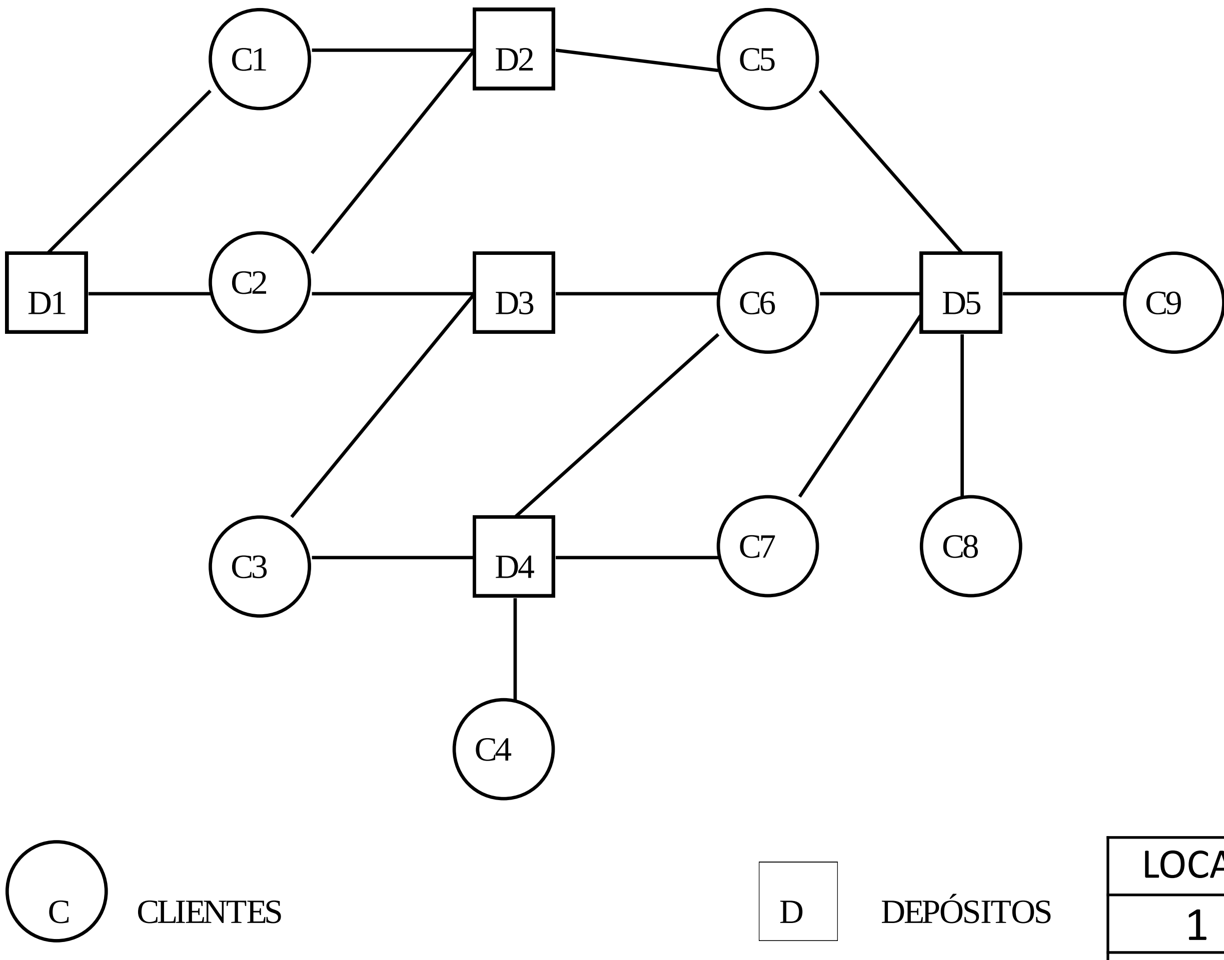
Programação Binária

- Quando as variáveis só podem assumir valor 0 ou 1

- Exemplo

  Existem 5 possíveis locais para o estabelecimento de depósitos, para o atendimento de 9 clientes. A possibilidade de atendimento aos clientes de cada depósito é mostrada na figura; o custo de estabelecer os depósitos para cada local, bem como o faturamento mensal esperado são mostrados na tabela. Dado que o orçamento é de 150, o objetivo é maximizar o retorno, satisfazendo todos os clientes sem estourar o orçamento. Formule o problema.

