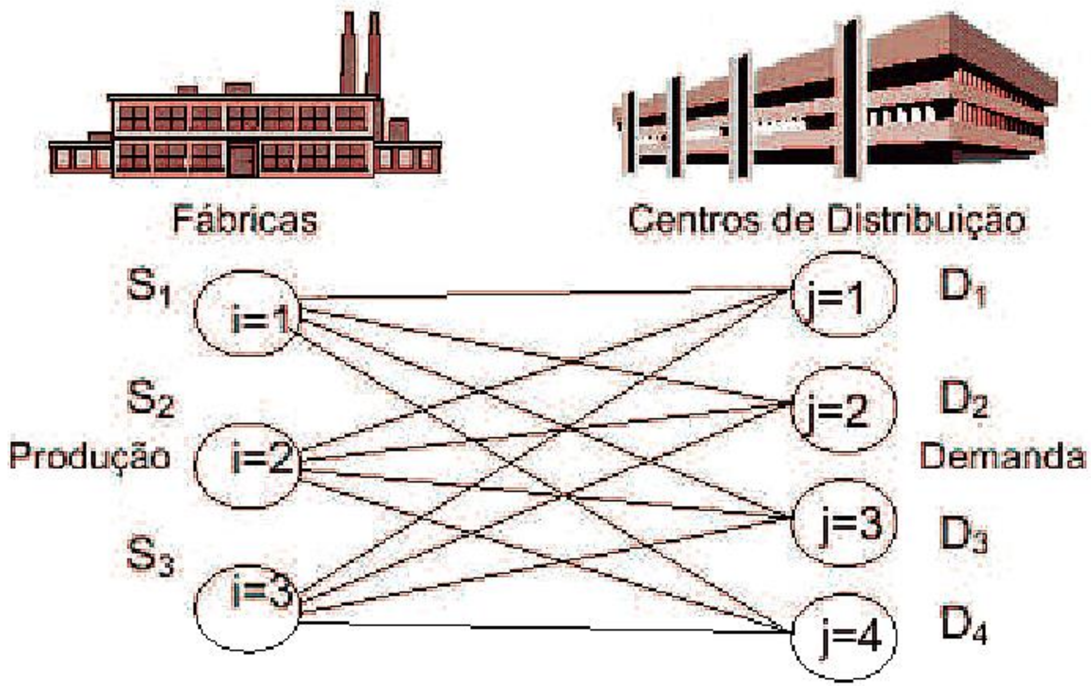
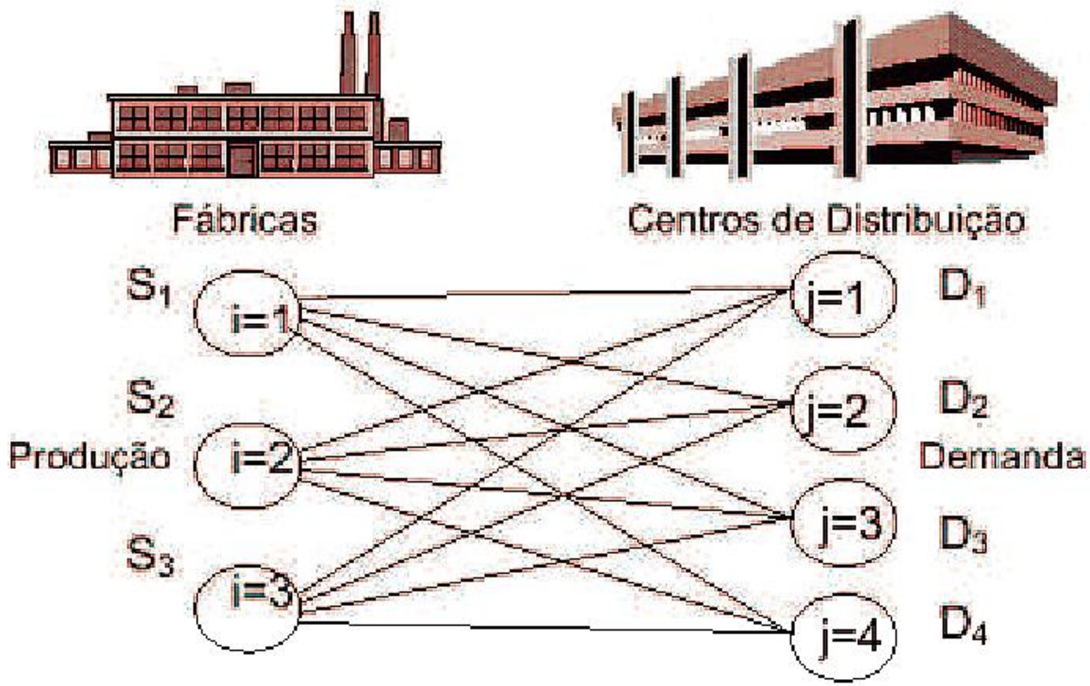
Métodos de Transporte



