UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA DE PRODUÇÃO E SISTEMAS

Programação Linear Inteira e Mista
Programação Linear Binária

Prof. Sérgio Fernando Mayerle

1. PROGRAMAÇÃO LINEAR INTEIRA E MISTA *(A. H. Land & A. G. Doig, 1960)*

1.1. Aplicações com variáveis inteiras

- Geração de portafólios de investimento
- Localização de *facilities* (fábricas, armazéns, postos de atendimento, etc)
- Problemas de cobertura
- Problemas de partição
- Problemas de alocação
- Problemas de seqüenciamento
- Problemas de roteamento

1.2. Definição 1

Seja o problema de programação linear inteira mista (PPLIM) apresentado na forma abaixo:

$$\langle \mathrm{p} \rangle \qquad \text{Max} \quad c^T x$$

$$\text{s.a:} \quad x \in M$$

onde $M = \{x \in R^n \mid Ax = b,\ 0 \le x \le u,\ x_{j=1,\dots,K} \in Z\}$.

1.3. Definição 2

Seja o problema de programação linear inteira mista relaxado (PPLIMR), obtido a partir de $\langle \mathrm{p} \rangle$, na forma:

$$\langle \overline{\mathrm{p}} \rangle \qquad \text{Max} \quad c^T x$$

$$\text{s.a:} \quad x \in \overline{M}$$

onde $\overline{M} = \{x \in R^n \mid Ax = b,\ 0 \le x \le u\}$. Note-se que $M \subseteq \overline{M}$.

1.4. Proposição 1

i) Se $\langle \overline{\mathrm{p}} \rangle$ não tem solução, então $\langle \mathrm{p} \rangle$ também não terá solução;

ii) Se $\overline{x}^*$ é a solução ótima de $\langle \overline{\mathrm{p}} \rangle$ e $\overline{x}_j^* \in Z,\ \forall j = 1,\dots,K$, então $\overline{x}^*$ é a solução ótima de $\langle \mathrm{p} \rangle$.

1.5. Proposição 2

Seja $\overline{x}^*$ a solução ótima de $\langle \overline{\mathrm{p}} \rangle$, com $\overline{x}_j^* \notin Z$ pelo menos para algum $j = 1,\dots,K$. Sejam os conjuntos:

$$\overline{M}_{(I)} = \{\ x \in R^n \mid Ax = b,\ 0 \le x \le u,\ x_j \le \lfloor \overline{x}_j^* \rfloor\ \}$$

$$\overline{M}_{(II)} = \{\ x \in R^n \mid Ax = b,\ 0 \le x \le u,\ x_j \ge \lceil \overline{x}_j^* \rceil\ \}$$

onde $\lfloor v \rfloor$ é o maior inteiro menor que v, e $\lceil v \rceil$ é o menor inteiro maior que v.

i) Se $\langle \mathrm{p} \rangle$ admite solução ótima x^*, então $x^* \in \overline{M}_{(I)} \cup \overline{M}_{(II)}$;

ii) Se $x^*_{(I)} \in \overline{M}_{(I)}$ e $x^*_{(II)} \in \overline{M}_{(II)}$ são soluções que maximizam $c^T x$, sobre os conjuntos $\overline{M}_{(I)}$ e $\overline{M}_{(II)}$, respectivamente, se $c^T x^*_{(I)} \geq c^T x^*_{(II)}$ e se $x^*_{(I)}$ satisfaz as condições de integridades definidas para $\langle \mathrm{p} \rangle$, então $x^*_{(I)}$ é a solução ótima de $\langle \mathrm{p} \rangle$.

1.6. Algoritmo branch and bound

Passo 1 Gere uma lista de PPL's inicialmente vazia. Resolva o PPLIM desconsiderando as restrições de integridade. Se este problema não tem solução viável, então PARE. O PPLIM também não terá solução viável. Em caso contrário, inclua este PPL na lista.

Passo 2 Escolha, entre os PPL's da lista, aquele cujo valor da solução ótima seja o máximo. Se mais de um problema atender esta condição, desempate de qualquer forma, mas sempre a favor de soluções que satisfaças as condições de integridade do PPLIM.

