▶ Nos Exercícios 38–39, preencha as entradas marcadas com um $\times$ para produzir uma matriz antissimétrica. ◀

38. $A = \begin{bmatrix} \times & \times & 4 \\ 0 & \times & \times \\ \times & -1 & \times \end{bmatrix}$ **39.** $A = \begin{bmatrix} \times & 0 & \times \\ \times & \times & -4 \\ 8 & \times & \times \end{bmatrix}$

40. Encontre todos os valores de a, b, c e d com os quais A é antissimétrica.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2a-3b+c & 3a-5b+5c \\ -2 & 0 & 5a-8b+6c \\ -3 & -5 & d \end{bmatrix}$$

41. Mostramos no Teorema 1.7.3 que o produto de matrizes simétricas é uma matriz simétrica se, e só se, as matrizes comutam. Será o produto de matrizes antissimétricas que comutam uma matriz antissimétrica? Explique. [*Observação*: ver Exercício 37 para a definição de antissimétrica.]

42. Se a matriz A de tamanho $n \times n$ pode ser expressa como $A = LU$, em que L é uma matriz triangular inferior e U é uma matriz triangular superior, então o sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ pode ser expresso como $LU\mathbf{x} = \mathbf{b}$ e pode ser, portanto, resolvido em dois passos, como segue.

Passo 1. Seja $U\mathbf{x} = \mathbf{y}$, de modo que $LU\mathbf{x} = \mathbf{b}$ pode ser escrito como $L\mathbf{y} = \mathbf{b}$. Resolva esse sistema.

Passo 2. Resolva o sistema $U\mathbf{x} = \mathbf{y}$ em $\mathbf{x}$.

Em cada parte, use esse método de dois passos para resolver o sistema dado.

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ -3 & -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -5 & 2 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -5 \\ 2 \end{bmatrix}$

43. Encontre uma matriz triangular superior que satisfaça

$$A^3 = \begin{bmatrix} 1 & 30 \\ 0 & -8 \end{bmatrix}$$

Exercícios verdadeiro/falso

Nas partes (a)-(m), determine se a afirmação é verdadeira ou falsa, justificando sua resposta.

(a) A transposta de uma matriz diagonal é uma matriz diagonal.

(b) A transposta de uma matriz triangular superior é uma matriz triangular superior.

(c) A soma de uma matriz triangular superior e uma triangular inferior é uma matriz diagonal.

(d) Todas as entradas de uma matriz simétrica são determinadas pelas entradas que ocorrem na diagonal principal e acima dela.

(e) Todas as entradas de uma matriz triangular superior são determinadas pelas entradas que ocorrem na diagonal principal e acima dela.

(f) A inversa de uma matriz triangular inferior invertível é uma matriz triangular superior.

(g) Uma matriz diagonal é invertível se, e só se, todas as entradas diagonais são positivas.

(h) A soma de uma matriz diagonal e uma matriz triangular inferior é uma matriz triangular inferior.

(i) Uma matriz simétrica e triangular superior é diagonal.

(j) Se A e B são matrizes $n \times n$ tais que $A + B$ é simétrica, então A e B são simétricas.

(k) Se A e B são matrizes $n \times n$ tais que $A + B$ é triangular superior, então A e B são triangulares superiores.

(l) Se A^2 for simétrica, então A será uma matriz simétrica.

(m) Se kA for uma matriz simétrica com algum $k \neq 0$, então A será uma matriz simétrica.

1.8 Aplicações de sistemas lineares

Nesta seção, discutiremos resumidamente algumas aplicações de sistemas lineares. Essa é apenas uma pequena amostragem da ampla variedade de problemas do mundo real aos quais é aplicável nosso estudo de sistemas lineares.

Análise de redes

O conceito de *rede* aparece numa variedade de aplicações. Em termos gerais, uma ***rede*** é um conjunto de ***ramos*** através dos quais "flui" algum meio. Os ramos, por exemplo, podem ser fios elétricos através dos quais flui corrente elétrica, canos através dos quais flui água ou petróleo, ruas de uma cidade pelas quais fluem veículos, ou conexões financeiras pelas quais flui dinheiro, para citar apenas alguns.

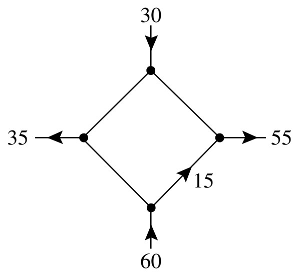
Os ramos da maioria das redes se encontram em pontos denominados ***nós*** ou ***vértices***, nos quais o fluxo divide. Por exemplo, numa rede elétrica, os nós ocorrem onde três ou mais fios se juntam; na rede do trânsito, eles ocorrem em cruzamentos de ruas; e numa rede financeira, eles ocorrem em centros bancários, nos quais o dinheiro é distribuído a indivíduos ou outras instituições.

