Funktionentheorie

Jun.-Prof. Dr. Madeleine Jotz Lean
LaTeX-Version von Niklas Sennewald

Sommersemester 2020

Inhaltsverzeichnis

0 Komplexe Zahlen und wichtige Begriffe

0.1 Komplexe Zahlen

- $\mathbb{C} = \mathbb{R} \bigoplus \mathbb{R}i$ mit $i = \sqrt{-1}$ (bzw $i^2 = -1$).
- In $\mathbb{C}$ addieren und multiplizieren wir wie folgt:

$$(a_1 + b_1 i) + (a_2 + b_2 i) = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i$$
$$(a_1 + b_1 i) \cdot (a_2 + b_2 i) = a_1 a_2 - b_1 b_2 + (a_1 b_2 + a_2 b_1)i$$

  $\mathbb{C}$ ist ein Körper mit $0 = 0 + 0i,\ 1 = 1 + 0i$ und der oben definierten Addition und Multiplikation.

- $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$ als $\mathbb{R}$-Vektorraum. Punkte $a + bi$ aus $\mathbb{C}$ können als Punkte $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ visualisiert werden.

$$z = \underbrace{a}_{\Re(z)} + \underbrace{b}_{\Im(z)} i$$

  $\rightarrow$ die x-Achse in $\mathbb{R}^2$ ist die reelle Achse und die y-Achse ist die imaginäre Achse.

- $\bar{z} = a - bi$ ist die konjugierte Zahl zu $z = a + bi \in \mathbb{C}$. Es gilt:

$$\bar{\bar{z}} = z,\ \overline{z+w} = \bar{z} + \bar{w},\ \overline{zw} = \bar{z}\bar{w},\ z + \bar{z} = 2\Re(z),\ z - \bar{z} = 2i\Im(z)$$

  $(\bar{z} = z \iff z \in \mathbb{R},\ \bar{z} = -z \iff z \in \mathbb{R}i)$
  Weiterhin gilt $z\bar{z} = \bar{z}z = a^2 + b^2$. Wir schreiben $|z| = \sqrt{z\bar{z}}$.

- Falls $z = a + bi \neq 0$ $\exists!\, \theta \in (-\pi, \pi]$, sodass $\cos(\theta) = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ und $\sin(\theta) = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$. Dann ist $z = |z| + (\cos(\theta) + i\sin(\theta)) = |z|e^{i\theta}$ per Konstruktion die Polarform der komplexen Zahl z. Multiplikation von komplexen Zahlen in Polarform ist ganz einfach:

$$r_1 e^{i\theta_1} \cdot r_2 e^{i\theta_2} = r_1 r_2 e^{i(\theta_1+\theta_2)}, \quad \left(re^{i\theta}\right)^{-1} = \frac{1}{r} e^{-1\theta}$$

$$\text{sonst: } (a + bi)^{-1} = \frac{1}{a + bi} = \frac{a - bi}{a^2 + b^2}$$

- Geometrische Interpretation der Multiplikation: Addition von komplexen Zahlen ist das Gleiche wie die „Vektoraddition“ von Vektoren in $\mathbb{R}^2$. Multiplizieren von $z \in \mathbb{C}$ mit $re^{i\theta}$ gibt Folgendes: $|z \cdot re^{i\theta}| = |z| \cdot r,\ \arg(z \cdot re^{i\theta}) = \arg(z) + \theta$. Also: Multiplikation mit $re^{i\theta}$ entspricht einer „Drehstreckung“ (Winkel θ, Faktor r).

- Die Menge $\{z \in \mathbb{C} \mid |z-c| = r,\ c \in \mathbb{C}, r \in \mathbb{R}_{\geq 0}\}$ definiert einen Kreis mit Mittelpunkt c und Radius r. Eine Gleichung der Form $x^2+y^2+2gx+2fy+h=0$ $(x, y \in \mathbb{R},\ g, f, h \in R$ konstant) kann geschrieben werden als $z\bar{z}+\alpha z+\overline{\alpha z}+h=0$ mit $\alpha = g - if$ und $z = x + iy$. Allgemeiner betrachten wir eine Gleichung $Az\bar{z} + Bz + \overline{Bz} + C = 0$. Die Lösungsmenge $\{z \in \mathbb{C} \mid Az\bar{z} + Bz + \overline{Bz} + C = 0\}$ ist

  i) leer, falls $B\overline{B} - AC < 0$

  ii) ein Kreis mit Mittelpunkt $\frac{-\overline{B}}{A}$ und Radius $\sqrt{\frac{B\overline{B}-AC}{A^2}}$, falls $B\overline{B} - AC \geq 0$.

  Falls $A = 0$ ist die Gleichung einfach $Bz + \overline{Bz} + C = 0$. Falls $B \neq 0$ ist dies die Gleichung einer Geraden.

Satz 0.1.1
Seien $c, d \in \mathbb{C},\ c \neq d,\ k \in \mathbb{R},\ k > 0$. Die Menge $\{z \mid |z-c| = k|z-d|\}$ ist ein Kreis für $k \neq 1$. Im Falle $k = 1$ ist die Menge eine Gerade, die senkrecht zum Segment cd durch den Mittelpunkt verläuft.

0.2 Erinnerungen, wichtige Begriffe

- $\mathbb{C}$ ist vollständig, das heißt jede Cauchyfolge in $\mathbb{C}$ konvergiert.

- $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ definiert eine komplexe Reihe. Falls $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, N \in \mathbb{N}$, sodass

  $$\left|\sum_{r=n+1}^{m} c_r\right| < \varepsilon\ \forall\, m > n > N,$$

  dann ist die Reihe konvergent.

