

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова»

Курсовая работа

**«Численное исследование аппроксимации условий сопряженного
теплообмена на контактной границе двух тел»**

Выполнил:

Студент 3-го курса Труфанов Владислав Александрович

Руководитель работы:

д. ф.-м. н. Жуков Виктор Тимофеевич

Содержание

1. Введение.....	3
2. Постановка задач.....	4
3. Расчеты.....	6
4. Программа.....	10
5. Заключение.....	11
6. Список литературы.....	12

1. Введение

В курсовой работе рассматривается модельная постановка задачи о теплообмене газового потока с твердым телом. В качестве твердого тела может выступать корпус летательного аппарата (ЛА), непроницаемая оболочка, представляющая собой внешнюю часть корпуса ЛА, стенка проточного тракта или камеры сгорания двигательной установки. Хорошо известно, что аэрокосмические ЛА могут испытывать значительный аэродинамический нагрев высокоэнтальпийными потоками в атмосферном полете. При высоких скоростях полета кинетическая энергия объекта преобразуется в тепло через сжатие и поверхностное трение. Численное моделирование теплового нагрева аэродинамических конструкций становится неотъемлемым элементом проектирования систем тепловой защиты ЛА на современном этапе развития авиационной и аэрокосмической техники. Интерес к эффектам сопряженного теплообмена не ограничивается аэрокосмической промышленностью. Возникают новые технические приложения, связанные с охлаждением компьютера процессоров, с технологией замораживания пищевых продуктов и многие другие. Процессы аэродинамического обтекания и нагрева являются взаимосвязанными: твердая поверхность подвергается аэродинамическому нагреву, а нагретая твердая поверхность возвращает часть тепла в аэродинамический поток, что влияет на скорость теплообмена и так далее. Помимо аэродинамического нагрева, на поверхность высокоскоростного объекта также могут воздействовать тепловые нагрузки, присутствующие внутри объекта.

Таким образом, численный анализ аэродинамического нагрева представляет собой связанную задачу теплообмена между газовым потоком и твердым телом через границу раздела. В этой задаче возникает новый объект – интерфейсная граница контакта «газ – твердое тело». На этой границе задаются условия теплообмена в виде равенства значений температуры и теплового потока по разные стороны границы, другие условия в данной работе не рассматриваются. Эта задача известна как задача сопряженного теплообмена, Conjugate Heat Transfer (CHT).

В курсовой работе планируется исследовать точность аппроксимации условий теплообмена в простых, но содержательных задачах. В соответствии с планом работы, в текущем году выполнена разработка и тестирование кода.

2. Постановка задач

А) Общая задача.

$$c \frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div}(k \operatorname{grad} u) - a_0 u + f$$

Рассматриваем задачу в \mathbb{R}^1 , здесь $r = (t, x) \in G = [t_0, T] \times \Omega, [t_0, T]$ - заданный интервал Ω - отрезок $[-1, 1]$. Точка $x = 0$ — граница раздела двух сред, разбивающая область на две подобласти, первую при $x < 0$ и вторую при $x > 0$.

Функции $c(r), k(r), a_0(r), f(r)$ являются заданными. В общем случае — k — тензор диффузии, но в моей задаче мы ограничиваемся тем, что k — скалярная функция переменного x . Эту задачу можно решать с краевыми условиями Дирихле и Неймана. Коэффициенты диффузии в правой и левой части отрезка — разные.

