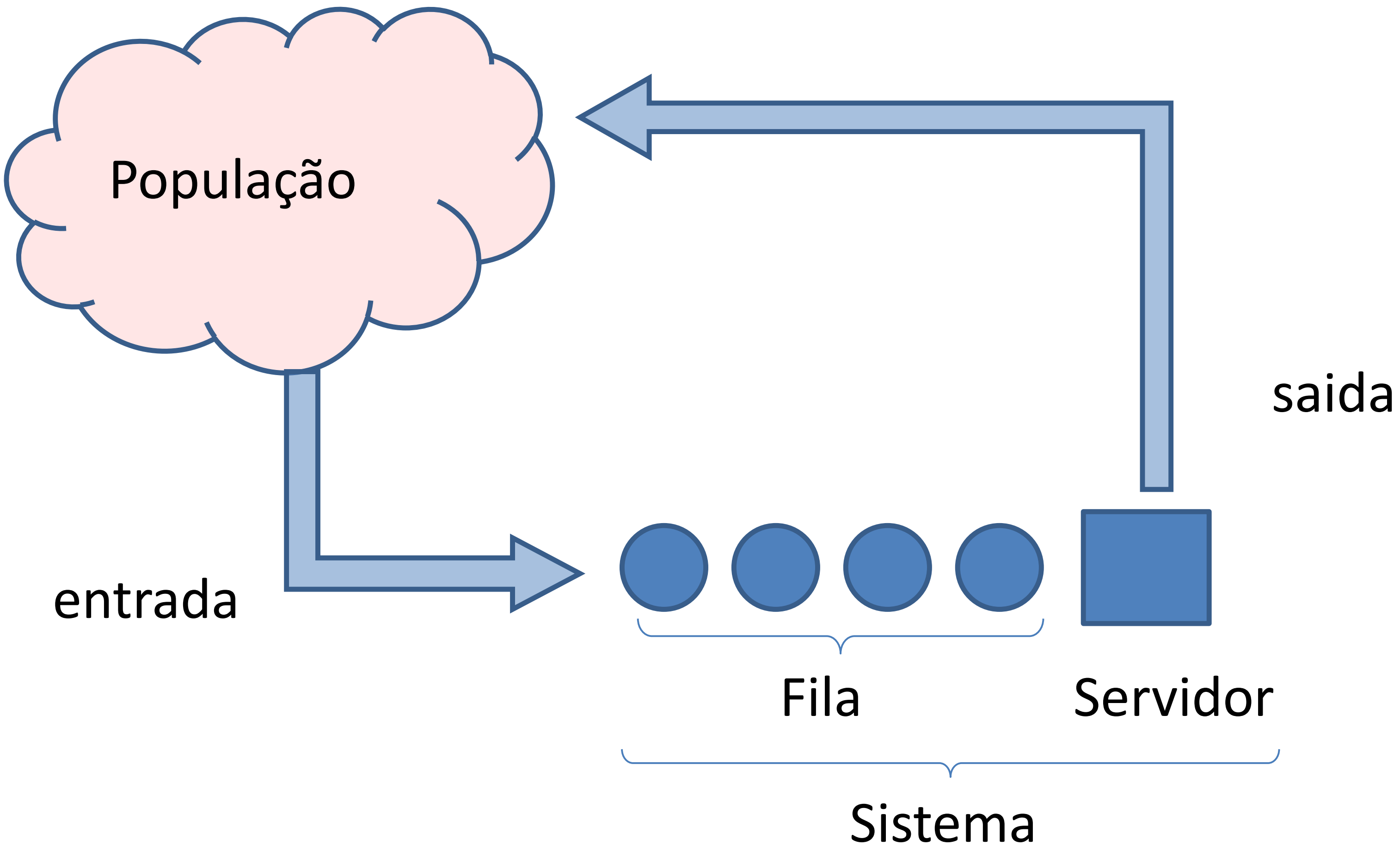
Introdução à Teoria das Filas

Introdução à Teoria das Filas

- Tem a mais ampla aplicação.
- Todos os tipos de negócio tem problemas de fila.
- A matemática simples pode fazer com que o modelo se ajuste mal à realidade.