Passo 3 Retire o problema escolhido da lista e, se a sua solução satisfizer as condições de integridade, PARE. A solução ótima do PPLIM foi encontrada. Em caso contrário, tome uma variável inteira que não satisfaz a condição de integridade, isto é $\overline{x}^*_j \notin Z$, e gere dois novos PPL's, pela agregação das seguintes restrições adicionais:

Problema 1 $\quad x_j \leq \lfloor \overline{x}^*_j \rfloor$

Problema 2 $\quad x_j \geq \lceil \overline{x}^*_j \rceil$

Resolva cada PPL gerado, e se tiver solução ótima, inclua na lista.

Passo 4 Se a lista estiver vazia, então PARE, pois o PPLIM não tem solução viável. Em caso contrário volte ao Passo 2.

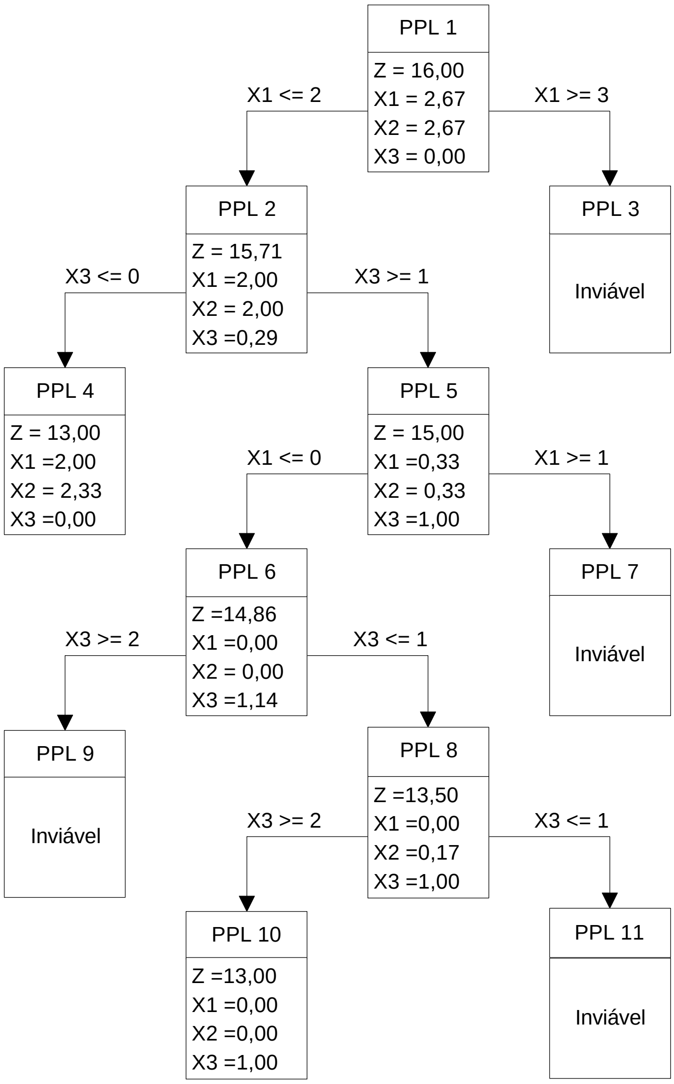
<u>Observações:</u>

1. Na prática costuma-se descartar os PPL's cujo valor da função objetivo são menores que $(1+\mathrm{b}) \cdot z^*$, onde z^* é o valor da função objetivo da melhor solução inteira conhecida até um determinado estágio da busca;

2. A solução dos PPL's descendentes poderão ser obtidas com a aplicação de técnicas de análise de pós-otimalidade. Em geral, uma iteração dual é suficiente para encontrar a solução destes novos problemas, partindo-se da solução do PPL que lhes deram origem.

