Introdução à Teoria das Filas

Introdução à Teoria das Filas

- População finita, canal único

  (M é o tamanho da população)

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{n=M} \left[\frac{M!}{(M-n)!} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^n \right]}$$

$$P_n = \frac{M!}{(M-n)!} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^n P_0$$

$$L = \sum_{n=0}^{n=M} n P_n = M - \frac{\mu}{\lambda}(1 - P_0)$$

$$L_q = M - \frac{\lambda + \mu}{\lambda}(1 - P_0)$$

Introdução à Teoria das Filas

Exemplo. Um mecânico atende 4 máquinas. O tempo médio entre as exigências de atendimento é de 10 horas e cada reparo leva em média 2 horas. O custo do tempo perdido com a máquina parada é de $20,00/hora e o mecânico recebe $50,00/dia. Determine:

a) o n.º médio de máquinas em operação

b) custo médio das paradas por dia

c) se é melhor termos 2 mecânicos, cada um cuidando de 2 máquinas.

Introdução à Teoria das Filas

Aqui a população é finita, sendo que o canal de atendimento é o mecânico e os clientes são as máquinas. Primeiro, devemos encontrar λ e μ:

$1/\lambda = 10 \rightarrow \lambda = 0{,}10$ e $1/\mu = 2 \rightarrow \mu = 0{,}5$

a) M=4 (tamanho da população), assim,

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{n=4}\left[\frac{4!}{(4-n)!}\left(\frac{0{,}1}{0{,}5}\right)^n\right]}$$

$$= \frac{1}{1 + 4\times 0{,}2 + 4\times 3\times 0{,}2^2 + 4\times 3\times 2\times 0{,}2^3 + 4\times 3\times 2\times 1\times 0{,}2^4} = 0{,}4$$

Introdução à Teoria das Filas

O numero esperado de máquinas no sistema L é

$$L = 4 - \frac{0,5}{0,1} \times (1 - 0,4) = 1$$

essas são as máquinas paradas, assim, o número de máquinas em funcionamento é

4-1 =3

Introdução à Teoria das Filas

b) Supondo um dia de trabalho de 8 horas, o total de horas paradas em um dia será igual a

$8 \times$ número médio de máquinas paradas

$= 8 \times 1 = 8$ horas diárias

o custo será então

número de horas perdidas $\times$ custo da hora perdida

$= 8 \times 20 =$ \$160,00/ dia

Introdução à Teoria das Filas

c) se tivermos dois mecânicos, cada um com 2 máquinas, teremos dois sistemas independentes com M=2 e k=1:

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{n=2}\left[\frac{2!}{(2-n)!}\left(\frac{0,1}{0,5}\right)^n\right]} = \frac{1}{1+2\times 0,2+2\times 1\times 0,2^2} = 0,68$$

$$\mathrm{L} = 2 - \frac{0,5}{0,1}\times(1-0,68) = 0,4$$

para cada sistema:

horas perdidas por dia = $8\times 0,4 = 3,2$ horas por dia

custo = $3,2\times 20 + 50$ = \$114,00

custo total para 2 mecânicos = 2×114 = \$228,00 /dia

custo total para 1 mecânico = 160+50 = \$210,00 /dia

Introdução à Teoria das Filas

População finita , vários canais ($1 < k \leq M$)

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{n=k-1}\left[\frac{M!}{(M-n)!\,n!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n\right] + \sum_{n=k}^{n=M}\left[\frac{M!}{(M-n)!\,k!\,k^{n-k}}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n\right]}$$

$$P_n = P_0 \frac{M!}{(M-n)!\,n!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \qquad \text{para } 0 \leq n \leq k$$

$$P_n = P_0 \frac{M!}{(M-n)!\,k!\,k^{n-k}}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \qquad \text{para } k \leq n \leq M$$

$$L = \sum_{n=0}^{n=k-1} nP_n + \sum_{n=k}^{n=M}(n-k)P_n + k\left(1 - \sum_{n=0}^{n=k-1} P_n\right) \qquad L_q = \sum_{n=k}^{n=M}(n-k)P_n$$

Introdução à Teoria das Filas

Considerando o exemplo anterior, vamos supor que os 2 mecânicos podem atender as 4 máquinas. Assim, M=4 e k=2:

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{n=2-1}\left[\frac{4!}{(4-n)!\,n!}\left(\frac{0{,}1}{0{,}5}\right)^n\right] + \sum_{n=2}^{n=4}\left[\frac{4!}{(4-n)!\,2!\,2^{n-2}}\left(\frac{0{,}1}{0{,}5}\right)^n\right]}$$

$$= \frac{1}{\frac{4!}{4!0!}0{,}2^0 + \frac{4!}{3!1!}0{,}2^1 + \frac{4!}{2!2!2^0}0{,}2^2 + \frac{4!}{1!2!2}0{,}2^3 + \frac{4!}{0!2!2^2}0{,}2^4} = \frac{1}{2{,}09} = 0{,}48$$

