GAN: Geometria Analítica

Aula 7: Cônica - Hipérbole

Professora: Elisandra Bar de Figueiredo

Cônica Hipérbole

Cônica Hipérbole

Definição: Considere num plano α dois pontos F_1 e F_2 fixos e uma distância $2a$ chamamos **hipérbole** o conjunto dos pontos P desse plano tal que

$$|d(P,F_1) - d(P,F_2)| = 2a.$$

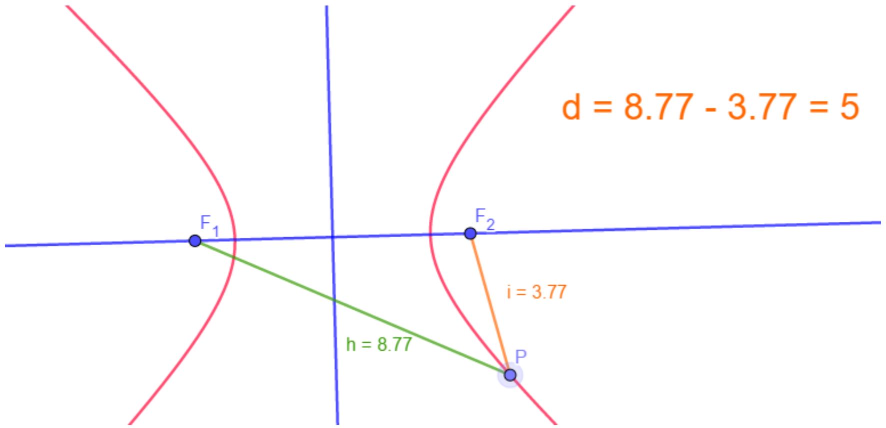
Observe que $2a < d(F_1,F_2) = 2c$.

Cônica Hipérbole

Definição: Considere num plano α dois pontos F_1 e F_2 fixos e uma distância $2a$ chamamos **hipérbole** o conjunto dos pontos P desse plano tal que

$$|d(P,F_1) - d(P,F_2)| = 2a.$$

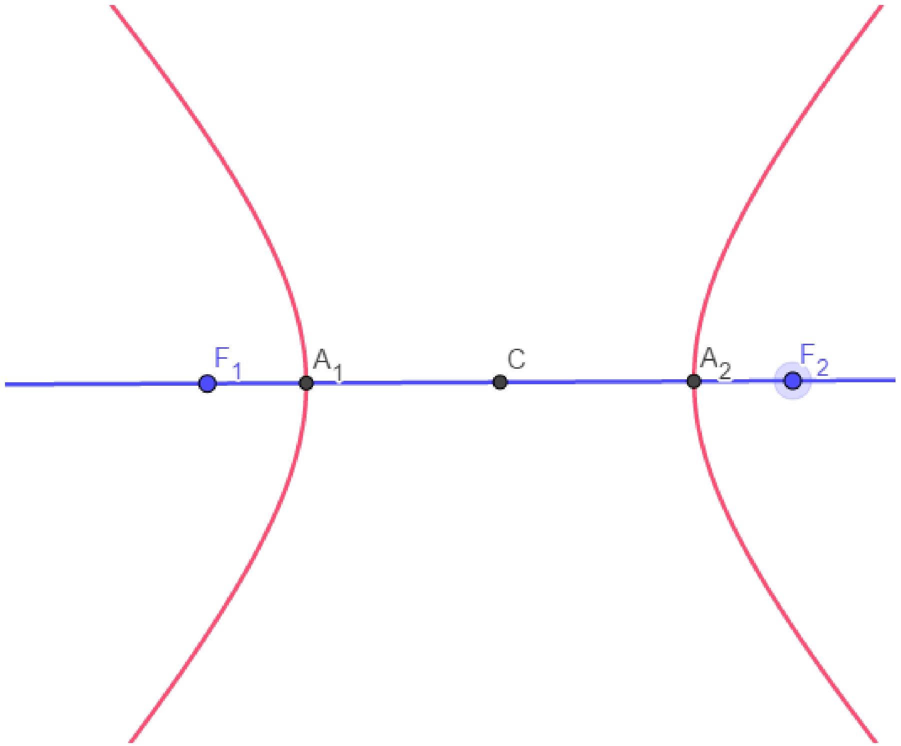
Observe que $2a < d(F_1,F_2) = 2c$.



Notação: $2a$ é o comprimento do eixo real (ou eixo focal) e $2c$ é a distância focal. O ponto médio do segmento F_1F_2 é o centro da hipérbole e as extremidades do eixo real, são chamados de vértices reais da hipérbole e denotados por A_1 e A_2.

