Ponto Flutuante e IEEE 754

Yuri Kaszubowski Lopes

UDESC

Anotações

Números reais e o Hardware

- Converter $0,1_{10}$ para base 2, qual o problema?
  - parte fracionária é uma repetição periódica
- Observe o programa abaixo:

```c
#include<stdio.h>
#include<stdlib.h>

int main() {
    float x = 0.0;

    for (int i = 0; i < 10; i++) {
        x += 0.1;
    }

    printf("%.20f\n", x);


    return 0;
}
```

- Saída:

```
1.00000011920928955078
```


Anotações

Números reais e o Hardware

- É impossível representar qualquer número real na máquina
  - Temos uma infinidade de números reais, e o hardware é finito
    - Sempre há um número maior
    - qualquer dois números reais há infinitos números reais
  - Armazenamos assim aproximações

Anotações

Ponto Flutuante

- Uma forma de armazenar essas aproximações é através de pontos flutuantes
- Conceito implementado em grande parte dos processadores comerciais
- Similar a **notação científica normalizada**
  - O número tem **um e somente um dígito antes da casa decimal**, e **não possui zeros antes da casa decimal** (a IEEE 754 possui uma faixa de valores não normalizados também)
    - $8.0_{10} \times 10^{-9}$ é normalizado
    - $0.8_{10} \times 10^{-8}$ **não** é normalizado
    - $80.0_{10} \times 10^{-10}$ **não** é normalizado
- Podemos fazer o mesmo com números binários
  - $1.0_2 \times 2^{-1}$ está normalizado
- Vamos chamar o ponto decimal de "ponto binário" para a base 2
- Exemplo: normalizar $1111,11_2 = 1111,11_2 \times 2^0$
  - $111,111_2 \times 2^1$
  - $11,1111_2 \times 2^2$
  - $1,11111_2 \times 2^3 \leftarrow$ Normalizado
  - Vamos exibir a base e a potência na base 10 na disciplina para simplificar a visualização

Anotações

Exercício Resolvido

1. Normalize os seguintes valores binários
   1. $11,11_2$
      - $= 1,111_2 \times 2^1$
   2. 111_2
      - $= 1,11_2 \times 2^2$
   3. $0,000001_2$
      - $= 1,0_2 \times 2^{-6}$

Anotações

Ponto Flutuante

- Para armazenar um valor binário normalizado arbitrário na memória, como $1,11111_2 \times 2^3$, quais campos são importantes?
  - **Não** precisamos armazenar o 1 antes do ponto binário, nem a base.
  - Devemos armazenar:
    - Sinal (0 positivo, 1 negativo)
    - Expoente
    - mantissa (parte à direita do ponto binário)
- Os valores então sempre tem o formato:
  - $\pm 1, mmmmmmm \times 2^{eeeeee}$
    - *mmmmmmm* é a **mantissa** (ou fração)
    - *eeeeee* é o **expoente**
    - Armazenamos apenas a mantissa, o expoente, e o sinal

Anotações

Padrão IEEE 754

- Utilizado na maioria dos processadores comerciais
  - x86-64, smartphones
  - Define tamanhos para os campos de expoente e mantissa
    - Precisão simples (`float`)
    - Precisão dupla (`double`)

Anotações

Padrão IEEE 754

- Precisão simples
- Declarado como `float` em C

- Precisão dupla
- Declarado como `double` em C

- Quais as vantagens e desvantagens do double em relação ao float?
  - (+) Consegue armazenar uma extensão maior de valores
  - (+) Maior precisão devida a mantissa ser muito maior
  - (-) Ocupa mais memória
  - (-) Pode precisar de mais ciclos do processador para efetuar cálculos

Anotações

Overflow e Underflow

- **Overflow**: o expoente é muito grande para caber na memória
- **Underflow**: o expoente é muito pequeno para caber na memória

Anotações

Valores Especiais

- Como podemos representar o número 0? Qual a dificuldade?
  - Concordamos que o 1 antes do ponto binário é implícito, e não é representado pelo hardware
  - $\pm 1, mmmmmm \times 2^{eeeeee}$
  - Mas o número 0 em especial não tem 1 antes do ponto binário!
  - Essas e outras exceções são tratadas com valores especiais.

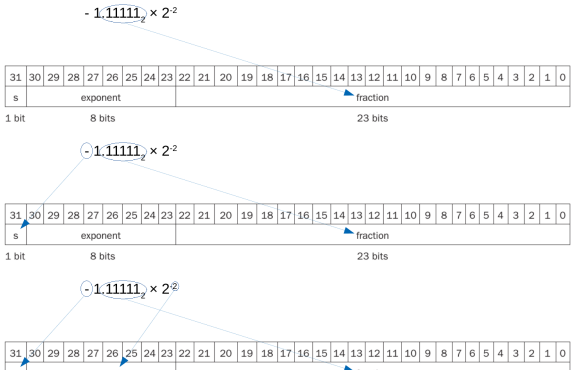
Single precision		Double precision		Object represented
Exponent	Fraction	Exponent	Fraction	
0	0	0	0	0
0	Nonzero	0	Nonzero	± denormalized number
1–254	Anything	1–2046	Anything	± floating-point number
255	0	2047	0	± infinity
255	Nonzero	2047	Nonzero	NaN (Not a Number)