Programação Binária



LOCAL	CUSTO	FATURAMENTO
1	20	40
2	30	40
3	30	50
4	40	60
5	50	70

Programação Binária

Variáveis:

- x_j binário = 1 construir depósito no local j

  = 0 não construir depósito no local j

Objetivo: maximizar o retorno

- max $z = (40-20)x_1 + (40-30)x_2 + (50-30)x_3 + (60-40)x_4 + (70-50)x_5$

  $z = 20x_1 + 10x_2 + 20x_3 + 20x_4 + 20x_5$

Restrições:

- orçamento disponível
- todos os clientes devem ser atendidos

Programação Binária

- Restrições:

$20x_1 + 30x_2 + 30x_3 + 40x_4 + 50x_5 \leq 150$

$x_1 + x_2 \geq 1$	(cliente 1)
$x_1 + x_2 + x_3 \geq 1$	(cliente 2)
$x_3 + x_4 \geq 1$	(cliente 3)
$x_4 \geq 1$	(cliente 4)
$x_2 + x_5 \geq 1$	(cliente 5)
$x_3 + x_4 + x_5 \geq 1$	(cliente 6)
$x_4 + x_5 \geq 1$	(cliente7)
$x_5 \geq 1$	(clientes 8 e 9)

Programação Binária

Ordenando a FO em ordem decrescente de coeficiente:

max $z = 20x_1 + 20x_3 + 20x_4 + 20x_5 + 10x_2$

Acertando as restrições

$20x_1 + 30x_3 + 40x_4 + 50x_5 + 30x_2 \leq 150$

$-x_1 - x_2 \leq -1$

$-x_1 - x_3 - x_2 \leq -1$

$-x_3 - x_4 \leq -1$

$-x_4 \leq -1$

$-x_5 - x_2 \leq -1$

$-x_3 - x_4 - x_5 \leq -1$

$-x_4 - x_5 \leq -1$

$-x_5 \leq -1$

Renomeando as variáveis para maior conveniência:

$y_1 = x_1$

$y_2 = x_3$

$y_3 = x_4$

$y_4 = x_5$

$y_5 = x_2$

Teremos então:

$\max z = 20y_1 + 20y_2 + 20y_3 + 20y_4 + 10y_5$

Acertando as restrições

$20y_1 + 30y_2 + 40y_3 + 50y_4 + 30y_5 \leq 150$

$-y_1 - y_5 \leq -1$

$-y_1 - y_2 - y_5 \leq -1$

$-y_2 - y_3 \leq -1$

$-y_3 \leq -1$

$-y_4 - y_5 \leq -1$

$-y_2 - y_3 - y_4 \leq -1$

$-y_3 - y_4 \leq -1$

$-y_4 \leq -1$

Programação Binária

k	y_j	$\sum_{j=1}^{k} c_j y_j$	$\sum_{j=k+1}^{n} c_j$	Z_{est}	$\sum_{j=1}^{k} a_{ij} y_j$	$b_j - \sum_{j=k+1}^{n} min(0, aij), \forall i$	OK1	OK2	$Z*$
0									- ∝
1	1	20	70	90	(20,-1,-1, 0, 0, 0, 0, 0, 0)	(150, 0, 1, 1, 0, 1, 2, 1, 0)	ok	ok	

Programação Binária

k	y_j	$\sum_{j=1}^{k} c_j y_j$	$\sum_{j=k+1}^{n} c_j$	Z_{est}	$\sum_{j=1}^{k} a_{ij} y_j$	$b_j - \sum_{j=k+1}^{n} min(0, aij), \forall i$	OK1	OK2	$Z*$
0									- ∝
1	1	20	70	90	(20,-1,-1, 0, 0, 0, 0, 0, 0)	(150, 0, 1, 1, 0, 1, 2, 1, 0)	ok	ok	
2	1,1	40	50	90	(50,-1,-2,-1, 0, 0,-1, 0, 0)	(150, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 0)	ok	ok	

Programação Binária

k	y_j	$\sum_{j=1}^{k} c_j y_j$	$\sum_{j=k+1}^{n} c_j$	Z_{est}	$\sum_{j=1}^{k} a_{ij} y_j$	$b_j - \sum_{j=k+1}^{n} min(0, aij), \forall i$	OK1	OK2	$Z*$
0									- ∝
1	1	20	70	90	(20,-1,-1, 0, 0, 0, 0, 0, 0)	(150, 0, 1, 1, 0, 1, 2, 1, 0)	ok	ok	
2	1,1	40	50	90	(50,-1,-2,-1, 0, 0,-1, 0, 0)	(150, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 0)	ok	ok	
3	1,1,1	60	30	90	(90,-1,-2,-2,-1, 0,-2,-1, 0)	(150, 0, 0,-1,-1, 1, 0, 0, 0)	ok	ok	