- Die Topologie von $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$ ist die von der Standardnorm $\|\cdot\|^2$ induzierte: $U \subset \mathbb{C}$ ist offen, falls $\forall\, z \in U\ \exists\, \delta > 0 : B_\delta(z) = \{z' \in \mathbb{C} \mid |z' - z| < \delta\} \subseteq U$. $D \subset \mathbb{C}$ ist abgeschlossen, falls $D^c = \mathbb{C} \setminus D$ offen ist. Der *Abschluss* einer Teilmenge $S \subseteq \mathbb{C}$ ist

  $$\overline{S} = \bigcap_{\substack{S \subset D \\ D \text{ abgeschlossen}}} D = \overline{S} = \{z \in \mathbb{C} \mid \forall\, \delta > 0 : B_\delta(z) \cap S \neq 0\}.$$

  Das *Innere* von $S \subseteq \mathbb{C}$ ist

  $$S^\circ = \bigcup_{\substack{U \subset S \\ U \text{ offen}}} U = \{z \in \mathbb{C} \mid \exists\, \delta > 0 : B_\delta(z) \subseteq S\}.$$

Der Rand von $S \subseteq \mathbb{C}$ ist
$$\partial S = \overline{S} \setminus S^\circ.$$
Es gilt: $\overline{S}$ ist abgeschlossen und $S = \overline{S} \iff S$ ist abgeschlossen, S° ist offen und $S = S^\circ \iff S$ ist offen.

- $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ wird oft geschrieben als $f(z) = \underbrace{u(x,y)}_{\text{reeller Teil}} + i \underbrace{v(x,y)}_{\text{imaginärer Teil}}$ für $z = x+iy$.

- $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ c, d \in \mathbb{C}$.
$$\lim_{z\to c} f(z) = d \iff \forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0 : |z - c| < \delta \implies |f(z) - d| < \varepsilon$$
Der Limes für $z \to \infty$ ist etwas schwieriger, denn es gibt in $\mathbb{C}$ „viele Wege ins Unendliche“. Man schreibt $\lim\limits_{z\to\infty} f(z) = l$, falls $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, k > 0 : |z| > k \implies |f(z) - l| < \varepsilon$, das heißt $\lim\limits_{z\to\infty} f(z) = \lim\limits_{|z|\to\infty} f(z)$, $\lim\limits_{z\to\infty} f(z) = \infty$ falls $\forall\, E > 0\ \exists\, D > 0 : |z| > D \implies |f(z)| > E$.

- $f, \phi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$
  - $f(z) = O(\phi(z))$ für $z \to \infty$, falls $\exists\, K > 0, D > 0 : |z| > D \implies |f(z)| \leq K|\phi(z)|$
  - $f(z) = O(\phi(z))$ für $z \to 0$, falls $\exists\, K > 0, \varepsilon > 0 : |z| < \varepsilon \implies |f(z)| \leq K|\phi(z)|$
  - $f(z) = o(\phi(z))$ für $z \to \infty$, falls $\lim\limits_{|z|\to\infty} \frac{f(z)}{\phi(z)} = 0$
  - $f(z) = o(\phi(z))$ für $z \to 0$, falls $\lim\limits_{z\to 0} \frac{f(z)}{\phi(z)} = 0$

1 Komplexe Ableitung

1.1 Komplexe Differenzierbarkeit

Definition 1.1.1 (Komplexe Differenzierbarkeit)
Eine komplexe Abbildung $f : U \to \mathbb{C},\ U \subseteq \mathbb{C}$ ist an der Stelle $c \in U$ *differenzierbar*, falls $\lim\limits_{z\to c} \frac{f(z)-f(c)}{z-c}$ existiert. Der Limes wird dann $f'(c)$, die *Ableitung von f an der Stelle c* genannt.

Satz 1.1.2
Wie auch im reellen Fall gelten folgende Regeln:
Seien $f, g : U \to \mathbb{C},\ U \subseteq \mathbb{C}$ an der Stelle $c \in U$ differenzierbar. Dann gilt:

i) $f + g : U \to \mathbb{C}$ *ist an* $c \in U$ *differenzierbar mit* $(f+g)'(c) = f'(c) + g'(c)$.

ii) $f \cdot g : U \to \mathbb{C}$ *ist an* $c \in U$ *differenzierbar mit* $(f \cdot g)'(c) = f(c)g'(c) + f'(c)g(c)$.

iii) Falls $g(c') \neq 0 \,\forall\, c' \in U$ *gilt, so ist* $\frac{f}{g}(c) : U \to \mathbb{C}$ *an* $c \in U$ *differenzierbar mit* $\left(\frac{f}{g}\right)'(c) = \frac{f'(c)g(c)-g'(c)f(c)}{g^2(c)}$.

iv) Falls $f(U) \subseteq dom(g)$ *gilt und* g *an* $f(c)$ *differenzierbar ist, so ist* $g \circ f : U \to \mathbb{C}$ *an* $c \in U$ *differenzierbar mit* $(g \circ f)'(c) = g'(f(c)) \cdot f'(c)$.

Beispiel 1.1.3: Die komplexe Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ z \mapsto z$ ist differenzierbar, denn $\lim\limits_{z\to c} \frac{f(z)-f(c)}{z-c} = 1\ \forall\, c \in \mathbb{C}$. Somit sind Polynome überall differenzierbare komplexe Funktionen und rationale Funktionen $\frac{p}{q}$ sind differenzierbar, außer an den Nullstellen von q.