No estudo de redes, existe, em geral, alguma medida numérica da taxa segundo a qual o meio flui ao longo do ramo. Por exemplo, o fluxo de uma corrente elétrica, em geral, é medido em ampères; a taxa de fluxo da água ou petróleo, em litros por minuto; a do fluxo do trânsito, em veículos por hora; e a taxa do fluxo de moeda europeia, em milhões de euros por dia. Vamos restringir nossa atenção às redes em que há ***conservação do fluxo*** em cada nó, com o que queremos dizer que *a taxa de fluxo para dentro de qualquer nó é igual à taxa de fluxo para fora desse nó*. Isso garante que o meio não se acumula nos nós e não impede o movimento livre do meio ao longo da rede.

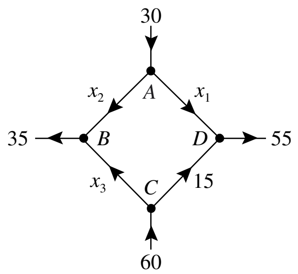
Um problema comum na análise de redes é usar taxas de fluxo conhecidas em certos ramos para encontrar a taxa de fluxo em todos os demais ramos da rede. Aqui temos um exemplo.

▶ EXEMPLO 1 Análise de redes usando sistemas lineares

A Figura 1.8.1 mostra uma rede de quatro nós com indicação de algumas taxas de fluxo e sentido do fluxo ao longo de ramos. Encontre as taxas de fluxo e o sentido do fluxo nos demais ramos.



▲ Figura 1.8.1



▲ Figura 1.8.2

Solução Como ilustra a Figura 1.8.2, associamos sentidos arbitrários para as taxas de fluxos x_1, x_2 e x_3. Não precisamos nos preocupar com a veracidade desses sentidos, pois um sentido incorreto acabará recebendo um valor negativo para a taxa de fluxo quando tivermos resolvido para as incógnitas.

Segue da conservação do fluxo no nó A que

$$x_1 + x_2 = 30$$

Analogamente, nos demais nós, obtemos

$$\begin{aligned} x_2 + x_3 &= 35 \quad \text{(nó B)} \\ x_3 + 15 &= 60 \quad \text{(nó C)} \\ x_1 + 15 &= 55 \quad \text{(nó D)} \end{aligned}$$

Essas quatro condições produzem o sistema linear

$$\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & x_2 & & & = & 30 \\ & & x_2 & + & x_3 & = & 35 \\ & & & & x_3 & = & 45 \\ x_1 & & & & & = & 40 \end{array}$$

que podemos, agora, tentar resolver para as taxas de fluxo desconhecidas. Nesse caso particular, o sistema é suficientemente simples para resolvê-lo sem fazer contas (de baixo para cima). Deixamos para o leitor confirmar que a solução é

$$x_1 = 40, \quad x_2 = -10, \quad x_3 = 45$$

Como x_2 é negativo, vemos que o sentido do fluxo naquele ramo da Figura 1.8.2 está incorreto, pois o fluxo naquele ramo é *para dentro* do nó A.

▶ EXEMPLO 2 Projetando padrões de tráfego

A rede da Figura 1.8.3 mostra uma proposta de fluxo de tráfego de uma certa cidade em torno de uma de suas praças, a Praça 15. O plano prevê a instalação de um semáforo computadorizado na saída norte da Rua Lavradio, e o diagrama indica o número médio de veículos por hora que se espera ter nas ruas que circundam o complexo da praça. Todas as ruas são de mão única.

(a) O semáforo deveria deixar passar quantos veículos por hora para garantir que o número médio de veículos por hora que entra no complexo seja igual ao número médio de veículos que sai do complexo?

(b) Supondo que o semáforo tenha sido ajustado para equilibrar o fluxo total para dentro e para fora do complexo da praça, o que pode ser dito sobre o número médio de veículos por hora que circulará pelas ruas que circundam o complexo?

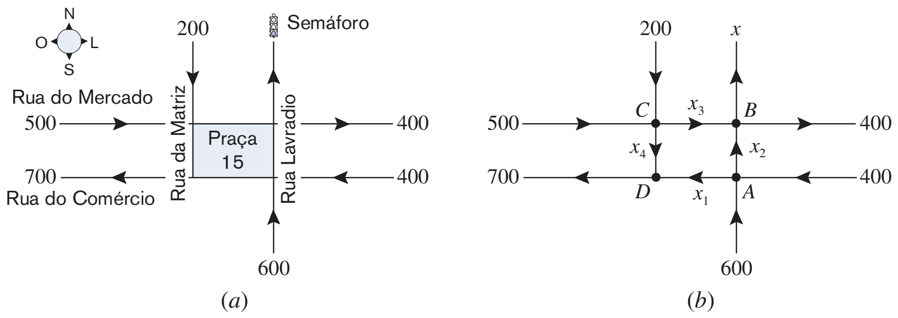


Figura 1.8.3

Solução (a) Se x for o número de veículos por hora que o semáforo deve deixar passar, conforme Figura 1.8.3(b), então o número total de veículos por hora que entra e sai do complexo da praça será

Para dentro: $500 + 400 + 600 + 200 = 1.700$
Para fora: $x + 700 + 400$

Igualando os fluxos para fora e para dentro, vemos que o semáforo deveria deixar passar 600 veículos por hora.