Exemplo

$$
\begin{aligned}
\text{Max} \quad & 3x_1 + 3x_2 + 13x_3 \\
\text{s.a:} \quad & -3x_1 + 6x_2 + 7x_3 \le 8 \\
& 6x_1 - 3x_2 + 7x_3 \le 8 \\
& 0 \le x_1, x_2, x_3 \le 5 \\
& x_1, x_2, x_3 \in I
\end{aligned}
$$



Problema		X1			X2			X3			Z	Observação
Número	Anterior	Inf.	Valor	Sup.	Inf.	Valor	Sup.	Inf.	Valor	Sup.		
1	-	0,00	2,67	5,00	0,00	2,67	5,00	0,00	0,00	5,00	16,00	PPLIM original
2	1	0,00	2,00	2,00	0,00	2,00	5,00	0,00	0,29	5,00	15,71	Ok
3	1	3,00		5,00	0,00		5,00	0,00		5,00		Não existe solução
4	2	0,00	2,00	2,00	0,00	2,33	5,00	0,00	0,00	0,00	13,00	
5	2	0,00	0,33	2,00	0,00	0,33	5,00	1,00	1,00	5,00	15,00	Ok
6	5	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	5,00	1,00	1,14	5,00	14,86	Ok
7	5	1,00		2,00	0,00		5,00	1,00		5,00		Não existe solução
8	6	0,00	0,00	0,00	0,00	0,17	5,00	1,00	1,00	1,00	13,50	Ok
9	6	0,00		0,00	0,00		5,00	2,00		5,00		Não existe solução
10	8	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	1,00	1,00	1,00	13,00	Solução ótima
11	8	0,00		0,00	1,00		5,00	1,00		1,00		Não existe solução

Solução ótima

$$x_1 = 0$$
$$x_2 = 0$$
$$x_3 = 1$$
$$z^* = 13$$

2. PROGRAMAÇÃO LINEAR BINÁRIA *(E. Balas, 1965)*

2.1. Definição

Seja o *PPLB* (Problema de Programação Linear Binária) que segue:

$$\text{Max} \quad \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$\text{s.a:} \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i \qquad \forall i = 1,\ldots,m$$

$$x_j \in \{0,1\} \qquad \forall j = 1,\ldots,n$$

no qual $c_1 \geq c_2 \geq \cdots \geq c_n \geq 0$.

2.1. Transformações de equivalência

No caso do problema não se adaptar à esta forma padrão, o mesmo deverá sofrer as seguintes transformações:

a) efetue a substituição $x_j = 1 - x'_j \quad \forall c_j < 0$;

b) troque cada uma das restrições do tipo $\sum a_{ij} x_j = b_i$ por duas restrições: uma do tipo $\sum a_{ij} x_j \leq b_i$ e outra do tipo $\sum a_{ij} x_j \geq b_i$;

c) troque cada uma das restrições do tipo $\sum a_{ij} x_j \geq b_i$ por uma restrição $-\sum a_{ij} x_j \leq -b_i$;

d) reordene as variáveis do PPLB de modo que $c_1 \geq c_2 \geq \cdots \geq c_n$.

2.2. Algoritmo de Programação Linear Binária

O algoritmo proposto a seguir consiste em um processo de busca em uma árvore binária, na qual a cada nó *n* da árvore corresponde uma solução parcial do PPLB, cujos valores das *k* primeiras variáveis são conhecidas. A fim de se verificar a possibilidade de existência de uma solução viável e ótima, a partir desta solução parcial, dois testes deverão ser realizados.

2.2.1. Teste de Otimalidade

O teste de otimalidade considera o conhecimento prévio de uma solução ótima temporária, cujo valor da função objetivo é $z_{ótimo}$. Considerando que na solução parcial as *k* primeiras variáveis são conhecidas, uma estimativa do máximo do valor da função objetivo para uma solução completa derivada desta solução parcial, poderá ser feita através de:

$$z_{estimado} = \sum_{j=1}^{k} c_j x_j + \sum_{j=k+1}^{n} c_j$$

Se o valor de $z_{estimado}$ for superior ao valor de $z_{ótimo}$, então é possível que se encontre uma solução ótima a partir desta solução parcial. Em caso contrário, a melhor solução possível de ser encontrada não será melhor que a solução ótima temporária já disponível.

2.2.2. Teste de Viabilidade

O teste de viabilidade, por sua vez, considera que para cada restrição deve ser satisfeita a seguinte condição:

$$\sum_{j=1}^{k} a_{ij} x_j + \sum_{j=k+1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i$$

ou:

$$\sum_{j=1}^{k} a_{ij} x_j \leq b_i - \sum_{j=k+1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i - \sum_{j=k+1}^{n} \min(0; a_{ij})$$

Então, se para alguma restrição:

$$\sum_{j=1}^{k} a_{ij} x_j > b_i - \sum_{j=k+1}^{n} \min(0; a_{ij})$$

conclui-se que não existirão valores para as variáveis ainda não conhecidas que permitam a obtenção de uma solução satisfaça a restrição.
No caso de falha de um destes dois testes, é necessário rever os valores atribuídos as *k* primeiras variáveis.