Рассматриваем задачу на сетке с числом шагов N , где $N = N_1 + N_2$, N_1 - число шагов на отрезке $[-1, 0]$, N_2 - число шагов на отрезке $[0, 1]$. Отрезок интегрирования по времени: $0 = t_0 \leq t \leq T = 1$, сетка по времени:

$$\{t_j, 0 \leq j \leq J, t_j = 1\} \text{ с постоянным шагом } \tau.$$

Разностная схема $\frac{u_{j+1} - u_j}{\tau} + L_h u_j = f_j$ требует жесткого ограничения на шаг по времени τ , определяемого из условия устойчивости $\tau \lambda_{\max} < k_0 < 2$.

k_0 - коэффициент запаса, λ_{\max} - оценка максимального собственного значения оператора L_h . Шаг по времени вычисляется так:
$$\tau = \frac{\rho}{4 \max(\frac{k_1}{h_1^2}, \frac{k_2}{h_2^2})}$$

Оператор L_h для внутренних узлов сетки имеет вид:

$$L_h w = -\frac{2}{x_n - x_{n-1}} \left[k(x_{n+1/2}) \frac{w(x_{n+1}) - w(x_n)}{x_{n+1} - x_n} - k(x_{n-1/2}) \frac{w(x_n) - w(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}} \right].$$

Для последнего узла, если в нем задано краевое условие Неймана:

$$L_h w = -\frac{2}{x_N - x_{N-1}} \left[q_N - k(x_{N-1/2}) \frac{w(x_N) - w(x_{N-1})}{x_N - x_{N-1}} \right]$$

Б) Частная задача

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f, r \in G$$

Рассматриваем задачу в \mathbb{R}^1 , $r = (t, x) \in G = [t_0, T] \times \Omega$. Здесь $[t_0, T]$ - заданный интервал времени, Ω - отрезок $[-1, 1]$. Число Фурье, характеризующее установление температурного поля в пластине длиной $L = 1$, с коэффициентом теплопроводности

$$a = 1, \text{ м}^2/\text{с} \text{ есть } F_0 = t \frac{a}{L^2}. \text{ Оценка времени установления пластины:}$$

$t = \frac{L^2}{a} = 1$. Эта задача решается на отрезке $[-1, 1]$ с однородными краевыми

условиями Дирихле

$u(t, -1) = u(t, 1) = 0$ и заданной правой частью f .

В качестве начальных функций, правых частей и их точных решений рассмотрим:

1) $u(0, x) = x - x^2, f = 2, u(t, x) = x - x^2$

2) $u(0, x) = \sin(\pi x), f = 0, u(t, x) = \exp(-\pi^2 t) \sin(\pi x)$

Введем равномерную сетку $\Omega_h = \{x_n \in \Omega, 0 \leq n \leq N\}$ на отрезке Ω с шагом h : $h = 1/N$, где N – число шагов. Зададим отрезок интегрирования по времени

$0 = t_0 \leq t \leq T = 1$, возьмем сетку по t : $\{t_j, 0 \leq j \leq J, t_j = 1\}$.

Сеточная функция на слое t_j в узле $x = x_n$ записывается как $u_j(x)$.

Запишем явную схему:

$$\frac{u_{j+1} - u_j}{\tau} = \frac{u_j(x+h) - 2u_j(x) + u_j(x-h)}{h^2} + f_j(x), x \in \text{int } \Omega_h \text{ с постоянным шагом}$$

$\tau = k_0 h^2 / 2$, определяемый из условия устойчивости с коэффициентом запаса $k_0 = 0,5$. Эта схема описана во внутренних узлах сетки. Функции $u_j(x)$ в граничных узлах сетки $x = -1, x = 1$ равны 0.

Шаг в каждом узле рассчитывается так:

$$u_{j+1}(x) = u_j(x) + \tau \frac{u_j(x+h) - 2u_j(x) + u_j(x-h)}{h^2} + \tau f_j(x).$$