Elementos da Hipérbole

- Focos: os pontos F_1 e F_2;
- Distância Focal: $\mathrm{d}(\mathrm{F}_1, \mathrm{F}_2) = 2c$;
- Centro (C): ponto médio do segmento F_1F_2;
- Vértices: os pontos A_1 e A_2 (pontos de interseção da hipérbole com o eixo focal);
- Eixo real (ou focal): o segmento A_1A_2 de comprimento $2a$;



Elementos da Hipérbole

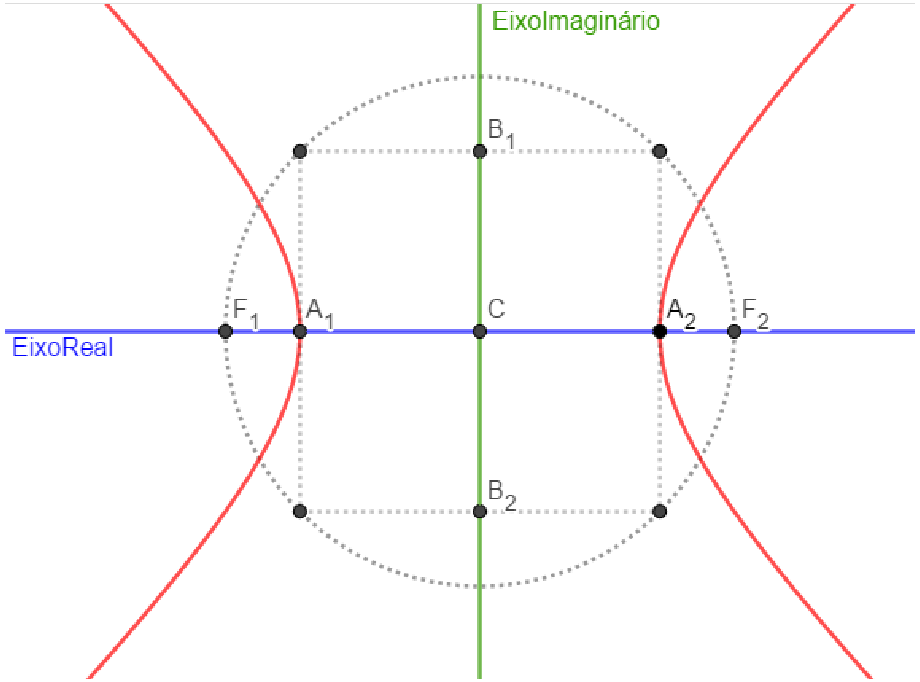
- Eixo imaginário (ou não focal): o segmento B_1B_2 de comprimento $2b$ ($B_1B_2 \perp A_1A_2$ no seu ponto médio):

✓Para obter o eixo imaginário, começamos traçando a circunferência de centro C e raio c.

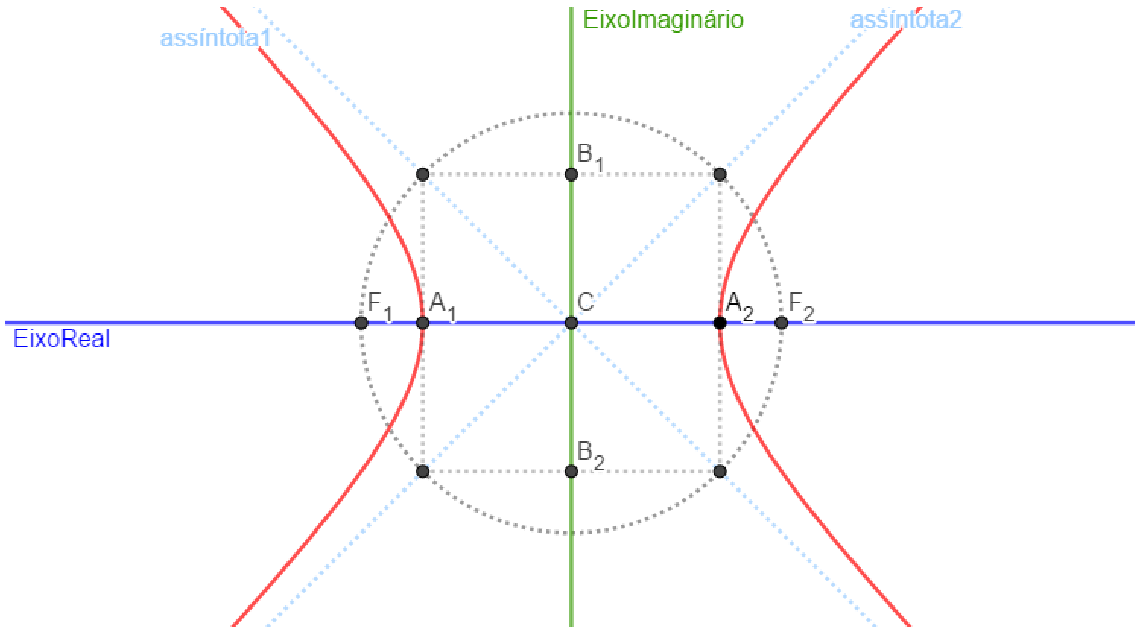
✓Na sequência traçamos perpendiculares ao eixo real passando pelos vértices A_1 e A_2.