Introdução à Teoria das Filas

Exemplo clássico:



Introdução à Teoria das Filas

- Definições:
  - Taxa de chegada λ: taxa segundo a qual os clientes chegam para serem atendidos (ex : clientes/hora)

  - Taxa de atendimento μ: taxa segundo a qual a unidade de atendimento serve ao cliente; reflete a capacidade máxima de atendimento supondo que a unidade de atendimento não esteja ociosa.

Essas taxas são consideradas médias dos valores possíveis, descritos por uma distribuição de *poisson.*

Introdução à Teoria das Filas

- Definições:
  - cliente : unidade que requer atendimento)
  - fila : número de clientes esperando atendimento.
  - canal ou unidade de atendimento: processo ou sistema que realiza atendimento; pode ser único ou múltiplo (k= nº de canais)
  - prioridade : método para decidir o próximo cliente a ser atendido

Introdução à Teoria das Filas

- Definições:
  - população : universo de clientes em potencial; pode ser finita ou infinita (> 50); a probabilidade de chegada de um cliente afeta ou não a probabilidade de chegada de outro
  - n.º médio na fila (Lq): número médio de clientes que aguardam atendimento
  - n.º médio de clientes no sistema (L): número médio de clientes esperando e sendo atendidos

Introdução à Teoria das Filas

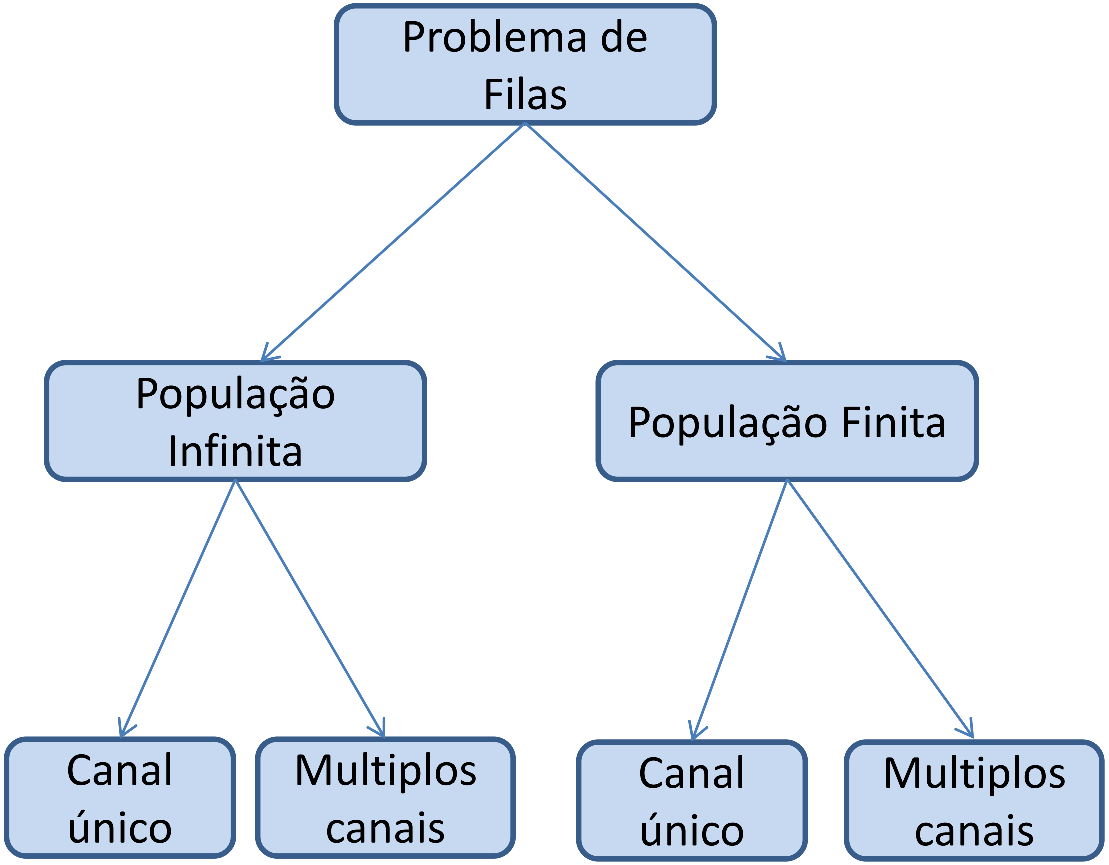
- Definições:
  - tempo na fila (Wq) : tempo médio de espera de um cliente
  - tempo no sistema (W) : tempo médio que um cliente fica no sistema
  - Distribuições de Poisson para as taxas de atendimento e chegada correspondem distribuições exponenciais para os tempos de atendimento e entre chegadas.

