3. MÉTODOS DE TRANSPORTE

3.1. PROBLEMAS DE TRANSPORTE

Problemas de transporte consistem em um caso particular da classe de problemas de programação linear. Ocorre quando temos pontos de fornecimento (origens) que devem enviar produtos a diversos pontos de consumo (destinos). As rotas entre cada ponto de fornecimento e cada ponto de consumo possuem custos proporcionais às quantidades enviadas. Nosso objetivo consiste em encontrar quantos produtos enviar por cada rota, de modo que o custo total de transporte seja o menos possível.

Formulação

De modo genérico, temos **m** pontos de fornecimento e **n** pontos de demanda. Cada ponto de fornecimento ***i*** tem uma capacidade ou disponibilidade $\mathbf{s_i}$ unidades, e cada ponto de demanda ***j*** necessita tem uma necessidade ou demanda de $\mathbf{d_j}$ unidades para atender o mercado. O custo de transporte do ponto de fornecimento **i** ao ponto de consumo **j** é $\mathbf{c_{ij}}$ para cada unidade enviada.

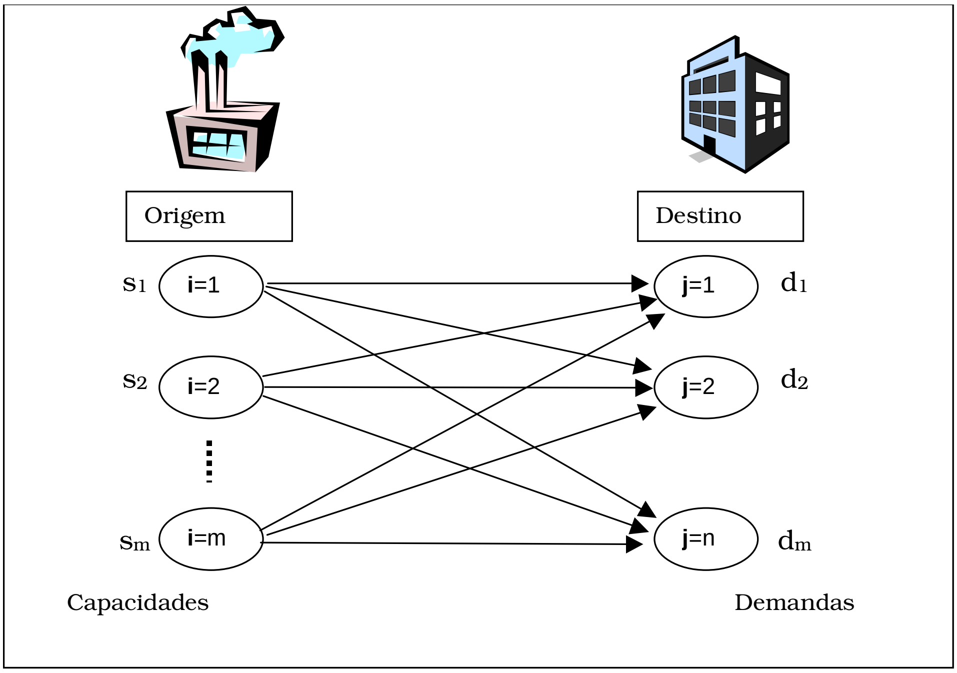

Figura 3.1. Problema de transporte genérico

O objetivo é escolher um plano de rotas que minimize os custos totais de transporte, respeitando as capacidades dos pontos de fornecimento, e atendendo as necessidades dos pontos de demanda. Assim, a função-objetivo, que representa o custo total de transporte, pode ser escrita como

$$z = c_{11}x_{11} + c_{12}x_{12} + \ldots + c_{1n}x_{1n} + c_{21}x_{21} + c_{22}x_{22} + \ldots + c_{2n}x_{2n} + \ldots + c_{m1}x_{m1} + c_{m2}x_{m2} + \ldots + c_{mn}x_{mn}$$

As restrições são referentes às capacidades dos pontos de origem e demandas dos pontos de destino, ou seja, a soma de tudo que um ponto de fornecimento enviar para os diversos pontos de demanda não pode ser superior à sua capacidade (para cada ponto de fornecimento):

$$\begin{aligned} x_{11} + x_{12} + \dots + x_{1n} &\leq s_1 \\ x_{21} + x_{22} + \dots + x_{2n} &\leq s_2 \\ x_{m1} + x_{m2} + \dots + x_{mn} &\leq s_m \end{aligned}$$

Analogamente, o numero de unidades enviadas por todos os pontos de fornecimento para um ponto de consumo não deve ser menor do que a necessidade ou demanda desse ponto de consumo (para cada ponto de consumo):

$$\begin{aligned} x_{11} + x_{21} + \dots + x_{m1} &\geq d_1 \\ x_{12} + x_{22} + \dots + x_{m2} &\geq d_2 \\ x_{1n} + x_{2n} + \dots + x_{mn} &\geq d_n \end{aligned}$$

sem esquecermos que

$x_{ij} \geq 0$ para todo i e j.

Note que o total de restrições é **m + n**, já que o modelo apresenta uma restrição para cada ponto de fornecimento e uma restrição para cada ponto de consumo.

Resumidamente temos :

função objetivo : min	$z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$	(minimizar custo total de transporte)
restrições de capacidade:	$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leq s_i$	(**i** =1,2,3....,m)
restrições de demanda:	$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \geq d_j$	(**j** =1,2,3....,n)
restrições de não negatividade:	$x_{ij} \geq 0$	para todo **i** e **j**

Para que o problema de transporte apresente uma solução viável, a oferta ou capacidade total deve ser igual a necessidade ou demanda total (problema balanceado), ou seja

$$\sum_{i=1}^{m} s_i = \sum_{j=1}^{n} d_j$$

Quando essa condição não for verdadeira, haverá necessidade de criação de um ponto de demanda ou um ponto de fornecimento fictício, conforme o caso. Se a oferta total for maior que a demanda total, criaremos um ponto de consumo fictício; se ocorrer o contrário, criaremos um ponto de fornecimento fictício. As rotas que envolvem pontos de fornecimento ou de consumo fictícios normalmente tem custos **0**.

Apesar da possibilidade de resolução de um problema de transportes pela aplicação do método SIMPLEX tradicional, esta não é uma boa alternativa. Devido as característica do modelo, este pode ser resolvido através de uma particularização do método SIMPLEX para fluxo de rede, mais adequado à solução do problema, devido a sua maior simplicidade e ao menor número de iterações necessárias. Para a obtenção da solução de um problema de transporte, usamos o quadro de transportes, como mostrado abaixo.

	Depósitos				
Fábricas	1	2	...	n	capacidade
1	c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}	...	c_{1n} x_{1n}	s_1
2	c_{21} x_{21}	c_{22} x_{22}	...	c_{2n} x_{2n}	s_2
...	...	...	...	...	...
m	c_{m1} x_{m1}	c_{m2} x_{m2}	...	c_{mn} x_{mn}	s_m
demanda	d_1	d_2	...	d_n	

No quadro de transportes estão representados os custos associados com cada rota (c_{ij}), as capacidades e as demandas. Cada célula de transporte representa uma variável x_{ij} que define a quantidade enviada da origem **i** para o destino **j.**

O algoritmo de transportes

O Algoritmo de Transporte envolve as seguintes etapas básicas (se o problema for balanceado):

1 – Determinar uma solução básica inicial;
2 – Verificar se a solução não é degenerada
3 – Testar a solução quanto à condição de ótimo;
4 – Melhorar a solução atual quando não for ótima;
5 – Repetir os Passos 2 a 4 até obter a solução ótima.