Satz 1.1.4 (Cauchy-Riemann-Gleichungen)
Sei $f : \mathbb{C} \supseteq U \to \mathbb{C}$ eine komplexe Funktion, die an der Stelle $c \in U$ komplex differenzierbar ist. Schreibe $f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$ und $c = a + ib$. Dann existieren alle partiellen Ableitungen $\frac{\partial u}{\partial x},\ \frac{\partial u}{\partial y},\ \frac{\partial v}{\partial x},\ \frac{\partial v}{\partial y}$ an der Stelle (a,b) und es gilt

$$\frac{\partial u}{\partial x}(a,b) = \frac{\partial v}{\partial y}(a,b), \quad \frac{\partial v}{\partial x}(a,b) = -\frac{\partial u}{\partial y}(a,b).$$

Beispiel 1.1.5: Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ f(x+iy) = \sqrt{|xy|}$. Dann gilt

1. $\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = 0$, denn $v = 0$,

2. $\frac{\partial u}{\partial x}(0,0) = \lim\limits_{t\to 0} \frac{u(t,0)-u(0,0)}{t} = 0$ und $\frac{\partial u}{\partial y}(0,0) = 0$.

Also gelten die Cauchy-Riemann-Gleichungen an der Stelle $(0,0) \in \mathbb{R}^2$, aber:

3. f ist nicht an $0 \in \mathbb{C}$ komplex differenzierbar:

$$\frac{f(z)-f(0)}{z-0} = \frac{\sqrt{|xy|}}{x+iy} = \frac{\sqrt{|\cos\theta\sin\theta|}}{\cos\theta + i\sin\theta} = \sqrt{|\cos\theta\sin\theta|}e^{-i\theta}$$

Für $\theta = 0$ oder $\frac{\pi}{2}$ wäre das 0, aber für $\theta = \frac{\pi}{4}$ ist das $\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{1}{1+i} = \frac{1-i}{2}$. Also haben wir $\lim\limits_{r\to 0} \frac{f(re^{i\theta})-f(0)}{re^{i\theta}} = \frac{1-i}{2} \neq 0$ für $\theta = \frac{\pi}{4}$ und f ist nicht differenzierbar an der Stelle 0.

Satz 1.1.6
Sei $B_R(c)$ ein offener Ball in $\mathbb{C}$. Sei $f : U \to \mathbb{C}$ mit $B_R(c) \subseteq U$, schreibe $f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$. Falls

i) die partiellen Ableitungen $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial y}$ existieren und stetig in $B_R(c)$ sind und

ii) die Cauchy-Riemann-Gleichungen an der Stelle $a + ib \cong (a,b)$ erfüllt sind,

dann ist f an der Stelle c differenzierbar.

Satz 1.1.7
Sei $f : U \to \mathbb{C}$ und sei $B \subseteq U$ ein offener Ball. Schreibe $f(x+iy) = u(x,y)+iv(x,y)$. Falls

i) die partiellen Ableitungen existieren und stetig auf B sind und

ii) die Cauchy-Riemann-Gleichungen auf B gelten,

dann ist f auf B differenzierbar.

Definition 1.1.8 (Holomorphie)
Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen. Eine Funktion $f : U \to \mathbb{C}$ heißt *holomorph*, falls f an jedem $c \in U$ differenzierbar ist. Im Falle $U = \mathbb{C}$ heißt f *ganze Funktion.*

Beispiel 1.1.9:

- Aus Beispiel 1.1.3 folgt, dass Polynome ganze Funktionen sind.
- Die rationale Funktion $f : \mathbb{C} \setminus \{1\} \to \mathbb{C},\ z \mapsto \frac{z+2i}{z-i}$ ist holomorph auf $C \setminus \{i\}$.
- $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ z \mapsto z^2 = (x+iy)^2 = (x^2-y^2) + i(2xy)$
  $\implies u(x,y) = x^2 - y^2,\ v(x,y) = 2xy$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) &= 2x \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x,y) &= -2y \\ \frac{\partial v}{\partial x}(x,y) &= 2y = -\frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial y}(x,y) &= 2x = \frac{\partial u}{\partial x} \end{aligned}\right\} \text{alle stetig auf } \mathbb{R}^2$$

also ist f holomorph (also eine ganze Funktion) mit $f'(z) = \frac{\partial u(x,y)}{\partial x} + i\frac{\partial v(x,y)}{\partial x} = 2x + 2iy$.

- $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C},\ z \mapsto \frac{1}{z} = \frac{1}{x+iy} \implies u(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2} v(x,y) = \frac{-y}{x^2+y^2}$

$$\left.\begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = \frac{x^2+y^2-2x^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{\partial v}{\partial y}(x,y) \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2} = -\frac{\partial v}{\partial x}(x,y) \end{array}\right\} \text{alle stetig auf } \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$$

Also ist f holomorph mit

$$\begin{aligned} f'(z) &= \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} + i\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2+i2xy}{(x^2+y^2)^2} \\ &= \frac{-(x-iy)^2}{(x+iy)^2(x-iy)^2} = \frac{1}{z^2} \quad \forall\, z \in \ \setminus\{0\}. \end{aligned}$$

Also ist eine komplexe Abbildung $f : U \to \mathbb{C}$, $U \subseteq \mathbb{C}$ genau dann an $x+iy = c \in \mathbb{C}$ differenzierbar, wenn $D_{(x,y)}(u,v)$, aufgefasst als Abbildung $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $\mathbb{C}$-linear ist. Wir erweitern nun ein Standardergebnis aus der reellen Analysis zum komplexen Fall:

Satz 1.1.10
Sei $f : U \to \mathbb{C},\ U \subseteq \mathbb{C}$ holomorph auf $B_R(c) \subseteq U$, und sei $f'(z) = 0\ \forall z \in B_R(c)$. Dann ist f konstant auf $B_R(c)$.

