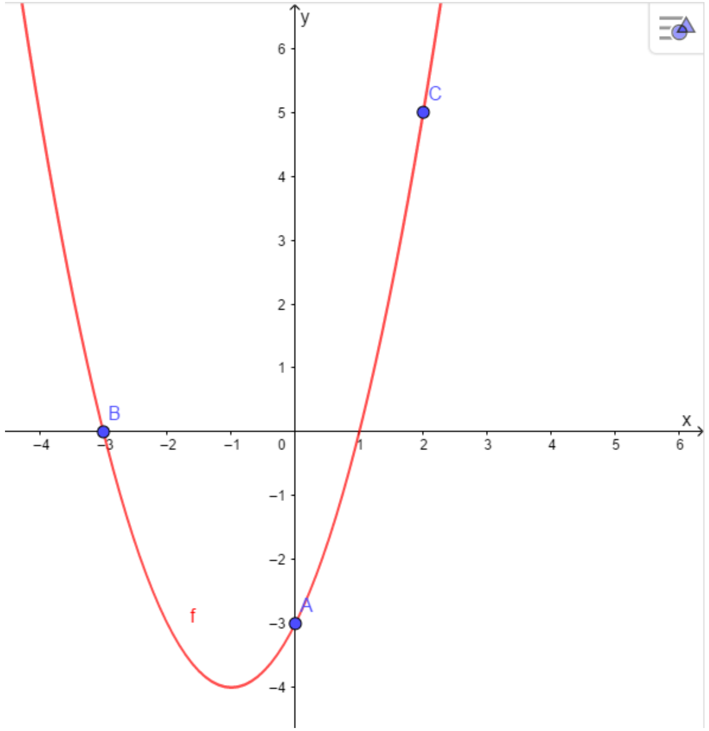
Ponto A: $-3 = a.0 + b.0 + c$

Ponto B: $0 = a.(-3)^2 + b.(-3) + c$

Ponto C: $5 = a.(2)^2 + b.(2) + c$

Assim, temos o sistema:

$$\begin{cases} c = -3 \\ 9a - 3b + c = 0 \\ 4a + 2b + c = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = -3 \\ a = 1 \\ b = 2 \end{cases} \Rightarrow y = x^2 + 2x - 3$$



# Equação da parábola com $V(x_0, y_0)$

Exemplo 6: Determine a(s) equação(ões) da(s) parábola(s) que contém os pontos $A(0,-3), B(-3,0)$ e $C(2,5)$.

Solução: agora resolveremos as equações do tipo $x = ay^2 + by + c$, substituindo os valores dos pontos em $x$ e $y$:

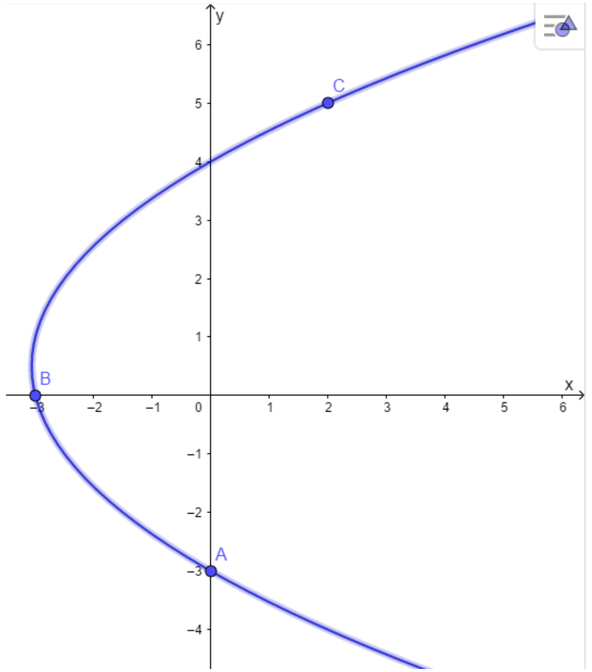
Ponto A: $0 = a.(-3)^2 + b.(-3) + c$

Ponto B: $-3 = a.0 + b.0 + c$

Ponto C: $2 = a.(5)^2 + b.(5) + c$

Assim, temos o sistema:

$$\begin{cases} 9a - 3b + c = 0 \\ c = -3 \\ 25a + 5b + c = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = -3 \\ a = \frac{1}{4} \\ b = -\frac{1}{4} \end{cases} \Rightarrow x = \frac{y^2}{4} - \frac{y}{4} - 3$$



# Tarefa

Exercícios 1 ao 8 da Lista 2.

Exercícios do Capítulo de Parábola do Steinbruch

Exercícios do Capítulo de Parábola do Venturi

# Bibliografia


BEZERRA, L. H.; COSTA E SILVA, I.P. **Geometria analítica**. 2. ed. – Florianópolis: UFSC/EAD/CED/CFM, 2010. Disponível em http://mtmgrad.paginas.ufsc.br/files/2014/04/Geometria-Anal%C3%ADtica.pdf. Acesso 12/02/2020.

DELGADO, Jorge; FRENSEL, Katia; CRISSAFF, Lhaylla. **Geometria analítica**. Rio de Janeiro: SBM, 2013. (Coleção PROFMAT).

GLOBO.COM. **Prédio reflete luz do sol e jornalista frita ovo na calçada em Londres**. 2013. Disponível em: <http://g1.globo.com/jornal-nacional/noticia/2013/09/predio-reflete-luz-do-sol-e-jornalista-frita-ovo-na-calcada-em-londres.html>. Acesso em: 03 mar 2020.

NICOLLETTI, Larissa Parizotto. **Cone de Apolônio**: História, Matemática e Material Concreto. 2017. TCC (Graduação)-Universidade do Estado de Santa Catarina, Curso de Licenciatura de Matemática, Joinville, 2017.

SILVA FILHO, L. E. **Cônicas**: apreciando uma obra prima da matemática. 2015. 141p. Dissertação - (mestrado) - Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, 2015.Disponível em: <https://goo.gl/5hr0s8>. Acesso em: 04 maio 2017.

SIQUEIRA, P. H.; COSTA, A. M. **Cônicas**. 2. ed. 2012. Material Didático. Disponível em: <https://goo.gl/QbK6et>. Acesso em: 08 jun. 2017.

STEINBRUCH, A.; WINTERLE, P. **Geometria analítica**. 2. ed. São Paulo: Pearson Makron Books, 1987.

VENTURI, J. J. **Cônicas e quádricas**. 5. ed. Curitiba: Unificado, 2003.

WIKIMEDIA COMMONS. **Archimedes Heat Ray conceptual diagram**. 2007. Disponível em: <https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Archimedes_Heat_Ray_conceptual_diagram.png. Acesso em: 09 jul 2018.

OBRIGADA!