# GAN: Geometria Analítica

## Aula 6: Cônica - Elipse

Professora: Elisandra Bar de Figueiredo

# Cônica Elipse

Definição: Considere num plano $\alpha$ dois pontos $F_1$ e $F_2$ fixos e uma distância $2a$ chamamos elipse o conjunto dos pontos $P(x,y)$ desse plano tais que

$$d(P,F_1)+d(P,F_2)=2a.$$

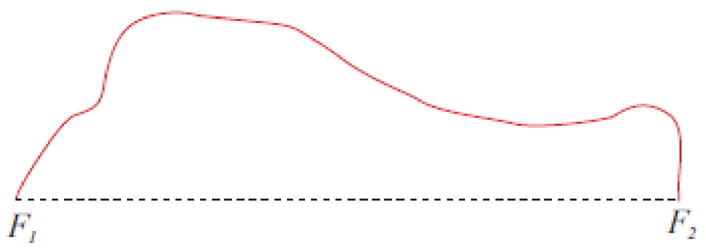
Construa a elipse usando uma corda de comprimento $2a$ e os dois pontos fixos $F_1$ e $F_2$.

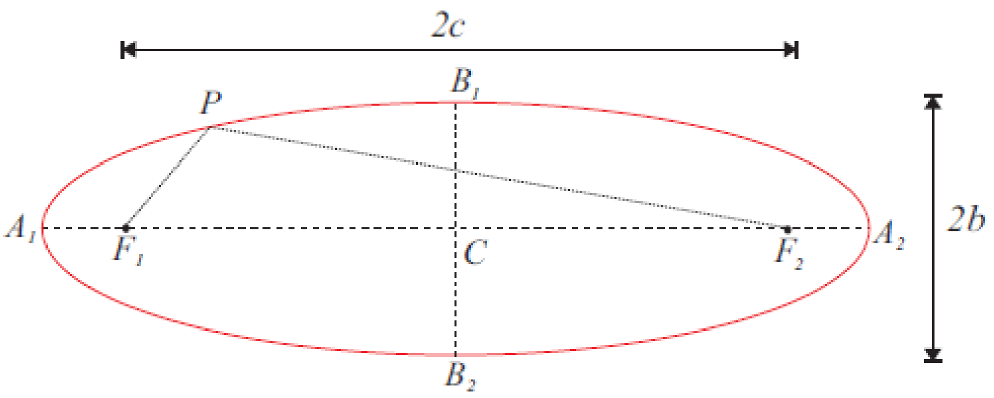
# Construção da Elipse

1. Usando uma corda de comprimento $2a$ e dois pontos fixos (focos):

    - Trace no papel, com a régua, um segmento de reta e marque os extremos desse segmento com as letras $F_1$ e $F_2$ - os focos da elipse.
    - Prenda no papel as duas tachinhas (ou alfinetes) nos dois extremos do segmento traçado, os pontos $F_1$ e $F_2$.
    - Pegue um pedaço de barbante com comprimento maior que $|\overrightarrow{F_1F_2}|$ e prenda suas extremidades nos pontos $F_1$ e $F_2$.
    - Com um lápis estique o fio e trace uma volta completa, mantendo o barbante esticado.