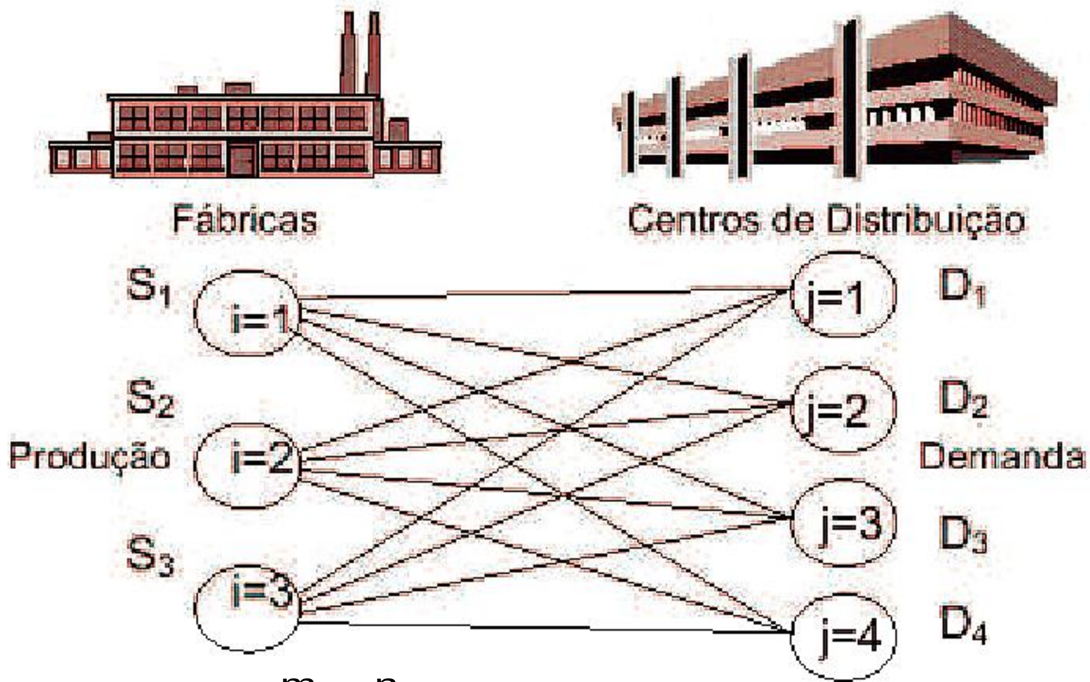
- PROBLEMA CLÁSSICO DE TRANSPORTE
  – Seleção de rotas de transporte de modo a distribuir a produção de diversas fábricas a vários depósitos ou pontos de consumo.
- Há **m** pontos de fornecimento com produtos a serem remetidos para **n** pontos de demanda.

Métodos de Transporte



- A fábrica **i** pode remeter no máximo S_i itens
- O cliente **j** necessita pelo menos D_j itens
- O custo de remeter cada unidade de **i** para **j** é C_{ij}.
- O objetivo é escolher um conjunto de rotas que minimize os custos totais de transporte atendendo as capacidades de produção e as necessidades da demanda.

Métodos de Transporte



- Objetivo: min z= $\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} CijXij$
- Para cada fornecedor **i** (origem): $\sum_{j=1}^{n} Xij \leq Si$
- Para cada cliente **j** (destino): $\sum_{i=1}^{m} Xij \geq Dj$
- E $Xij \geq 0$

Métodos de Transporte

Assim:

$\min z = c_{11}x_{11} + c_{12}x_{12} + \ldots + c_{1n}x_{1n} + c_{21}x_{21} + c_{22}x_{22} + \ldots + c_{2n}x_{2n} + \ldots + c_{m1}x_{m1} + c_{m2}x_{m2} + \ldots + c_{mn}x_{mn}$

S.A.

$x_{11} + x_{12} + \ldots + x_{1n} \leq s_1$ (fornecimento)

$x_{21} + x_{22} + \ldots + x_{2n} \leq s_2$

...

$x_{m1} + x_{m2} + \ldots + x_{mn} \leq s_m$

$x_{11} + x_{21} + \ldots + x_{m1} \geq d_1$ (demanda)

$x_{12} + x_{22} + \ldots + x_{m2} \geq d_2$

...