✓Os pontos de intersecção com a circunferência definem um quadrilátero com dimensões $2a$ e $2b$.

✓Logo, $c^2 = a^2 + b^2$.

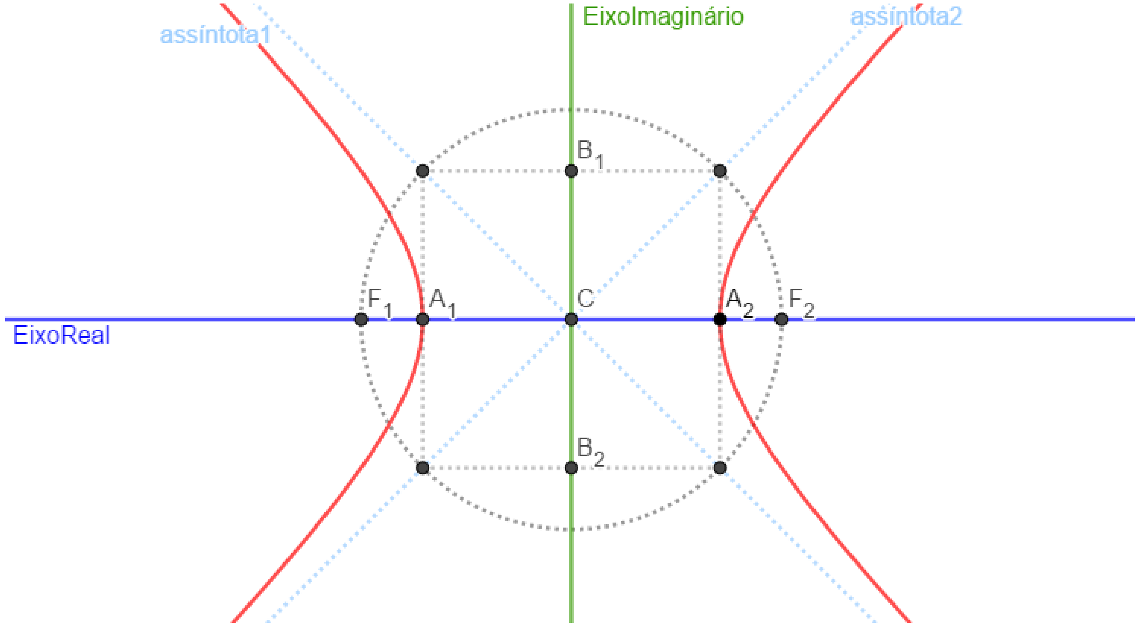


- Retas assíntotas: retas que contém as diagonais do quadrilátero com dimensões $2a$ e $2b$;
- Excentricidade: número $e = \frac{c}{a}$. Como $c > a$, então $e > 1$. A excentricidade está relacionada com a abertura da hipérbole, que é o ângulo entre as retas assíntotas. Se diminuirmos a mantendo c fixo, então e aumenta e consequentemente a hipérbole vai ficando mais aberta;
- Quando $a = b$ a hipérbole é dita equilátera. Nesse caso as assíntotas são perpendiculares.



