EXERCÍCIOS - PESQUISA OPERACIONAL

1. FORMULAÇÃO

Ex. 1.1

Um fabricante produz duas ligas metálicas, e quer maximizar o lucro obtido com sua venda. A tabela mostra as composições das ligas, os lucros e as disponibilidades de matéria prima para fabricação dessas ligas. Formule o problema como de PL.

	liga A	liga B	Disponib.
cobre	2	1	16
zinco	1	2	11
chumbo	1	3	15
lucro/ un.	30	50	

Ex. 1.2

Um fazendeiro deseja otimizar as plantações de arroz e milho na sua fazenda. O seu lucro por unidade de área plantada de arroz é 5 u.m., e por unidade de área plantada de milho é 2 u.m.As áreas plantadas de arroz e milho não devem ser maiores que 3 e 4 respectivamente. Cada unidade de área plantada de arroz consome 1 homem-hora,e cada unidade de área plantada de milho consome 2 homens-hora. Há disponibilidade total de 9 homens-hora para as plantações.

Ex. 1.3

Uma empresa fabrica produtos 1 e 2. Cada produto requer um tempo de processamento em cada um dos tres departamentos da empresas. Os lucros de cada produto são respectivamente $1,00 e $1,50. Maximizar o lucro, respeitando a capacidade de produção.

Tempo de processamento em horas

	Departamentos		
Produto	A	B	C
1	2	1	4
2	2	2	2

Disponibilidade em horas

A	160
B	120
C	280

Ex. 1.4

Uma fornalha é usada para produzir 4000 kg de uma liga metálica, que deve ter as seguintes características:

%	mínima	máxima
Si	3,25	3,4
C	2,05	2,25

As matérias primas disponíveis para produzir a liga são:

Materia prima	%C	%Si	Custo/kg
Sucata A	0,45	0,1	0,30
Sucata B	0,402	0,15	0,315
Sucata C	3,5	2,3	0,034
Sucata D	3,30	2,2	0,02
Carbono	100	0	0,3
Silício	0	100	0,5

Formule de modo a minimizar o custo de produção da liga.

Ex. 1.5

Uma empresa faz 3 produtos, a partir de 3 matérias-primas os dados estão na tabela. Observe que a fabricação do produto 2 gera um resíduo que pode ser usado como matéria-prima do tipo2, e a fabricação do produto 3 gera um resíduo que pode ser usado com matéria-prima do tipo 1. Dado que o objetivo é maximizar o lucro, formular como um problema de programação linear (P.L.)

	PRODUTOS			
Recurso	1	2	3	Disponib.
1	6	3	--	60
2	2	--	4	40
3	3	3	3	60
Residuo 1	--	--	4	
Residuo 2	--	4	--	
Lucro	3	2	6	

Ex. 1.6

Uma empresa produz quatro produtos, cujo lucro é respectivamente 4,5,9 e 11. Esses produtos utilizam 3 insumos segundo a tabela. Dado que o objetivo é maximizar o lucro, formule o problema

	Insumo 1	Insumo 2	Insumo 3
Produto 1	1	7	3
Produto 2	1	5	5
Produto 3	1	3	10
Produto 4	1	2	15
Disponib.	15	120	100

Ex. 1.7

As necessidades minimas diárias de certas vitaminas, bem como a quantidade fornecida por varios tipos de alimentos e seus preços encontram-se na tabela a seguir. Determine as quantidades de cada alimento a ser ingeridas diariamente, ao minimo custo possivel.

Vitamina	leite (l)	carne (kg)	ovos (dúzia)	Quant. mínima
A	0,25	2	10	1
C	25	20	10	50
D	2,5	200	10	10
Custo	2,2	17	4,2	

Ex. 1.8

Uma fazenda deve comprar grãos para compor uma ração para o gado; existem tres tipos de grão. As necessidades mínimas de nutrientes, os níveis desses nutrientes em cada tipo de grão e seus custos estão na tabela. Determinar a composição da mistura de grãos para satisfazer as necessidades mínimas dos nutrientes ao mínimo custo.

	Nutrientes / unidade			
	Grão 1	Grão 2	Grão 3	Nec. minimas
Nutr. A	2	3	7	1250
Nutr. B	1	1	0	250
Nutr. C	5	3	0	900
Nutr. D	0,6	0,25	1	232
Custo/ unidade	41	35	96	

Ex. 1.9

Uma refinaria produz 2 tipos de gasolina (1 e 2) a partir de 2 tipos de petróleo (A e B). Os requisitos, preços de venda e custos são:

Petróleo	Qtd disp	custo	Gasolina	% mín de A	Preço venda
A	100	6	1	60	8
B	200	3	2	30	5

Formular, de modo a decidir quanto comprar de A e B e quanto fabricar de 1 e 2, maximizando o lucro.

