UNIVERSIDADE DO ESTADO DE SANTA CATARINA
Centro de Ciências Tecnológicas - CCT - Joinville
Departamento de Matemática

Lista 6 - Superfícies - Geometria Analítica

Professoras: Débora, Elisandra, Graciela e Katiani

Nos exercícios 1 ao 18 identifique e represente geometricamente as superfícies dadas pelas equações:

1. $4y^2 + 9z^2 = 36$
2. $x^2 - 4y^2 = 16$
3. $y = x^2 - 9$
4. $x - y = 0$
5. $x^2 + y^2 = 2y$
6. $z = e^y$
7. $x^2 + y^2 + z^2 = 25$
8. $4x^2 + 4y^2 + z^2 - 16 = 0$
9. $y^2 = x^2 + z^2$
10. $x^2 + z^2 - y = 2$
11. $x^2 - 4y^2 + 2z^2 = 8$
12. $x^2 + y^2 + z^2 = 0$
13. $4y^2 + z^2 - 4x = 0$
14. $-16x^2 + 9y^2 - z^2 = 144$
15. $z = x^2 - y^2$
16. $z = 1 + \sqrt{1 - x^2 - y^2}$
17. $x^2 + y^2 - z^2 + 18z - 81 = 0$
18. $z = 9 - \sqrt{x^2 + y^2}$
19. Considere a função $z = f(x, y)$. Os gráficos no plano xy das equações $f(x, y) = k$, sendo k um número real, são chamados curvas de nível associadas à função f. Seja $f(x, y) = -x^2 + y^2$. Esboce e identifique as curvas de nível da função f para $k = -4$, $k = -1$, $k = 0$, $k = 1$ e $k = 4$.
20. Determinar a equação do lugar geométrico dos pontos de $\mathbb{R}^3$ cujas soma das distâncias aos pontos $A(1, 2, -1)$ e $B(1, 4, -1)$ é 4. Identifique este conjunto de pontos.
21. Encontre a equação da superfície esférica que passa pelos pontos $A(0, 0, 1)$, $B(0, 1, 0)$ e $C(1, 0, 0)$ e cujo centro está no plano $\pi : \ x + y - z = 0$.
22. Determine a equação da superfície esférica que tem centro na reta $r : \begin{cases} x = 2z - 3 \\ y = z - 1 \end{cases}$ e passa pelos pontos $A(6, -1, 3)$ e $B(0, 7, 5)$.
23. Considere a superfície de equação $x^2 + y^2 - z^2 = k$, onde k é uma constante real.
    (a) Classifique as superfícies obtidas quando
        i. $k < 0$
        ii. $k = 0$
        iii. $k > 0$
    (b) Para $k = 4$ encontre e identifique as interseções da superfície dada com os planos coordenados e com os planos $z = 4$ e $z = -4$.
    (c) Para $k = 4$ represente geometricamente a superfície dada.
24. Encontre a equação do elipsoide com centro na origem, um dos vértices em $(1, 0, 0)$ e a interseção com o plano $x = \frac{1}{2}$ seja a curva $\frac{y^2}{3} + \frac{z^2}{12} = 1$.
25. Identifique e represente a curva: $\begin{cases} z &= x^2 + y^2 \\ z &= 4 \end{cases}$

26. Represente a superfície cônica de vértice $V(0,0,5)$ e cuja diretriz é a curva: $\begin{cases} z &= x^2+y^2 \\ z &= 4 \end{cases}$

27. Represente a superfície cônica de vértice $V(0,0,2)$ e cuja diretriz é a curva: $\begin{cases} 9x^2+4y^2 &= 36 \\ z &= 4 \end{cases}$

28. Represente geometricamente, no primeiro octante, as curvas de interseção dos seguintes cilindros:

    (a) $y^2+4z^2=16$ e $2x+3z=6$.

    (b) $z=x^2$ e $x=y^2$.

    (c) $x^2+y^2=2y$ e $x^2+z^2=2z$.

29. Determine os três cilindros projetantes das curvas de interseção das superfícies abaixo e construa, no primeiro octante (quando for possível), a curva dada pela interseção de dois dos cilindros. Caso não seja possível no primeiro, escolha outro. A seguir parametrize a curva dada pelo sistema escolhido.

    (a) $x^2+y+3z=12$ e $x^2-y-z=-4$.