3.Расчеты

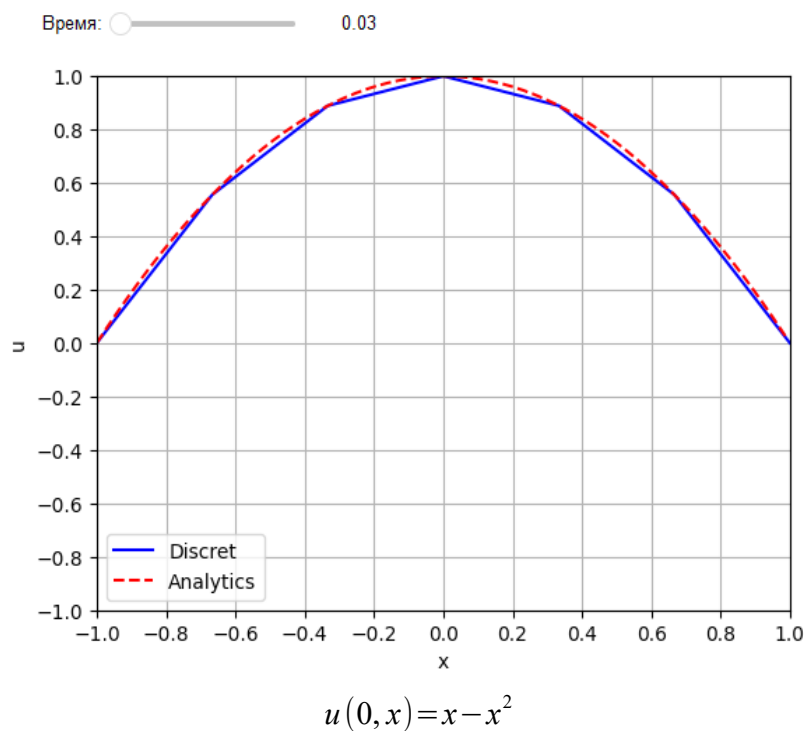
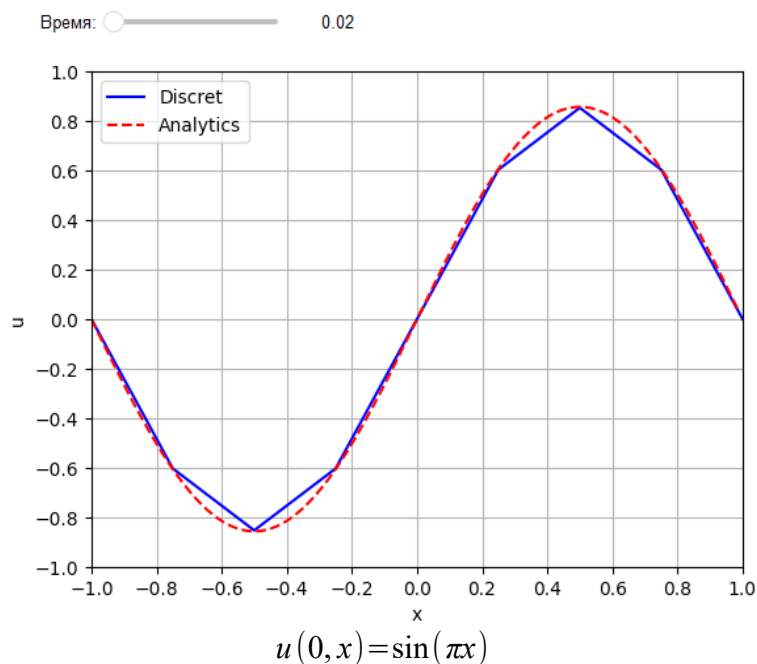
Расчеты производились для частной задачи с целью проверить корректность работы написанной мною программы, для дальнейшей работы с общим случаем.