Satz 1.1.11 (Lemma von Goursat)
Sei $f : U \to \mathbb{C}$ auf U holomorph, $c \in U$. Dann gibt es eine Funktion $v : U \to \mathbb{C}$ mit

$$v(z) \xrightarrow{z\to c} 0 \text{ und } f(z) = f(c) + (z-c)f'(c) + (z-c)v(z).$$

Satz 1.1.12
Sei $f : U \to \mathbb{C}$ eine komplexe Funktion, $c \in U$. Falls eine komplexe Zahl A existiert, sodass

$$\frac{f(z) - f(c) - A(z-c)}{z-c} \xrightarrow{z\to c} 0,$$

so ist f an der Stelle c differenzierbar mit $f'(c) = A$.

Satz 1.1.13
Sei $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph mit $U \subseteq \mathbb{C}$ offen und zusammenhängend. Falls $|f|$ auf U konstant ist, dann auch f.

Komplexe Differentialformen und das Wirtinger-Kalkül

In der reellen Analysis beschäftigt man sich mit reellwertigen alternierenden Differentialformen auf offenen Teilmengen $U \subseteq \mathbb{R}^n$. Man kann auch komplexwertige

k-Formen betrachten, die lokal von der Gestalt

$$\omega = \sum_{1 \le j_1 < \cdots < j_k \le n} a_{j_1,\ldots,j_k} \; \mathrm{d}x_{j_1} \wedge \ldots \wedge \; \mathrm{d}x_{j_k}$$

sind, mit komplexwertigen Funktionen $a_{j_1,\ldots,j_k} : U \to \mathbb{C}$. Das äußere Produkt solcher Formen ist wie im reellen Fall definiert. Wenn man das Differential d auf komplexwertige Formen fortsetzen will, muss man

$$\mathrm{d}f := \mathrm{d}(\Re f) + i \; \mathrm{d}(\Im f) \tag{1}$$

setzen (für $f : U \to C,\; f = \Re f + i\Im f$), und so

$$\mathrm{d}\omega = \sum_{1 \le j_1 < \cdots < j_k \le n} \mathrm{d}a_{j_1,\ldots,j_k} \wedge \; \mathrm{d}x_{j_1} \wedge \ldots \wedge \; \mathrm{d}x_{j_k}.$$

Es gilt $\mathrm{d}^2 = 0$ und per Definition ist d kompatibel mit $\wedge$:

$$\mathrm{d}(\omega \wedge \eta) = \; \mathrm{d}\omega \wedge \eta + (-1)^{|\omega|} \omega \wedge \; \mathrm{d}\eta.$$

Nun sei $f : U \to \mathbb{C}, U \subseteq \mathbb{C}^n$, und die Form ω soll auch von komplexen Argumenten abhängen. Das heißt ω ist eine Form auf $U \subseteq \mathbb{C}^n$, die wir vermöge der Identifikation $\mathbb{C}^n \cong \mathbb{R}^{2n},\; z_j = x_j + iy_j,\; j = 1, \ldots, n$ als Form auf $U \subseteq \mathbb{R}^{2n}$ auffassen können.
z_j und $\overline{z_j}$ sind dann komplexwertige Funktionen auf $\mathbb{R}^{2n}$ und aus 1 folgt

$$\begin{cases} \mathrm{d}z_j = \; \mathrm{d}x_j + i \; \mathrm{d}y_j \\ \mathrm{d}\overline{z_j} = \; \mathrm{d}x_j - i \; \mathrm{d}y_j \end{cases} \text{für } j = 1, \ldots, n.$$

Umgekehrt gilt dann $\mathrm{d}x_j = \frac{\mathrm{d}z_j + \mathrm{d}\overline{z_j}}{2}$ und $\mathrm{d}y_j = \frac{\mathrm{d}z_j - \mathrm{d}\overline{z_j}}{2}$.
Das heißt, jede komplexwertige k-Differentialform auf $U \subseteq \mathbb{C}^n$ lässt sich ausdrücken als Linearkombination (mit komplexwertigen Koeffizienten) von k-fachen Dachprodukten von $\mathrm{d}z_j,\; \mathrm{d}\overline{z_j}$.

Sei $f : U \to \mathbb{C}, U \subseteq \mathbb{C}^n, f = f_\Re + if_\Im$ stetig differenzierbar. Dann gilt per Definition:

$$\begin{aligned} \mathrm{d}f &= \; \mathrm{d}f_\Re + i \; \mathrm{d}f_\Im \\ &= \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial f_\Re}{\partial x_j} \; \mathrm{d}x_j + \frac{\partial f_\Re}{\partial y_j} \; \mathrm{d}y_j \right) + i \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial f_\Im}{\partial x_j} \; \mathrm{d}x_j + \frac{\partial f_\Im}{\partial y_j} \; \mathrm{d}y_j \right) \\ &= \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial f_\Re}{\partial x_j} + i \frac{\partial f_\Im}{\partial x_j} \right) \; \mathrm{d}x_j + \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial f_\Re}{\partial y_j} + i \frac{\partial f_\Im}{\partial y_j} \right) \; \mathrm{d}y_j. \end{aligned}$$