Veremos agora como efetuar cada um destes passos:

1 – Solução básica inicial

O método que utilizaremos para obtenção da solução inicial é chamado de Método do Canto Noroeste, embora existam outros, como o Método de Vogel, por exemplo. Começando- se pela célula superior esquerda (canto noroeste), aloca- se a $\mathbf{x_{11}}$ tantas unidades quantas sejam possíveis sem violar as restrições. Isto corresponderá ao menor dos 2 valores $\mathbf{s_1}$ e $\mathbf{d_1}$. Continua-se com o algoritmo, deslocando- se para a célula imediatamente à direita se ainda restar alguma oferta ou, caso contrário, para a célula imediatamente abaixo. A cada etapa aloca- se à célula em consideração tantas unidades quantas sejam possíveis sem violar as restrições. As alocações poderão ser nulas, porém não podem ser negativas.

Exemplo 3-1. Suponha o problema representado no quadro de transportes abaixo. No quadro temos as informações sobre os custos de cada rota, as capacidades das origens (pontos de fornecimento) e as demandas dos destinos (pontos de consumo); o objetivo é minimizar o custo total de transporte. O primeiro passo é verificar se o problema está balanceado, somando-se os valores de todas as capacidades e comparando com a soma dos valores de todas as demandas. Podemos ver que as duas somas tem como resultado 500 unidades, e este é portanto um problema balanceado.

	Destino				
Origem	1	2	3	4	Capacidade
1	17	13	24	54	200
2	8	30	36	26	160
3	20	42	28	45	140
demanda	180	120	110	90	500

As células de alocação estão em branco, o que significa que todas as variáveis tem valor **0**. Para aplicar o método de solução, da mesma forma que nos problemas de programação linear vistos até aqui, há necessidade de obtenção de uma solução básica inicial. Aplicando-se ao quadro a Regra do Canto Noroeste teremos o seguinte quadro inicial:

	Destino				
Origem	1	2	3	4	Capacidade
1	17 180	13 20	24	54	200
2	8	30 100	36 60	26	160
3	20	42	28 50	45 90	140
demanda	180	120	110	90	500

A solução inicial obtida é

$x_{11} = 180$, $x_{12} = 20$, $x_{22} = 100$, $x_{23} = 60$, $x_{33} = 50$ e $x_{34} = 90$

e o valor da função objetivo é nesse momento

$z = 180 \times 17 + 20 \times 13 + 100 \times 30 + 60 \times 36 + 50 \times 28 + 90 \times 45 = 13.930$

2 – Verificando a degenerescência

Uma solução básica viável em um problema de transportes deve conter (**n + m - 1**) variáveis não nulas (variáveis básicas), lembrando que **m** = número pontos de fornecimento e **n**= número de pontos de consumo. Se o número de variáveis básicas for menor do que (**n + m - 1**), a solução obtida é chamada de solução degenerada. Tal fato pode ocorrer durante a solução de problemas de PL por SIMPLEX, quando uma variável básica é igual a **0** (existe um **0** na coluna b do quadro SIMPLEX), sem causar maiores problemas. Aqui porém, uma solução degenerada implicará em algumas dificuldades, com um possível aumento no número de iterações necessárias. Uma solução degenerada pode ocorrer a qualquer momento durante o processo de solução de um problema de transporte. Em nosso exemplo, o número de variáveis não nulas é **6**, igual ao valor de **m+n-1** (**3+4-1=6**), não sendo uma solução degenerada, o que permite que continuemos com o processo.

3 – Verificando a condição de ótimo

Para verificarmos se a solução obtida é ou não ótima, devemos encontrar dois conjuntos de valores (variáveis), associados com as restrições de fornecimento e de demanda. Para cada restrição de fornecimento, definiremos uma variável $\mathbf{u_i}$ (i=1..m), e para cada restrição de demanda, definiremos uma variável $\mathbf{v_j}$ (**j**=1..n). Os valores dessas variáveis são encontrados estabelecendo-se a relação $\mathbf{c_{ij}} = \mathbf{u_i} + \mathbf{v_j}$ para as variáveis básicas. No nosso exemplo, teremos

$c_{11} = u_1 + v_1$
$c_{12} = u_1 + v_2$
$c_{22} = u_2 + v_2$
$c_{23} = u_2 + v_3$
$c_{33} = u_3 + v_3$
$c_{34} = u_3 + v_4$

Os valores de $\mathbf{c_{ij}}$ são conhecidos (custos de transporte), e se arbitrarmos $\mathbf{u_1}$=0, podemos encontrar os outros valores. Tal processo pode ser feito usando um quadro auxiliar, como mostrado abaixo - <u>não confundir com o quadro de transportes</u> !! Este é um quadro de custos, que visa determinar se a solução é ótima ou não. As células referentes às variáveis básicas estão marcadas com um asterisco, para indicar as relações $\mathbf{c_{ij}} = \mathbf{u_i} + \mathbf{v_j}$ válidas:

	v_1	v_2	v_3	v_4
u_1	17 *	13 *	24	54
u_2	8	30 *	36 *	26
u_3	20	42	28 *	45 *

Arbitrando $\mathbf{u_1}$=0, encontramos que $\mathbf{v_1}$= 17 ($\mathbf{c_{11}} = \mathbf{u_1} + \mathbf{v_1} \rightarrow 17 = 0 + \mathbf{v_1}$), e $\mathbf{v_2}$=13. Com o valor de $\mathbf{v_2}$, podemos encontrar o valor de $\mathbf{u_2}$, e assim sucessivamente, como mostra o quadro abaixo:

	$v_1 = 17$	$v_2 = 13$	$v_3 = 19$	$v_4 = 36$
$u_1 = 0$	17 *	13 *	24	54
$u_2 = 17$	8	30 *	36 *	26
$u_3 = 9$	20	42	28 *	45 *

Depois de encontrados todos os $\mathbf{u_i}$ e $\mathbf{v_j}$, devemos, para as variáveis não básicas, calcular o valor de $\mathbf{c_{ij}}$ - ($\mathbf{u_i}$ + $\mathbf{v_j}$), colocando o resultado na respectiva célula do quadro de custos. Para a variável $\mathbf{x_{13}}$ teremos $\mathbf{c_{13}}$ - ($\mathbf{u_1}$ + $\mathbf{v_3}$) = 24 – (19+0) = 5, e o quadro de custos definitivo (relativo à solução inicial) fica da seguinte maneira:

	$v_1 = 17$	$v_2 = 13$	$v_3 = 19$	$v_4 = 36$
$u_1 = 0$	17 *	13 *	24 5	54 18
$u_2 = 17$	8 -26	30 *	36 *	26 -27
$u_3 = 9$	20 -6	42 20	28 *	45 *

Os valores calculados para as variáveis não básicas nos mostram se a solução obtida é ótima ou não; valores positivos indicam que não há vantagem tornar básicas a respectiva variável, já se o valor for negativo, será vantajoso que essa variável passe a ser básica, melhorando a função objetivo. Ou seja, se houver valores negativos, a solução não é ótima.