1) $u(0, x) = x - x^2, f = 2, u(t, x) = x - x^2$

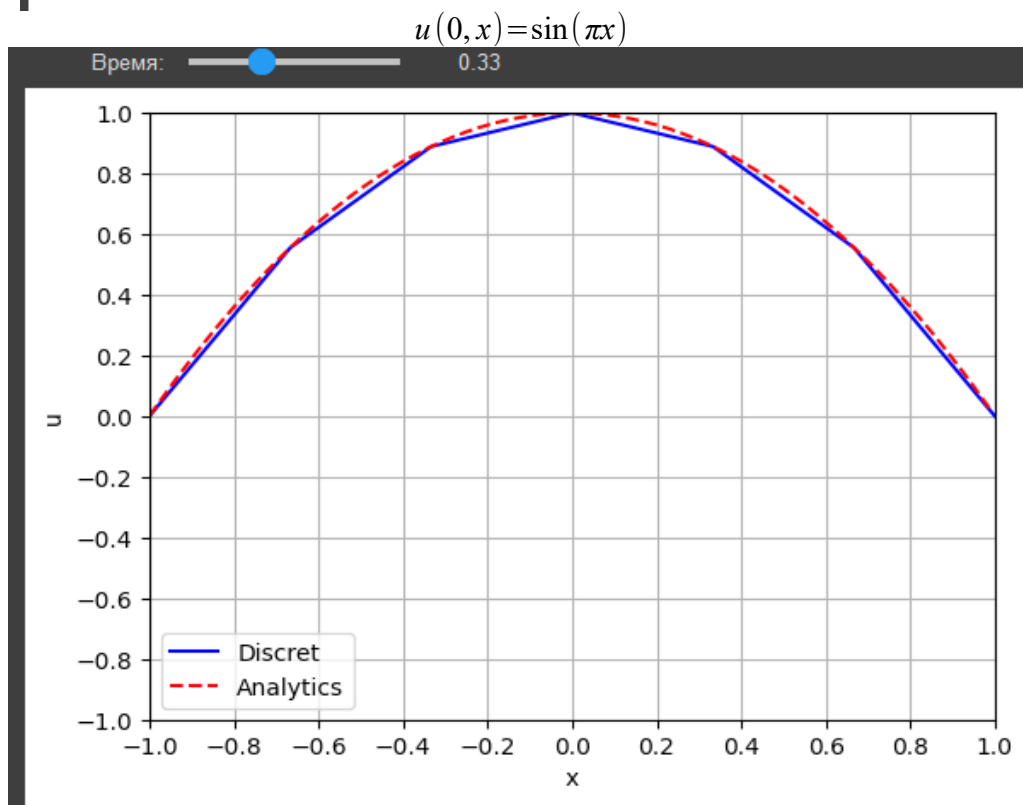
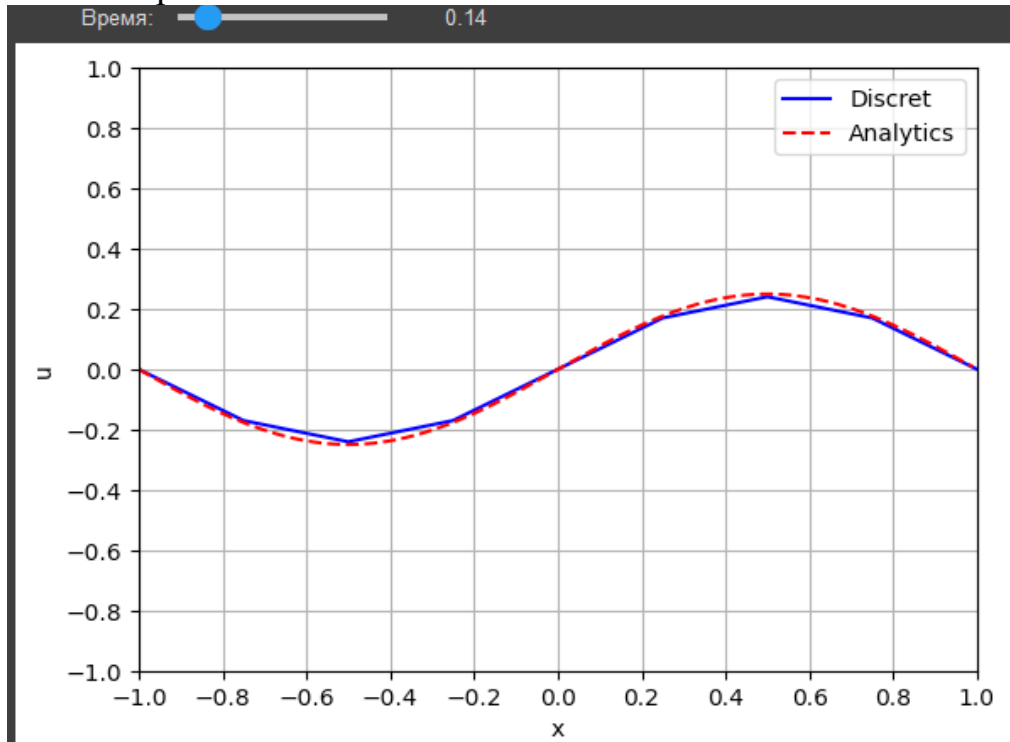
2) $u(0, x) = \sin(\pi x), f = 0, u(t, x) = \exp(-\pi^2 t) \sin(\pi x)$