Schreibe $\frac{\partial f}{\partial x_j} = \frac{\partial f_\Re}{\partial x_j} + i\frac{\partial f_\Im}{\partial x_j}$, $\frac{\partial f}{\partial y_j} = \frac{\partial f_\Re}{\partial y_j} + i\frac{\partial f_\Im}{\partial y_j}$. Dann ist

$$\mathrm{d}f = \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\ \mathrm{d}x_j + \frac{\partial f}{\partial y_j}\ \mathrm{d}y_j\right).$$

$$\begin{aligned}
\text{Setze nun}\quad \frac{\partial f}{\partial z_j} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j} - i\frac{\partial f}{\partial y_j}\right),\\
\frac{\partial f}{\partial \overline{z_j}} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j} + i\frac{\partial f}{\partial y_j}\right).\\
\text{Dann gilt}\quad \frac{\partial f}{\partial x_j} &= \frac{\partial f}{\partial z_j} + \frac{\partial f}{\partial \overline{z_j}}\\
\frac{\partial f}{\partial y_j} &= i\left(\frac{\partial f}{\partial z_j} - \frac{\partial f}{\partial \overline{z_j}}\right).
\end{aligned}$$

Es gilt dann:

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}f &= \sum_{j=1}^n \left(\left(\frac{\partial f}{\partial z_j} + \frac{\partial f}{\partial \overline{z_j}}\right)\ \mathrm{d}x_j + i\left(\frac{\partial f}{\partial z_j} - \frac{\partial f}{\partial \overline{z_j}}\right)\ \mathrm{d}y_j\right)\\
&= \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial z_j}(\ \mathrm{d}x_j + i\ \mathrm{d}y_j) + \frac{\partial f}{\partial \overline{z_j}}(\ \mathrm{d}x_j - i\ \mathrm{d}y_j)\right)\\
&= \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial z_j}\ \mathrm{d}z_j + \frac{\partial f}{\partial \overline{z_j}}\ \mathrm{d}\overline{z_j}\right).
\end{aligned}$$

Außerdem ist

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \overline{f}}{\partial z_j} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \overline{f}}{\partial x_j} - i\frac{\partial \overline{f}}{\partial y_j}\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f_\Re}{\partial x_j} - i\frac{\partial f_\Im}{\partial x_j} - i\frac{\partial f_\Re}{\partial y_j} + i^2\frac{\partial f_\Im}{\partial y_j}\right)\\
&= \overline{\frac{1}{2}\left(\frac{\partial f_\Re}{\partial x_j} + i\frac{\partial f_\Im}{\partial x_j} + i\frac{\partial f_\Re}{\partial y_j} - \frac{\partial f_\Im}{\partial y_j}\right)}\\
&= \overline{\frac{\partial f}{\partial \overline{z_j}}}
\end{aligned}$$

und ähnlich bekommt man

$$\frac{\partial \overline{f}}{\partial \overline{z_j}} = \overline{\frac{\partial f}{\partial z_j}}.$$

Nun gilt

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial \overline{z_j}} = 0 &\iff \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j} + i\frac{\partial f}{\partial y_j}\right) = 0 \\
&\iff \frac{\partial f_{\Re}}{\partial x_j} + i\frac{\partial f_{\Im}}{\partial x_j} + i\frac{\partial f_{\Re}}{\partial y_j} - \frac{\partial f_{\Im}}{\partial y_j} = 0 \\
&\iff \begin{cases} \frac{\partial f_{\Re}}{\partial x_j} = \frac{\partial f_{\Im}}{\partial y_j} \\ \frac{\partial f_{\Im}}{\partial x_i} = -\frac{\partial f_{\Re}}{\partial y_j} \end{cases}
\end{aligned}
$$

Also insbesondere für $n = 1$: $\mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial z}\ \mathrm{d}z \iff f$ holomorph.

1.2 Der Satz für implizite Funktionen

Wir wollen hier noch den Satz für implizite Funktionen im komplexen Fall besprechen.

Satz 1.2.1
Sei $f : D \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion mit stetiger Ableitung.

a) In einem Punkt $a \in D$ gelte $f'(a) \neq 0$. Dann existiert eine offene Menge $D_0 \subseteq D,\ a \in D_0$, sodass die Einschränkung $f|_{D_0}$ injektiv ist.

b) Die Funktion f sei injektiv und es gelte $f'(z) \neq 0$ für alle $z \in D$. Dann ist das Bild $f(D)$ offen. Die Umkehrfunktion $f^{-1} : f(D) \to \mathbb{C}$ ist holomorph und ihre Ableitung ist

$$
\left(f^{-1}\right)'(f(z)) = \frac{1}{f'(z)},\ z \in D.
$$

Konforme Abbildungen

Definition 1.2.2 (Orientierungs- und Winkeltreue)
Eine bijektive $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ heißt

a) *orientierungstreu*, falls $\det(T) > 0$,

b) *winkeltreu*, wenn für alle $x, y \in \mathbb{R}^2$ gilt $|Tx| \cdot |Ty| \cdot \langle x, y\rangle = |x| \cdot |y| \cdot \langle Tx, Ty\rangle$, wobei $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das Standardskalarprodukt auf $\mathbb{R}$ ist.

Definition 1.2.3 (Konformität)
Eine differenzierbare Abbildung $f : D \to D',\ D, D' \subseteq \mathbb{R}^2$, heißt *lokal/infinitessimal konform*, falls ihre Jacobimatrix $D_a f$ in jedem Punkt $a \in D$ winkel- und orientierungstreu ist. Falls f auch bijektiv ist, so heißt f *(global) konform*.

Es folgt sofort:

Satz 1.2.4
$f : D \to D',\ D, D' \subseteq \mathbb{C}$ offen. f ist genau dann lokal konform, wenn f holomorph ist und $f'(a) \neq 0$ für alle $a \in D$ gilt.