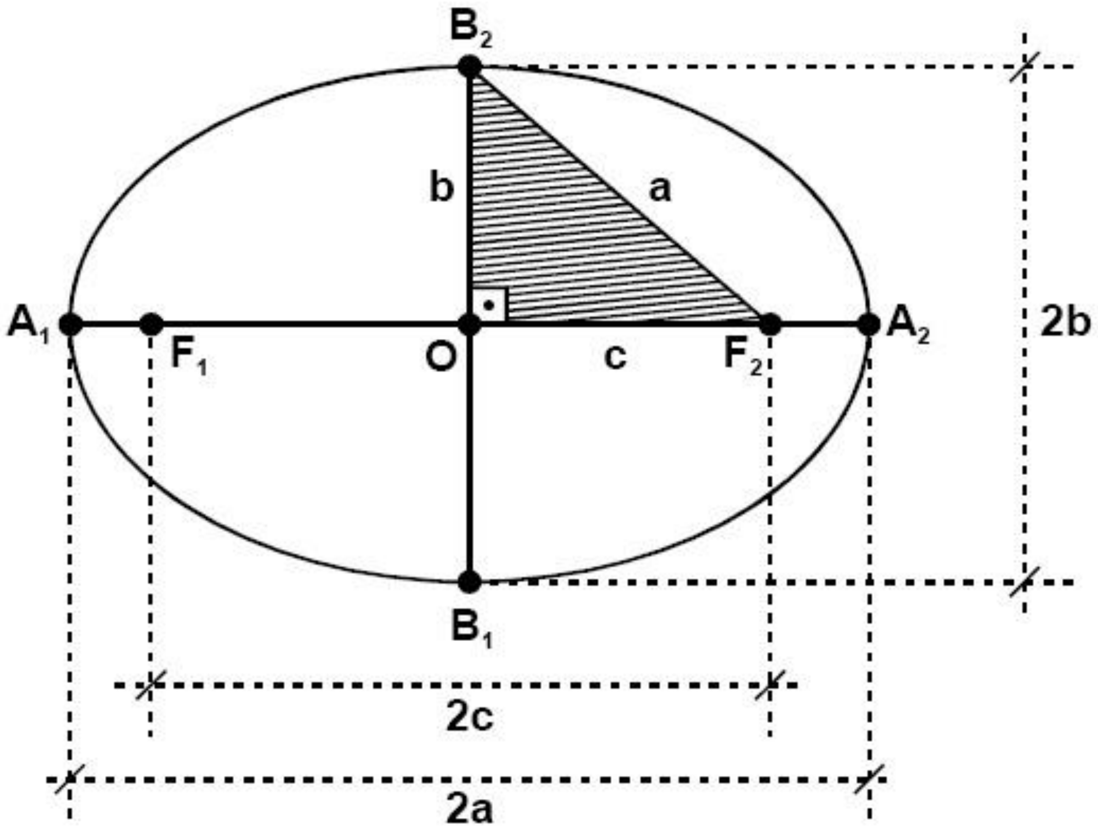
A figura que você traçou é uma elipse, pois como o barbante tem comprimento fixo, a soma dos comprimentos de qualquer ponto da linha que você traçou aos pontos $F_1$ e $F_2$ é constante igual a $2a$.



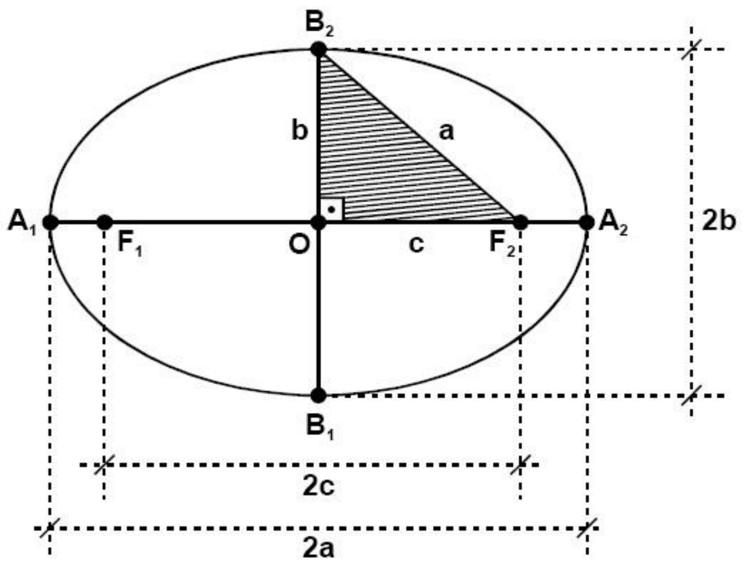



# Elementos da Elipse

# Elementos da Elipse



# Elementos da Elipse




- Focos: os pontos $F_1$ e $F_2$;
- Distância Focal: $\mathrm{d}(\mathrm{F}_1, \mathrm{F}_2) = 2c$;
- Centro ($C$): ponto médio do segmento $F_1F_2$;
- Vértices: os pontos $A_1, A_2, B_1$ e $B_2$;
- Eixo maior (ou focal ou principal): o segmento $A_1A_2$ de comprimento $2a$ (esse segmento contém os focos e os seus extremos pertencem a elipse);
- Eixo menor (ou não focal): o segmento $B_1B_2$ de comprimento $2b$ ($B_1B_2 \perp A_1A_2$ no seu ponto médio);
- Excentricidade: $e = \frac{c}{a}$. Como $c < a$, temos $0 < e < 1$.