Ex. 1.10

A Politoy S/A fabrica soldados e trens de madeira. Cada soldado é vendido por $27 e utiliza $10 de matéria-prima e $14 de mão-de-obra. Duas horas de acabamento e 1 hora de carpintaria são demandadas para produção de um soldado. Cada trem é vendido por $21 e utiliza $9 de matéria-prima e $10 de mão-de-obra. Uma hora de acabamento e 1 h de carpintaria são demandadas para produção de um trem. A disponibilidade de horas para as operações de acabamento e carpintaria são 100 e 80 horas, respectivamente. Devido a problemas de demanda, não devem ser produzidas mais do que 40 unidades de soldados. Formular o problema, de modo a maximizar o lucro.

2. SOLUÇÃO GRÁFICA

Ex. 2.1

max $z = 30x_1 + 50x_2$

$$\text{S.A.} \begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 16 \\ x_1 + 2x_2 \leq 11 \\ x_1 + 3x_2 \leq 15 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Ex. 2.2

max $z = 5x_1 + 2x_2$

$$\text{S. A.} \begin{cases} x_1 \leq 3 \\ x_2 \leq 4 \\ x_1 + 2x_2 \leq 9 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Ex. 2.3

max $z = 4x_1 + 2x_2$

$$\text{S. A.} \begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 12 \\ x_1 \leq 8 \\ x_2 \leq 4 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Ex. 2.4

max $z = x_1 + 2x_2$

$$\text{S.A.} \begin{cases} -x_1 + 3x_2 \leq 9 \\ x_1 - 2x_2 \leq 0 \\ 2x_1 + x_2 \leq 10 \\ 2x_1 + x_2 \geq 5 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Ex. 2.5

max $z = 2x_1 + 3x_2$

$$\text{S. A.} \begin{cases} -4x_1 + 2x_2 \leq 8 \\ -4x_1 + 4x_2 \geq 4 \\ x_1 + x_2 \geq 5 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Ex. 2.6

max $z = 2x_1 + x_2$

$$\text{S. A.} \begin{cases} x_1 - x_2 \leq 0 \\ x_2 \leq 2 \\ x_1 + 2x_2 \geq 8 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Ex. 2.7

max $z = 2x_1 + 2x_2$

$$\text{S.A.} \begin{cases} x_1 + x_2 \leq 10 \\ x_1 + 2x_2 \geq 8 \\ -x_1 + x_2 = 2 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Ex. 2.8

max $z = 3x_1 + 2x_2$

$$\text{S.A.} \begin{cases} 2x_1 + 1x_2 \leq 100 \\ x_1 + 1x_2 \leq 80 \\ x_1 \leq 40 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Ex. 2.9

max $z = 2x_1 - x_2$

$$\text{S. A.} \begin{cases} x_1 - x_2 \leq 1 \\ 2x_1 + x_2 \leq 6 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

3. SIMPLEX

Ex. 3.1

Resolver **Ex. 2.1** por SIMPLEX

Ex. 3.2

Resolver **Ex. 2.2** por SIMPLEX

Ex. 3.3

Resolver **Ex. 2.3** por SIMPLEX

Ex. 3.4

max $z = 3x_1 + 2x_2 + 6x_3$

$$\text{S. A.} \begin{cases} 6x_1 + 3x_2 - 4x_3 \leq 60 \\ 2x_1 - 4x_2 + 4x_3 \leq 40 \\ 3x_1 + 3x_2 + 3x_3 \leq 60 \\ x_1, \ x_2, \ x_3 \geq 0 \end{cases}$$

Ex. 3.5

Resolver **Ex. 1.10** por SIMPLEX

Ex. 3.6

Resolver Ex. 2.4 por SIMPLEX
Repita, minimizando

Ex. 3.7

Resolver Ex. 2.5 por SIMPLEX

Ex. 3.8

Resolver Ex. 2.6 por SIMPLEX

Ex. 3.9

Resolver Ex. 2.7 por SIMPLEX

Ex. 3.10

max $z = 3x_1 + 2x_2$

$$\text{S.A.} \begin{cases} 2x_1 + x_2 \geq 4 \\ x_1 - 2x_2 = 0 \\ x_1 + 2x_2 \leq 8 \\ x_1, x_2 \geq 0; \end{cases}$$