    (b) $x^2+2y^2+z^2=2$ e $x^2-y^2-2z^2+1=0$.

    (c) $x^2+2y^2+z=10$ e $-2x^2-y^2+z=1$.

    (d) $x+z^2=4$ e $x=3z^2+y^2$.

30. Escreva as seguintes superfícies em coordenadas cilíndricas e esféricas:

    (a) $5x+4y=0$

    (b) $-x^2-y^2+z^2=4$

    (c) $x^2+y^2-z^2=0$

    (d) $x^2+y^2=9$

    (e) $z=4$

    (f) $x^2+y^2+z^2=25$

31. Identifique as seguintes curvas:

    (a) $\begin{cases} z=2 \\ r=4 \end{cases}$ dada em coordenadas cilíndricas

    (b) $\begin{cases} z=4 \\ \theta=\dfrac{\pi}{4} \end{cases}$ dada em coordenadas cilíndricas

    (c) $\begin{cases} r=2 \\ \theta=\dfrac{\pi}{3} \end{cases}$ dada em coordenadas cilíndricas

    (d) $\begin{cases} \rho=4 \\ \phi=\dfrac{\pi}{4} \end{cases}$ dada em coordenadas esféricas

32. Considere as seguintes superfícies dadas em coordenadas cilíndricas por:

$$S_1: z=-1+r, \qquad S_2: z=\sqrt{r^2-1}, \qquad S_3: z=7-r^2.$$

    (a) Identifique estas superfícies.

    (b) Represente geometricamente o sólido delimitado inferiormente por S_1, lateralmente por S_2 e superiormente por S_3.

33. As superfícies $S_1: \phi=\dfrac{\pi}{3}$ e $S_2: \rho^2\sin^2\phi-2\rho^2\cos^2\phi=1$ estão em coordenadas esféricas.

(a) Obtenha as equações das superfícies S_1 e S_2 em coordenadas cartesianas e identifique-as.

(b) Obtenha as equações das superfícies S_1 e S_2 em coordenadas cilíndricas.

(c) Esboce a(s) curva(s) $C = S_1 \cap S_2$.

34. As superfícies $S_1 : \ z = \dfrac{\sqrt{3}r}{3}$ e $S_2 : \ z = \sqrt{\dfrac{r^2+1}{4}}$ estão em coordenadas cilíndricas.

(a) Obtenha as equações das superfícies S_1 e S_2 em coordenadas cartesianas e identifique-as.

(b) Use a item (a) para encontrar as equações das superfícies S_1 e S_2 em coordenadas esféricas.

(c) Represente geometricamente o sólido delimitado inferiormente por S_1 e superiormente por S_2.

35. Represente geometricamente o sólido que satisfaz as condições: $\begin{cases} 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ 0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{6} \\ 0 \leq \rho \leq 3 \end{cases}$.

Respostas:

1. Cilindro elíptico com geratriz o eixo x
2. Cilindro hiperbólico com geratriz o eixo z
3. Cilindro parabólico com geratriz o eixo z
4. Plano paralelo ao eixo z.
5. Cilindro circular com diretriz $x^2 + y^2 = 2y$ e geratriz o eixo z
6. Cilindro com diretriz $z = e^y$ e geratriz o eixo x
7. Esfera $C(0, 0, 0)$
8. Elipsóide $C(0, 0, 0)$
9. Cone ao longo do eixo y $V(0, 0, 0)$
10. Paraboloide circular com $V(0, -2, 0)$ ao longo do eixo y
11. Hiperboloide de uma folha ao longo de y com $C(0, 0, 0)$
12. Ponto $(0, 0, 0)$
13. Paraboloide elíptico ao longo do eixo x
14. Hiperboloide de duas folhas ao longo do eixo y
15. Paraboloide Hiperbólico no eixo z com $V(0, 0, 0)$
16. Meia esfera ou calota superior da esfera $C(0, 0, 1)$ e raio 1
17. Cone ao longo do eixo z com $V(0, 0, 9)$

18. Folha inferior de cone ao longo do eixo z com $V(0,0,9)$

19. $k=-4$ e $k=-1$: hipérboles com eixo real x; $k-0$: duas retas; $k=1$ e $k=4$: hipérboles com eixo real y

20. $\frac{(x-1)^2}{3}+\frac{(y-3)^2}{4}+\frac{(z+1)^2}{3}=1$ elipsóide com $C(1,3,-1)$

21. $x^2+y^2+z^2=1$

22. $(x+7)^2+(y+3)^2+(z+2)^2=198$

23. (a) i. hiperboloide de 2 folhas em z;
    ii. cone em z;
    iii. hiperboloide de 1 folha em z

    (b) .