1.3 Komplexe Potenzreihen

Wie im reellen:

1. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} z_n$ konvergiert zu $S \in \mathbb{C}$, falls $S_m = \sum\limits_{n=0}^{\infty} z_n \overset{m\to\infty}{\longrightarrow} S$.
2. Falls $\sum\limits_{n=0}^{\infty} z_n$ konvergent ist, dann ist $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = 0$.
3. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} z_n$ ist *absolut konvergent*, falls $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |z_n|$ konvergent ist. Dann ist auch $\sum\limits_{n=0}^{\infty} z_n$ konvergent. Da $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |z_n|$ eine reelle Reihe ist, können die üblichen Konvergenztests angewendet werden.
4. Wir betrachten hier *Potenzreihen*, also $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(z - a_n)^n$ mit $c_n, z, a_n \in \mathbb{C}$.

Satz 1.3.1
Die Potenzreihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ konvergiere für $z - a = d \in \mathbb{C}$. Dann konvergiert sie absolut für alle $z \in B_{|d|}(a)$.

Korollar 1.3.2
Sei $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ eine komplexe Potenzreihe. Dann gilt genau eine der drei folgenden Aussagen:

i) die Potenzreihe konvergiert für alle $z \in \mathbb{C}$,

ii) die Potenzreihe konvergiert nur für $z = a$,

iii) $\exists\, R > 0, R \in \mathbb{R}$, sodass die Reihe absolut für alle $z \in B_R(a)$ konvergiert und für alle z mit $|z - a| > R$ divergiert.

Definition 1.3.3 (Konvergenzradius)
Die Zahl R im Korollar 1.3.2 heißt der *Konvergenzradius der Potenzreihe* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$.
Im Fall *iii)* heißt $\left\{ z \in \mathbb{C} \;\middle|\; |z-a| = R \right\}$ der *Konvergenzkreis der Reihe.*
Aus dem reellen Fall bekommt man $R = \frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$.

Satz 1.3.4
Sei $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ *eine Potenzreihe mit Konvergenzradius* $R \in [0, \infty]$.

i) Falls $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right| = \lambda$, *gilt* $\lambda = R$.

ii) Falls $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right|^{-\frac{1}{n}} = \lambda$, *gilt* $\lambda = R$.

Satz 1.3.5
Die Potenzreihen $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ *und* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} nc_n(z-a)^{n-1}$ *haben den gleichen Konvergenzradius.*

Satz 1.3.6
Sei $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ *eine Potenzreihe mit Konvergenzradius* $R \neq 0$, *und sei* $f : B_R(a) \to \mathbb{C}, f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$. *Dann ist* f *holomorph mit* $f'(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} nc_n(z-a)^{n-1}$.

Beispiel 1.3.7: Betrachte die Reihe $\sum\limits_{i=0}^{\infty} i^2 z^{i-1}$ für $|z| < 1$. Da $\sum\limits_{i=0}^{\infty} z^i = \frac{1}{1-z}$ für $|z| < 1$, folgt mit Satz 1.3.6: $\sum\limits_{i=0}^{\infty} iz^{i-1} = \frac{1}{(1-z^2)}$ für $|z| < 1$ und somit $\sum\limits_{i=0}^{\infty} iz^i = \frac{z}{(1-z)^2}$ für $|z| < 1$. Wieder mit Satz 1.3.6 gilt

$$\sum_{i=0}^{\infty} i^2 z^{i-1} = \frac{(1-z)^2 + 2z(1-z)}{(1-z)^4} = \frac{1-z+2z}{(1-z)^3} = \frac{1+z}{(1-z)^3} \text{ für } |z| < 1.$$

Nun können wir mit dem Studium der komplexen Exponentialreihe beginnen.

Lemma 1.3.8
Die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ *hat den Konvergenzradius* $R = \infty$.

Definition 1.3.9 (Komplexe Exponentialfunktion)
Die Funktion $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, z \mapsto \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ ist die *(komplexe) Exponentialfunktion.*

Aus Satz 1.3.6 folgt, dass exp holomorph ist, mit $\exp' : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \exp'(z) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} n \cdot \frac{1}{n!} z^{n-1} = \exp(z)$.

Eigenschaften der Exponentialfunktion:

Seien $z, w \in \mathbb{C}$. Da $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{w^n}{n!}$ absolut konvergieren, konvergiert auch

$$\begin{aligned}
\exp(z) \cdot \exp(w) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \cdot \sum_{m=0}^{\infty} \frac{w^m}{m!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{z^n w^m}{n! m!} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{z^k w^{n-k}}{k!(n-k)!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} z^k w^{n-k} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+w)^n}{n!} \\
&= \exp(z+w)
\end{aligned}$$

Daraus folgt sofort:

$$\begin{aligned}
\exp(z) \cdot \exp(-z) = \exp(0) = \sum_{n=0} \frac{0^n}{n!} &= 1 \quad \forall\, z \in \mathbb{C}, \\
\exp(-z) = \frac{1}{\exp(z)},\ \exp(z) &\neq 0 \quad \forall\, z \in \mathbb{C}.
\end{aligned}$$

In der reellen Analysis setzt man $\exp(1) = e$ und zeigt dann $\exp(q) = e^q\ \forall\, q \in \mathbb{Q}$. Dann setzt man $e^x = \exp(x)\ \forall\, x \in \mathbb{R}$. Hier setzen wir nun auch $\exp(z) = e^z\ \forall\, z \in \mathbb{C}$.
Nun setzen wir (wie im reellen Fall):
$\cos, \sin, \cosh, \sinh : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$,

- $\cos(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \dots$
- $\sin(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \dots$
- $\cosh(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!}$
- $\sinh(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$