Ex. 3.11

max $z = x_1 + 1{,}5\, x_2$

$$\text{S.A.} \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 \le 160 \\ x_1 + 2x_2 \le 120 \\ 4x_1 + 2x_2 \le 280 \\ x_2 \ge 45 \\ x_1 = 25 \end{cases}$$

Ex. 3.12

min $z = 5x_1 + 8x_2 + 4x_3$

$$\text{S.A.} \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \ge 2 \\ x_1 + x_2 \ge 1 \\ x_1, x_2, , x_3 \ge 0 \end{cases}$$

Ex. 3.13

max $z = 3x_1 - x_2$

$$\text{S.A.} \begin{cases} 2x_1 - x_2 \ge 0 \\ x_2 \ge 2 \\ x_2 \le 4 \\ x_1 + 2\, x_2 \ge 12 \\ x_1, x_2 \ge 0; \end{cases}$$

Ex. 3.14

max $z = 2\, x_1 + x_2$

$$\text{S.A} \begin{cases} x_1 \le 10 \\ x_1 \ge 5 \\ x_2 \le 20 \\ x_2 \ge 10 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

Ex. 3.15

min $z = x_1 + x_2 + x_3$

$$\text{S.A.} \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \le 10 \\ x_1 + x_2 \ge 20 \\ x_1 + x_3 \ge 5 \\ x_1, x_2, , x_3 \ge 0 \end{cases}$$