Introdução à Teoria das Filas

- Outras questões:
  - Processo de chegadas: individuais ou em lotes
  - Comportamento dos clientes: pacientes ou impacientes
  - Numero de fases do atendimento: pode haver mais de uma etapa no atendimento
  - Sala de espera: o tamanho da fila pode ser limitado

Introdução à Teoria das Filas

- Modelos de filas:



Introdução à Teoria das Filas

- População Infinita, canal único (M/M/1)
  - Dist. Exponencial dos tempos entre chegadas,média 1/ λ
  - Dist. Exponencial dos tempos de atendimento,média 1/ μ

Probabilidade de sistema ocupado ou utilização:

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu}$$

onde

ρ = utilização

λ = taxa de chegada,

μ = taxa de atendimento

Introdução à Teoria das Filas

- População Infinita, canal único (M/M/1)

Devemos observar que $\frac{\lambda}{\mu} < 1$

A probabilidade de sistema ocioso é :

$$P_0 = 1 - \frac{\lambda}{\mu}$$

Introdução à Teoria das Filas

Temos ainda:

$$L_q = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu - \lambda)} \qquad W_q = \frac{\lambda}{\mu(\mu - \lambda)} \qquad L_q = W_q . \lambda$$

$$L = \frac{\lambda}{(\mu - \lambda)} \qquad W = \frac{1}{(\mu - \lambda)} \qquad L = W . \lambda$$

$$L_n = \frac{\lambda}{\mu - \lambda} \qquad W_n = \frac{1}{\mu - \lambda} \qquad P_n = \rho^n$$

Introdução à Teoria das Filas

Exemplo 1

Uma copiadora é usada pelas secretárias de um escritório. Como o trabalho a ser copiado varia em tamanho (número de páginas do original) e quanto ao número de cópias, a taxa de atendimento é distribuída aleatoriamente, mas se aproxima de uma distribuição de Poisson tendo uma média de 10 trabalhos por hora. As necessidades de uso são aleatórias durante as 8 horas de trabalho diário, mas chegam a uma taxa de 5 por hora. Se o tempo de uma secretária custa $3.50 por hora, determine:

a) A utilização do equipamento.

b) 0 tempo médio do sistema.

c) 0 custo médio de espera e operação da máquina por dia.

Introdução à Teoria das Filas

Exemplo 1

Neste sistema, o canal de atendimento é a copiadora e os clientes são os trabalhos a serem feitos. A taxa de chegada é de 5 por hora e a taxa de atendimento é de 10 por hora.

a) $$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{5}{10} = 0{,}5$$

ou seja, a utilização é de 50%

Introdução à Teoria das Filas

Exemplo 1

b) O tempo médio no sistema *W* é

$$W = \frac{1}{\mu - \lambda} = \frac{1}{10 - 5} = 0{,}2 \ \ horas$$

Cada trabalho levará em média 0,20 horas esperando na fila e sendo executado.