Solução (b) Para evitar congestionamentos de trânsito, o fluxo para dentro de cada cruzamento deve igualar o fluxo para fora do cruzamento. Para isso acontecer, as condições seguintes devem estar satisfeitas.

Cruzamento	Fluxo para dentro		Fluxo para fora
A	$400 + 600$	$=$	$x_1 + x_2$
B	$x_2 + x_3$	$=$	$400 + x$
C	$500 + 200$	$=$	$x_3 + x_4$
D	$x_1 + x_4$	$=$	700

Assim, com $x = 600$, como calculamos na parte (a), obtemos o sistema linear seguinte.

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 1.000 \\ x_2 + x_3 &= 1.000 \\ x_3 + x_4 &= 700 \\ x_1 + x_4 &= 700 \end{aligned}$$

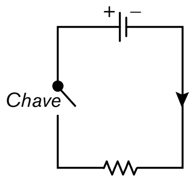
Deixamos para o leitor mostrar que esse sistema tem uma infinidade de soluções e que estas são dadas pelas equações paramétricas

$$x_1 = 700 - t, \quad x_2 = 300 + t, \quad x_3 = 700 - t, \quad x_4 = t \tag{1}$$

Contudo, nesse exemplo, o parâmetro t não é completamente arbitrário, pois há restrições físicas a considerar. Por exemplo, as taxas de fluxo médias devem ser não negativas, pois estamos supondo ruas de mão única, e uma taxa de fluxo negativa indicaria um fluxo na contramão. Portanto, vemos de (1) que t pode ser qualquer número real que satisfaça $0 \leq t \leq 700$, o que implica que a taxa de fluxo média ao longo das ruas ficará dentro das cotas

$$0 \leq x_1 \leq 700, \quad 300 \leq x_2 \leq 1.000, \quad 0 \leq x_3 \leq 700, \quad 0 \leq x_4 \leq 700$$ ◀

Circuitos elétricos



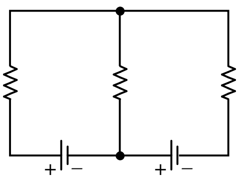
▲ **Figura 1.8.4**

Em seguida, mostramos como a análise de redes pode ser usada para analisar circuitos elétricos constituídos de capacitores e resistores. Um ***capacitor*** é uma fonte de energia elétrica, como uma bateria, e um ***resistor*** é um elemento que dissipa energia elétrica, como uma lâmpada. A Figura 1.8.4 mostra o diagrama esquemático de um circuito com um capacitor (representado pelo símbolo ⊣⊢), um resistor (representado pelo símbolo –∧∨∧∨–) e uma chave. O capacitor tem um ***polo positivo*** (+) e um ***polo negativo*** (−). Quando a chave está fechada, consideramos a corrente elétrica fluindo a partir do polo positivo do capacitor, através do resistor, e de volta ao polo negativo do capacitor (indicado pela seta na figura).

A corrente elétrica, que é um fluxo de elétrons por fios, tem um comportamento muito parecido com o do fluxo de água por canos. Um capacitor funciona como uma bomba que cria "pressão elétrica" para aumentar a taxa de fluxo dos elétrons, e um resistor age como uma restrição num cano que reduz a taxa de fluxo dos elétrons. O termo técnico para a pressão elétrica é ***tensão elétrica***, que usualmente é medida em ***volts*** (V). A ***resistência*** é o quanto o resistor reduz a tensão elétrica, e costuma ser medida em ***ohms*** (Ω). A taxa de fluxo dos elétrons num fio é denominada a intensidade de ***corrente***, e é usualmente medida em ***ampères*** (A). O efeito preciso de um resistor é dado pela seguinte lei.