Programação Binária

k	y_j	$\sum_{j=1}^{k} c_j y_j$	$\sum_{j=k+1}^{n} c_j$	Z_{est}	$\sum_{j=1}^{k} a_{ij} y_j$	$b_j - \sum_{j=k+1}^{n} min(0, aij), \forall i$	OK1	OK2	$Z*$
0									- ∝
1	1	20	70	90	(20,-1,-1, 0, 0, 0, 0, 0, 0)	(150, 0, 1, 1, 0, 1, 2, 1, 0)	ok	ok	
2	1,1	40	50	90	(50,-1,-2,-1, 0, 0,-1, 0, 0)	(150, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 0)	ok	ok	
3	1,1,1	60	30	90	(90,-1,-2,-2,-1, 0,-2,-1, 0)	(150, 0, 0,-1,-1, 1, 0, 0, 0)	ok	ok	
4	1,1,1,1	80	10	90	(140,-1,-2,-2,-1,-1,-3,-2,-1)	(150, 0, 0,-1,-1, 0,-1,-1,-1)	ok	ok	

Programação Binária

k	y_j	$\sum_{j=1}^{k} c_j y_j$	$\sum_{j=k+1}^{n} c_j$	Z_{est}	$\sum_{j=1}^{k} a_{ij} y_j$	$b_j - \sum_{j=k+1}^{n} min(0, aij), \forall i$	OK1	OK2	$Z*$
0									- ∝
1	1	20	70	90	(20,-1,-1, 0, 0, 0, 0, 0, 0)	(150, 0, 1, 1, 0, 1, 2, 1, 0)	ok	ok	
2	1,1	40	50	90	(50,-1,-2,-1, 0, 0,-1, 0, 0)	(150, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 0)	ok	ok	
3	1,1,1	60	30	90	(90,-1,-2,-2,-1, 0,-2,-1, 0)	(150, 0, 0,-1,-1, 1, 0, 0, 0)	ok	ok	
4	1,1,1,1	80	10	90	(140,-1,-2,-2,-1,-1,-3,-2,-1)	(150, 0, 0,-1,-1, 0,-1,-1,-1)	ok	ok	
5	1,1,1,1,1	90	0	90	(170,	(150,	ok	nao	

Programação Binária

k	y_j	$\sum_{j=1}^{k} c_j y_j$	$\sum_{j=k+1}^{n} c_j$	Z_{est}	$\sum_{j=1}^{k} a_{ij} y_j$	$b_j - \sum_{j=k+1}^{n} min(0, aij), \forall i$	OK1	OK2	$Z*$
0									- ∝
1	1	20	70	90	(20,-1,-1, 0, 0, 0, 0, 0, 0)	(150, 0, 1, 1, 0, 1, 2, 1, 0)	ok	ok	
2	1,1	40	50	90	(50,-1,-2,-1, 0, 0,-1, 0, 0)	(150, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 0)	ok	ok	
3	1,1,1	60	30	90	(90,-1,-2,-2,-1, 0,-2,-1, 0)	(150, 0, 0,-1,-1, 1, 0, 0, 0)	ok	ok	
4	1,1,1,1	80	10	90	(140,-1,-2,-2,-1,-1,-3,-2,-1)	(150, 0, 0,-1,-1, 0,-1,-1,-1)	ok	ok	
5	1,1,1,1,1	90	0	90	(170,	(150,	ok	nao	
5	1,1,1,1,0	80	0	80	(140,-1,-2,-2,-1,-1,-3,-2,-1)	(150,-1,-1,-1,-1,-1,-1,-1,-1)	ok	ok	80

Programação Binária

k	y_j	$\sum_{j=1}^{k} c_j y_j$	$\sum_{j=k+1}^{n} c_j$	Z_{est}	$\sum_{j=1}^{k} a_{ij} y_j$	$b_j - \sum_{j=k+1}^{n} min(0, aij), \forall i$	OK1	OK2	$Z*$
0									- ∝
1	1	20	70	90	(20,-1,-1, 0, 0, 0, 0, 0, 0)	(150, 0, 1, 1, 0, 1, 2, 1, 0)	ok	ok	
2	1,1	40	50	90	(50,-1,-2,-1, 0, 0,-1, 0, 0)	(150, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 0)	ok	ok	
3	1,1,1	60	30	90	(90,-1,-2,-2,-1, 0,-2,-1, 0)	(150, 0, 0,-1,-1, 1, 0, 0, 0)	ok	ok	
4	1,1,1,1	80	10	90	(140,-1,-2,-2,-1,-1,-3,-2,-1)	(150, 0, 0,-1,-1, 0,-1,-1,-1)	ok	ok	
5	1,1,1,1,1	90	0	90	(170,	(150,	ok	nao	
5	1,1,1,1,0	80	0	80	(140,-1,-2,-2,-1,-1,-3,-2,-1)	(150,-1,-1,-1,-1,-1,-1,-1,-1)	ok	ok	80
4	1,1,1,0	60	10	70			Não		
3	1,1,0	40	30	70			Não		
2	1,0	20	50	70			Não		
1	0,	0	70	70			Não		

Programação Binária

Resposta:

$x_1 = y_1 = 1$

$x_2 = y_5 = 0$

$x_3 = y_2 = 1$

$x_4 = y_3 = 1$

$x_5 = y_2 = 1$

$z = 80$