Для каждой из этих 2 функций возьмем число шагов $N = 8$, для наглядности.

В результате приближенное решение имеет вот такой вид для каждой функции:

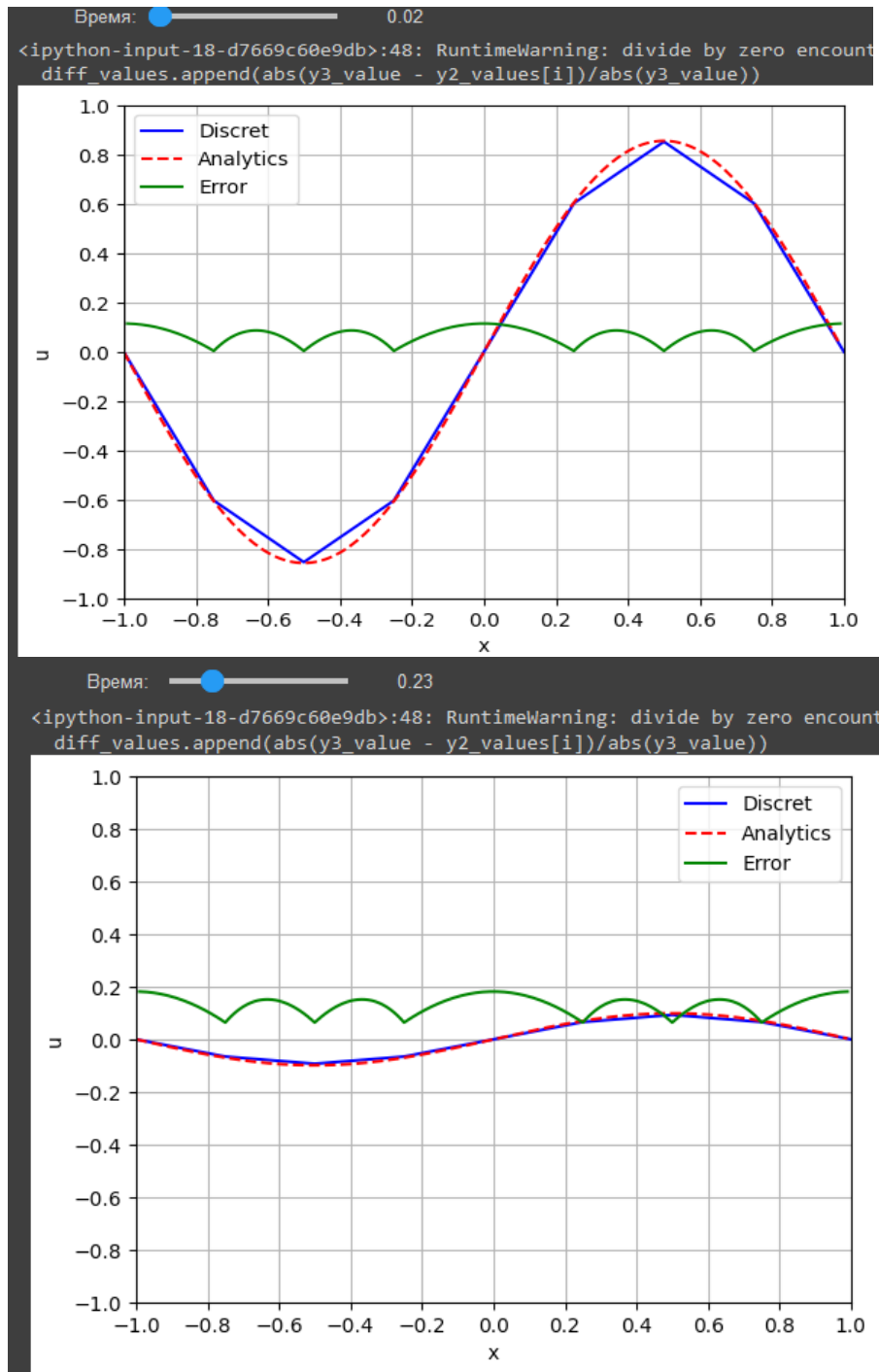


Это значения аналитической и дискретной функции в момент времени первой итерации. Написанная мной программа для вывода графиков поддерживает динамическое изменение графиков во времени. Для этого предусмотрен ползунок, который виден в верхних частях картинок, в нашем случае диапазон