# Elementos da Elipse

Quanto mais próximos estão os focos $(c \to 0)$ mais a elipse se assemelha a uma circunferência e quando $F_1 = F_2$ obtém-se uma circunferência. Por outro lado, quanto mais afastados estão os focos $(c \to a)$ mais achatada é a elipse.

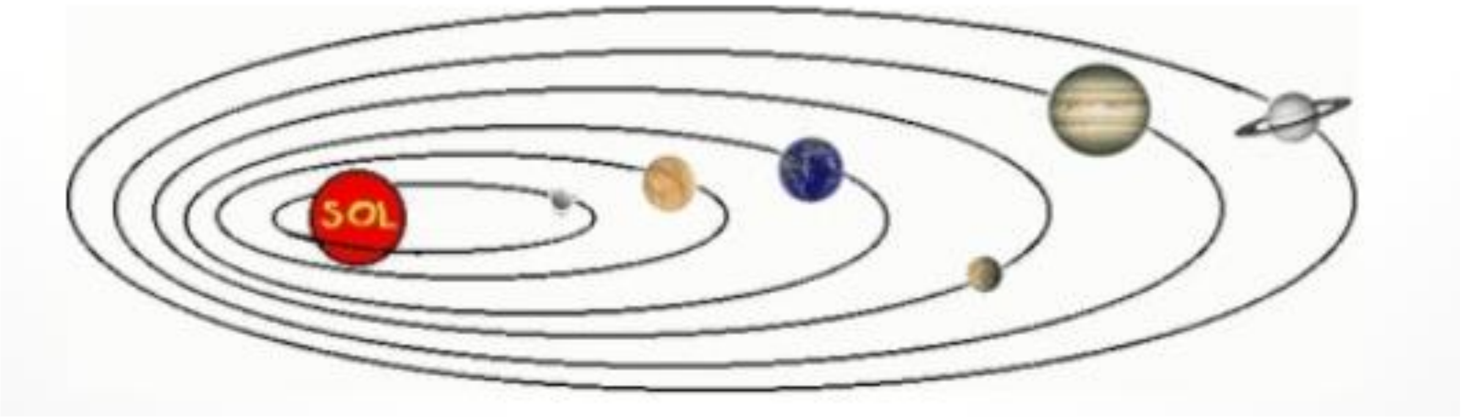
# Elementos da Elipse

Proposição: Em toda elipse vale a relação $a^2 = b^2 + c^2$.

