População infinita , vários canais. (M/M/k)

Aqui temos um sistema com mais de um canal de atendimento (com capacidades iguais), e a probabilidade de sistema ocioso é

$$P_0 = \frac{1}{\left[\sum_{n=0}^{n=k-1} \frac{1}{n!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n\right] + \frac{1}{k!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k \frac{k\mu}{k\mu - \lambda}}$$

onde

k = número de canais,

μ = taxa de atendimento de canal único

Probabilidade P_k de que uma chegada tenha que esperar, ou probabilidade de k ou mais unidades no sistema.

$$P_k = \frac{1}{k!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k \frac{k\mu}{k\mu - \lambda} P_0$$

Número esperado no sistema e na fila:

$$L = \frac{\lambda\mu(\lambda/\mu)^k}{(k-1)!(k\mu-\lambda)^2} P_0 + \frac{\lambda}{\mu}$$

$$L_q = \frac{\lambda\mu(\lambda/\mu)^k}{(k-1)!(k\mu-\lambda)^2} P_0$$

Tempo no sistema e na fila:

$$W = \frac{\mu(\lambda/\mu)^k}{(k-1)!(k\mu-\lambda)^2} P_0 + \frac{1}{\mu}$$

$$W_q = \frac{\mu(\lambda/\mu)^k}{(k-1)!(k\mu-\lambda)^2} P_0$$

Considerando o problema da copiadora, o que seria mais vantajoso, alugar mais uma máquina igual à já existente, ou trocar a maquina atual por uma única máquina maior? Os dados para os dois tipos de máquinas estão abaixo.

	μ	aluguel
maq. pequena	10	$ 5,00
maq. maior	15	$10,00

Para uma única máquina pequena, devemos adicionar o valor do aluguel ao custo diário de operação, assim, o custo total será

Custo total = $28,00 + $5,00 = $33,00

Para uma única máquina grande teremos

$$W = \frac{1}{\mu - \lambda} = \frac{1}{15 - 5} = 0{,}1 \text{ horas}$$

custo de operação = 0,1 $\times$ 3,50 $\times$ 8 $\times$5 = $14,00
custo total = 14,00 + 10,00 = $24,00

Para o caso de duas máquinas pequenas, teremos um sistema com população infinita e dois canais de atendimento. Calculando P_0

$$P_0 = \frac{1}{\left[\frac{1}{0!}\times\left(\frac{5}{10}\right)^0 + \frac{1}{1!}\times\left(\frac{5}{10}\right)^1\right] + \frac{1}{2!}\times\left(\frac{5}{10}\right)^2 \frac{2\times 10}{2\times 10 - 5}} = \frac{1}{1 + 0{,}5 + 0{,}167} = 0{,}6$$

O tempo no sistema W é

$$W = \frac{10\times(5/10)^2}{1!\times(2\times 10 - 5)^2}\times 0{,}6 + \frac{1}{10} = 0{,}107$$

O custo total nesse caso será

0,107×3,50×8×5 + 2×5 = $24,98 por dia

Seria um pouco menos caro usar uma única máquina grande

Um balcão de atendimento começa o expediente com um atendente. Sempre que mais de um cliente está esperando, é chamado mais um atendente para ajudar. Se a taxa de chegada é de 8 clientes por hora, qual a probabilidade de que seja necessário um segundo atendente ? A partir daí, qual a probabilidade algum cliente tenha que esperar ? Todos os atendentes tem um tempo médio de atendimento de 6 minutos por cliente.

1 canal = atendente

λ = 8/h

μ = 10 /h

populacao infinita

mais de um esperando => 2 na fila => 3 no sistema

$Pn = \rho^n$ $P = (8/10)^3 = 0{,}512$

Após chegar o 2º atendendente, k=2

Po = 0,4286
P2 = (1/2!) x (8/10)^2 x (2x10/(2x10-8))x0,43
P2 = 0,2293

Um posto de gasolina tem duas bombas. Um carro demora em média 5 minutos para ser abastecido, e o intervalo médio entre a chegada de um carro e outro é de 12 minutos.

a) Qual a ociosidade do sistema ?

b) Quantos carros há em média na fila?