2.2.3. Algoritmo propriamente dito

Passo 0 Monte o PPLB em sua forma padrão. Faça $z_{ótimo} = -\infty$ e $k = 1$;

Passo 1 Faça $x_k = 1$. Verifique se:

$$z_{estimado} = \sum_{j=1}^{k} c_j x_j + \sum_{j=k+1}^{n} c_j > z_{ótimo}$$

e

$$\sum_{j=1}^{k} a_{ij} x_j \leq b_i - \sum_{j=k+1}^{n} \min(0; a_{ij}) \forall i = 1, \ldots, m$$

Em caso de sucesso vá para o passo 3;

Passo 2 Faça $x_k = 0$. Verifique se:

$$z_{estimado} = \sum_{j=1}^{k} c_j x_j + \sum_{j=k+1}^{n} c_j > z_{ótimo}$$

e

$$\sum_{j=1}^{k} a_{ij} x_j \leq b_i - \sum_{j=k+1}^{n} \min(0; a_{ij}) \forall i = 1, \ldots, m$$

Em caso de fracasso vá para o passo 4;

Passo 3 Faça $k = k+1$. Se $k \le n$, volte ao passo 1. Senão, uma solução completa, melhor que a solução ótima temporária, foi encontrada. Guarde esta solução como sendo a nova solução ótima temporária. Atualize o valor de $z_{ótimo}$.

Passo 4 *Backtrack*. Encontre $K = \{ j \mid x_j = 1 \;\; e \;\; 0 < j < k \}$. Se $K = \varnothing$, então PARE; a solução ótima temporária é a solução ótima do problema. Em caso contrário, determine $k = \max \{ j \mid j \in K \}$ e retorne ao passo 2.

2.3. Exemplo

Max $\quad 10x_1 + 9x_2 + 7x_3 + 5x_4 + 2x_5 + 1x_6$

s.a: $\quad 1x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 1x_4 - 2x_5 + 1x_6 \le 1$

$$2x_1 + 1x_2 - 2x_3 - 1x_4 + 1x_5 + 2x_6 \le 2$$

$$3x_1 + 2x_2 - 1x_3 + 3x_4 - 4x_5 + 1x_6 \le 2$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \in \{0,1\}$$

$$c^T = \begin{bmatrix} 10 & 9 & 7 & 5 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 & 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 & -1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & -1 & 3 & -4 & 1 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

k	x_j	$\sum_{j=1}^{k} c_j x_j$	$\sum_{j=k+1}^{n} c_j$	$Z_{estimado}$	$\sum_{j=1}^{k} a_{ij} x_j$	$b_i - \sum_{j=k+1}^{n} \min(a_{ij};0)$	OK 1	OK 2	Z^*
0									$-\infty$
1	1	10	24	34	(1;2;3)	(5;5;7)	ok	ok	
2	1,1	19	15	34	(-1;3;5)	(3;5;7)	ok	ok	
3	1,1,1	26	8	34	(1;1;4)	(3;3;6)	ok	ok	
4	1,1,1,1	31	3	34	(2;0;7)	(3;2;6)	ok	-	
4	1,1,1,0	26	3	29	(1;1;4)	(3;2;6)	ok	ok	
5	1,1,1,0,1	28	1	29	(-1;2;0)	(1;2;2)	ok	ok	
6	1,1,1,0,1,1	29	0	29	(0;4;1)	(1;2;2)	ok	-	
6	1,1,1,0,1,0	28	0	28	(-1;2;0)	(1;2;2)	ok	ok	28
5	1,1,1,0,0	26	1	27			-		
3	1,1,0	19	8	27			-		
2	1,0	10	15	25			-		
1	0	0	24	24			-		
	Fim								

Solução ótima

$x_1 = 1$ $\quad x_2 = 1$ $\quad x_3 = 1$ $\quad x_4 = 0$ $\quad x_5 = 1$ $\quad x_6 = 0$

$Z^* = 28$