De fato,

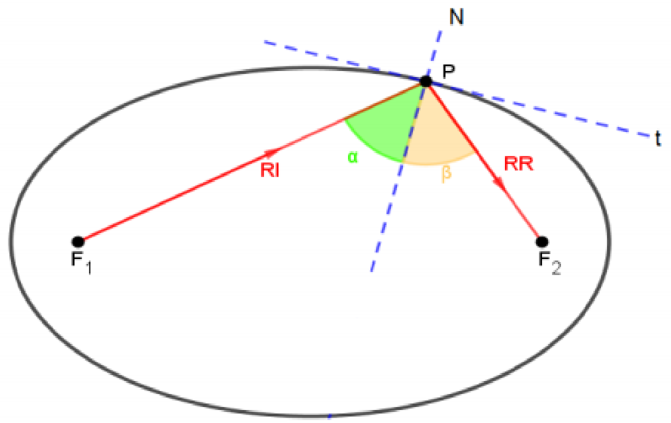
# Aplicações: órbitas

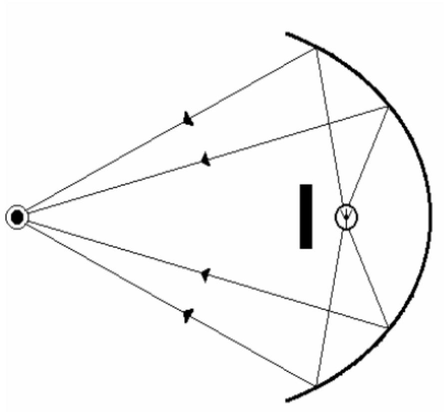
A figura mostra os planetas girando em torno do Sol. Foi o astrônomo e matemático Johannes Kepler (1571-1630) que formulou 3 leis que regem o movimento planetário. Uma delas diz que um planeta gira em torno do Sol em uma órbita elíptica com o Sol em um dos focos.



# Aplicações: propriedade refletora

Qualquer raio luminoso ou onda sonora, cuja fonte esteja situada em um dos focos da elipse, terá seus raios refletidos pela elipse na direção do outro foco.

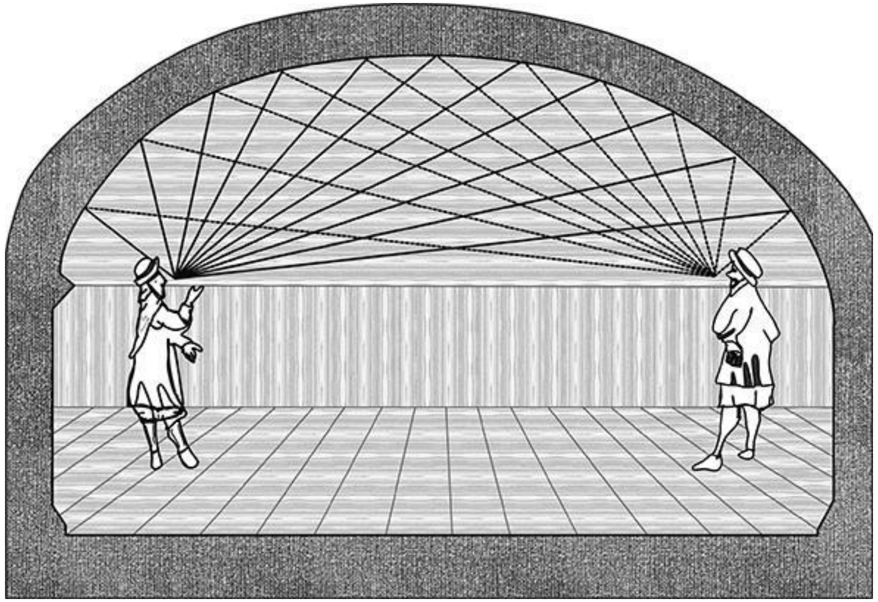


Uma aplicação óptica vê-se no dispositivo de iluminação dos dentistas. Este consiste num espelho com a forma de um arco de elipse e numa lâmpada que se coloca no foco mais próximo. A luz da lâmpada é concentrada pelo espelho no outro foco, ajustando-se o dispositivo de forma a iluminar o ponto desejado.

# Aplicações: propriedade refletora

Outra ilustração acústica da propriedade de reflexão da elipse pode encontrar-se em salas que têm a forma de meio elipsoide (que é um sólido que se obtém rodando uma elipse em torno do seu eixo focal). Se duas pessoas se colocarem nos focos e uma delas falar, mesmo que seja baixo, a outra ouvirá perfeitamente, ainda que a sala seja grande e haja outros ruídos. Existem salas deste tipo (às vezes chamadas “galerias de murmúrios”) em vários edifícios públicos na Europa e nos Estados Unidos.



# Aplicações: propriedade refletora

A litotripsia extracorpórea por ondas de choque é o procedimento mais frequentemente usado para tratamento de cálculo renal. Neste procedimento, as ondas de choque criadas fora do corpo viajam através da pele e tecidos até encontrarem os cálculos mais densos, pulverizando-os. O litotriptor possui um espelho elíptico que concentra os raios emitidos num determinado ponto com grande precisão. Veja figura 9.9.