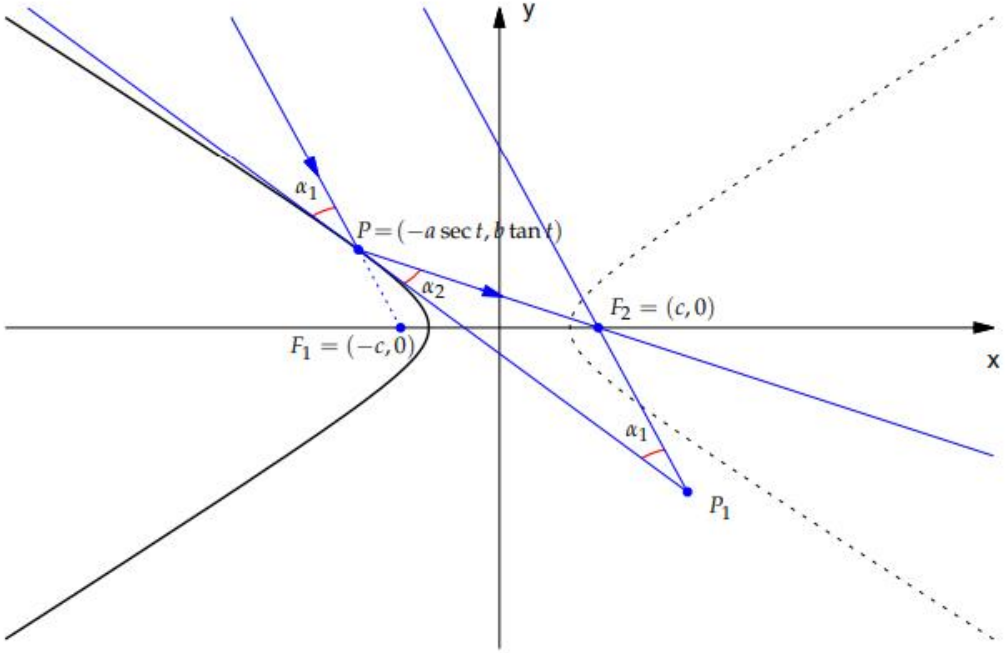
Desenho da Hipérbole

Observação: para fazer o desenho da hipérbole, o usual é começar marcando o centro, depois os vértices (reais e imaginários), com isso demarcar o retângulo cujas diagonais são as assíntotas da hipérbole e por fim desenhar a hipérbole usando os vértices reais como ponto de partida e as assíntotas como delimitação/ tendência. Para marcar os focos da hipérbole podemos traçar a circunferência de centro C e raio c.



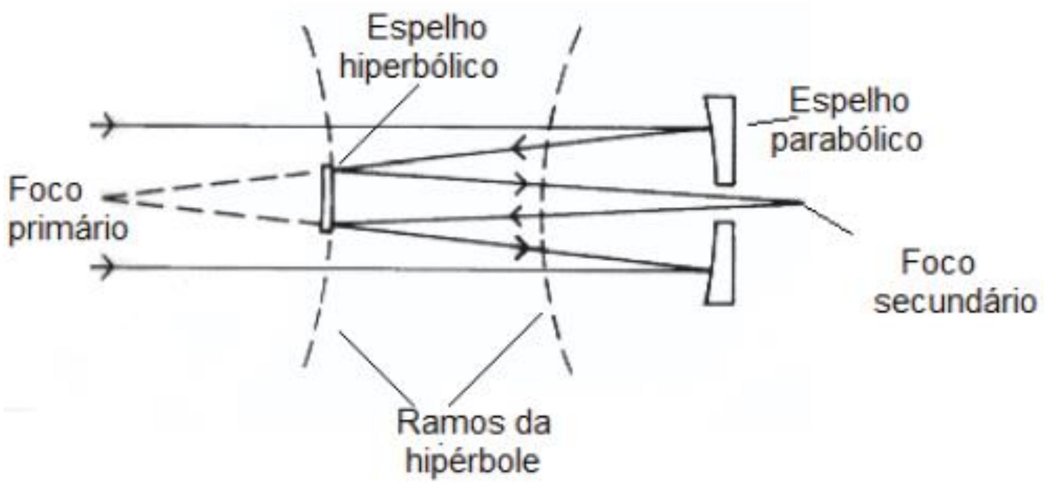
Aplicações: propriedade reflexiva

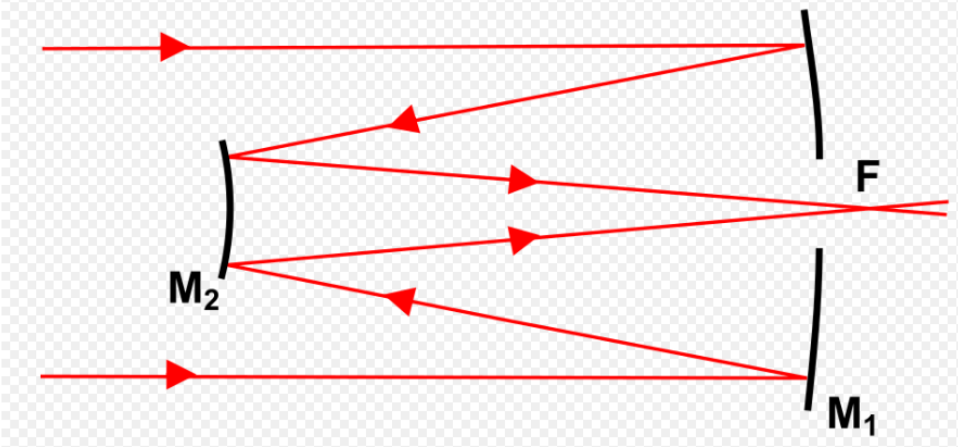
Se a luz for dirigida a um dos focos de um espelho hiperbólico será refletida em direção ao outro foco.