Valores especiais definidos no IEEE 754. Figura de Patterson e Hennessy (2017)

Anotações

Sinal do Expoente

- E o sinal do expoente? Como representar?
- Exemplo: $-1,11111 \times 2^{-2}$



Anotações

- Poderíamos utilizar complemento de 2
- Ou então sinal e magnitude, como na mantissa
- ... mas não!
- O IEEE 754 especifica que o expoente utiliza uma notação com bias
  - Biased Expoent

IEEE 754: notação com bias

- O bias é o valor intermediário entre todos os possíveis de serem representados no expoente
  - 127_{10} ($0111\ 1111_2$) para precisão simples
  - 1023_{10} ($011\ 1111\ 1111_2$) para precisão dupla
- O expoente é somado ao bias
  - Expoente -1_{10} na notação com bias se torna:
    - $-1_{10} + 127_{10} = 126_{10} = 01111110_2$ (precisão simples)
    - $-1_{10} + 1023_{10} = 1022_{10} = 01111111110_2$ (precisão dupla)
  - Expoente 1_{10} na notação com bias se torna:
    - $1_{10} + 127_{10} = 128_{10} = 1000\ 0000_2$ (precisão simples)
    - $1_{10} + 1023_{10} = 1024_{10} = 100\ 0000\ 0000_2$ (precisão dupla)
  - A notação com bias foi feita para tornar ordenações via hardware mais rápidas e simples

Anotações

IEEE 754

- Um ponto flutuante é então representado por:

$$(-1)^{\text{sinal}} \times (1.0 + \text{mantissa}) \times 2^{(\text{expoente} - \text{bias})}$$

Somente esses valores são armazenados

- Exemplo: Representar $-0,75_{10}$ em precisão simples
  - -0.75_{10} pelo método das multiplicações nos dá $-0,11_2$
  - Normalizando, $-0,11_2 = -1,1_2 \times 2^{-1}$
  - A mantissa é então 1 (somente a parte fracionária)
  - O expoente é $-1_{10} + 127_{10} = 126_{10} = 0111\ 1110_2$
  - O bit de sinal é 1 (negativo)
  - Assim:

Figura de Patterson e Hennessy (2017)

- Como ficaria em precisão dupla?
  - mantissa com 52 bits (neste caso só zeros a direita)
  - recalcular expoente: $-1_{10} + 1023_{10} = 126_{10} = 011\ 1111\ 1110_2$

Anotações

Exemplo

- Converta o valor representado em precisão simples para decimal

  - O expoente é $1000\ 0001_2 = 129_{10}$
    - $129_{10} - 127_{10} = 2_{10}$
    - A mantissa é $1,01_2 = 1 \times 2^0 + 0 \times 2^{-1} + 1 \times 2^{-2} = 1_{10} + 0,25_{10} = 1,25_{10}$
    - O bit de sinal é 1 (negativo)
    - Logo temos: $-1,25 \times 2^2 = -5_{10}$

Anotações

Arredondamento

- A parte fracionária pode não caber na mantissa
  - O processador utilizará técnicas de arredondamento
  - Perda de precisão
- O IEEE 754 define 4 formas de arredondamento, que podem ser setadas no processador:
  - Arredondar para cima (teto)
  - Arredondar para baixo (piso)
  - Truncar (ignorar as demais casas)
  - Nearest even (par mais próximo) (mais utilizado)
- Requerem que o processador mantenha alguns bits extras para gerência
- Detalhes sobre o arredondamento e suas implementações, são encontrados em Patterson e Hennessy (2017) e Hennessy e Patterson (2014).

Anotações

IEEE 754

- O padrão para precisão simples e dupla é embutido no hardware
- Independe de linguagem
- Hardwares simples podem não implementar o padrão
  - e.g., microcontroladores
  - Nesse caso, o padrão é implementado via software

Anotações

Exercícios extras

1. Qual o maior e o menor valor que podem ser representados em ponto flutuante de precisão dupla e simples (desconsiderando infinito)? Quais são seus equivalentes em decimal?
2. Exiba os seguintes valores em ponto flutuante. Quando necessário trunque (ignore os bits que não couberem) os valores. Faça o desenho da memória como nos exemplos e coloque os endereços dos bits (para deixar claro a ordem dos bits).
   - $-16,015625_{10}$
     - Em precisão simples
     - Em precisão dupla
   - $-0,1_{10}$
     - Em precisão simples
     - Em precisão dupla
   - $0,1_{10}$
     - Em precisão simples
     - Em precisão dupla
   - $0,125_{10}$
     - Em precisão simples
     - Em precisão dupla
     - Em meia precisão: 10 bits para mantissa, 5 para expoente e 1 para sinal

Anotações

Referências

- TOCCI, R.J.; WIDMER,N.S. **Sistemas digitais: princípios e aplicações**. 11a ed, Prentice-Hall, 2011.
- RUGGIERO, M.; LOPES, V. da R. **Cálculo numérico: aspectos teóricos e computacionais**. Makron Books do Brasil, 1996.
- NULL, L.; LOBUR, J. **Princípios Básicos de Arquitetura e Organização de Computadores**. 2014. Bookman, 2009. ISBN 9788577807666.

Anotações