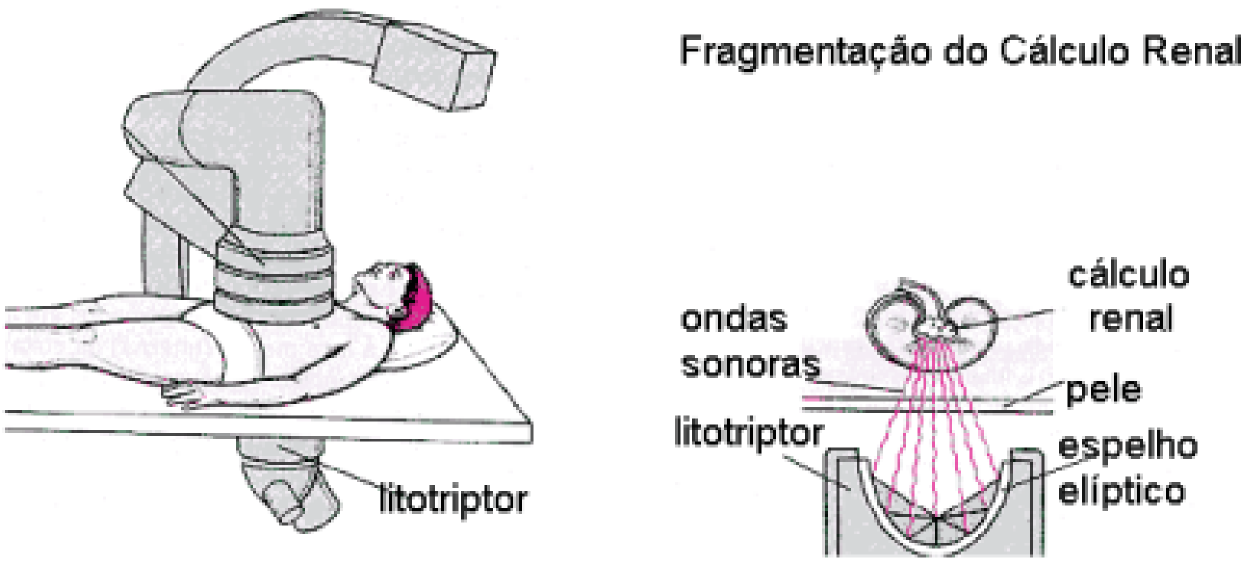



Figura 9.9: Litotriptor e espelho elíptico.

# Aplicações: propriedade refletora

**Bilhar elíptico**

O bilhar elíptico possui uma única tabela no formato de uma elipse com um buraco num dos focos conforme ilustra a figura 9.11. Uma bola colocada no segundo foco ao ser atirada em qualquer direção do bilhar deverá cair no buraco. O mesmo acontecerá com a bola se ela for colocada em qualquer outra posição do bilhar e atirada em direção ao segundo foco.

# Aplicações: construções

Teatro nacional da China

Pontes com arcos de elipses:

Ponte Santa Trinita

Aqueduto de Segóvia

# Equação da elipse com C(0,0)

Caso 1: eixo principal (reta focal) sobre o eixo $x$: Seja $P(x, y)$ um ponto da elipse com focos $F_1(-c, 0)$ e $F_2(c, 0)$ e eixo maior de comprimento $2a$.

Então, por definição temos:

$$d(F_1, P) + d(F_2, P) \; = \; 2a$$

# Equação da elipse com C(0,0)

Caso 1: eixo principal (reta focal) sobre o eixo $x$: Seja $P(x, y)$ um ponto da elipse com focos $F_1(-c, 0)$ e $F_2(c, 0)$ e eixo maior de comprimento $2a$.

$$d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a \iff$$

$$\iff \sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a \iff$$

$$\iff \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \iff$$

$$\iff (x+c)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2 \iff$$

$$\iff a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = a^2 - cx \iff$$

$$\iff a^2(x^2 - 2cx + c^2) + a^2y^2 = a^4 - 2a^2cx + c^2x^2 \iff$$

$$\iff a^2x^2 - c^2x^2 + a^2y^2 = a^4 - a^2c^2 \iff$$

$$\iff (a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2) \iff$$

$$\iff \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1.$$

# Equação da elipse com C(0,0)

Caso 2: eixo principal (reta focal) sobre o eixo $y$: Seja $P(x, y)$ um ponto da elipse com focos $F_1(0, -c)$ e $F_2(0, c)$ e eixo maior de comprimento $2a$.