Lei de Ohm Se uma corrente de I ampères passa por um resistor com uma resistência de R ohms, então o resultado é uma queda da tensão elétrica de E volts, que é o produto da corrente pela resistência, ou seja,

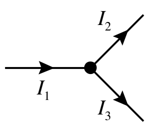
$$E = IR$$



▲ **Figura 1.8.5**

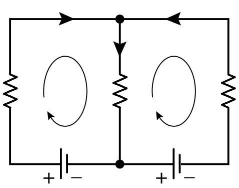
Uma rede elétrica típica possui vários capacitores e resistores ligados por alguma configuração de fios. Um ponto no qual três ou mais fios da rede se encontram é um ***nó*** da rede. Um ***ramo*** é um fio ligando dois nós, e um ***laço fechado*** é uma sucessão de ramos conectados que começa e termina no mesmo nó. Por exemplo, o circuito elétrico da Figura 1.8.5 tem dois nós e três laços fechados, dois internos e um externo. À medida que a corrente flui pelo circuito elétrico, ela passa por aumentos e diminuições de tensão elétrica, que são as ***elevações*** e as ***quedas*** de voltagem, respectivamente. O comportamento da corrente nos nós e em torno de laços fechados é governado por duas leis fundamentais.

Lei das correntes de Kirchhoff A soma das correntes fluindo para dentro de qualquer nó é igual à soma das correntes fluindo para fora do nó.



▲ **Figura 1.8.6**

Lei das tensões de Kirchhoff Em uma volta em torno de qualquer laço fechado, a soma das elevações de voltagem é igual à soma das quedas de voltagem.



Convenção de laço fechado horário com sentidos arbitrários atribuídos às correntes nos ramos

▲ **Figura 1.8.7**

A lei das correntes de Kirchhoff é uma versão para circuitos elétricos do princípio da conservação do fluxo num nó, que enunciamos para redes gerais. Assim, por exemplo, as correntes no nó superior da Figura 1.8.6 satisfazem a equação $I_1 = I_2 + I_3$.

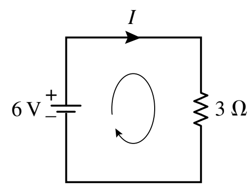
Em geral, não é possível saber de antemão os sentidos nos quais estão fluindo as correntes em circuitos com vários laços e capacitores; por isso, na análise de circuitos, é costume atribuir sentidos *arbitrários* aos fluxos das correntes nos vários ramos e deixar os cálculos matemáticos determinarem se os sentidos atribuídos estão corretos. Além de atribuir sentidos aos fluxos de corrente, a lei das tensões de Kirchhoff requer um sentido de percurso para cada laço fechado. A escolha é sempre arbitrária, mas para obter alguma consistência, sempre tomaremos esse sentido como sendo o *horário* (Figura 1.8.7). Também introduzimos as seguintes convenções.

- Se o sentido associado à corrente através do resistor for o mesmo que o sentido associado ao laço, então ocorre uma queda de voltagem no resistor e, se o sentido associado à corrente através do resistor for o oposto do sentido associado ao laço, então ocorre uma elevação de voltagem no resistor.
- Se o sentido associado à corrente através do laço for de − para + num capacitor, então ocorre uma elevação de voltagem no capacitor e, se o sentido associado à corrente através do laço for de + para − num capacitor, então ocorre uma queda de voltagem no capacitor.

Seguindo essas convenções ao calcular intensidades de correntes, as correntes cujos sentidos de fluxo foram atribuídos corretamente serão positivas, e aquelas cujos sentidos de fluxo foram atribuídos incorretamente serão negativas.

► EXEMPLO 3 Um circuito com um laço fechado

Determine a corrente I do circuito mostrado na Figura 1.8.8.



▲ **Figura 1.8.8**

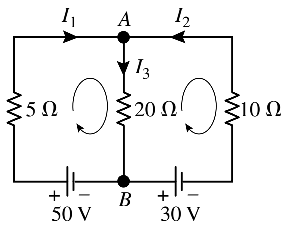
Solução Como o sentido atribuído à corrente pelo resistor é igual ao sentido do laço, temos uma queda de voltagem no resistor. Pela lei de Ohm, essa voltagem é $E = IR = 3I$. Além disso, como o sentido do laço é de − para + no capacitor, temos um aumento de voltagem de 6 volts no capacitor. Assim, pela lei das tensões de Kirchhoff, segue que

$$3I = 6$$

e concluímos que a corrente é $I = 2$A. Como I é positivo, está correto o sentido atribuído ao fluxo da corrente.

► EXEMPLO 4 Um circuito com três laços fechados

Determine as correntes I_1, I_2 e I_3 do circuito mostrado na Figura 1.8.9.



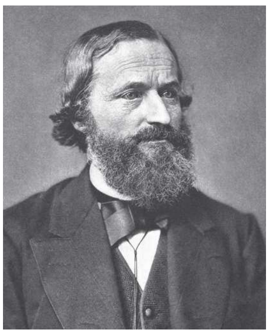
▲ **Figura 1.8.9**

Solução Usando os sentidos atribuídos às correntes, a lei das correntes de Kirchhoff fornece uma equação para cada nó:

Nó	Corrente para dentro		Corrente para fora
A	$I_1 + I_2$	=	I_3
B	I_3	=	$I_1 + I_2$

Contudo, essas equações realmente são iguais, pois ambas podem ser escritas como

$$I_1 + I_2 - I_3 = 0 \tag{2}$$



Gustav Kirchhoff (1824–1887)

Nota histórica O físico alemão Gustav Kirchhoff foi um aluno de Gauss. Seu trabalho sobre as leis que levam seu nome, anunciado em 1854, foi um avanço considerável no cálculo de correntes, voltagem e resistência de circuitos elétricos. Kirchhoff era severamente incapacitado, tendo passado a maior parte de sua vida de muletas ou em cadeira de rodas.