его изменений от 0 до 1. Вот, к примеру, как выглядят графики в другой момент времени:



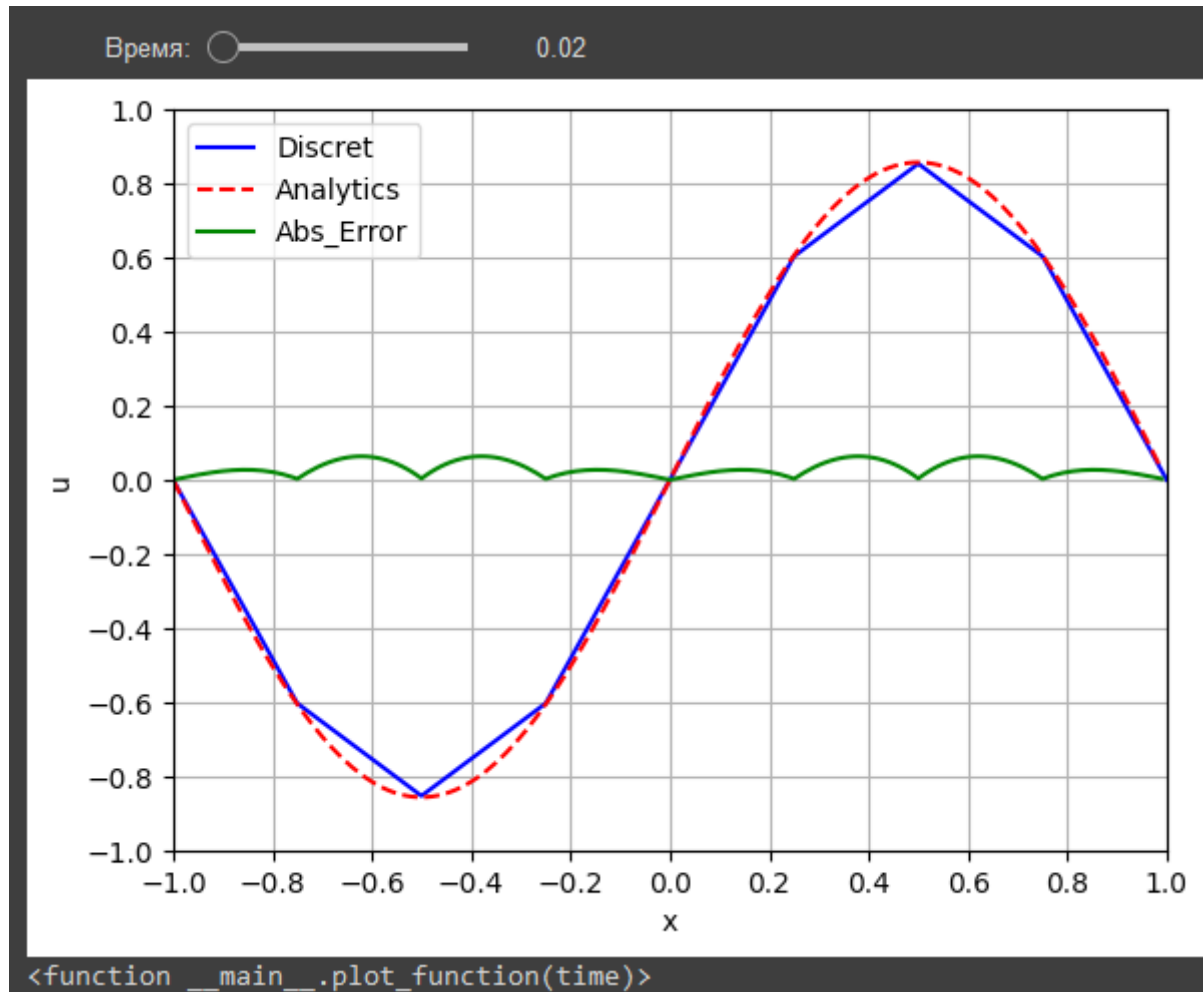
Как мы видим, вторая функция не меняется с течением времени, это обусловлено тем, что мы задали условие $f = 2$ которое поддерживает данное распределение тепла в материале. Опираясь на данные, которые мы получили благодаря построению этих графиков, можно утверждать, что программа вычисляющая точки в каждый момент времени работает корректно.