Então, por definição temos:

$$d(F_1, P) + d(F_2, P) \ = \ 2a$$

...

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1.$$

Portanto, sempre o maior denominador na equação reduzida representa o quadrado do semieixo maior (eixo focal) da elipse.

# Exemplo

1. Determine os elementos das seguintes elipses e represente-as geometricamente.

$a)\quad \dfrac{x^2}{100}+\dfrac{y^2}{36}=1;$

Solução:

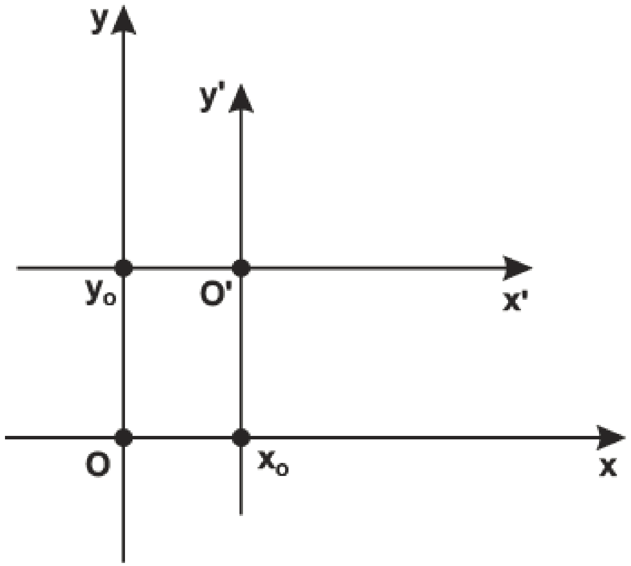
# Exemplo

1. Determine os elementos das seguintes elipses e represente-as geometricamente.
b) $25x^2 + 9y^2 = 25$.

Solução:

# Translação de eixos

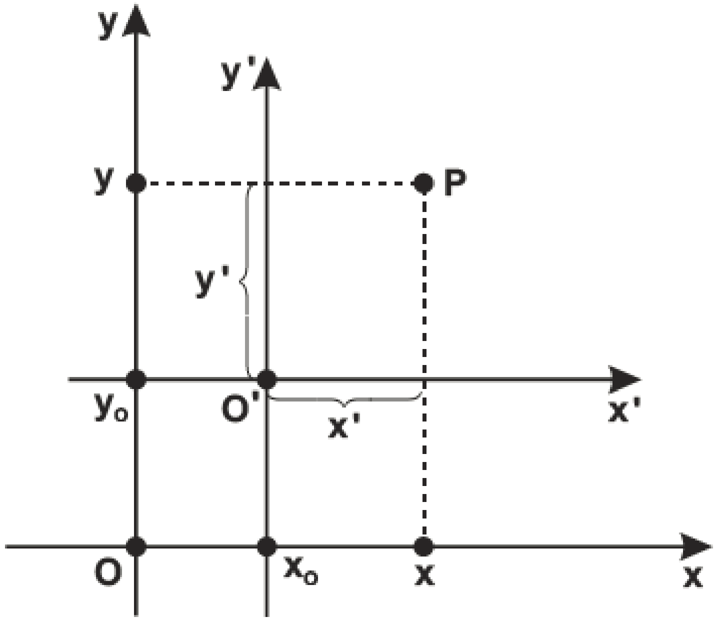
No plano cartesiano $xOy$ considere um ponto $O' = (x_0, y_0)$. Introduza um **novo** sistema $x'O'y'$ tal que $O'$ seja a nova origem e o eixo $O'x'$ tenha a mesma direção e sentido de $Ox$ e $O'y'$ tenha a mesma direção e sentido de $Oy$.