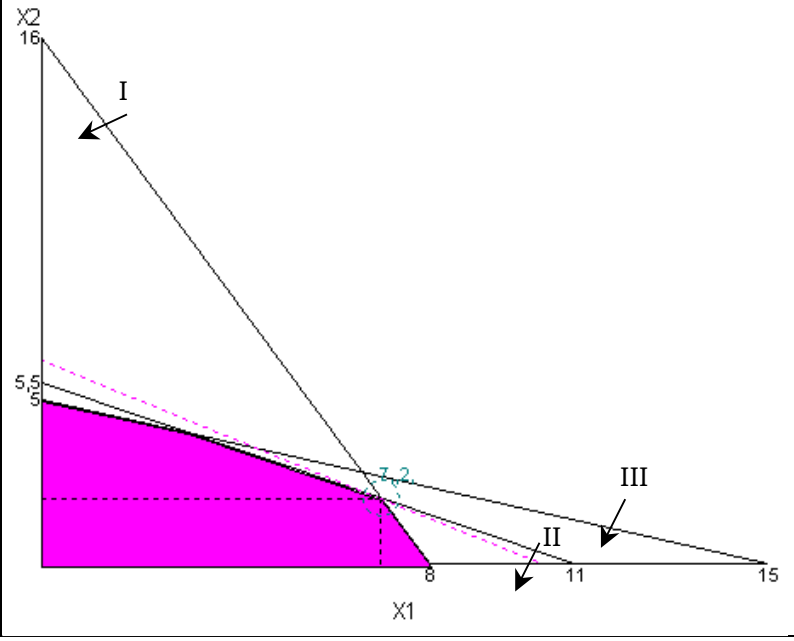
RESPOSTAS LISTA 1

Ex. 1.1	Objetivo : maximizar o lucro Restrições : disponibilidade de matéria prima x_1 = quantidade da liga A a ser fabricada x_2 = quantidade da liga B a ser fabricada max $z = 30x_1 + 50x_2$ S.A. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 16 \text{ (cobre)} \\ x_1 + 2x_2 \leq 11 \text{ (zinco)} \\ x_1 + 3x_2 \leq 15 \text{ (chumbo)} \\ x_1 , x_2 \geq 0 \end{cases}$
Ex. 1.2	objetivo: maximizar o lucro restrições: área máxima, mão de obra x_1 = área plantada de arroz x_2 = área plantada de milho max $z = 5x_1 + 2x_2$ S. A . $\begin{cases} x_1 \leq 3 \text{ (área de arroz)} \\ x_2 \leq 4 \text{ (área de milho)} \\ x_1 + 2x_2 \leq 9 \text{ (mão de obra)} \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$
Ex. 1.3	objetivo: maximizar o lucro restrições: horas disponíveis nos departamentos x_1 = quantidade do produto 1 a ser fabricado x_2 = quantidade do produto 2 a ser fabricado max $z = x_1 + 1{,}5x_2$ S. A . $\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 \leq 160 \\ x_1 + 2x_2 \leq 120 \\ 4x_1 + 2x_2 \leq 280 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$
Ex. 1.4	Objetivo: minimizar custo de produção Restrições: níveis de C e Si x_1 = quantidade de sucata A a ser usada, em kg x_2 = quantidade de sucata B a ser usada, em kg x_3 = quantidade de sucata C a ser usada, em kg x_4 = quantidade de sucata D a ser usada, em kg x_5 = quantidade de carbono a ser usada, em kg x_6 = quantidade de silicio a ser usada, em kg min $z = 0{,}3x_1 + 0{,}315x_2 + 0{,}034x_3 + 0{,}02x_4 + 0{,}3x_5 + 0{,}5x_6$ (custo total) S.A. $0{,}0045x_1 + 0{,}00402x_2 + 0{,}035x_3 + 0{,}033x_4 + x_5 \geq 0{,}0205.4000$ (% min carbono) $0{,}0045x_1 + 0{,}00402x_2 + 0{,}035x_3 + 0{,}033x_4 + x_5 \leq 0{,}0225.4000$ (% max carbono) $0{,}001x_1 + 0{,}0015x_2 + 0{,}023x_3 + 0{,}022x_4 + x_6 \geq 0{,}0325.4000$ (% min silício) $0{,}001x_1 + 0{,}0015x_2 + 0{,}023x_3 + 0{,}022x_4 + x_6 \leq 0{,}034.4000$ (% max silício) $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 4000$ (quantidade total a ser feita) $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0$

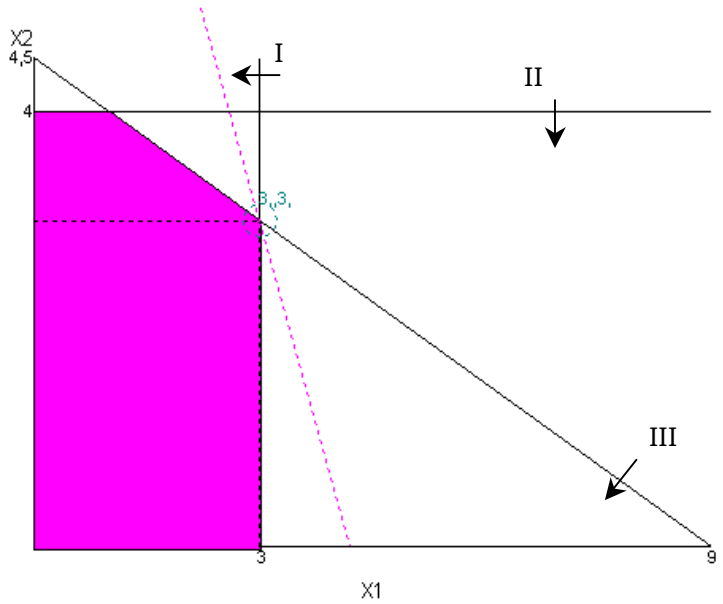
Ex. 1.5	maximizar o lucro restrições: disponibilidade de matéria prima x_1 = quantidade produto 1 a ser fabricado x_2 = quantidade produto 2 a ser fabricado x_3 = quantidade produto 3 a ser fabricado max $z = 3x_1 + 2x_2 + 6x_3$ (lucro total) S.A. (matéria prima 1) $6x_1+3x_2 \leq 60+4x_3 \rightarrow 6x_1+3x_2 - 4x_3 \leq 60$ (matéria prima 2) $2x_1+4x_3 \leq 40+ 4x_2 \rightarrow 2x_1 - 4x_2 + 4x_3 \leq 40$ (matéria prima 3) $3x_1 + 3x_2 + 3x_3 \leq 60$ $x_1, x_2, x_3 \geq 0$
Ex. 1.6	Objetivo: maximizar o lucro Rerstrições : matéria prima x_1 = quantidade produto 1 a ser fabricada x_2 = quantidade produto 2 a ser fabricada x_3 = quantidade produto 3 a ser fabricada x_4 = quantidade produto 4 a ser fabricada max $z = 4x_1 + 5x_2 + 9x_3 + 11x_4$ S.A. $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 15$ (disponibilidade insumo 1) $7x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 2x_4 \leq 120$ (disponibilidade insumo 2) $3x_1 + 5x_2 + 10x_3 + 15x_4 \leq 100$ (disponibilidade insumo 3) $x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$
Ex. 1.7	Objetivo: minimizar custo Rerstrições : necessidades minimas diarias de vitaminas x_1 = quantidade de leite a ser comprada x_2 = quantidade de carne a ser comprada x_3 = quantidade de ovos a ser comprada min $z = 2{,}2x_1 + 17x_2 + 4{,}2x_3$ S.A . $0{,}25x_1 + 2x_2 + 10x_3 \geq 1$ $25x_1 + 20x_2 + 10x_3 \geq 50$ $2{,}5x_1 + 200x_2 + 10x_3 \geq 10$ $x_1, x_2, x_3 \geq 0$
Ex. 1.8	Objetivo: minimizar custo Restrições : quantidades minimas de nutrientes x_1 = quantidade grão 1 x_2 = quantidade grão 2 x_3 = quantidade grão 3 min $z = 41x_1 + 35x_2 + 96x_3$ S.A . $2x_1 + 3x_2 + 7x_3 \geq 1250$ $x_1 + x_2 \geq 250$ $5x_1 + 3x_2 \geq 900$ $0{,}6x_1 + 0{,}25x_2 + x_3 \geq 232$ $x_1, x_2, x_3 \geq 0$

