Programação Linear – Solução Algébrica

- Em programação linear, os problemas são do tipo

$$(\text{min ou max})\ \ z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$\text{S.A.} \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \begin{Bmatrix} \leq \\ \geq \end{Bmatrix} b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \begin{Bmatrix} \leq \\ \geq \end{Bmatrix} b_2 \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \begin{Bmatrix} \leq \\ \geq \end{Bmatrix} b_m \\ b_i > 0 \ \ (i=1 \ldots m) \\ x_j > 0 \ \ (j=1 \ldots n) \end{cases}$$

Programação Linear – Solução Algébrica

– Onde:

n - atividades que competem entre si e $x_1 \ldots x_n$ são seus níveis

c_j - aumento em z por unidade da atividade j

m - recursos disponíveis, cujos níveis são b_1-b_m

a_{ij} - quanto é consumido do recurso i pela atividade j

– Formulação equivalente

max z ≡ min –z

ou $$\max \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \equiv \min \sum_{j=1}^{n} (-c_j) x_j$$

Forma padrão

– Para que um problema de P.L. possa ser resolvido algebricamente, as inequações devem ser transformadas em igualdades, o que é feito adicionando variáveis de folga, também não negativas.

Max $z = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3$

$$
\text{S. A .}\quad
\begin{cases}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \leq b_1 & \Rightarrow \quad a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + x_4 = b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \geq b_2 & \Rightarrow \quad a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 - x_5 = b_2 \\
a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 & \Rightarrow \quad a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3
\end{cases}
$$

Analogia Geometria – Álgebra

- As equações do tipo $a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b$ dividem o espaço R_n em tres conjuntos
  - um hiperplano
  - dois semi-espaços abertos ($<$ e $>$)

- Semi-espaços são conjuntos convexos, e a intersecção de um número finito de semi-espaços fechados em R_n é um conjunto poliédrico convexo

Analogia Geometria – Álgebra

– Intersecção de n hiperplanos que delimitam o poliedro →ponto extremo.

– Dada uma função linear definida em um conjunto poliédrico convexo fechado, seu máximo ocorre em um ponto extremo, ou ao longo de um hiperplano.

$\therefore$ para resolver um problema de P.L., basta encontrarmos os pontos extremos e avaliar a função objetivo em cada um.

Analogia Geometria – Álgebra

Dado um sistema de equações lineares:

$$
\begin{array}{lllll}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\
: \qquad\qquad : \qquad\qquad : & & : \\
: \qquad\qquad : \qquad\qquad : & & : \\
a_{n1}x_n + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n & = & b_n
\end{array}
$$

através de operações entre as equações podemos chegar a

$$
\begin{array}{lll}
x_1 & & = b'_1 \\
\quad x_2 & & = b'_2 \\
\qquad . & & \;\;. \\
\qquad\quad . & & \;\;. \\
\qquad\qquad x_n & & = b'_n
\end{array}
$$

que equivale ao sistema original, mas fornece diretamente a solução. →Gauss-Jordan

Analogia Geometria – Álgebra

- O sistema só tem solução única se

➔ No. de equações = No. de incógnitas

Quando temos mais incognitas, o sistema é sub-determinado.

- Dado um sistema com m equações e n incógnitas (n > m), podemos arbitrar n-m variáveis = 0 e resolver para as restantes.
- A forma padrão é

$$
\begin{array}{lllll}
x_1 & & & + a_{1\,m+1} x_{m+1} + \ldots + a_{1\,n} x_n & = b_1 \\
 & x2 & & + a_{2\,m+1} x_{m+1} + \ldots + a_{2\,n} x_n & = b_2 \\
 & \quad . & & \qquad\qquad . & \\
 & & \quad . & \qquad\qquad . & \\
 & & x_m & + a_{m\,m+1} x_{m+1} + \ldots + a_{mn} x_n & = b_m \\
\multicolumn{3}{c}{|\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_|} & |\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_| & \\
\multicolumn{3}{c}{\text{dependentes}} & \text{independentes} &
\end{array}
$$

Analogia Geometria – Álgebra

- É chamada de solução básica aquela onde as variáveis independentes são 0.

- Uma solução básica viável corresponde a um ponto extremo de um poliedro convexo.

- O SIMPLEX é uma maneira sistemática de pesquisar os vértices de um poliedro convexo, de modo a em um número finito de iterações fornecer a solução, ou indicar que esta não existe.

- A cada iteração uma variável passa a fazer parte da solução básica ($\neq 0$) e outra deixa de fazer parte da solução básica

($= 0$).

Método SIMPLEX

- Procedimento para restrições do tipo <
  - colocar na forma padrão, adicionando as variáveis de folga
  - montar o quadro do SIMPLEX, conforme o seguinte esquema

x (atividades)	x (folga)	
A	I	b
- c	0	0

Método SIMPLEX

Exemplo:

max $z = 30\,x_1 + 50\,x_2$

$$\begin{aligned} 2\,x_1 + x_2 &\leq 16 \\ x_1 + 2x_2 &\leq 11 \\ x_1 + 3x_2 &\leq 15 \\ x_1\,,\, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

forma padrão :

$$\begin{aligned} 2\,x_1 + x_2 + x_3 &= 16 \\ x_1 + 2x_2 + x_4 &= 11 \\ x_1 + 3x_2 + x_5 &= 15 \end{aligned}$$

Método SIMPLEX

Quadro SIMPLEX:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
2	1	1	0	0	16
1	2	0	1	0	11
1	3	0	0	1	15
-30	-50	0	0	0	0

Método SIMPLEX

- Algoritmo:
- Escolha do pivô:
  - na última linha (linha z), escolha o coeficiente mais negativo (escolha da coluna)
  - para a coluna selecionada, escolher a menor relação bj / aij (para aij >0) (escolha da linha)

- Escolhido o pivô, fazemos as operações de linha para que este seja 1 e os outros elementos da coluna sejam 0.

- Os passos são repetidos até que não existam elementos negativos na última linha (linha z), o que significa que a função objetivo não pode ser melhorada.

Método SIMPLEX

- Podem ocorrer as seguintes situações :

- soluções múltiplas : quando uma variável não básica tem coeficiente 0 na última linha

- solução ilimitada : quando uma variável não básica só tem coeficientes negativos na coluna