Introdução à Teoria das Filas

O número esperado no sistema é:

$$L = \sum_{n=0}^{n=k-1} nP_n + \sum_{n=k}^{n=M} (n-k)P_n + k\left(1 - \sum_{n=0}^{n=k-1} P_n\right) = \sum_{n=0}^{n=1} nP_n + \sum_{n=2}^{n=4} (n-2)P_n + 2\left(1 - \sum_{n=0}^{n=1} P_n\right)$$

$$= 0\times P_0 + 1\times P_1 + (2-2)\times P_2 + (3-2)\times P_3 + (4-2)\times P_4 + 2\times(1 - P_0 - P_1)$$

$$= 2 - 2\times P_0 - P_1 + P_3 + 2\times P_4$$

Assim, devemos encontrar P_1, P_3 e P_4

Introdução à Teoria das Filas

para P_1 $(n \le k)$:

$$P_1 = P_0 \frac{M!}{(M-n)!\,n!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n = 0{,}48 \times \frac{4!}{3!1!}\left(\frac{0{,}1}{0{,}5}\right)^1 = 0{,}38$$

para P_3 e P_4 $(n \ge k)$:

$$P_3 = 0{,}48 \times \frac{4!}{1!2!2^1}\left(\frac{0{,}1}{0{,}5}\right)^3 = 0{,}02 \qquad P_4 = 0{,}48 \times \frac{4!}{0!2!2^2}\left(\frac{0{,}1}{0{,}5}\right)^4 = 0{,}002$$

assim, $L = 2 - 2\times0{,}48 - 0{,}38 + 0{,}02 + 2\times0{,}002 = 0{,}68$

Custo total = $8\times0{,}68\times20 + 100$ = \$208,80 /dia, o mais baixo de todos.

Introdução à Teoria das Filas

Um grupo de 6 analistas dispõe de 2 computadores para trabalhar. Cada trabalho de computação leva em média 20 minutos. A cada 30 minutos, em média, surge a necessidade de uso do computador. Determine:

a) n.º médio de analistas na fila

b) o tempo perdido por dia

Introdução à Teoria das Filas

a)

M = 6 e k = 2.

1/λ =0,5 ➔ λ = 2

1/ μ =0,333 ➔ μ = 3

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{n=2-1}\left[\frac{6!}{(6-n)!\,n!}\left(\frac{2}{3}\right)^n\right] + \sum_{n=2}^{n=6}\left[\frac{6!}{(6-n)!\,2!\,2^{n-2}}\left(\frac{2}{3}\right)^n\right]}$$

$$= \frac{1}{\frac{6!}{6!0!}\left(\frac{2}{3}\right)^0 + \frac{6!}{5!1!}\left(\frac{2}{3}\right)^1 + \frac{6!}{4!2!2^0}\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \frac{6!}{3!2!2^1}\left(\frac{2}{3}\right)^3 + \frac{6!}{2!2!2^2}\left(\frac{2}{3}\right)^4 + \frac{6!}{1!2!2^3}\left(\frac{2}{3}\right)^5 + \frac{6!}{0!2!2^4}\left(\frac{2}{3}\right)^6}$$

$$= \frac{1}{1+4+20/3+80/9+80/9+160/27+160/81} = \frac{1}{37{,}346} = 0{,}0268$$

Introdução à Teoria das Filas

O número na fila Lq é

$$L_q = \sum_{n=2}^{n=6} (n-2)P_n$$

$$= (2-2)\times P_2 + (3-2)\times P_3 + (4-2)\times P_4 + (5-2)\times P_5 + (6-2)\times P_6$$

Assim, devemos achar P_3, P_4, P_5 e P_6.

$$P_3 = P_0 \frac{6!}{(6-3)!2!2^{3-2}} \left(\frac{2}{3}\right)^3 = 0{,}24$$

$$P_5 = P_0 \frac{6!}{(6-5)!2!2^{5-2}} \left(\frac{2}{3}\right)^5 = 0{,}16$$

$$P_4 = P_0 \frac{6!}{(6-4)!2!2^{4-2}} \left(\frac{2}{3}\right)^4 = 0{,}24$$

$$P_6 = P_0 \frac{6!}{(6-6)!2!2^{6-2}} \left(\frac{2}{3}\right)^6 = 0{,}05$$

Introdução à Teoria das Filas

$$L_q = P_3 + 2 \times P_4 + 3 \times P_5 + 4 \times P_6$$
$$= 0{,}24 + 2 \times 0{,}24 + 3 \times 0{,}16 + 4 \times 0{,}05 = 1{,}40$$

b) 0 tempo total perdido por dia é o número esperado na fila Lq, multiplicado pelo número de horas em um dia.

$8 \times 1{,}4 = 11{,}2$ horas/dia