4 – Otimização da solução

Para melhorar a solução obtida, escolheremos para entrar na base a variável para a qual foi calculado o menor valor (o mais negativo), neste caso $\mathbf{x_{13}}$ (-27). Para encontrarmos qual variável deixará de ser básica, definimos no quadro de transportes um trajeto fechado, chamado de “circuito de avaliação”. O trajeto inicia-se na variável escolhida para entrar na base, e percorre algumas variáveis básicas, voltando ao ponto de origem (única variável não básica a fazer parte do trajeto). O trajeto é marcado com os sinais, ⊕ e ⊖ , alternadamente, como mostrado a seguir:

Iniciar aqui

	Destino				
Origem	1	2	3	4	Capacidade
1	17 180	13 20	24	54	200
2	8	30 100	36 ⊖ 60	26 ⊕	160
3	20	42	28 ⊕ 50	45 ⊖ 90	140
demanda	180	120	110	90	500

Devemos agora identificar a célula com o sinal ⊖ que possui o menor valor, e esta será a variável que deixará de ser básica. A quantidade alocada nessa célula será subtraída de todas aquelas com sinal ⊖ e somada em todas aquelas com sinal ⊕, gerando uma nova solução. Nesse caso, temos

$x_{23} = 60 - 60 = 0$
$x_{24} = 0 + 60 = 60$
$x_{33} = 50 + 60 = 110$
$x_{34} = 90 - 60 = 30$

e a nova solução é

	Destino				
Origem	1	2	3	4	Capacidade
1	17 180	13 20	24	54	200
2	8	30 100	36	26 60	160
3	20	42	28 110	45 30	140
demanda	180	120	110	90	500

Verifique que não foram violadas as restrições de demanda e capacidade (este é o objetivo do circuito de avaliação). Devemos agora repetir os passos anteriores, isto é, verificar se a solução é degenerada (não é), se a solução é ótima, e gerar uma nova solução, se for o caso. Para verificarmos se a solução é ótima, devemos calcular de novo os valores de $\mathbf{u_i}$ e $\mathbf{v_i}$

	$v_1 = 17$	$v_2 = 13$	$v_3 = -8$	$v_4 = 9$
$u_1 = 0$	17 *	13 *	24 32	54 45
$u_2 = 17$	8 -26	30 *	36 27	26 *
$u_3 = 36$	20 -33	42 -7	28 *	45 *

A variável que deve entrar na base é $\mathbf{x_{31}}$. O novo circuito de avaliação está no quadro abaixo.

	Destino				
Origem	1	2	3	4	Capacidade
1	17 ⊖ 180	13 ⊕ 20	24	54	200
2	8	30 ⊖ 100	36	26 ⊕ 60	160
3	20 ⊕	42	28 110	45 ⊖ 30	140
demanda	180	120	110	90	500

A partir desse circuito, encontramos a nova solução mostrada abaixo (já está com o circuito referente à próxima iteração).

Iteração 3 - Quadro de transporte:

	Destino				
Origem	1	2	3	4	Capacidade
1	(17) ⊖ 150	(13) ⊕ 50	(24)	(54)	200
2	(8) ⊕	(30) ⊖ 70	(36)	(26) 90	160
3	(20) 30	(42)	(28) 110	(45)	140
demanda	180	120	110	90	500

Quadro de custos:

	$v_1 = 17$	$v_2 = 13$	$v_3 = 25$	$v_4 = 9$
$u_1 = 0$	(17) *	(13) *	(24) -1	(54) 45
$u_2 = 17$	(8) -26	(30) *	(36) -6	(26) *
$u_3 = 3$	(20) *	(42) 26	(28) *	(45) 33

Iteração 4 - Quadro de transporte:

	Destino				
Origem	1	2	3	4	Capacidade
1	(17) ⊖ 80	(13) 120	(24) ⊕	(54)	200
2	(8) 70	(30)	(36)	(26) 90	160
3	(20) ⊕ 30	(42)	(28) ⊖ 110	(45)	140
demanda	180	120	110	90	500

Quadro de custos:

	$v_1 = 17$	$v_2 = 13$	$v_3 = 25$	$v_4 = 35$
$u_1 = 0$	(17) *	(13) *	(24) -1	(54) 19
$u_2 = -9$	(8) *	(30) 26	(36) 20	(26) *
$u_3 = 3$	(20) *	(42) 26	(28) *	(45) 7

Iteração 5 - Quadro de transporte:

	Destino				
Origem	1	2	3	4	Capacidade
1	17	13 120	24 80	54	200
2	8 70	30	36	26 90	160
3	20 110	42	28 30	45	140
demanda	180	120	110	90	500

Quadro de custos:

	$v_1 = 16$	$v_2 = 13$	$v_3 = 25$	$v_4 = 34$
$u_1 = 0$	17 1	13 *	24 *	54 20
$u_2 = -8$	8 *	30 25	36 20	26 *
$u_3 = 4$	20 *	42 25	28 *	45 7

Como não temos mais valores negativos, esta é a solução ótima. Do quadro de transportes vemos que a solução é

enviar 120 unidades da origem 1 para o destino 2,
enviar 80 unidades da origem 1 para o destino 3,
enviar 70 unidades da origem 2 para o destino 1,
enviar 90 unidades da origem 2 para o destino 4,
enviar 110 unidades da origem 3 para o destino 1,
enviar 30 unidades da origem 1 para o destino 3,
e o valor da função objetivo é

$$z = 120 \times 13 + 80 \times 24 + 70 \times 8 + 90 \times 26 + 110 \times 20 + 30 \times 28 = 9420$$

Casos especiais

Veremos no próximo exemplo a ocorrência de algumas situações específicas.

Exemplo 3-2. Maximizar o problema de transporte abaixo:

	A	B	C	D	disponib.
1	80	70	60	60	8
2	50	70	80	70	10
3	70	50	80	60	5
demanda	5	4	6	4	

<u>Solução:</u> O problema não está balanceado, pois $\Sigma \mathbf{s_i} = 23$ e $\Sigma \mathbf{d}_j = 19$, ou seja, a oferta total é maior do que a demanda total. Para resolver isso, criaremos um ponto de consumo (destino) fictício, com demanda = 4 ($\Sigma \mathbf{s_i} - \Sigma \mathbf{d}_j$), e os custos de transportes de todas as origens até este ponto são **0**. O objetivo é maximizar, portanto devemos usar - $\mathbf{c_{ij}}$ na montagem do quadro de transportes. A partir daí o

desenvolvimento segue os passos vistos anteriormente, sendo que o destino fictício é considerado para verificação da degenerescência (**m+n-1** variáveis básicas).

Iteração 1 - Quadro de transportes:

	Destino					Capacidade
Origem	a	B	c	d	fict	
1	-80 / 5	-70 / 3	-60	-60	0	8
2	-50	-70 / 1	-80 ⊖ / 6	-70 ⊕ / 3	0	10
3	-70	-50	-80 ⊕	-60 ⊖ / 1	0 / 4	5
demanda	5	4	6	4	4	23

Quadro de custos:

	v_1=-80	v_2=-70	v_3=-80	v_4 = -70	v_5 = -10
u_1= 0	-80 / *	-70 / *	-60 / 20	-60 / 10	0 / 10
u_2 = 0	-50 / 30	-70 / *	-80 / *	-70 / *	0 / 10
u_3 = 10	-70 / 0	-50 / 10	-80 / -10	-60 / *	0 / *

Iteração 2 - Quadro de transportes:

	Destino					Capacidade
Origem	a	b	c	d	fict	
1	-80 / 5	-70 / 3	-60	-60	0	8
2	-50	-70 / 1	-80 / 5	-70 / 4	0	10
3	-70	-50	-80 / 1	-60	0 / 4	5
demanda	5	4	6	4	4	23

Quadro de custos:

	v_1=-80	v_2=-70	v_3=-80	v_4 = -70	v_5 = 0
u_1= 0	-80 / *	-70 / *	-60 / 20	-60 / 10	0 / 0
u_2 = 0	-50 / 30	-70 / *	-80 / *	-70 / *	0 / 0
u_3 = 0	-70 / 10	-50 / 20	-80 / *	-60 / 10	0 / *