[Imagem: ©SSPL/The Image Works]

Para encontrar valores únicos para as correntes, vamos precisar de mais duas equações, que obtemos com a lei das tensões de Kirchhoff. Podemos ver, pelo diagrama do circuito, que há três laços fechados: um laço interno à esquerda com um capacitor de 50 V, um laço interno à direita com um capacitor de 30 V e o laço externo que contém ambos capacitores. Assim, a lei das tensões de Kirchhoff de fato fornece três equações. Num percurso horário dos laços, as quedas e as elevações de voltagem nesses três laços são como segue.

	Elevação de voltagem	**Queda de voltagem**
Laço interno à esquerda	50	$5I_1 + 20I_3$
Laço interno à direita	$30 + 10I_2 + 20I_3$	0
Laço externo	$30 + 50 + 10I_2$	$5I_1$

Essas condições podem ser reescritas como

$$\begin{aligned} 5I_1 \qquad\quad + 20I_3 &= 50 \\ 10I_2 + 20I_3 &= -30 \\ 5I_1 - 10I_2 \qquad\quad &= 80 \end{aligned} \tag{3}$$

Contudo, por ser a diferença das duas primeiras, a última equação é supérflua. Assim, combinando (2) e as duas primeiras equações de (3), obtemos o sistema linear de três equações em três incógnitas que segue.

$$\begin{aligned} I_1 + I_2 - I_3 &= 0 \\ 5I_1 \qquad + 20I_3 &= 50 \\ 10I_2 + 20I_3 &= -30 \end{aligned}$$

Deixamos para o leitor resolver esse sistema e mostrar que $I_1 = 6$A, $I_2 = -5$ A e $I_3 = 1A$. Como I_2 é negativo, vemos que o sentido da corrente é o oposto do indicado na Figura 1.8.9. ◀

Equilibrando equações químicas

Os componentes químicos são representados por ***fórmulas químicas*** que descrevem a composição atômica de suas moléculas. Por exemplo, a fórmula química da água é H_2O, pois é composta de dois átomos de hidrogênio e um átomo de oxigênio, e a fórmula química do oxigênio estável é O_2, pois é composto de dois átomos de oxigênio.

Quando combinamos compostos químicos sob condições corretas, os átomos de suas moléculas se rearranjam e formam novos componentes. Por exemplo, na queima de metano, o metano (CH_4) e o oxigênio estável (O_2) reagem para formar dióxido de carbono (CO_2), ou gás carbônico, e água (H_2O). Isso é indicado pela ***equação química***

$$CH_4 + O_2 \longrightarrow CO_2 + H_2O \tag{4}$$

As moléculas à esquerda da seta são denominadas ***reagentes***, e as à direita são os ***produtos***. Nessa equação, o sinal de mais serve somente para separar as moléculas e não tem conotação de operação algébrica. Contudo, essa equação não conta toda a história, pois deixa de mencionar as proporções de moléculas necessárias para uma ***reação completa*** (sem sobra de reagentes). Por exemplo, podemos ver, no lado direito de (4), que, para produzir uma molécula de dióxido de carbono e uma molécula de água, precisamos de *três* átomos de oxigênio para cada átomo de carbono. Contudo, vemos, no lado esquerdo de (4), que uma molécula de metano e uma molécula de oxigênio estável têm somente *dois* átomos de oxigênio para cada átomo de carbono. Assim, para ter uma reação completa, a razão de metano para oxigênio estável do lado dos reagentes não pode ser de um para um.

Dizemos que uma reação química está ***equilibrada*** se aparecer o mesmo número de átomos em cada lado da seta para cada tipo de átomo na reação. Por exemplo, a versão equilibrada da Equação (4) é

$$CH_4 + 2O_2 \longrightarrow CO_2 + 2H_2O \tag{5}$$

com a qual queremos indicar que combinamos uma molécula de metano com duas de oxigênio estável para produzir uma molécula de gás carbônico e duas moléculas de água. Poderíamos perfeitamente multiplicar toda a equação por qualquer inteiro positivo. Por exemplo, multiplicando todos os termos por 2, obtemos a equação química equilibrada

$$2CH_4 + 4O_2 \longrightarrow 2CO_2 + 4H_2O$$

Contudo, é convenção padrão utilizar os menores inteiros positivos que equilibram a equação.