Aplicações: telescópio Cassegrain

Neste telescópio o espelho primário é côncavo com a forma de um paraboloide e o secundário é convexo e no formato de hiperboloide. Após a reflexão no primário, a luz converge para o secundário sendo então refletida novamente em direção ao primário, passando por um furo existente no centro deste, chegando à ocular situada na parte traseira do tubo. Embora tenha sido inventado no mesmo ano que o telescópio de Newton, só veio a ser uma realidade prática muito mais tarde, em função da complexidade na construção de seus espelhos. A maioria dos grandes telescópios modernos é do tipo Cassegrain.





Aplicações: navegação aérea

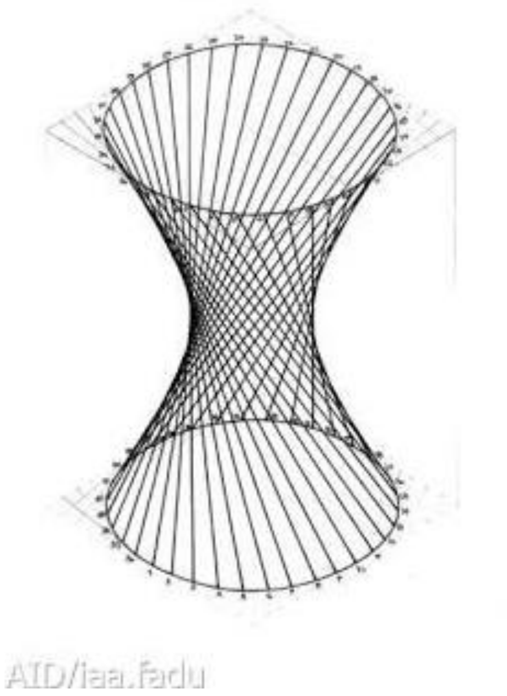
O sistema LORAN (longe range navigation) e o sistema DECCA de navegação aérea usam a hipérbole. Da Terra, concomitantemente são transmitidos sinais de rádio de dois pontos fixos F_1 e F_2 que são captados pelo aeroplano em P, ao longo de t_1 e t_2 segundos, respectivamente. A diferença entre t_1 e t_2 determina $2a$ e assim se obtém a característica da hipérbole na qual está P.

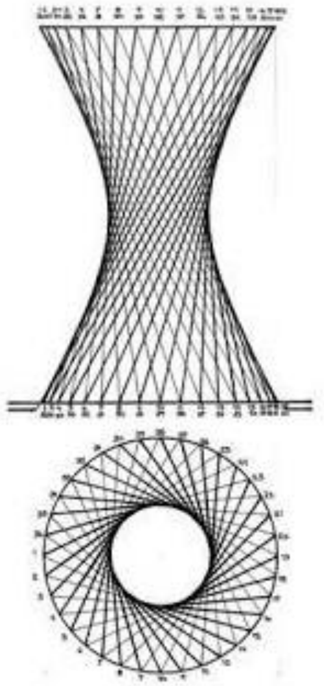
Aplicações: navegação marítima

Na navegação marítima utilizam-se sistemas hiperbólicos: o sistema RADUX (de baixíssima frequência) e o sistema LORAC (de ondas contínuas para observações de grande precisão).