    (c) hiperboloide de 1 folha em z

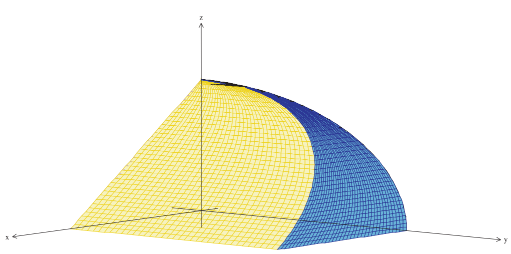
24. $x^2+\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{16}=1$

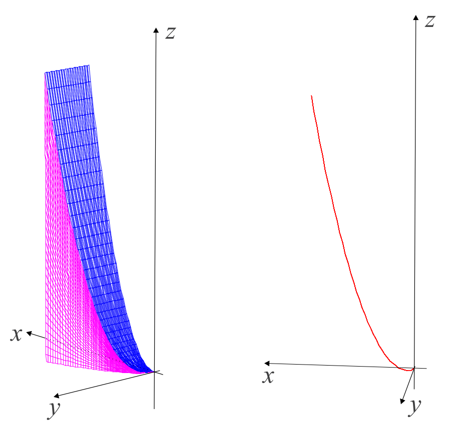
25. Circunferência de raio 2 em $z=4$

26. Equação do cone circular: $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{4}-(z-5)^2=0$

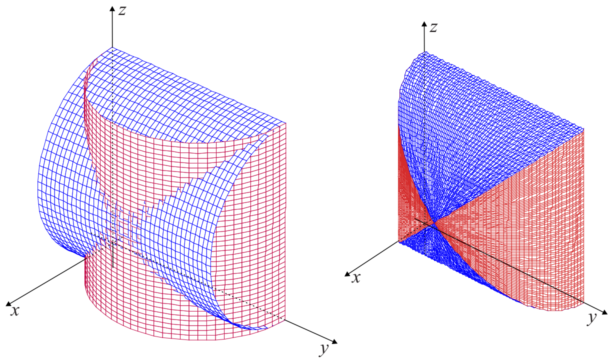
27. Equação do cone elíptico: $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}-\frac{(z-2)^2}{4}=0$

28. .

    (a) 

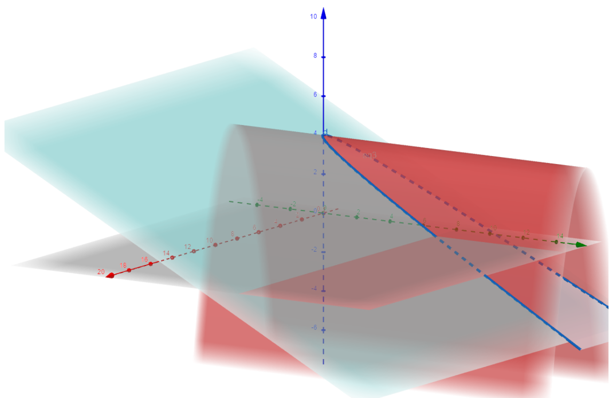
    (b) 

(c)

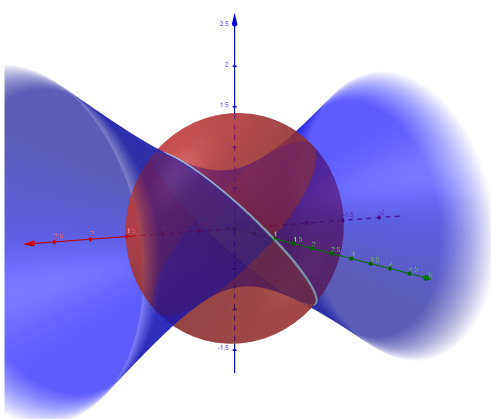


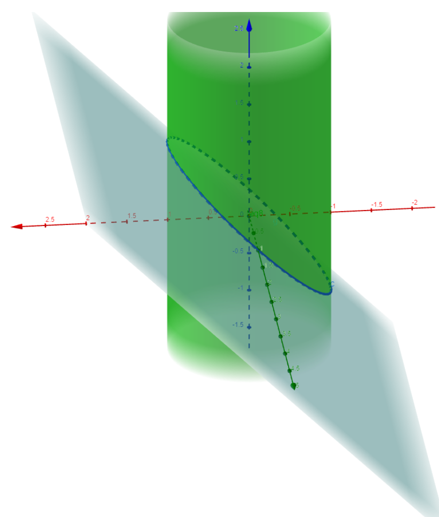
29. .