Resposta:

Enviar 5 unidades de 1 para a;
Enviar 3 unidades de 1 para b;
Enviar 1 unidade de 2 para b;
Enviar 5 unidades de 2 para c;
Enviar 4 unidades de 2 para d;
Enviar 1 unidades de 3 para c;
4 unidades permanecem na origem 3; (é a alocação relativa ao ponto de consumo fictício).

z= 80.5 + 70.3 + 70 + 80.5 + 70.4 + 80 = 1440

Verificando o quadro de custos da ultima iteração, vemos que não existem números negativos, indicando que a solução é ótima, mas também existem dois coeficientes de custo relativo iguais a **0**. Quando isto ocorre, temos mais de uma solução ótima, como no caso do SIMPLEX. Valores negativos indicam que aquela variável deve entrar na base para melhorar a função objetivo; valores positivos indicam que se aquela variável entrar na base, haverá uma piora na função objetivo, e valores nulos indicam que a entrada daquela variável na base não acarretará mudanças no valor da função objetivo. Nesse caso, as variáveis $\mathbf{x_{15}}$ ou $\mathbf{x_{25}}$ poderão fazer parte da nova solução, sem alterar o valor da função objetivo. Escolhendo $\mathbf{x_{15}}$, e definindo o trajeto

	Destino					Capacidade
Origem	a	b	c	d	fict	
1	-80 5	-70 ⊖ 3	-60	-60	0 ⊕	8
2	-50	-70 ⊕ 1	-80 ⊖ 5	-70 4	0	10
3	-70	-50	-80 ⊕ 1	-60	0 ⊖ 4	5
demanda	5	4	6	4	4	23

teremos a seguinte solução alternativa:

	Destino					Capacidade
Origem	a	b	c	d	fict	
1	-80 5	-70	-60	-60	0 3	8
2	-50	-70 4	-80 2	-70 4	0	10
3	-70	-50	-80 4	-60	0 1	5
demanda	5	4	6	4	4	23

Enviar 5 unidades de 1 para a;
Enviar 4 unidade de 2 para b;

Enviar 2 unidades de 2 para c;
Enviar 4 unidades de 2 para d;
Enviar 4 unidades de 3 para c;
3 unidades permanecem na origem 1;
1 unidades permanecem na origem 3;

z= 80 x 5 + 70 x 4 + 80 x 2 + 70 x 4 + 80 x 4 = 1440

Solução degenerada

Uma solução degenerada ocorre quando o número de variáveis básicas for inferior a **m+n-1**. Pode ocorrer tanto na solução inicial, ou se o processo solução produzir, simultaneamente, duas ou mais variáveis básicas nulas (em uma solução que não era degenerada), o que impossibilitará a verificação da condição de ótimo da solução (veja exemplo a seguir).

Exemplo 3.3. Minimize o problema de transporte abaixo:

	Destinos				
Orig	A	B	C	D	Cap.
1	45	17	21	30	15
2	14	18	19	31	13
Dem.	9	6	7	9	

Solução: como o problema não é balanceado, devemos criar uma origem fictícia, com capacidade **3**. A solução inicial está mostrada abaixo.

	Destino				
Origem	a	b	c	d	Capacidade
1	45 9	17 6	21	30	15
2	14	18	19 7	31 6	13
fict	0	0	0	0 3	3
demanda	9	6	7	9	31

O número de variáveis básicas (5) é menor do que m+n-1 (3 + 4 -1= 6). Ao tentarmos determinar se a solução é ótima ou não, veremos as implicações disto :

	v_1=45	v_2=17	v_3=?	v_4 = ?
u_1= 0	45 *	17 *	21	30
u_2 = ?	14	18	19 *	31 *
u_3 = ?	0	0	0	0 *

Observe que não é possível encontrarmos os valores de todos os $\mathbf{u_i}$ e $\mathbf{v_i}$, devido à falta de uma das relações $\mathbf{c_{ij} = u_i + v_i}$. Para solucionar este problema, consideraremos uma das variáveis nulas como básicas. A escolha deve ser feita por inspeção, e embora não exista uma regra segura sobre qual a melhor escolha (em termos do número de iterações), é preferível escolher aquela com o maior custo de transporte associado. No nosso caso $\mathbf{x_{14}}$. Para designar que esta variável agora é básica, colocamos uma alocação nula no quadro de transportes, como mostrado a seguir.

Alocação referente a $\mathbf{x_{14}}$

Iteração 1 - Quadro de transporte

	Destino				
Origem	a	b	c	d	Capacidade
1	[45] 9	[17] 6	[21]	[30] 0	15
2	[14]	[18]	[19] 7	[31] 6	13
fict	[0]	[0]	[0]	[0] 3	3
demanda	9	6	7	9	31

Quadro de custo

	v_1=45	v_2=17	v_3=18	v_4 = 30
u_1= 0	[45] *	[17] *	[21] 3	[30] *
u_2 = 1	[14] -32	[18] 0	[19] *	[31] *
u_3 = -30	[0] -15	[0] 13	[0] 12	[0] *

iteração 2 - Quadro de transporte

	Destino				
Origem	a	b	c	d	Capacidade
1	[45] 3	[17] 6	[21]	[30] 6	15
2	[14] 6	[18]	[19] 7	[31]	13
fict	[0]	[0]	[0]	[0] 3	3
demanda	9	6	7	9	31

Neste momento a solução deixou se ser degenerada, pois temos 6 variáveis básicas (não nulas), e a solução pode prosseguir normalmente.

Quadro de custo

	v_1=45	v_2=17	v_3=50	v_4 = 30
u_1= 0	45 | *	17 | *	21 | -29	30 | *
u_2 = -31	14 | *	18 | 32	19 | *	31 | 32
u_3 = -30	0 | -15	0 | 13	0 | -20	0 | *

Iteração 3 - Quadro de transporte

	Destino				
Origem	a	b	c	d	Capacidade
1	45	17 | 6	21 | 3	30 | 6	15
2	14 | 9	18	19 | 4	31	13
fict	0	0	0	0 | 3	3
demanda	9	6	7	9	31

Quadro de custo

	v_1=16	v_2=17	v_3=21	v_4 = 30
u_1= 0	45 | 29	17 | *	21 | *	30 | *
u_2 = -2	14 | *	18 | 3	19 | *	31 | 3
u_3 = -30	0 | 14	0 | 13	0 | 9	0 | *

Essa é a resposta ótima, assim,

enviar 6 unidades de 1 para b,
enviar 3 unidades de 1 para c,
enviar 6 unidades de 1 para d,
enviar 9 unidades de 2 para a,
enviar 4 unidades de 2 para c
d fica sem receber 3 unidades (relativo à origem fictícia)

z = 6x17 + 3x21 + 6x30 + 9x14 + 4x19 = 547

3.2. MÉTODOS DE DESIGNAÇÃO

Problemas de designação são casos particulares de problemas de transporte, e ocorrem quando todas as capacidades e demandas são unitárias, isto é, $\mathbf{s_i}=1$ (i=1..m) e $\mathbf{d_j}=1$ (j=1..n) e portanto **m=n**. Assim o problema resume-se a determinar a qual destino estará associada cada uma das origens.

Exemplo 3.4: Quatro nadadores têm os tempos (100m) para cada um dos quatro estilos mostrados na tabela abaixo. Devemos determinar qual a composição ideal desses nadadores para uma prova de revezamento de 400m medley, de maneira que o tempo total seja o menor possível.