Ex. 1.9	Objetivo: maximizar lucro Restrições : quantidades minima de petroleo A, disponibilidade de petroleo x_{A1} = Quantidade de petroleo A usado para fabricar gasolina tipo 1 x_{A2} = Quantidade de petroleo A usado para fabricar gasolina tipo 2 x_{B1} = Quantidade de petroleo B usado para fabricar gasolina tipo 2 x_{B2} = Quantidade de petroleo B usado para fabricar gasolina tipo 2 max $z = 8.(x_{A1} + x_{B1}) + 5.(x_{A2} + x_{B2}) - 6.(x_{A1} + x_{A1}) - 3.(x_{B1} + x_{B2})$ S.A. $x_{A1} + x_{A2} \leq 100$ (disponibilidade de petróleo A) $x_{B1} + x_{B2} \leq 200$ (disponibilidade de petróleo B) $x_{A1} / (x_{A1} + x_{B1}) \geq 0{,}6$ (proporção de petróleo A na gasolina 1) $x_{A2} / (x_{A2} + x_{B2}) \geq 0{,}3$ (proporção de petróleo A na gasolina 2) $x_{A1}, x_{A2}, x_{B1}, x_{B2} \geq 0$

Ex. 1.10	objetivo : maximizar lucro variáveis: x_1 = quantidade de soldados x_2 = quantidade de trens lucro de x_1 = 27 – (10 + 14) = 3 lucro de x_2 = 21 – (9 + 10) = 2	max $z = 3x_1 + 2x_2$ $2x_1 + x_2 \leq 100$ (acabamento) S.A. $1x_1 + x_2 \leq 80$ (carpintaria) $x_1 \leq 40$ (demanda) $x_1, x_2 \geq 0$