A Equação (4) é suficientemente simples para ser equilibrada por tentativa e erro, mas equações químicas mais complicadas requerem um método mais sistemático. Existem vários métodos que podem ser usados, mas veremos um que usa sistemas de equações lineares. Para ilustrar o método, vamos reexaminar a Equação (4). Para equilibrar essa equação, precisamos encontrar inteiros x_1, x_2, x_3 e x_4 tais que

$$x_1\,(CH_4) + x_2\,(O_2) \longrightarrow x_3\,(CO_2) + x_4\,(H_2O) \tag{6}$$

Para cada um dos átomos da equação, o número de átomos à esquerda deve ser igual ao número de átomos à direita. Expresso em formato tabular, temos

	Lado esquerdo		Lado direito
Carbono	x_1	=	x_3
Hidrogênio	$4x_1$	=	$2x_4$
Oxigênio	$2x_2$	=	$2x_3 + x_4$

de onde obtemos o sistema linear homogêneo

$$\begin{aligned} x_1 \qquad - x_3 \qquad &= 0 \\ 4x_1 \qquad\qquad - 2x_4 &= 0 \\ 2x_2 - 2x_3 - x_4 &= 0 \end{aligned}$$

A matriz aumentada desse sistema é

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Deixamos para o leitor mostrar que a forma escalonada reduzida por linhas dessa matriz é

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

da qual concluímos que a solução geral desse sistema é

$$x_1 = t/2, \quad x_2 = t, \quad x_3 = t/2, \quad x_4 = t$$

em que t é arbitrário. Os menores valores inteiros positivos para as incógnitas ocorrem quando tomamos $t = 2$, de modo que podemos equilibrar a equação tomando $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 1$, $x_4 = 2$. Isso confere com nossa conclusão anterior, pois substituindo esses valores em (6), obtemos (5).

▶ EXEMPLO 5 Equilibrando equações químicas usando sistemas lineares

Equilibre a equação química

$$\begin{array}{ccccccc} \mathrm{HCl} & + & \mathrm{Na_3PO_4} & \longrightarrow & \mathrm{H_3PO_4} & + & \mathrm{NaCl} \\ \textbf{[ácido clorídrico]} & + & \textbf{[fosfato de sódio]} & \longrightarrow & \textbf{[ácido fosfórico]} & + & \textbf{[cloreto de sódio]} \end{array}$$

Solução Sejam x_1, x_2, x_3 e x_4 inteiros positivos que equilibram a equação

$$x_1\,(\mathrm{HCl}) + x_2\,(\mathrm{Na_3PO_4}) \longrightarrow x_3\,(\mathrm{H_3PO_4}) + x_4\,(\mathrm{NaCl}) \tag{7}$$

Igualando o número de átomos de cada tipo de ambos lados, resulta

$$\begin{aligned} 1x_1 &= 3x_3 && \textbf{Hidrogênio (H)} \\ 1x_1 &= 1x_4 && \textbf{Cloro (Cl)} \\ 3x_2 &= 1x_4 && \textbf{Sódio (Na)} \\ 1x_2 &= 1x_3 && \textbf{Fósforo (P)} \\ 4x_2 &= 4x_3 && \textbf{Oxigênio (O)} \end{aligned}$$

do que obtemos o sistema linear homogêneo

$$\begin{array}{rrrrl} x_1 & & -\ 3x_3 & & = 0 \\ x_1 & & & -\ x_4 & = 0 \\ & 3x_2 & & -\ x_4 & = 0 \\ & x_2 & -\ \ x_3 & & = 0 \\ & 4x_2 & -\ 4x_3 & & = 0 \end{array}$$

Deixamos para o leitor mostrar que a forma escalonada reduzida por linhas da matriz aumentada desse sistema é

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

da qual concluímos que a solução geral desse sistema é

$$x_1 = t, \quad x_2 = t/3, \quad x_3 = t/3, \quad x_4 = t$$

onde t é arbitrário. Para obter os menores valores inteiros positivos que equilibram a equação, tomamos $t = 3$, e resulta $x_1 = 3$, $x_2 = 1$, $x_3 = 1$ e $x_4 = 3$. Substituindo esses valores em (7), obtemos a equação equilibrada

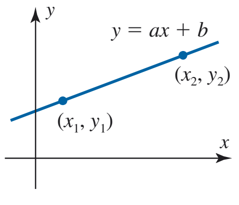
$$3\mathrm{HCl} + \mathrm{Na_3PO_4} \longrightarrow \mathrm{H_3PO_4} + 3\mathrm{NaCl} \quad ◀$$

Interpolação polinomial

Um problema importante em várias aplicações é encontrar um polinômio cujo gráfico passe por uma coleção de pontos especificados no plano; tal polinômio é dito ***polinômio interpolador*** dos pontos. O exemplo mais simples de um problema desses é encontrar um polinômio linear

$$p(x) = ax + b \tag{8}$$

cujo gráfico passe por dois pontos distintos conhecidos (x_1, y_1) e (x_2, y_2) do plano xy (Figura 1.8.10). O leitor provavelmente aprendeu vários métodos da Geometria Analítica para encontrar a equação de uma reta por dois pontos, mas aqui daremos um método com base em sistemas lineares que pode ser adaptado à interpolação polinomial geral.