Tempo em s (100m)

Nadador	Livre	Peito	Borboleta	Costas
1	54	54	51	53
2	51	57	52	52
3	50	53	54	56
4	56	54	55	53

A solução desse tipo de problema é feita através do Algoritmo Húngaro:

1 - Determinar o menor elemento em cada linha do quadro. Crie um novo quadro subtraindo de todos os elementos de cada linha o valor encontrado anteriormente. Repita o processo para cada coluna.

2 – Encontre o número mínimo de linhas (horizontais e/ou verticais) necessárias para cobrir todos os zeros no quadro. Se o número de linhas for < **m**, a resposta não é ótima, e devemos seguir para o próximo passo. Se o número de linhas for = **m**, as designações ótimas são dadas pelos **0**s do quadro.

3 – Determine o menor elemento $\neq$ **0** dentre os elementos não cobertos por linhas, subtraia esse valor de cada elemento não-coberto por linhas, e adicione esse valor aos elementos nas intersecções das linhas. Volte ao passo anterior.

Aplicando os passos ao nosso exemplo:

54	54	51	53
51	57	52	52
50	53	54	56
56	54	55	53

subtraindo o menor elemento de cada linha:

3	3	0	2
0	6	1	1
0	3	4	6
3	1	2	0

subtraindo o menor elemento de cada coluna:

3	2	0	2
0	5	1	1
0	2	4	6
3	0	2	0

encontrando as retas para cobrir os **0**s:

3	2	0	2
0	5	1	1
0	2	4	6
3	0	2	0

número de retas = 3 < m (=4)

valor do menor elemento não coberto por uma reta = 1

subtraindo 1 dos elementos não cobertos por retas e somando 1 aos elementos nas intersecções:

4	2	0	2
0	4	0	0
0	1	3	5
4	0	2	0

Não é possível cobrir todos os **0**s com menos do que 4 linhas, e esta é a solução ótima. As designações possíveis são dadas pelos **0**s do quadro.
Assim, vemos que:

- o nadador 1 pode competir no estilo borboleta,
- o nadador 2 pode competir nos estilos livre borboleta e costas, porém o estilo borboleta já está designado, e se competir no estilo livre, não haverá alternativa para o nadador 3, assim, o nadador 2 competirá no estilo costas.
- o nadador 3 competirá no estilo livre, e
- o nadador 4 competirá no estilo peito

Essas designações são determinadas assinalando os **0**s correspondentes:

4	2	$\boxed{0}$	2
0	4	0	$\boxed{0}$
$\boxed{0}$	1	3	5
4	$\boxed{0}$	2	0

E o tempo total da prova (função objetivo) será

Z= 51 + 52 + 50 + 54 = 207 segundos

Casos especiais

A existência de múltiplas soluções é determinada por inspeção, verificando-se as diversas possibilidades de designação.

Nos casos em que o problema não for balanceado, devemos criar origens ou destinos fictícios, conforme o caso.

No caso de um problema de maximização, simplesmente montamos o quadro com o negativo dos valores fornecidos.

Exemplo 3.5:. Maximizar o problema de designação :

	1	2	3	4
A	48	48	50	44
B	56	60	60	68
C	96	94	90	85
D	42	44	54	46

Como o algoritmo é para minimização, devemos multiplicar os coeficientes de custo por –1:

- 48	- 48	- 50	- 44
-56	- 60	- 60	- 68
- 96	- 94	- 90	- 85
- 42	- 44	- 54	- 46

Subtraindo o menor elemento de cada linha :

2	2	0	6
12	8	8	0
0	2	6	11
12	10	0	8

Subtraindo o menor de cada coluna:

2	0	0	6
12	6	8	0
0	0	6	11
12	8	0	8

Podemos verificar que não é possível cobrir os 0's com menos do que 4 retas, assim, a solução é

$$\begin{array}{cccc} 2 & \boxed{0} & 0 & 6 \\ 12 & 6 & 8 & \boxed{0} \\ \boxed{0} & 0 & 6 & 11 \\ 12 & 8 & \boxed{0} & 8 \end{array}$$

Designação ótima:

A-2, B-4, C-1 e D-3

Z= 48 + 68 + 96 + 54 = 266

48	48	50	44
56	60	60	68
96	94	90	85
42	44	54	46

4. MODELOS DETERMINÍSTICOS DE ESTOQUE

Necessidades de estoque: Matéria prima – produção não pode parar
Produto acabado – flutuação de demanda

Estoque = custos

Espaço físico	Seguro
Capital	Manuseio
Impostos	Obsolecencia
Deterioração	

Ideal ➔ estoque zero

4.1. COMPRA SEM CARÊNCIA

- Demanda constante
- Reposição instantânea
- Coeficientes de custo constantes

A figura abaixo mostra o comportamento do nível de estoque em função do tempo, também conhecido como “modelo dente de serra”. Dado um estoque inicial, este vai diminuido ou sendo consumido através de uma taxa de demanda constante, até ser nulo ao final do período **t**. Nesse momento, o estoque é reposto (comprado) de forma instantânea, e o ciclo prossegue por todo o período de planejamento **T**. Observe que a quantidade reposta é a mesma (Q), e que o nível máximo do estoque é exatamente igual à quantidade comprada.

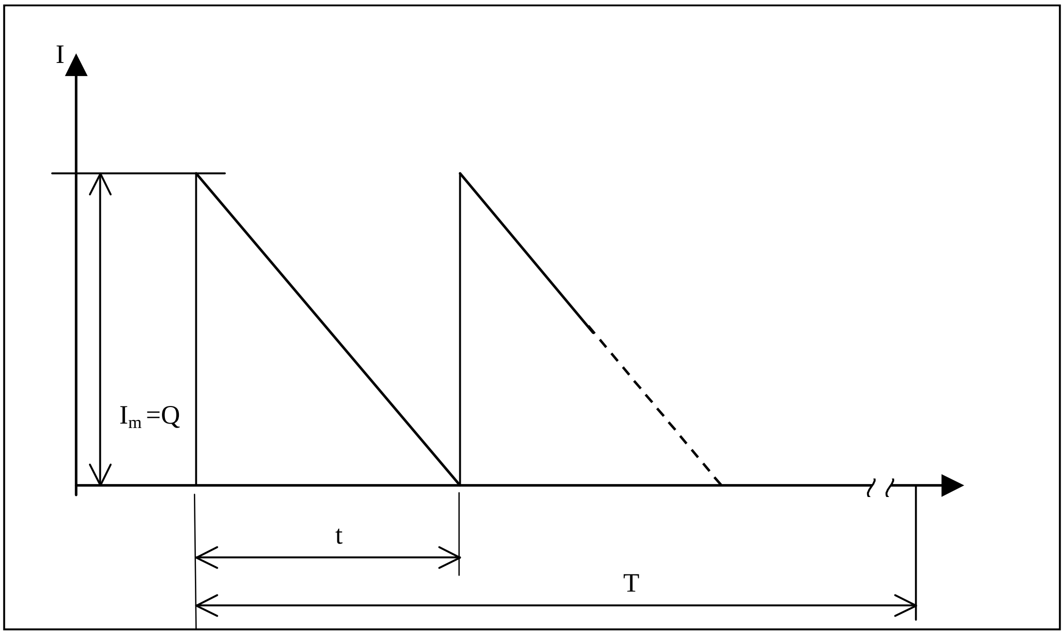

Figura 4-1.

Im = nível máximo de estoque.
Q =ordem de compra
t = período (tempo) entre as requisições
T = tempo de planejamento (1 ano...)