$x_{1n} + x_{2n} + \ldots + x_{mn} \geq d_n$

$x_{ij} \geq 0$

Métodos de Transporte

- Solução:
  - A seguinte condição precisa ser satisfeita:

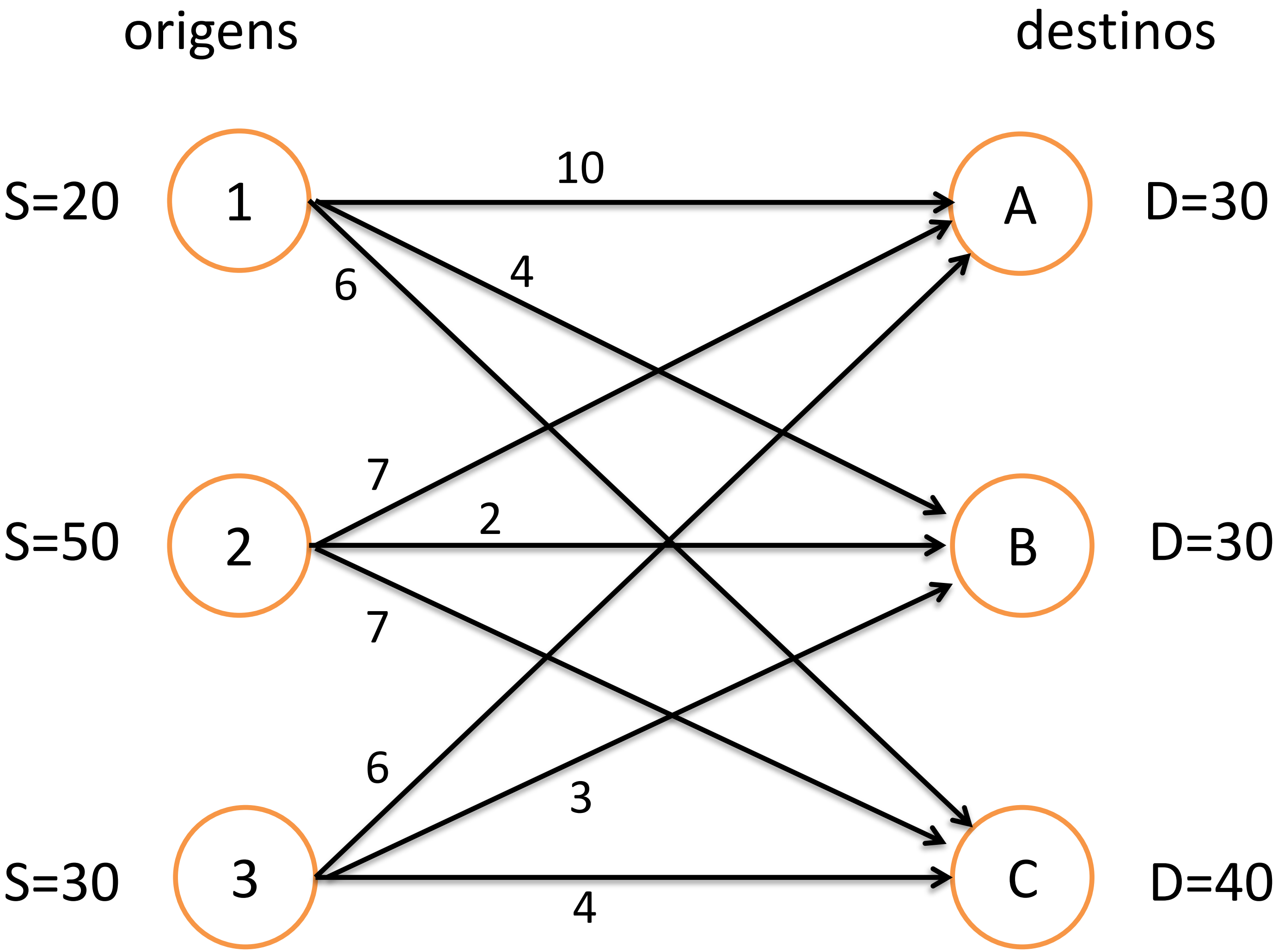
$$\sum_{j=1}^{n} Si = \sum_{i=1}^{m} Dj \text{ (oferta total = demanda total)}$$

  - Problemas de transporte são problemas de programação linear
  - O algoritmo para solução de problemas de transporte é uma particularização do Método Simplex, utilizando o quadro de transporte

FÁBRICA	DEPÓSITO DE DISTRIBUIÇÃO				FORNECIMENTO
	1	2	......	n	
1	C_{11} X_{11}	C_{12} X_{12}	......	C_{1n} X_{1n}	S_1
2	C_{21} X_{21}	C_{22} X_{22}	......	C_{2n} X_{2n}	S_2
......	....	....	......	....	......
m	C_{m1} X_{m1}	C_{m2} X_{m2}	......	C_{mn} X_{mn}	S_m
DEMANDA	D_1	D_2		D_n	FORNECIMENTO = DEMANDA

Métodos de Transporte

- Exemplo: minimizar o problema de transporte



Métodos de Transporte

- Ou, de forma resumida:

	A	B	C	Oferta
1	10	4	6	20
2	7	2	7	50
3	6	3	4	30
Demanda	30	30	40	

- Montando o quadro de transporte:

	A	B	C	
1	$\boxed{10}$	$\boxed{4}$	$\boxed{6}$	20
2	$\boxed{7}$	$\boxed{2}$	$\boxed{7}$	50
3	$\boxed{6}$	$\boxed{3}$	$\boxed{4}$	30
	30	30	40	

Métodos de Transporte - Solução

1. Verificar se o problema está balanceado, isto é, se $\sum_{j=1}^{n} Si = \sum_{i=1}^{m} Dj$

Oferta total = 20 + 50 + 30 = 100

Demanda total = 30 + 30 + 40 = 100

➔ Está balanceado

	A	B	C	
1	10	4	6	20
2	7	2	7	50
3	6	3	4	30
	30	30	40	100

Métodos de Transporte - Solução

2. Encontrar solução inicial

➔Método do canto noroeste

1. começa na variável superior esquerda
2. Aloca-se tantas unidades quanto possível
3. Se ainda houver oferta → vai para o próximo cliente
   Se ainda houver demanda → vai para o próximo fornecedor
4. Volta para o passo 2

	A	B	C	
1	10 **20**	4	6	20
2	7 **10**	2 **30**	7 **10**	50
3	6	3	4 **30**	30
	30	30	40	100

Métodos de Transporte - Solução

3. Verificar se o problema está degenerado
   - Solução degenerada : variável básica nula
   - Normalmente: num. de variáveis básicas = num de restrições
   - Em problemas de transporte temos **m + n** restrições, mas como temos a condição $\sum Si = \sum Dj$ uma das restrições é combinação linear das outras e temos **m+n-1** restrições independentes

   → Devemos ter **m+n-1** variáveis básicas (não nulas)

	A		B		C		
1	10	**20**	4		6		20
2	7	**10**	2	**30**	7	**10**	50
3	6		3		4	**30**	30
	30		30		40		100

m+n-1 = 3 + 3 -1 = 5

num de variáveis básicas = 5 → OK!

Métodos de Transporte - Solução

4. Verificar se a solução é ótima

- Usamos um quadro auxiliar, chamado "quadro de custos"
- Para cada linha teremos uma variável $\mathbf{u_i}$
- Para cada coluna teremos uma variável $\mathbf{v_j}$
- Marcamos as variáveis básicas

Quadro de transportes

	A	B	C	
1	10 **20**	4	6	20
2	7 **10**	2 **30**	7 **10**	50
3	6	3	4 **30**	30
	30	30	40	100

Quadro de custos

	v_1	v_2	v_3
u_1	10 *	4	6
u_2	7 *	2 *	7 *
u_3	6	3	4 *

Métodos de Transporte - Solução

4. Verificar se a solução é ótima

- Arbitramos $u_1 = 0$
- Considerando apenas as variáveis básicas temos a seguinte relação

$$c_{ij} = u_i + v_j$$

- Encontramos os valores de u_i e v_j

Quadro de transportes

	A	B	C	
1	10 **20**	4	6	20
2	7 **10**	2 **30**	7 **10**	50
3	6	3	4 **30**	30
	30	30	40	100

Quadro de custos

	v_1	v_2	v_3
$u_1=0$	10 *	4	6
u_2	7 *	2 *	7 *
u_3	6	3	4 *

Métodos de Transporte - Solução

- Assim

$c_{11} = u_1 + v_1 \rightarrow 10 = 0 + v_1 \rightarrow v_1 = 10$

$c_{21} = u_2 + v_1 \rightarrow 7 = u_2 + 10 \rightarrow u_2 = -3$

....

Quadro de transportes

	A	B	C	
1	10 **20**	4	6	20
2	7 **10**	2 **30**	7 **10**	50
3	6	3	4 **30**	30
	30	30	40	100

Quadro de custos

	v_1=10	**v_2=5**	**v_3=10**
u_1=0	10 *	4	6
u_1=-3	7 *	2 *	7 *
u_3=-6	6	3	4 *

Métodos de Transporte - Solução

- Considerando agora as variáveis não básicas, calculamos

$c_{ij} – (u_i + v_j)$

- para x_{1A} → $4 – (0 +5) = -1$
- para x_{1C} → $6 – (0 +10) = -4$
- para x_{3A} → $6 – (-6 +10) = 2$
- para x_{3B} → $3 – (-6 +5) = 4$

Quadro de transportes

	A	B	C	
1	10 **20**	4	6	20
2	7 **10**	2 **30**	7 **10**	50
3	6	3	4 **30**	30
	30	30	40	100

Quadro de custos

	v_1=10	**v_2=5**	**v_3=10**
u_1=0	10 *****	4 **-1**	6 **-4**
u_1=-3	7 *****	2 *****	7 *****
u_3=-6	6 **2**	3 **4**	4 *****