▲ **Figura 1.8.10**

O gráfico de (8) é a reta $y = ax + b$ e, para essa reta passar pelos pontos (x_1, y_1) e (x_2, y_2), devemos ter

$$y_1 = ax_1 + b \quad \text{e} \quad y_2 = ax_2 + b$$

Portanto, os coeficientes incógnitos a e b podem ser obtidos resolvendo o sistema linear

$$\begin{aligned} ax_1 + b &= y_1 \\ ax_2 + b &= y_2 \end{aligned}$$

Não precisamos de métodos geniais para resolver esse sistema; o valor de a pode ser obtido subtraindo as equações para eliminar b e, então, o valor de a pode ser substituído em qualquer uma das duas equações para encontrar b. Deixamos para o leitor encontrar a e b e mostrar que podem ser expressos na forma

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad \text{e} \quad b = \frac{y_1x_2 - y_2x_1}{x_2 - x_1} \tag{9}$$

desde que tenhamos $x_1 \neq x_2$. Assim, por exemplo, a reta $y = ax + b$ que passa pelos pontos

$$(2, 1) \quad \text{e} \quad (5, 4)$$

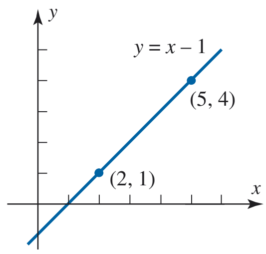


Figura 1.8.11

podem ser obtida tomando $(x_1, y_1) = (2, 1)$ e $(x_2, y_2) = (5, 4)$, caso em que (9) fornece

$$a = \frac{4 - 1}{5 - 2} = 1 \quad \text{e} \quad b = \frac{(1)(5) - (4)(2)}{5 - 2} = -1$$

Portanto, a equação da reta é

$$y = x - 1$$

(Figura 1.8.11).

Consideremos, agora, o problema mais geral de encontrar um polinômio cujo gráfico passe pelos n pontos de coordenadas x distintas

$$(x_1, y_1), \quad (x_2, y_2), \quad (x_3, y_3), \ldots, \quad (x_n, y_n) \tag{10}$$

Como temos n condições a satisfazer, a intuição sugere que comecemos procurando por polinômios da forma

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x_2 + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} \tag{11}$$

já que um polinômio dessa forma tem n coeficientes que estão à nossa disposição para satisfazer as n condições. Contudo, queremos permitir os casos em que alguns pontos estejam alinhados ou então satisfaçam alguma outra configuração, o que tornaria possível utilizar algum polinômio de grau menor do que $n - 1$; assim, vamos permitir que a_{n-1} e outros coeficientes em (11) sejam nulos.

O próximo teorema, que será provado mais adiante, é o resultado fundamental da interpolação polinomial.

TEOREMA 1.8.1 Interpolação polinomial

Dados quaisquer n pontos no plano xy que têm coordenadas x distintas, existe um único polinômio de grau $n - 1$ ou inferior cujo gráfico passa por esses pontos.

Vejamos, agora, como poderíamos encontrar o polinômio interpolador (11) cujo gráfico passa pelos pontos de (10). Como o gráfico desse polinômio é o gráfico da equação

$$y = a_0 + a_1x + a_2x_2 + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} \tag{12}$$

segue que as coordenadas dos pontos satisfazem

$$\begin{array}{ccccccccc} a_0 & + a_1x_1 & + a_2x_1^2 & + \cdots + & a_{n-1}x_1^{n-1} & = y_1 \\ a_0 & + a_1x_2 & + a_2x_2^2 & + \cdots + & a_{n-1}x_2^{n-1} & = y_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_0 & + a_1x_n & + a_2x_n^2 & + \cdots + & a_{n-1}x_n^{n-1} & = y_n \end{array} \tag{13}$$

Estamos supondo que os valores dos x e y sejam conhecidos nessas equações, de modo que podemos ver esse sistema como um sistema linear nas incógnitas $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$. Desse ponto de vista, a matriz aumentada do sistema é

$$\begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} & y_1 \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} & y_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} & y_n \end{bmatrix} \tag{14}$$

e, portanto, podemos encontrar o polinômio interpolador reduzindo essa matriz à forma escalonada reduzida por linhas (eliminação de Gauss-Jordan).