O custo total anual devido ao estoque pode ser dado por:

$$\frac{\text{custo total}}{\text{ano}} = \frac{\text{custo unitário}}{\text{ano}} + \frac{\text{custo compra}}{\text{ano}} + \frac{\text{custo manutenção}}{\text{ano}}$$

ou ainda

$$\frac{\text{custo total}}{\text{ano}} = \frac{\text{custo}}{\text{período}} \times \text{número de períodos}$$

Os custos envolvidos são:

C_1= custo unitário dos itens, como a quantidade adquirida em cada período é dada por Q,

➔ $C_1.Q$ = custo unitário por período

C_2 = custo da compra ou aquisição. Não é o custo dos itens, mas da operação de compra (burocracia, etc...) sendo 1 compra por período.

C_3 = custo manutenção por unidade. A existência de estoque implica em custos de manutenção desse estoque (seguros, manipulação, etc). O estoque médio por período é $\frac{Q}{2}$, então

➔ $C_3.t.\frac{Q}{2}$ = custo de manutenção por período

Assim, o custo total por período é

$$C' = C_1.Q + C_2. + C_3.t\frac{Q}{2}$$

Dado que D = demanda no período de planejamento, a duração de t é
$t=\frac{Q}{D}$,
ou seja em quanto tempo a quantidade Q é consumida a uma taxa de demanda D.

O número de requisições é então

$$N=\frac{D}{Q}$$

Assim, o custo total para o período T é dado por

$$C= C_1.D + C_2.\frac{D}{Q} + C_3.\frac{Q}{2}$$

O gráfico abaixo mostra o comportamento dos custos envolvidos em função da quantidade comprada Q. Observe que quanto maior o valor de Q, maior o custo total de aquisição, e em contrapartida, menor o custo de manutenção, já que os custos fixos envolvidos são divididos por um maior número de unidades. Podemos ver que a curva do custo total assume um valor mínimo para um certo valor de Q. Assim desejamos encontrar qual é a quantidade a ser pedida que incorra no menor custo total.

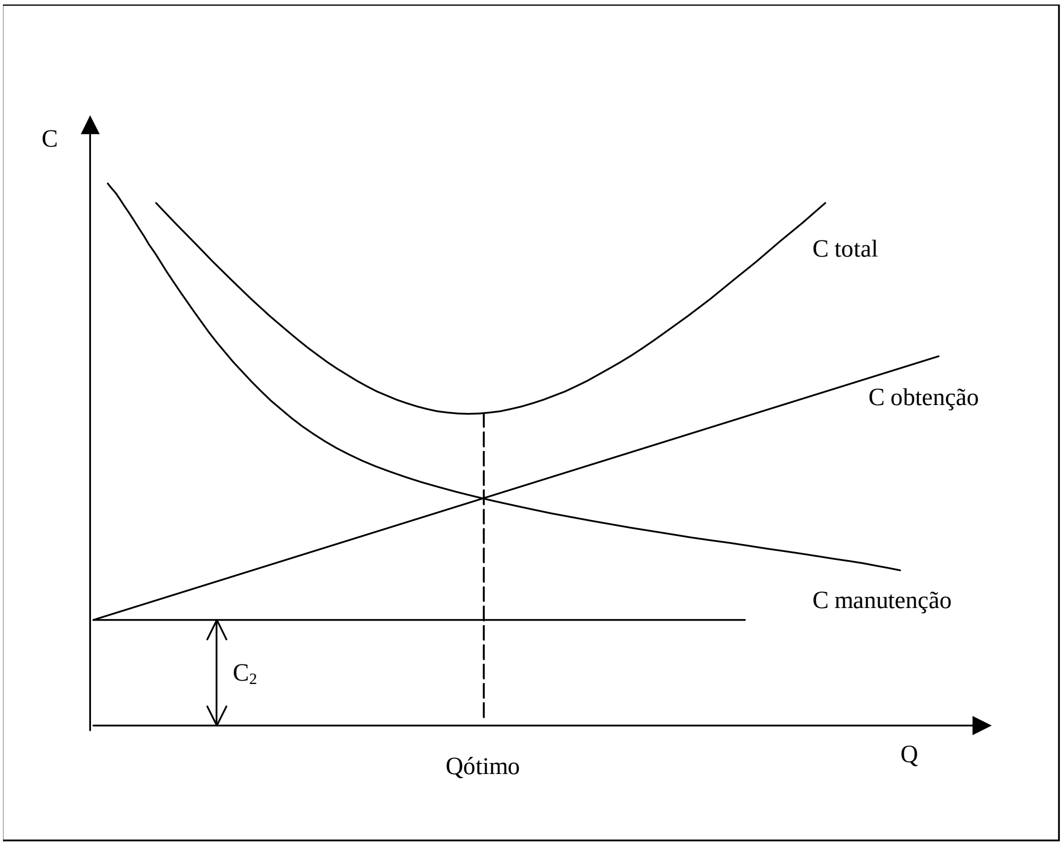

Figura 4-2.

Para encontrarmos $Q_{ótimo}$, devemos encontrar o mínimo da curva de custo total, o que é feito resolvendo $\frac{dC}{dQ} = 0$:

$$-\frac{C_2.D}{Q^2} + \frac{C_3}{2} = 0$$

➔ $Q = \sqrt{\frac{2.C_2.D}{C_3}}$ (custo total mínimo)

Exemplo 4-1. A demanda anual de certo ítem é 18.000 unidades, o custo de manutenção é \$1,20 por unidade por ano e o custo de cada compra é \$400. Se o custo de cada unidade for \$1,00, calcule:

a) Q ótimo

b) Custo total por ano
c) Número de requisições
d) Período entre as requisições

$C_1 = 1{,}00$ $C_2 = 400$ $C_3 = 1{,}2$

a) $Q = \sqrt{\dfrac{2x400x18000}{1{,}2}} = 3464$

b) $C = 18000\times 1 + 400\times\dfrac{18000}{3464} + 1{,}2\times\dfrac{3464}{2} = \$22.156{,}92$ / ano

c) $N = \dfrac{18000}{3464} = 5{,}2$ requisições/ano

d) t = 1/5,2 = 0,1925 ano ~ 2,3 meses ~ 70 dias

4.2. Fabricação sem carência

Neste modelo, os produtos necessários são fabricados, e não mais comprados. Como a fabricação não é instantânea, o estoque é reposto progressivamente. A taxa de produção (substituição) é finita e deve ser maior do que a taxa de demanda, senão não será possível repor o estoque.