Introdução à Teoria das Filas

Exemplo 1

c) o custo médio de espera e operação é o custo devido ao tempo de cada tarefa no sistema, e pode ser dado por:

Custo médio por tarefa = tempo médio por tarefa x custo da hora

= 0,20 x 3,50 = $0,70 por tarefa

Custo por dia = número de tarefas processadas por dia x custo médio por tarefa

Custo por dia = 8 x 5 x 0,70= $28 por dia.

Introdução à Teoria das Filas

Exemplo 2

Um caixa tem tempo médio de atendimento de 2 minutos, e os clientes chegam a uma taxa de 20/hora :

a) qual a ociosidade do caixa

b) quanto tempo um cliente espera em média na fila

c) qual a % dos clientes que terão que esperar na fila

d) quantos clientes em média há no sistema?

Introdução à Teoria das Filas

λ= 20/h

1/μ = 2 min/cliente ➔ μ = 0,5cliente/min = 30/h

a) $P_0 = 1 - \dfrac{\lambda}{\mu} = 1 - \dfrac{20}{30} = 0{,}3333$ ➔ $P_0 = 33\%$

b) $W_q = \dfrac{\lambda}{\mu(\mu - \lambda)} = \dfrac{20}{30(30-20)}$ = 0,066667 h = 4 minutos

c) 67%

d) $L = \dfrac{\lambda}{(\mu - \lambda)} = \dfrac{20}{(30-20)} = 2$

Introdução à Teoria das Filas

Exemplo 3

Um caixa tem capacidade para atender em média 25 clientes por hora. Quantos clientes poderiam chegar por minuto para que o tempo total na fila e no atendimento não ultrapasse 4 minutos ?

Introdução à Teoria das Filas

W = 4 minutos

μ = 25 clientes/hora = 0,41666 clientes/minuto

$$W = \frac{1}{(\mu - \lambda)}$$

$$4 = \frac{1}{(0{,}41666 - \lambda)}$$

$$1{,}6666 - 4\lambda = 1$$

$$\lambda = 0{,}1666$$

Introdução à Teoria das Filas

Exemplo 4

Um atendente tem um tempo médio de atendimento de 6 minutos. Sempre que mais de um cliente está esperando, um segundo atendente chega para ajudar. Se a taxa de chegada é de 6 clientes por hora, qual a probabilidade de que seja necessário um segundo atendente ?

Introdução à Teoria das Filas

Probabilidade de n ou mais clientes no sistema $Pn = \rho^n$

1 canal = atendente

$\lambda = 6/h$

$\mu = 10 \ /h$

$P0 = 1 - \lambda/\mu = 0,4$

$Pn = \rho^n$ $P = (6/10)^3 = 0,216$ 21,6%

Introdução à Teoria das Filas

Exemplo 5

Um guindaste faz transportes de uma máquina para outra, e deve ser usado sempre que uma máquina está sendo carregada ou descarregada. A demanda é aleatória. A distribuição dos tempos entre as chamadas é exponencial. Ocorre em média uma chamada a cada 30 minutos. De modo semelhante, o tempo de carga e descarga tem média de 10 minutos. Se o custo da máquina parada for de $8,50 /hora, qual será o custo da espera por dia?

Introdução à Teoria das Filas

Os dados devem ser reestruturados para fornecerem os valores de λ e μ. Ambas são taxas, isto é, unidades por período de tempo enquanto os dados são fornecidos em termos de tempo por unidade.

$1/\lambda = 0{,}5 \Rightarrow \lambda = 2$ e $1/\mu = 10/60 \Rightarrow \mu = 6$

0 tempo de atraso por máquina é o tempo médio do sistema W

$$W = \frac{1}{\mu - \lambda} = \frac{1}{6-2} = 0{,}25 \text{ horas}$$

A demanda diária por atendimento, supondo um dia de 8 horas, é

$8 \times \lambda = 8 \times 2 = 16$ pedidos de atendimento/dia.

Cada pedido requer um tempo médio de sistema de 0,25 hora, assim

Custo total/dia = \$ 8,50 $\times$ 16 pedidos/dia x0,25h/pedido = \$ 34/dia.