Так же для каждой из этих функций я посчитал относительную ошибку, которая вычисляется по формуле: $\delta = \frac{\|u_j - u(t_j, x)\|}{\|u(t_j, x)\|}$. На графиках относительная ошибка также изменяется динамически в зависимости от положения ползунка «время».



Из графиков видно, что относительная ошибка решения возрастает с течением времени.

Также можно вывести абсолютную ошибку $\delta_{abs} = \|u_j - u(t_j, x)\|$:



4. Программа.

Программа написана на языке C++, в среде разработки Clion с компилятором g++. Функция, задающая начальное распределение тепла, функции, $c(r), k(r), a_0(r), f(r)$, краевые условия задаются в теле программы, до ее запуска. При запуске программы, пользователь вводит число шагов N_1 на отрезке $[-1,0]$, далее вводит число шагов N_2 на отрезке $[0,1]$. Программа сама вычисляет нужный шаг по времени для заданного N и выдает результат в виде таблицы с расширением .csv.

Таблица устроена так:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	Time	-1	-0,75	-0,5	-0,25	0	0,25	0,5	0,75	1
2	0,015625	0	-0,60355	-0,85355	-0,60355	0	0,603553	0,853553	0,603553	0
3	0,03125	0	-0,51517	-0,72855	-0,51517	0	0,515165	0,728553	0,515165	0
4	0,046875	0	-0,43972	-0,62186	-0,43972	0	0,439721	0,621859	0,439721	0
5	0,0625	0	-0,37533	-0,53079	-0,37533	0	0,375325	0,53079	0,375325	0
6	0,078125	0	-0,32036	-0,45306	-0,32036	0	0,32036	0,453058	0,32036	0
7	0,09375	0	-0,27344	-0,38671	-0,27344	0	0,273444	0,386709	0,273444	0
8	0,109375	0	-0,2334	-0,33008	-0,2334	0	0,233399	0,330077	0,233399	0
9	0,125	0	-0,19922	-0,28174	-0,19922	0	0,199219	0,281738	0,199219	0
10	0,140625	0	-0,17004	-0,24048	-0,17004	0	0,170044	0,240478	0,170044	0
11	0,15625	0	-0,14514	-0,20526	-0,14514	0	0,145142	0,205261	0,145142	0
12	0,171875	0	-0,12389	-0,1752	-0,12389	0	0,123886	0,175201	0,123886	0
13	0,1875	0	-0,10574	-0,14954	-0,10574	0	0,105743	0,149544	0,105743	0
14	0,203125	0	-0,09026	-0,12764	-0,09026	0	0,090258	0,127644	0,090258	0
15	0,21875	0	-0,07704	-0,10895	-0,07704	0	0,07704	0,108951	0,07704	0
16	0,234375	0	-0,06576	-0,093	-0,06576	0	0,065758	0,092995	0,065758	0
17	0,25	0	-0,05613	-0,07938	-0,05613	0	0,056128	0,079376	0,056128	0
18	0,265625	0	-0,04791	-0,06775	-0,04791	0	0,047908	0,067752	0,047908	0
19	0,28125	0	-0,04089	-0,05783	-0,04089	0	0,040892	0,05783	0,040892	0
20	0,296875	0	-0,0349	-0,04936	-0,0349	0	0,034903	0,049361	0,034903	0