Es gilt:

a) $\cos(z) + i \sin(z) = e^{iz}$

b) $\cosh(z) + \sinh(z) = e^z$

c) $e^{iz} + e^{-iz} = 2\cos(z) \implies \cos(z) = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$
Ähnlich: $\sin(z) = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i} \qquad \implies e^{-iz} = \cos(z) - i \sin(z)$

d) $\cos^2(z) + \sin^2(z) = 1$

e) Da $\cosh(z) - \sinh(z) = e^{-z}$ ist $\cosh(z) = \frac{e^z+e^{-z}}{2}$ und $\sinh(z) = \frac{e^z-e^{-z}}{2}$.

f) Aus Satz 1.3.6 folgt $\cos'(z) = -\sin(z)$
$\sin'(z) = \cos(z)$
$\cosh'(z) = \sinh(z)$
$\sinh(z)' = \cosh(z)$

g) $\cos(z+w) = \cos(z)\cos(w) - \sin(z)\sin(w)$
$\sin(z+w) = \sin(z)\cos(w) + \cos(z)\sin(w)$

h) $e^{z+2\pi i} = e^z$ und für $x, y \in \mathbb{R}$ gilt $e^{x+iy} = e^x(\cos(y) + i\sin(y))$
$\implies |e^z| = |e^{x+iy}| = e^x, \quad \arg(e^z) \equiv y \mod 2\pi$

1.4 Der komplexe Logarithmus

Erinnerung: Für reelle Zahlen $x, y > 0$ gilt $y = e^x \iff x = \log(y)$.
Da $e^z = e^{z+2\pi i}\ \forall\, z \in \mathbb{C}$ ist die Funktion $\exp : z \mapsto e^z$ nicht mehr injektiv!

Definition 1.4.1 (Hauptzweig des Logarithmus)
Der *Hauptlogarithmus* $\log : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ ist die Abbildung $z \mapsto \log(|z|) + i\arg(z)$.

Es gilt dann sofort $\exp(\log(z)) = z$, $\log(\exp(z)) = x + iy'$ mit $y' \in (-\pi, \pi], y' \equiv y \mod 2\pi$. Da $e^{z+2k\pi i} = e^z$ könnte der Logarithmus $\log : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{R} \times (\alpha, \alpha + 2\pi]i$ definiert sein für jeden Wert von $\alpha \in \mathbb{R}$! Unsere Definition entspricht der festen Wahl $\alpha = -\pi$, log ist nur Linksinverse von exp auf $\{z \in \mathbb{C} \mid z = x + iy \text{ mit } y \in (-\pi, \pi)\}$. Wir bekommen:

- $\log(-1) = \log(\cos(\pi) + i\sin(\pi)) = i\pi$
- $\log(-i) = \log\left(\cos\left(\frac{-\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{-\pi}{2}\right)\right) = -i\frac{\pi}{2}$
- $\log(1 + i\sqrt{3}) = \log\left(2\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)\right)$

Satz 1.4.2
Für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ *ist er entsprechende Zweig* $\log : \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\geq 0}e^{i\alpha} \to \mathbb{R} + i(\alpha, \alpha + 2\pi)$ *des Logarithmus holomorph mit* $\log'(z) = \frac{1}{z}\ \forall z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. *Wir können dann* $\log' : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ *als komplexe Ableitung von* log *auffassen. Das folgt daher, dass* log *bis auf eine Konstante* $2k\pi i$ *definiert ist.*

Bemerkung: Wir haben in Satz 1.4.2 log auf die offene Teilmenge $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\geq 0}e^{i\alpha}$ von $\mathbb{C}$ definiert. Das war ein *Zweig* des Logarithmus. Der Hauptzweig ist auf $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\leq 0}$ definiert. Der Hauptzweig von arg ist auch die Funktion $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\leq 0} \to \mathbb{R}, re^{i\theta} \mapsto \theta$. Wir betrachten auch die Abbildungen

$$\begin{aligned} z \mapsto z^{"\frac{1}{n}"} &= \{e^{\frac{1}{n}\log(z)} = e^{\frac{hr}{n}+i\frac{\theta+2k\pi}{n}} \mid k \in \mathbb{Z}\} \\ &= \{r^{\frac{1}{n}} \cdot e^{i\frac{\theta+2k\pi}{n}} \mid k \in \mathbb{Z}\} \end{aligned}$$

Wir definieren sie über $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\leq 0} \to \mathbb{C}, re^{i\theta} \mapsto r^{\frac{1}{n}} e^{\frac{i\theta}{n}}$. In allen Beispielen sind 0 und ∞ *Verzweigungspunkte* der Abbildungen.

1.5 Meromorphe Abbildungen

Definition 1.5.1 (Singularität, Pole, Meromorphie)
Sei $f : U \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine komplexe Abbildung.

- Falls $\lim\limits_{z\to c} f(z)$ existiert, aber $\lim\limits_{z\to c} f(z) \neq f(c)$ gilt, so sagt man, dass f eine *hebbare Singularität* an der Stelle c hat.
- Falls $n \geq 1$ ($n \in \mathbb{N}$) existiert, sodass $\lim\limits_{z\to c}(z-c)^n f(z)$ existiert (aber $\lim\limits_{z\to c} f(z)$ nicht existiert), so ist c ein *Pol* von f. Die *Ordnung des Pols* ist dann $Ord(c) = \min\limits_{n\in A},\ A = \left\{n \in \mathbb{N} \mid \lim\limits_{z\to c}(z-c)^n f(c) \text{ existiert}\right\}$. Mit $Ord(c) = n$ nennt man c einen n-fachen Pol von f.
- Falls f überall bis auf Pole holomorph ist, so ist f eine *meromorphe Funktion*.

1.6 Uniforme Konvergenz

Sei $f : S \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine beschränkte Funktion. Wir definieren die *Norm von f* als $||f|| = \sup\limits_{z\in S} |f(z)|$. Es gilt $||f|| \geq 0,\ ||f|| = 0 \iff f = 0$ und $||f + g|| \leq ||f|| + ||g||$.

