Postulados e Teoremas da Álgebra de Boole

Yuri Kaszubowski Lopes

UDESC

Anotações

Leis e Propriedades

Associatividade

- O resultado de um OR ou AND entre três variáveis A, B e C não dependeda ordem das parcelas
  - $A + B + C = (A + B) + C = A + (B + C)$
  - $A.B.C = (A.B).C = A.(B.C)$

Comutatividade

- O resultado de um OR ou AND entre duas variáveis A e B não depende da ordem das parcelas
  - $A + B = B + A$
  - $A.B = B.A$

Anotações

Leis e Propriedades

Distributividade

- $A.(B + C) = A.B + A.C$
- $A + (B.C) = (A + B).(A + C)$
- $(A + B).(C + D) = A.C + A.D + B.C + B.D$
- $(A.B) + (C.D) = A.B + C.D = (A + C).(A + D).(B + C).(B + D)$

Anotações

Leis e Propriedades

Adição lógica

- $A + 0 = A$
- $A + 1 = 1$
- $A + A = A$
- $A + \overline{A} = 1$

Multiplicação lógica

- $A.0 = 0$
- $A.1 = A$
- $A.A = A$
- $A.\overline{A} = 0$

Anotações

Leis e Propriedades

Complemento

- $\overline{\overline{A}} = A$

Demais teoremas multivariados

- $A + A.B = A$
- $A + \overline{A}.B = A + B$
- $\overline{A} + A.B = \overline{A} + B$

Anotações

Teoremas de De Morgan

- A negação de um produto (AND) equivale à soma (OR) das negações de cada variável envolvida no produto
  - $\overline{A.B} = \overline{A} + \overline{B}$
  - $\overline{A.B.C} = \overline{A} + \overline{B} + \overline{C}$
  - $\overline{A.B.C.D} = \overline{A} + \overline{B} + \overline{C} + \overline{D}$
- Dual do Teorema: A negação uma soma (OR) equivale ao produto (AND) das negações individuais das variáveis
  - $\overline{A + B} = \overline{A}.\overline{B}$
  - $\overline{A + B + C} = \overline{A}.\overline{B}.\overline{C}$
  - $\overline{A + B + C + D} = \overline{A}.\overline{B}.\overline{C}.\overline{D}$

Anotações

Simplificações Algébricas

- Podemos simplificar as expressões através das leis e teoremas da Álgebra de Boole
- Problemas:
  - Não é obvio qual teorema/lei devemos aplicar para simplificar
  - Não existe forma fácil de detectarmos se uma expressão já está em sua forma mais simples possível ou não
  - Logo, as simplificações vão exigir **treino**

Anotações

Simplificações Algébricas

- Uma forma comum para iniciar a simplificação é transformar a expressão para uma forma padrão
  - Caso ela não esteja na forma padrão
  - Podemos fazer isso, por exemplo, aplicando o Teorema de De Morgan e Distributivas

Anotações

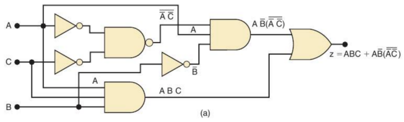
Exemplo

- $F = A.B.C + A.\overline{B}.(\overline{A.C})$
- $F = A.B.C + A.\overline{B}.(\overline{\overline{A}} + \overline{\overline{C}})$ De Morgan
- $F = A.B.C + A.\overline{B}.(A + C)$ Complemento
- $F = A.B.C + A.\overline{B}.A + A.\overline{B}.C$ Distributiva
- $F = A.B.C + A.\overline{B} + A.\overline{B}.C$ Multiplicação lógica
- Encontramos agora os termos em comum para aplicar a distributiva
  - $F = A.B.C + A.\overline{B} + A.\overline{B}.C$
  - O primeiro e o último mintermo compartilham $A.C$, então:
  - $F = A.C.(B + \overline{B}) + A.\overline{B}$ Distributiva
- $F = A.C.(1) + A.\overline{B}$ Adição lógica $B + \overline{B} = 1$
- $F = A.C + A.\overline{B}$ Multiplicação lógica
- $F = A.(C + \overline{B})$ Fatoração pela distributiva (A é um termo comum)

Anotações

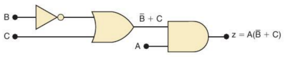
Exemplo

Circuito original



(a)

Circuito Simplificado



(b)

Anotações

Exercícios

1. Utilizando tabelas verdade, prove que os teoremas multivariados apresentados nos slides anteriores estão corretos
2. Simplifique as seguintes expressões. Faça a simplificação de forma detalhada como nos slides de exemplos, indicando qual a regra aplicada
   1. $A.\overline{B}.\overline{C} + A.\overline{B}.C + A.B.C$
   2. $A.C.(\overline{\overline{A}.B.D}) + \overline{A}.B.\overline{C}.\overline{D} + A.\overline{B}.C$
   3. $(\overline{A} + B)(A + B + D).\overline{D}$
3. Desenhe os circuitos com portas lógicas das versões originais e simplificadas das expressões exercício 2

Anotações

Referências

- TOCCI, R.J.; WIDMER,N.S. **Sistemas digitais: princípios e aplicações**. 11a ed, Prentice-Hall, 2011.
- RUGGIERO, M.; LOPES, V. da R. **Cálculo numérico: aspectos teóricos e computacionais**. Makron Books do Brasil, 1996.
- NULL, L.; LOBUR, J. **Princípios Básicos de Arquitetura e Organização de Computadores**. 2014. Bookman, 2009. ISBN 9788577807666.

Anotações