Aplicações: construções

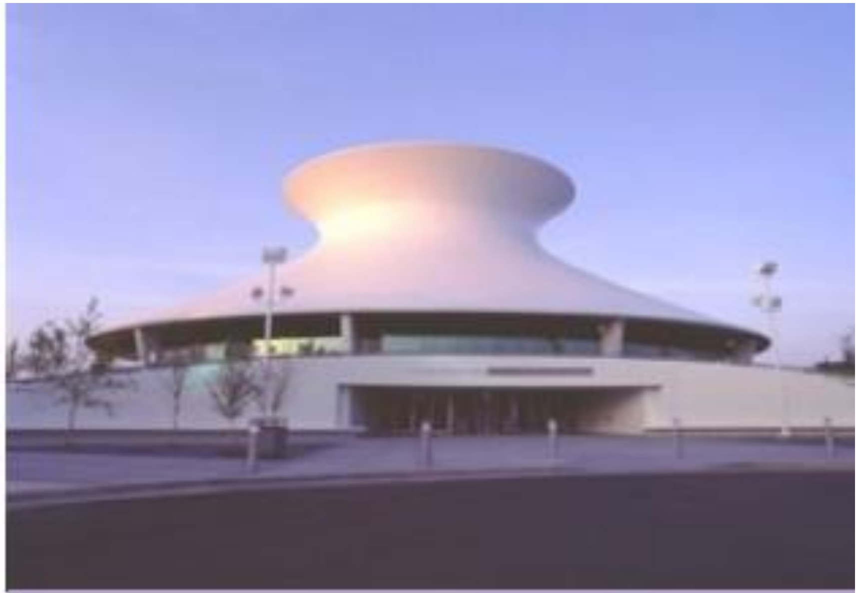
Na engenharia civil, o hiperboloide (sólido originado da rotação de uma hipérbole) é utilizado na construção de torres de refrigeração de usinas nucleares. Isso se deve ao fato de que o hiperboloide é uma superfície duplamente regrada, ou seja, para cada um dos seus pontos existem duas retas distintas que se interceptam na superfície (observe detalhe na imagem). Deste modo as torres podem ser construídas com vigas de aço retas, permitindo assim uma minimização dos ventos transversais e mantendo a integridade estrutural com uma utilização mínima de materiais de construção.





Aplicações: construções

As curvas hiperbólicas também são utilizadas na arquitetura como pode ser observado na catedral de Brasília (Projetada por Oscar Niemeyer) e no planetário do Saint Louis Science Center, nos Estados Unidos.



ST. LOUIS SCIENCE CENTER - EUA

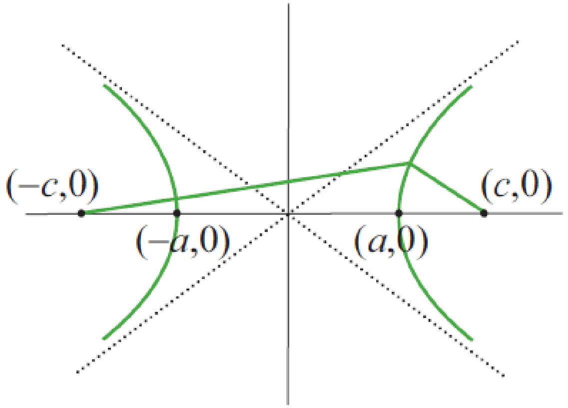
CATEDRAL DE BRASÍLIA - DF - BRASIL

Equação da hipérbole com centro $C(0,0)$

Caso 1: eixo real (reta focal) sobre o eixo x: Seja $P(x, y)$ um ponto da hipérbole com focos $F_1(-c, 0)$ e $F_2(c, 0)$ e eixo real de comprimento $2a$.

Então, por definição temos:

$|d(F_1, P) - d(F_2, P)| = 2a$



...

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

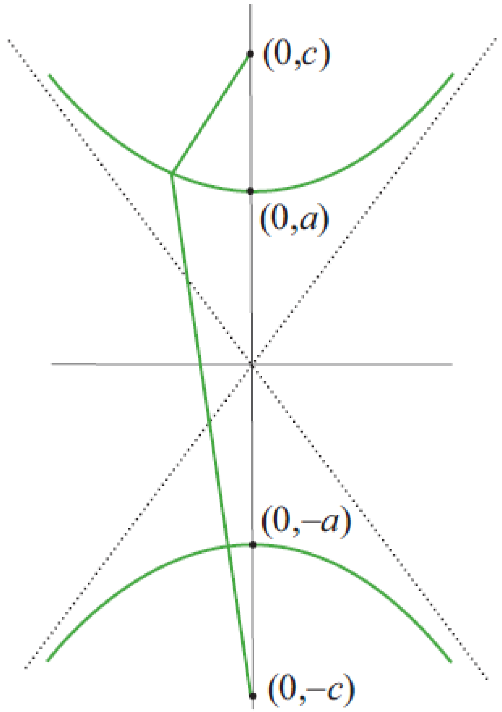
Caso tenha dúvidas no desenvolvimento da fórmula, consulte BEZERRA (2010) p.53.

Equação da hipérbole com centro $C(0,0)$

Caso 2: eixo real (reta focal) sobre o eixo y: Seja $P(x, y)$ um ponto da elipse com focos $F_1(0, -c)$ e $F_2(0, c)$ e eixo real de comprimento $2a$.