(a) $C_1 : x^2 + z = 4;\;\; C_2 : y + 2z = 8;\;\; C_3 : 2y - x^2 = 12$



(b) $C_1 : x^2 + y^2 = 1;\;\; C_2 : y^2 + z^2 = 1;\;\; C_3 : z = \pm x$





(c) $C_1 : x^2 + y^2 = 3;\;\; C_2 : y^2 + z = 7;\;\; C_3 : -x^2 + z = 4$

(d) $C_1 : x + z^2 = 4;\;\; C_2 : y^2 + 4z^2 = 4;\;\; C_3 : 2x - y^2 = 4$

30. .

(a) $\tan\theta = -\frac{5}{4};\;\; \tan\theta = -\frac{5}{4}.$

(b) $-r^2 + z^2 = 4;\;\; \rho^2(-\sin^2\phi + \cos^2\phi) = 4.$

(c) $r = z;\; \phi = \frac{\pi}{4}.$

(d) $r = 3;\;\; \rho\sin\phi = 3.$

(e) $z = 4;\;\; \rho\cos\phi = 4.$

(f) $r^2 + z^2 = 25;\;\; \rho = 5.$

31. .

(a) circunferência de $C(0,0,2)$ e raio 4 no plano $z=2$.

(b) reta $y=x$ no plano $z=4$

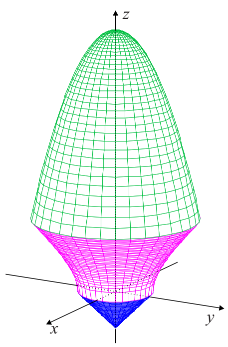
(c) 2 retas paralelas ao eixo z dadas pelas equações $\begin{cases} x=1 \\ y=\sqrt{3} \end{cases}$ e $\begin{cases} x=-1 \\ y=-\sqrt{3} \end{cases}$

(d) duas circunferências de $C(0,0,\pm 2\sqrt{2})$ e raio $2\sqrt{2}$ no plano $z=\pm 2\sqrt{2}$.

32. .

(a) S_1 : folha positiva do cone $x^2+y^2-(z+1)^2=0$ $(z \geq -1)$; S_2 : parte $z \geq 0$ do hiperboloide de uma folha $x^2+y^2-z^2=1$; $S_3 : z = 7-x^2-y^2$ paraboloide no eixo z com concavidade voltada para baixo e vértice $V(0,0,7)$

(b) .



33. .

(a) $S_1 : x^2+y^2-3z^2=0$ cone ao longo do eixo z com vértice na origem; $S_2 : x^2+y^2-2z^2=1$ hiperboloide de 1 folha ao longo do eixo z com centro na origem.

(b) $S_1 : r^2-3z^2=0$; $S_2 : r^2-2z^2=1$.

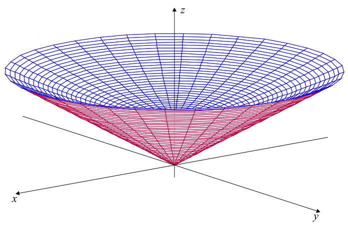
(c) circunferências nos planos $z=\pm 1$ de raio $\sqrt{3}$ com centro em $C(0,0,\pm 1)$

34. .

(a) $S_1 :\ z = \dfrac{\sqrt{3x^2+3y^2}}{3}$: folha $z \geq 0$ do cone $x^2+y^2-3z^2=0$ com vértice na origem ao longo do eixo z.
$S_2 :\ z = \sqrt{\dfrac{x^2+y^2+1}{4}}$: folha $z \geq 0$ do hiperboloide de duas folhas $4z^2-x^2-y^2=1$ com centro na origem ao longo do eixo z.

(b) $S_1 :\ \phi = \dfrac{\pi}{3}$
$S_2 :\ \rho = \dfrac{1}{\sqrt{4\cos^2\phi - \sin^2\phi}}$

(c) .



35. .