Dizemos que o **novo** sistema $x'O'y'$ foi obtido por uma **translação** do **antigo** sistema $xOy$. Em ambos os sistemas se conservam as unidades de medida.

# Translação de eixos

Um ponto $P$ do plano tem coordenadas $(x, y)$ em relação ao sistema $xOy$ e $(x', y')$ em relação ao sistema $x'O'y'$.




Obtemos facilmente da figura as **fórmulas de translação**: $\begin{cases} x' = x - x_0 \\ y' = y - y_0 \end{cases}$.

# Equação da elipse com $C(x_0, y_0)$

Através de uma translação de eixos, obtemos um novo sistema $x'O'y'$, cuja origem $O'$ coincide com o centro $C(x_0, y_0)$.

Usando a translação tem-se que a equação reduzida da elipse é

- $\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$ se o eixo focal for paralelo ao eixo das abscissas

ou

- $\frac{(x-x_0)^2}{b^2} + \frac{(y-y_0)^2}{a^2} = 1$ se o eixo focal for paralelo ao eixo das ordenadas.

2. Determine a equação da elipse com:

a) eixo maior de comprimento 10 e focos (2,-1) e (2,5).

Solução:

2. Determine a equação da elipse com:

b) C(0,0), eixo maior em $y = 0$, excentricidade 0,5 e que passa por (2,3).

Solução:

3. Determine os elementos da elipse $25x^2 + 16y^2 + 50x + 64y - 311 = 0$.

Solução:

3. Determine os elementos da elipse $25x^2 + 16y^2 + 50x + 64y - 311 = 0$.

Solução:

4. Determine a equação da circunferência inscrita e da circunscrita a elipse

$$4x^2 + 9y^2 - 32x + 36y + 64 = 0.$$

Solução:

# Exemplos

4. Determine a equação da circunferência inscrita e da circunscrita a elipse

$$4x^2 + 9y^2 - 32x + 36y + 64 = 0.$$

Solução:

# Exemplos

5. Determine a equação da parábola cujo foco coincide com um o vértice do eixo menor da elipse $4x^2 - 24x + y^2 + 20 = 0$ com a menor abscissa e cuja reta diretriz contém o eixo maior dessa elipse.

Solução:

5. Determine a equação da parábola cujo foco coincide com um o vértice do eixo menor da elipse $4x^2 - 24x + y^2 + 20 = 0$ com a menor abscissa e cuja reta diretriz contém o eixo maior dessa elipse.

Solução:

# Tarefa

Exercícios 9 ao 12 da Lista 2.

# Bibliografia


BEZERRA, L. H.; COSTA E SILVA, I.P. **Geometria analítica**. 2. ed. – Florianópolis: UFSC/EAD/CED/CFM, 2010. Disponível em http://mtmgrad.paginas.ufsc.br/files/2014/04/Geometria-Anal%C3%ADtica.pdf. Acesso 12/02/2020.

DELGADO, Jorge; FRENSEL, Katia; CRISSAFF, Lhaylla. **Geometria analítica**. Rio de Janeiro: SBM, 2013. (Coleção PROFMAT).

NICOLLETTI, Larissa Parizotto. **Cone de Apolônio**: História, Matemática e Material Concreto. 2017. TCC (Graduação)-Universidade do Estado de Santa Catarina, Curso de Licenciatura de Matemática, Joinville, 2017.

SILVA FILHO, L. E. **Cônicas**: apreciando uma obra prima da matemática. 2015. 141p. Dissertação - (mestrado) - Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, 2015.Disponível em: <https://goo.gl/5hr0s8>. Acesso em: 04 maio 2017.

SIQUEIRA, P. H.; COSTA, A. M. **Cônicas**. 2. ed. 2012. Material Didático. Disponível em: <https://goo.gl/QbK6et>. Acesso em: 08 jun. 2017.

STEINBRUCH, A.; WINTERLE, P. **Geometria analítica**. 2. ed. São Paulo: Pearson Makron Books, 1987.

VENTURI, J. J. **Cônicas e quádricas**. 5. ed. Curitiba: Unificado, 2003.

# OBRIGADA!