Então, por definição temos:

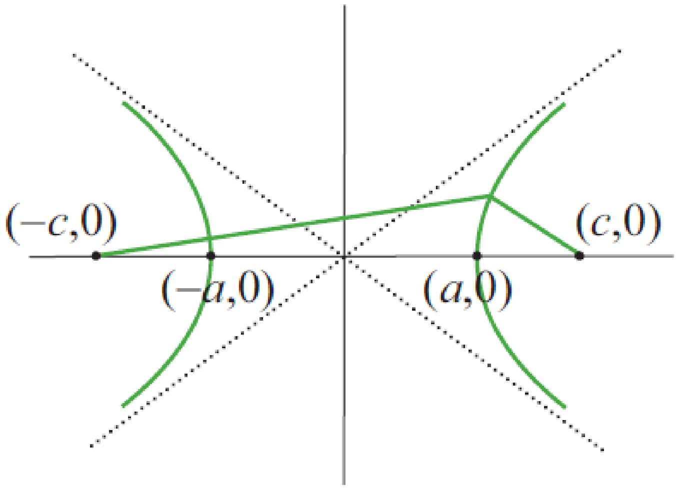
$$|d(F_1, P) - d(F_2, P)| = 2a$$



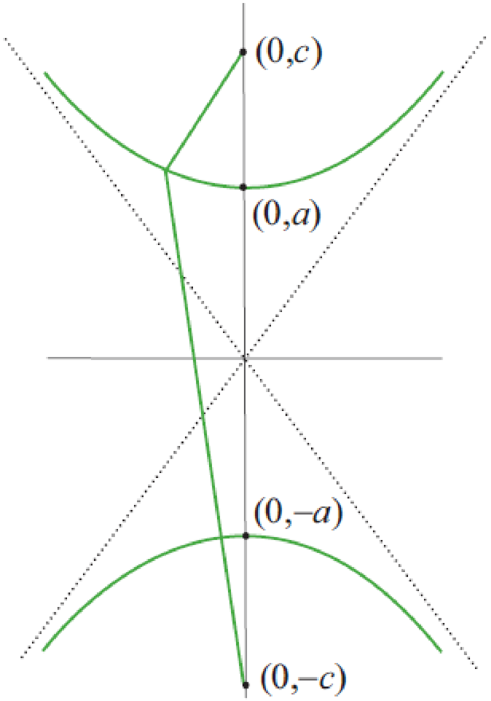
Equação da hipérbole com centro $C(0,0)$

Portanto, sempre o denominador da fração positiva, na equação reduzida, representa o quadrado do semieixo real da hipérbole.

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$



$$-\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1.$$



Equação da hipérbole com centro $C(0,0)$

Exemplo 1: Determine os elementos da hipérbole $9x^2 - 4y^2 - 36 = 0$ e represente-a geometricamente.

Equação da hipérbole com centro $C(0,0)$

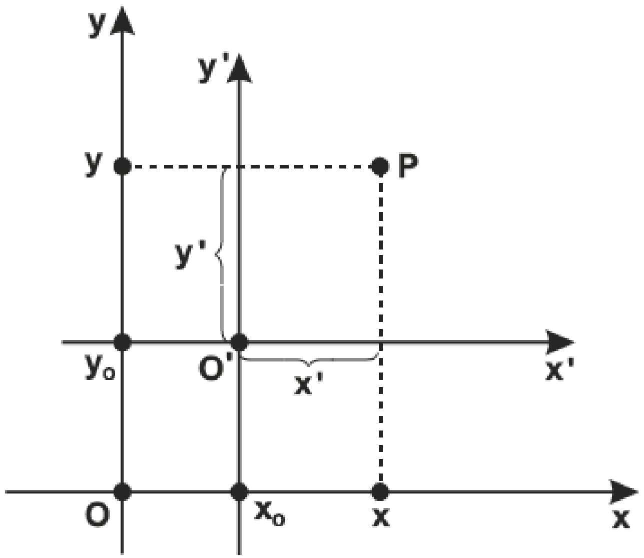
Equação da hipérbole com centro $C(0,0)$

Translação de eixos

Um ponto P do plano tem coordenadas (x, y) em relação ao sistema xOy e (x', y') em relação ao sistema $x'O'y'$.