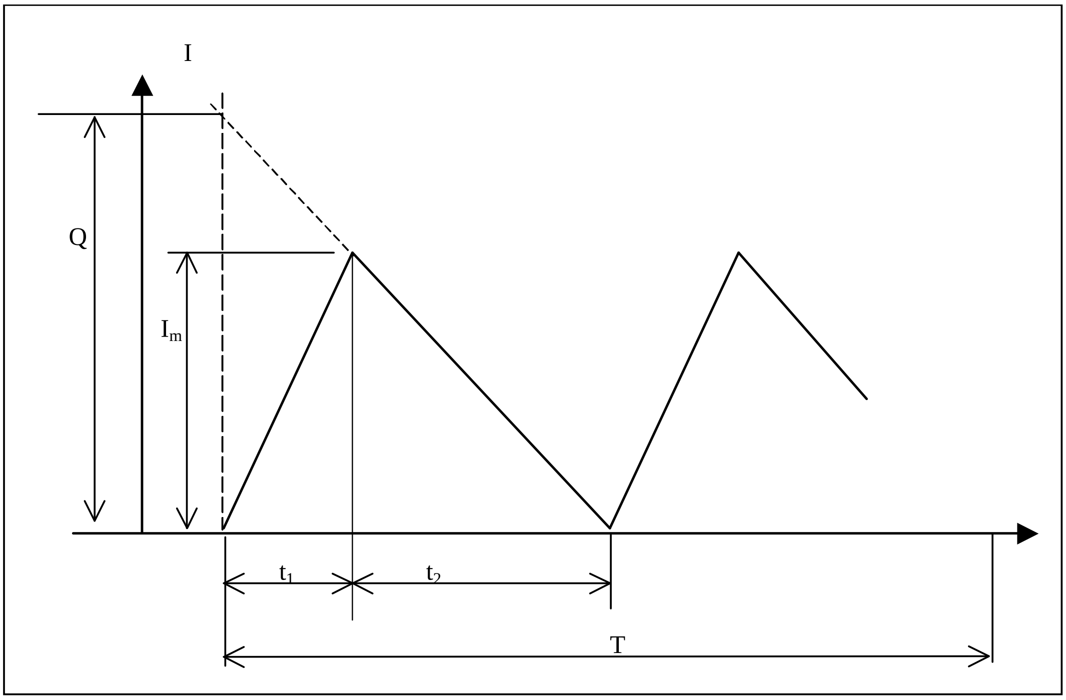

Figura 4-3.

Podemos ver no gráfico, que durante um período t1, os produtos são fabricados e consumidos ao mesmo tempo. Como a taxa de fabricação é maior do que a taxa de demanda, o nível do estoque se eleva. A partir do início de t2, há apenas o consumo dos itens, e o nível do estoque volta a baixar a zero, dando início a um novo ciclo.

Os custos envolvidos são os mesmos do modelo anterior, exceto que C_2 agora é chamado de custo de fabricação ou preparaçãomesmos custos e equação, mas substituindo custo de compra por custo de fabricação ou preparação.

Por período:

$$C' = C_1.Q + C_2. + C_3.(t_1 + t_2)\frac{I_m}{2}$$

$\frac{I_m}{2}$ = estoque médio

$$t_1 + t_2 = \frac{Q}{D}$$

$I_m = t_1.(R - D)$

R = taxa de produção
D= taxa de demanda
R – D = acumulação

$t_1 = \frac{Q}{R}$, ou tempo para produzir Q unidades a uma taxa R

Assim,

$$I_m = \frac{Q}{R}.(R - D) = Q \cdot \left(1 - \frac{D}{R}\right)$$

$$C' = C_1.Q + C_2. + C_3\frac{Q}{D}\cdot\frac{Q}{2}\left(1 - \frac{D}{R}\right)$$

Multiplicando pelo número de períodos (D/Q)

$$C = C_1.D + C_2.\frac{D}{Q} + C_3.\frac{Q}{2}\left(1 - \frac{D}{R}\right)$$

Encontrando o mínimo da função...

$$\frac{dC}{dQ} = - C_2.\frac{D}{Q^2} + C_3.\frac{Q}{2}\left(1 - \frac{D}{R}\right) = 0$$

A quantidade a ser produzida que incorre no custo mínimo é

$$Q = \sqrt{\frac{2.C_2.D}{C_3.(1-D/R)}}$$

Exemplo 4-2.

D=18.000 /ano
R=3.000/mes
Custo de fabricação = $ 500,00
Manut = $0,15/mes
Custo unit = $2,00

$$Q = \sqrt{\frac{2\times500\times18000}{0{,}15\times12\times[1-18000/(3000\times12)]}} = 4472$$

$$C = 18000\times2 + 500\times\frac{18000}{4472} + 0{,}15\times12\times\frac{4472}{2}\times\left(1-\frac{18000}{3000\times12}\right)$$

C= $46.025/ano

$$I_m = 4472\times\left(1-\frac{18000}{3000\times12}\right) = 2236$$

$$t_1 = \frac{4472}{3000\times12} = 0{,}12 \text{ ano}$$

N = 4 requisições por ano

4.3. COMPRA COM FALTA

Nesse modelo, as faltas no estoque são permitidas, e o custo da falta é dado por C_4 .

O custo por período é dado por

$$C' = C_1.Q + C_2. + C_3.t_1.\frac{I_m}{2} + C_4.t_2.\frac{S}{2}$$

Onde

$\frac{S}{2}$ = falta média

$I_m = Q - S$

t = Q/D

Observe que a falta ocorre durante um período t2.

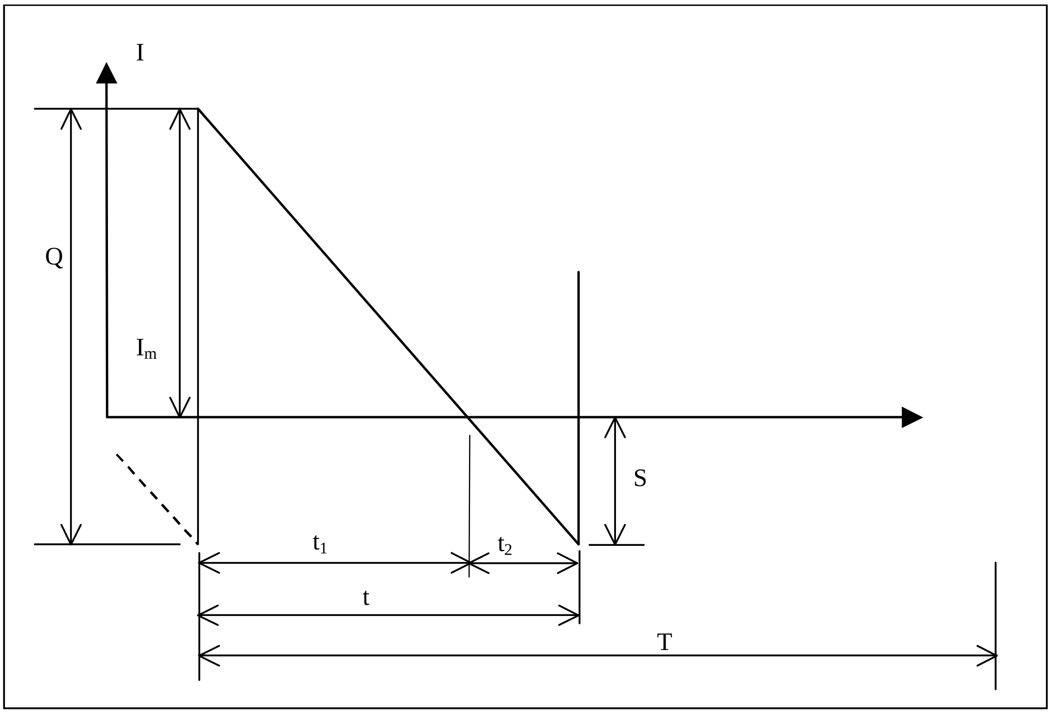

Figura 4-4.