21	0,3125	0	-0,02979	-0,04213	-0,02979	0	0,029792	0,042132	0,029792	0
22	0,328125	0	-0,02543	-0,03596	-0,02543	0	0,025429	0,035962	0,025429	0

Первый столбец — время, последующие столбцы — значения функции u в узлах, узлы указаны в первой строчке. Формат .csv удобен тем, что с ним будет далее просто работать, при обработке данных.

Далее этот файл я загружаю во вторую программу написанную на языке Python3.10, в плагине Jupyter. Этот плагин позволяет наглядно работать с таблицами. Для работы с этим плагином я использую сервис Google Colab. Программа получает на вход таблицу расширения .csv, аналитическое решение. Далее код обрабатывает таблицу и выводит дискретное решение, аналитическое решение. Опционально можно добавить в отображаемые графики абсолютную или относительную ошибку между дискретным и аналитическим решением.

5. Заключение

Мною был разработан и протестирован программный код, способный решать общий случай задачи сопряженного теплообмена на контактной границе двух тел в одномерном случае. Для достижения этой цели были использованы языки программирования C++, Python и инструмент Jupyter. Применение языков программирования C++ и Python, а также инструмента Jupyter, позволило эффективно реализовать алгоритмы и провести численные эксперименты. Для проверки работоспособности программного кода были проведены численные эксперименты на частных случаях задачи. Полученные результаты были сравнены с аналитическими решениями. Согласованность результатов подтверждает корректность реализованного алгоритма и правильность выбранной аппроксимации. Полученные результаты могут быть использованы в дальнейших исследованиях в области сопряженного теплообмена и являются основой для развития более сложных моделей и методов численного решения данной задачи. План работ этого года выполнен.

6.Список литературы

- 1)Самарский, А. А. (1971). Введение в теорию разностных схем. Наука
- 2)Жуков, В. Т., Новикова, Н. Д., Феодоритова, О. Б. (2014). «О применении многосеточного и явно-итерационного методов к решению параболических уравнений с анизотропными разрывными коэффициентами»
- 3)Жуков, В. Т., Новикова, Н. Д., Феодоритова, О. Б. (2014). «О многосеточном и явно-итерационном методах решения параболических уравнений»
- 4)Project Jupyter. (Доступно по адресу: <https://jupyter.org/documentation>)
- 5)Google Colab. (Доступно по адресу: <https://colab.research.google.com/notebooks/intro.ipynb>)