Obtemos facilmente da figura as **fórmulas de translação**:

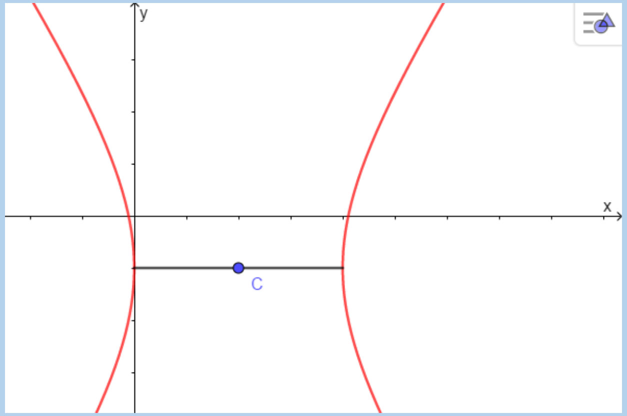
$$\begin{cases} x' = x - x_0 \\ y' = y - y_0 \end{cases}.$$



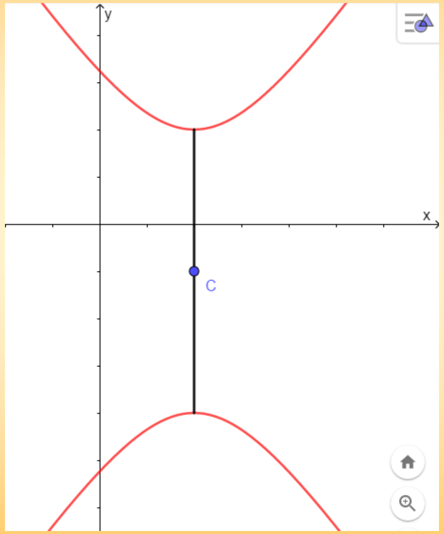
Equação da hipérbole com $C(x_0, y_0)$

Através de uma translação de eixos, obtemos um novo sistema $x'O'y'$, cuja origem O' coincide com o centro $C(x_0, y_0)$. Usando a translação tem-se que a equação reduzida da hipérbole é

$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$ se o eixo real for paralelo ao eixo x



$\frac{-(x-x_0)^2}{b^2} + \frac{(y-y_0)^2}{a^2} = 1$ se o eixo real for paralelo ao eixo y



Exemplos

2. Determine os elementos da hipérbole $9x^2 - 4y^2 - 54x + 8y + 113 = 0$ e represente-a geometricamente.

Resolução:

Exemplos

2. $9x^2 - 4y^2 - 54x + 8y + 113 = 0$

Resolução:

Exercícios

3. Determine a equação da hipérbole de vértices $A_1(1, -2)$ e $A_2(5, -2)$ sabendo que um de seus focos está no ponto $F(6, -2)$.

Resolução:

Exercícios

Exercícios

4. Determine a equação da hipérbole que tem um dos vértices reais em $V_1(2,-1)$ e retas assíntotas $y = 4x - 7$ e $y = -4x + 9$.

Resolução:

Exercícios

Exercícios

5. Com focos em $F_1(2-\sqrt{5},1)$ e $F_2(2+\sqrt{5},1)$, determine a equação da hipérbole que passa por $(3,1)$ e identifique seus elementos.

Resolução:

Exercícios

Exercícios

6. Determine a equação da cônica em que um dos vértices é o foco da parábola $y^2 + 2y - 8x + 25 = 0$, um dos focos é o vértice dessa parábola e o centro da cônica está sobre a diretriz da parábola.

Resolução:

Exercícios

Exercícios

Tarefa

Todos os Exercícios da Lista 2.

Bibliografia

BEZERRA, L. H.; COSTA E SILVA, I.P. **Geometria analítica**. 2. ed. – Florianópolis: UFSC/EAD/CED/CFM, 2010. Disponível em http://mtmgrad.paginas.ufsc.br/files/2014/04/Geometria-Anal%C3%ADtica.pdf. Acesso 12/02/2020.

DELGADO, Jorge; FRENSEL, Katia; CRISSAFF, Lhaylla. **Geometria analítica**. Rio de Janeiro: SBM, 2013. (Coleção PROFMAT).

NICOLLETTI, Larissa Parizotto. **Cone de Apolônio**: História, Matemática e Material Concreto. 2017. TCC (Graduação)-Universidade do Estado de Santa Catarina, Curso de Licenciatura de Matemática, Joinville, 2017.

SILVA FILHO, L. E. **Cônicas**: apreciando uma obra prima da matemática. 2015. 141p. Dissertação - (mestrado) - Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, 2015.Disponível em: <https://goo.gl/5hr0s8>. Acesso em: 04 maio 2017.

SIQUEIRA, P. H.; COSTA, A. M. **Cônicas**. 2. ed. 2012. Material Didático. Disponível em: <https://goo.gl/QbK6et>. Acesso em: 08 jun. 2017.

STEINBRUCH, A.; WINTERLE, P. **Geometria analítica**. 2. ed. São Paulo: Pearson Makron Books, 1987.

VENTURI, J. J. **Cônicas e quádricas**. 5. ed. Curitiba: Unificado, 2003.

OBRIGADA!