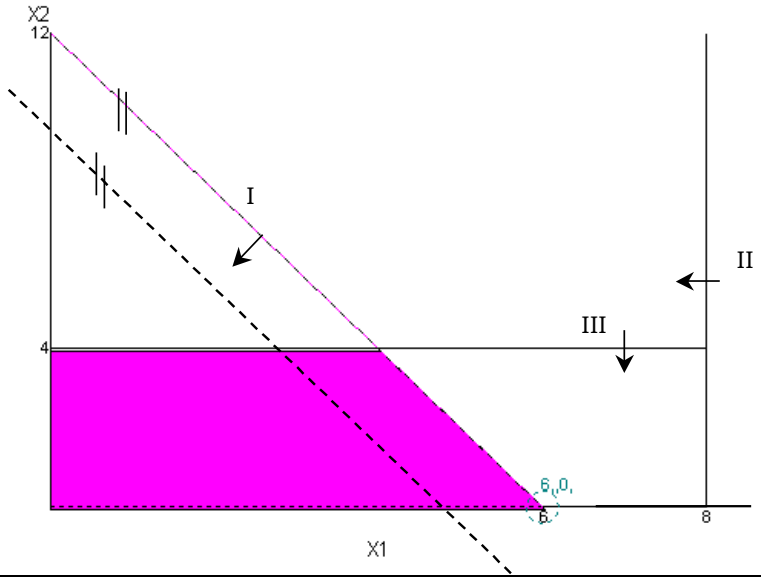
2.1		$x_1 = 7$ $x_2 = 2$ $z = 310$

Ex. 2.2



$x_1 = 3$
$x_2 = 3$
$z = 21$

Ex. 2.3



Múltiplas soluções

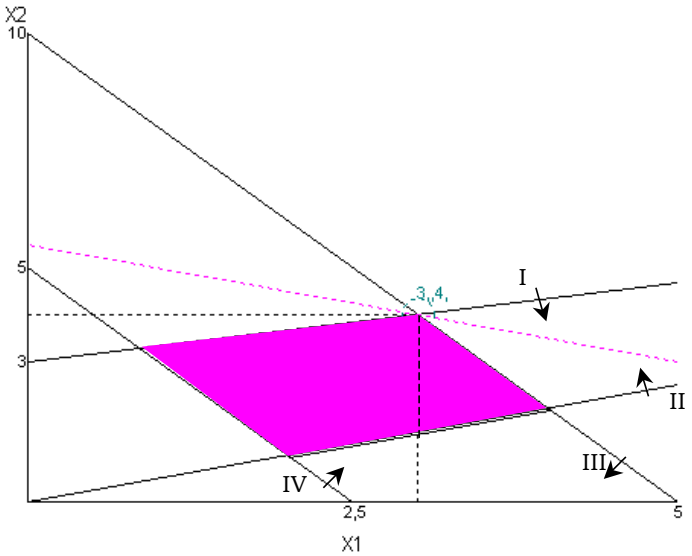
$x_1 = 4$
$x_2 = 4$

ou

$x_1 = 6$
$x_2 = 0$

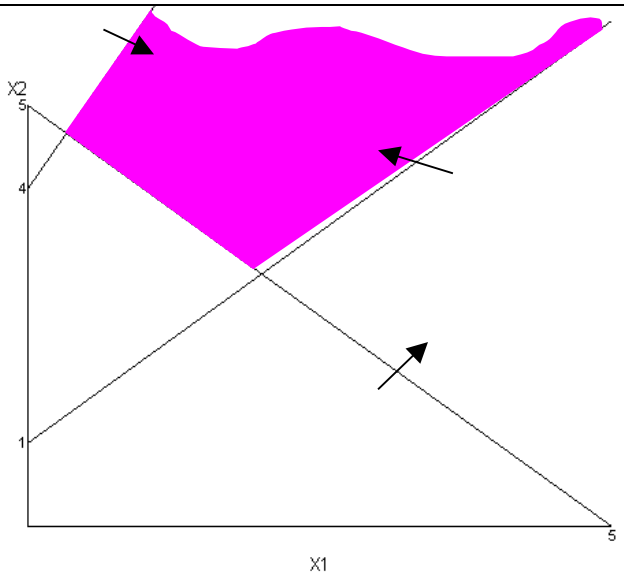
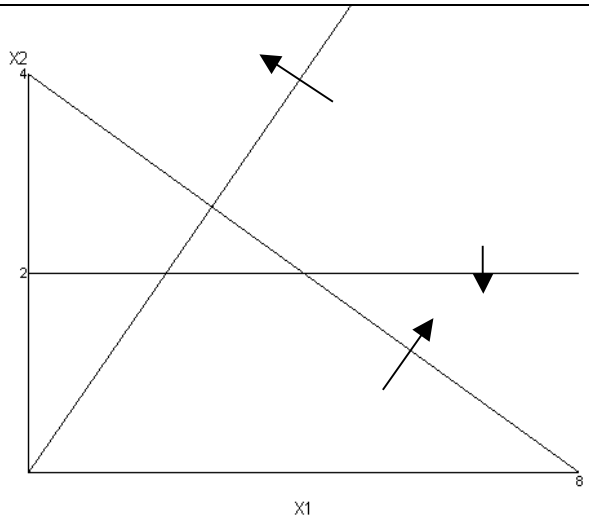
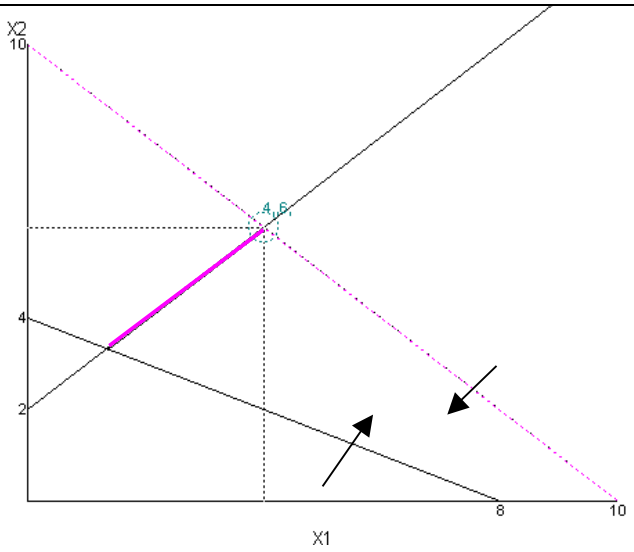
$z=24$