Por semelhança de triângulos:

$$t_1 = t.\frac{I_m}{Q}$$

$$t_2 = t.\frac{S}{Q}$$

Im = t1.D = Q-S

S = t2.D

Assim, substituindo t

$$t_1 = \frac{Q-S}{Q} \cdot \frac{Q}{D}$$

$$t_2 = \frac{S}{Q} \cdot \frac{Q}{D}$$

Substituindo em C'

$$C' = C_1.Q + C_2. + C_3. \frac{Q-S}{Q} \cdot \frac{Q}{D} \cdot \frac{Q-S}{2} + C_4. \frac{S}{Q} \cdot \frac{Q}{D} \cdot \frac{S}{2}$$

Multiplicando pelo numero de períodos (D/Q)

$$C = C_1.D + C_2.\frac{D}{Q} + C_3.\frac{(Q-S)^2}{2.Q} + C_4.\frac{S^2}{2Q}$$

Resolvendo $\frac{\partial C}{\partial S} = 0$ para S, temos

$$\frac{\partial C}{\partial S} = -C_3 + C_3.\frac{S}{Q} + C_4.\frac{S}{Q} = 0$$

$$S = \frac{C_3}{C_3 + C_4}.Q$$

Substituindo o valor de S e resolvendo $\frac{\partial D}{\partial Q} = 0$

$$\frac{\partial C}{\partial Q} = -C_2.\frac{D}{Q^2} + \frac{C_3}{2} - C_3.\frac{S^2}{2Q_2} - C_4.\frac{S^2}{2Q^2}$$

$$= -C_2.\frac{D}{Q^2} + \frac{C_3}{2} - \frac{S^2}{2Q^2}.(C_3 - C_4) = 0$$

chegamos a

$$Q = \sqrt{\frac{2.C_2.D}{C_3}}.\sqrt{\frac{C_4 + C_3}{C_4}}$$

e

$$S = \sqrt{\frac{2.C_2.D}{C_4}}.\sqrt{\frac{C_3}{C_3 + C_4}}$$

Exemplo 4-3.

Repetindo o exemplo 1, com C4 = $5,00 por ano

$$Q = \sqrt{\frac{2\times 400\times 18000}{1,2}}.\sqrt{\frac{5+1,2}{5}} = 3857$$

$$S = \sqrt{\frac{2\times 400\times 18000}{5}}.\sqrt{\frac{1,2}{1,2+5}} = 747$$

$$C = 1\times 18000 + 400\times\frac{18000}{3875} + 1,2.\frac{(3857-747)^2}{2\times 18000} + 5\times\frac{747^2}{2\times 18000} = \$21.733,00$$

Im = 3857-747 = 3111

t= 3857/18.000 = 0,215 ano

N =1/t = 4.66

Poderíamos ainda calcular t1 e t2...

4.4. FABRICAÇÃO COM FALTA

As seguintes equações aplicam-se a esse modelo (observe o gráfico para entender como foram obtidas):

$$C' = C_1.Q + C_2. + C_3.(t_1 + t_2)\frac{I_m}{2} + C_4.(t_3 + t_4).\frac{S}{2}$$

$I_m = t_1.(R-D)$

$I_m = t_2.D \Rightarrow t_2.D = t_1.(R-D)$

$S = t_4.(R-D)$

$S = t_3.D \Rightarrow t_3.D = t_4.(R-D)$

$(t_2 + t_3).\ D = (t_1 + t_4).(R - D)$

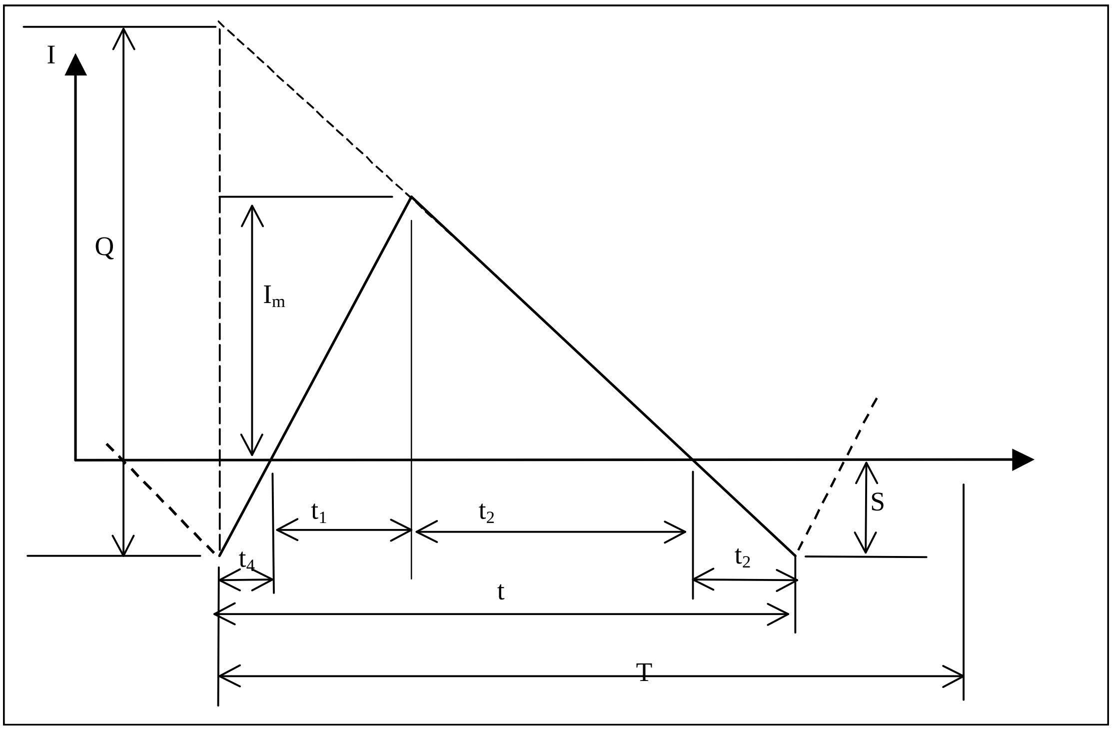

Figura 4-5.

Omitindo os detalhes, chegamos a

$$C = C_1.D + C_2.\frac{D}{Q} + \frac{C_3}{2.Q}.\left[Q.\left(1-\frac{D}{R}\right)-S\right]^2.\frac{1}{1-D/R} + C_4.\frac{S^2}{2Q}.\frac{1}{1-D/R}$$

Usando o mesmo procedimento já visto (derivadas parciais, etc...) chegamos finalmente a

$$Q = \sqrt{\frac{2.C_2.D}{C_3.(1-D/R)}}.\sqrt{\frac{C_4+C_3}{C_4}} \quad \text{e} \quad S = \sqrt{\frac{2.C_2.D}{C_4}}.\sqrt{\frac{C_3}{C_3+C_4}}.\sqrt{1-\frac{D}{R}}$$

Exemplo 4-4. Repetindo o exemplo 2 com C4 = \$40,00, chegaremos aos resultados mostrados abaixo. Encontre também os valores de t1, t2, t3, e t4.

D=18.000 /ano
R=3.000/mes
Manut = \$0,15/mes
Custo unit = \$2,00
C2=500
Repetir exemplo 2 com C4=20

D =	18000	Q =	4669,05
R =	36000	S =	192,76
C1 =	2	C =	41869,51
C2 =	500	t =	0,26
C3 =	1,8	N =	3,86
C4 =	20	Im =	4476,29

4.5. Ponto de Requisição

Como a entrega ou fabricação não é imediata, ou seja, pode demorar algum tempo até ser entregue, devemos encontrar o nível de estoque a partiro do qual a requisição deve ser feita, para que não haja falta. Considerando o exemplo 1, se o tempo de entrega do pedido for de 20 dias, qual é o ponto de reposição do estoque? Suponha 1 ano = 250 dias (úteis)

Q = 3465

t=0,1925 x 250 = 48 dias

Demanda/dia = 18000/250 = 72 unidades dia

Demanda durante a espera = 20 x 72 = 1440

Ponto de reposição = 1440 unidades no estoque, ou seja, quando o estoque atingir 1440 unidades, deve ser feito um novo pedido de compra.