c) Uma bomba seria suficiente para o atendimento ? Se sim, qual seria o aumento na espera dos carros

clientes = carros,
canal = bombas
$k=2$
pop infinita,
$\mu = 12/h$,
$\lambda = 5/h$,

a)

$$P0 = \frac{1}{\left[\frac{1}{0!}\times\left(\frac{5}{12}\right)^{0} + \frac{1}{1!}\times\left(\frac{5}{12}\right)^{1}\right] + \frac{1}{2!}\times\left(\frac{5}{12}\right)^{2}\frac{2\times 12}{2\times 12-5}} = \frac{1}{1+0{,}416+0{,}109} = 0{,}655$$

b)

$$Lq = \frac{\lambda\mu(\lambda/\mu)^{k}}{(k-1)!\,(k\mu-\lambda)^{2}}P0 = \frac{5\times 12\times(5/12)^{2}}{(2-1)!\times(2\times 12-5)^{2}}\times 0{,}655 = \frac{10{,}38}{361}\times 0{,}655 = 0{,}019$$

c) para duas bombas temos que :

$$Wq = \frac{\mu(\lambda/\mu)^{k}}{(k-1)!\,(k\mu-\lambda)^{2}}P0 = \frac{12\times(5/12)^{2}}{(2-1)!\times(2\times 12-5)^{2}}\times 0{,}655 = \frac{2{,}083}{361}\times 0{,}655 = 0{,}0037\ h = 0{,}22\ min$$

como $\lambda < \mu$ uma bomba seria suficiente e teríamos

$$Wq = \frac{\lambda}{\mu(\mu-\lambda)} = \frac{5}{12\times(12-5)} = 0{,}059h = 3{,}6\ min$$

A TELESC deseja instalar um posto telefônico em uma praça da cidade, e deseja que um cliente não tenha que esperar mais que 10% das vezes que tentar usar um aparelho. A demanda é estimada como de 30/h. Uma chamada dura em média 5 minutos. Quantos telefones devem ser instalados?

λ =30/hora

1/ μ = 5/60 ➔ μ = 12/hora

Se k = 2, 2 × μ = 24, que é menor do que a taxa de chegada. Devemos ter pelo menos três telefones para atender a demanda.

Tentemos k = 5.

$$P_0 = \frac{1}{\left[\sum_{n=0}^{n=5-1} \frac{1}{n!}\left(\frac{30}{12}\right)^n\right] + \frac{1}{5!}\left(\frac{30}{12}\right)^5 \frac{5\times 12}{5\times 12 - 30}}$$
$$= \frac{1}{1 + 2{,}5 + \frac{1}{2!}\times 2{,}5^2 + \frac{1}{3!}\times 2{,}5^3 + \frac{1}{4!}\times 2{,}5^4 + \frac{1}{5!}\times 2{,}5^5 \times \frac{60}{30}}$$
$$= 0{,}0801$$

O cliente terá que esperar se houver mais do que 5 clientes no sistema, já que temos 5 canais de atendimento. Devemos encontrar P_5.

$$P_5 = \frac{1}{5!}\left(\frac{30}{12}\right)^5 \times \frac{5\times 12}{5\times 12 - 30} \times 0{,}0801 = 0{,}13$$

Isto nos da uma probabilidade de 0,13 de que um cliente tenha que esperar, que é maior do que a desejada (0,10)

Tentemos k= 6.

$$P_0 = \frac{1}{\left[\sum_{n=0}^{n=-1} \frac{1}{n!}\left(\frac{30}{12}\right)^n\right] + \frac{1}{6!}\left(\frac{30}{12}\right)^6 \frac{6\times 12}{6\times 12 - 30}}$$

$$= \frac{1}{1 + 2{,}5 + \frac{1}{2!}\times 2{,}5^2 + \frac{1}{3!}\times 2{,}5^3 + \frac{1}{4!}\times 2{,}5^4 + \frac{1}{5!}\times 2{,}5^5 + \frac{1}{6!}\times 2{,}5^6 \times \frac{72}{42}}$$

$$= 0{,}08162$$

$$P_6 = \frac{1}{6!}\left(\frac{30}{12}\right)^6 \times \frac{6\times 12}{6\times 12 - 30} \times 0{,}08162 = 0{,}047$$

Assim, a instalação de 6 telefones leva a uma probabilidade de 5% de espera para o cliente.