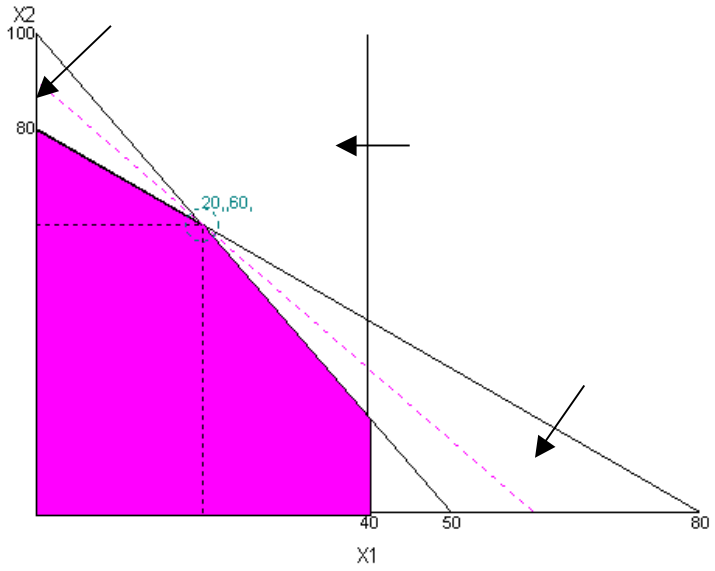
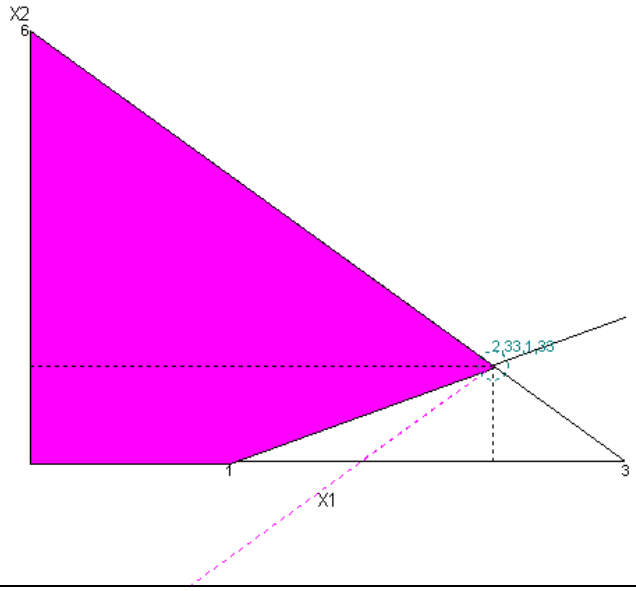
Ex. 2.4



$x_1 = 3$
$x_2 = 4$

$z=11$

Ex. 2.5		Solução ótima ilimitada
Ex. 2.6		Não há solução viável (não existe intersecção possível entre as restrições)
Ex. 2.7		$x_1 = 4$ $x_2 = 6$ $z = 20$

Ex. 2.8	
Ex. 2.9	 $x_1 = 2{,}33$ $x_2 = 1{,}33$ $z = 3{,}33$

Ex. 3.1

$x_1 = 7$ (quantidade liga 1)
$x_2 = 2$ (quantidade liga 2)
$x_3 = 0$ (sobra cobre)
$x_4 = 0$ (sobra zinco)
$x_5 = 2$ (sobra chumbo)

$z = 310$ (lucro)

Quadro final:

0	0	1/3	-5/3	1	2
1	0	2/3	-1	0	7
0	1	-1/3	2/3	0	2
0	0	10/3	70/3	0	310

Ex. 3.2

$x_1 = 3$ (área de arroz)
$x_2 = 3$ (área de milho)
$x_3 = 0$ (folga área de arroz)
$x_4 = 1$ (folga área de milho)
$x_5 = 0$ (folga mão de obra)

$z = 21$ (lucro)

Quadro final:

1	0	1	0	0	3
0	0	1/2	1	-1/2	1
0	1	-1/2	0	1/2	3
0	0	4	0	1	21

Ex. 3.3

Resposta1:
$x_1 = 6$
$x_2 = 0$
$x_3 = 0$
$x_4 = 2$
$x_5 = 4$
$z = 24$

1	1/2	1/2	0	0	6
0	-1/2	-1/2	1	0	2
0	1	0	0	1	4
0	0	2	0	0	24

Múltiplas soluções

Resposta2:
$x_1 = 4$
$x_2 = 4$
$x_3 = 0$
$x_4 = 4$
$x_5 = 0$
$z = 24$

1	0	1/2	0	-1/2	4
0	0	-1/2	1	1/2	4
0	1	0	0	1	4
0	0	2	0	0	24

Ex. 3.4

$x_1 = 0$
$x_2 = 5$
$x_3 = 15$
$x_4 = 105$
$x_5 = 0$
$x_6 = 0$
$z=100$

Quadro final:

33/4	0	0	1	7/8	1/6	105
3/4	0	1	0	1/8	1/6	15
1/4	1	0	0	-1/8	1/6	5
2	0	0	0	1/2	4/3	100

Ex. 3.5

$x_1 = 20$
$x_2 = 60$
$x_3 = 0$
$x_4 = 0$
$x_5 = 20$

$z = 180$

0	1	-1	2	0	60
0	0	-1	1	1	20
1	0	1	-1	0	20
0	0	1	1	0	180

Ex. 3.6

Max:
$x_1 = 3$
$x_2 = 4$
$x_3 = 0$
$x_4 = 5$
$x_5 = 0$
$x_6 = 5$
$Z = 11$

Quadro final max:

0	0	5/7	1	-1/7	0	5
1	0	-1/7	0	3/7	0	3
0	0	0	0	1	1	5
0	1	2/7	0	1/7	0	4
0	0	3/7	0	5/7	0	11

Min:
$x_1 = 2$
$x_2 = 1$
$x_3 = 8$
$x_4 = 0$
$x_5 = 5$
$x_6 = 0$
$Z = 4$

Quadro final min:

0	0	1	7/5	0	1/5	8
1	0	0	1/5	0	-2/5	2
0	0	0	0	1	1	5
0	1	0	-2/5	0	-1/5	1
0	0	0	3/5	0	4/5	- 4

Ex. 3.7

0	0	1	¾	-1	10
0	1	0	-1/8	-½	3
1	0	0	1/8	-½	2
0	0	0	-1/8	-5/2	13

Solução ótima Ilimitada

Ex. 3.8

Quadro final:

1	0	1	1	0	0	2
0	1	0	1	0	0	2
0	0	-1	-3	-1	1	2
0	0	2	3	0	0	6
0	0	1	3	1	0	-2

Final Fase I e $w \neq 0$, $\therefore$ não há solução viável

Ex. 3.9

$x_1 = 4$
$x_2 = 6$
$x_3 = 0$
$x_4 = 8$
$z = 20$

Quadro final:

0	0	3/2	1	8	
1	0	1/2	0	4	
0	1	1/2	0	6	
0	0	2	0	20	z

Ex. 3.10

$x_1 = 4$
$x_2 = 2$
$x_3 = 8$
$x_4 = 0$
$z = 16$

0	1	0	1/4	2
1	0	0	1/2	4
0	0	1	5/4	8
0	0	0	2	16

Ex. 3.11

$x_1 = 25$
$x_2 = 95/2$
$x_3 = 15$
$x_4 = 0$
$x_5 = 85$
$x_6 = 5/2$
$z = 385/4$

Ex. 3.12

a:

0	0	1	-1	1	1
1	1	0	0	-1	1
0	3	0	4	1	9

A solução inicial encontrada já é a solução ótima
$x_1 = 1$
$x_2 = 0$
$x_3 = 1$
$x_4 = 0$
$x_5 = 0$
$-z = 9 \rightarrow z = 9$

b:

0	0	1	-1	1	1
1	1	0	0	-1	1
0	-3	0	-4	-1	9

solução
ótima ilimitada

Ex. 3.13

Solução ótima ilimitada

Ex. 3.14

$x_1 = 10$
$x_2 = 20$
$x_3 = 0$
$x_4 = 5$
$x_5 = 0$
$x_6 = 10$
$z = 40$

Ex. 3.15

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	y_1	y_2	B
0	1	0	1	0	1	0	-1	5
0	0	-1	-1	-1	0	1	0	10
1	0	1	0	0	-1	0	1	5
0	0	0	-1	0	0	0	0	-10
0	0	1	1	1	0	0	1	-10

Final fase I e $w \neq 0$, $\therefore$não há solução viável