► EXEMPLO 6 Interpolação polinomial por eliminação de Gauss-Jordan

Encontre um polinômio cúbico cujo gráfico passa pelos pontos

$$(1, 3), \quad (2,-2), \quad (3,-5), \quad (4, 0)$$

Solução Como há quatro pontos, utilizamos um polinômio interpolador de grau $n = 3$. Denote esse polinômio interpolador por

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$$

e denote as coordenadas x e y dos pontos dados por

$$x_1 = 1, \quad x_2 = 2, \quad x_3 = 3, \quad x_4 = 4 \quad \text{e} \quad y_1 = 3, \quad y_2 = -2, \quad y_3 = -5, \quad y_4 = 0$$

Assim, segue de (14) que a matriz aumentada do sistema linear nas incógnitas a_0, a_1, a_2 e a_3 é

$$\begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 & y_1 \\ 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 & y_2 \\ 1 & x_3 & x_3^2 & x_3^3 & y_3 \\ 1 & x_4 & x_4^2 & x_4^3 & y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 & 8 & -2 \\ 1 & 3 & 9 & 27 & -5 \\ 1 & 4 & 16 & 64 & 0 \end{bmatrix}$$

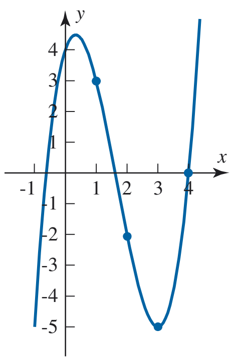
Deixamos para o leitor confirmar que a forma escalonada reduzida por linhas dessa matriz é

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

da qual segue que $a_0 = 4$, $a_1 = 3$, $a_2 = -5$, $a_3 = 1$. Assim, o polinômio interpolador é

$$p(x) = 4 + 3x - 5x^2 + x^3$$

O gráfico desse polinômio e os pontos dados aparecem na Figura 1.8.12. ◄



▲ **Figura 1.8.12**

Observação Adiante veremos um método mais eficaz para encontrar polinômios interpoladores, que é mais recomendado nos problemas em que é grande o número de pontos dados.

► EXEMPLO 7 Integração aproximada

REQUER CÁLCULO E CALCULADORA

Não há como calcular a integral

$$\int_0^1 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x^2}{2}\right) dx$$

diretamente, pois não existe maneira de expressar a antiderivada do integrando em termos de funções elementares. Essa integral poderia ser aproximada pela regra de Simpson ou algum método comparável, mas uma abordagem alternativa é aproximar o integrando por um polinômio intepolador e integrar o polinômio aproximante. Por exemplo, considere os cinco pontos

$$x_0 = 0, \quad x_1 = 0{,}25, \quad x_2 = 0{,}5, \quad x_3 = 0{,}75, \quad x_4 = 1$$

que dividem o intervalo [0, 1] em quatro subintervalos de mesmo tamanho. Os valores de

$$f(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x^2}{2}\right)$$

nesses pontos são, aproximadamente,

$$f(0) = 0, \quad f(0{,}25) = 0{,}098017, \quad f(0{,}5) = 0{,}382683,$$
$$f(0{,}75) = 0{,}77301, \quad f(1) = 1$$

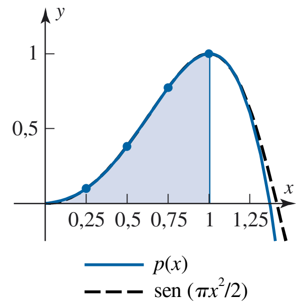
O polinômio interpolador é (verifique)

$$p(x) = 0{,}098796x + 0{,}762356x^2 + 2{,}14429x^3 - 2{,}00544x^4 \tag{15}$$

e

$$\int_0^1 p(x)\,dx \approx 0{,}438501 \tag{16}$$

Como mostra a Figura 1.8.13, os gráficos de f e de p se ajustam muito bem no intervalo [0, 1], de modo que a aproximação é bastante boa. ◄



▲ **Figura 1.8.13**

Revisão de conceitos

- Rede
- Ramo
- Nó
- Conservação do fluxo
- Circuitos elétricos: capacitor, resistor, polo (positivo e negativo), tensão elétrica, lei de Ohm, lei das correntes de Kirchhoff, lei das tensões de Kirchhoff
- Equações químicas: reagentes, produtos, equações equilibradas
- Interpolação polinomial

Aptidões desenvolvidas

- Encontrar as taxas de fluxo e os sentido do fluxo nos ramos de uma rede.
- Encontrar a quantidade de corrente fluindo através das partes de um circuito elétrico.
- Escrever uma equação química equilibrada para uma dada reação química.
- Encontrar um polinômio interpolador para um gráfico passando por uma dada coleção de pontos.