Definition 1.6.1 (Gleichmäßige Konvergenz)
Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Funktionen $f_n : S \to \mathbb{C}$. $(f_n)_{n\in N}$ *konvergiert gleichmäßig* gegen f auf S ($f : S \to \mathbb{C}$), falls $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, N \in N : ||f - f_n|| < \varepsilon\ \forall\, n \geq N$. f ist der gleichmäßige Limes von $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Daraus folgt $f_n(z) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} f(z)\ \forall\, z \in S$, aber die Umkehrung gilt nicht.

Satz 1.6.2
Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}, f_n : S \to \mathbb{C}$ eine Folge von Funktionen, die gleichmäßig gegen eine

Funktion $f : S \to \mathbb{C}$ konvergiert. Sei $c \in S$. Falls f_n stetig an der Stelle c ist für alle $n \in \mathbb{N}$, dann ist auch f stetig an der Stelle c.

Definition 1.6.3 (Gleichmäßige Summierung)
Gegeben eine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Funktionen $f_n : S \to \mathbb{C}$, so kann man die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n$ von Funktionen definieren. Falls die Folge $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}, F_n = \sum\limits_{k=0}^{n} f_k$ gleichmäßig gegen eine Funktion $F : S \to \mathbb{C}$ konvergiert, so sagt man, dass $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n$ *gleichmäßig zu F summiert.*

Satz 1.6.4 (Weierstraß'scher M-Test)
Sei für alle $n \in \mathbb{N}$ die Funktion $f_n : S \to \mathbb{C}$ so, dass $M_n > 0$ existieren mit $||f_n|| \leq M_n$. Falls $\sum\limits_{n=0}^{\infty} M_n$ konvergiert, so konvergiert auch $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n$ gleichmäßig auf S.

Korollar 1.6.5
Sei $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $R > 0$. Für alle $r \in (0, R)$ ist die Reihe gleichmäßig konvergent auf $\overline{B_r(a)}$.

2 Komplexe Integration

2.1 Kurven und Kurvenintegrale

Definition 2.1.1 (Kurve)
Eine *Kurve* ist eine stetige Abbildung $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C},\ a < b \in \mathbb{R}$.

Definition 2.1.2 (Kurveneigenschaften)
Eine Kurve $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ heißt

- *geschlossen*, falls $\gamma(a) = \gamma(b)$.
- *einfach*, falls $\gamma|_{[a,b)}$ und $\gamma|_{(a,b]}$ injektiv sind.
- *glatt*, falls sie stetig differenzierbar ist. Wir schreiben $\dot{\gamma} : [a,b] \to \mathbb{C}$ für die Ableitung.
- *stückweise glatt*, falls es eine Unterteilung $a = a - 0 < a_1 < \cdots < a_n = b$ gibt, sodass die Einschränkungen $\gamma_j = \gamma|_{[a_j, a_{j+1}]}$ glatt sind.
- *regulär*, falls sie glatt ist und für alle $t \in [a,b]$ gilt $\dot{\gamma}(t) \neq 0$.

Definition 2.1.3 (Bogenlänge)
Sei $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ eine Kurve.

- Ist γ glatt, so bezeichnen wir die Bogenlänge mit
$$L(\gamma) = \int_a^b |\dot{\gamma}(t)| \, \mathrm{d}t.$$
- Ist γ stückweise glatt, so bezeichnen wir die Bogenlänge mit
$$L(\gamma) = \textstyle\sum_{j=0}^{n-1} L(\gamma_j).$$

Definition 2.1.4 (Kurvenintegral)
Sei $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ eine glatte Kurve und sei $f : D \to \mathbb{C}$ eine stetige Funktion mit $\gamma(t) \in D \ \forall\, t \in [a,b]$. Dann ist

$$\int_\gamma f = \int_\gamma f(z) \, \mathrm{d}z := \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \dot{\gamma}(t) \, \mathrm{d}t$$

das *Kurvenintegral* von f längs γ.
Falls γ nur stückweise glatt ist, so existiert eine Zerlegung $a = a_0 < a_1 < \cdots < a_n = b$,

sodass die Einschränkungen $\alpha_j : [a_j, a_{j+1}] \to \mathbb{C}$ glatt sind. Dann ist

$$\int_\gamma f = \int_\gamma f(z)\ \mathrm{d}z := \sum_{j=0}^{n-1} \int_{\alpha_j} f(z)\ \mathrm{d}z.$$

Diese Definition hängt nicht von der Wahl der Zerlegung ab.

Satz 2.1.5
Das komplexe Kurvenintegral hat folgende Eigenschaften:

1. $\int_\gamma f$ *ist* $\mathbb{C}$*-linear in* f*.*
2. *Es gilt die „Standardabschätzung“* $|\int_\gamma f(z)\ \mathrm{d}z| \leq C \cdot L(\gamma)$ *falls* $|f(z)| \leq C\ \forall\, z \in \gamma[a,b]$*.*
3. *Das Kurvenintegral verallgemeinert das gewöhnliche Riemann-Integral: Sei* $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}, \gamma(t) = t$*. Dann ist für alle* $t \in [a,b] \dot{\gamma}(t) = 1$ *und es gilt für eine stetige Abbildung* $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ *:*
$$\int_\gamma f(z)\ \mathrm{d}z = \int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t.$$
4. *Transformationsinvarianz des Kurvenintegrals: Seien* $\gamma : [c,d] \to \mathbb{C}$ *eine stückweise glatte Kurve,* $f : D \to \mathbb{C}$ *stetig mit* $\gamma[c,d] \subseteq D \subseteq \mathbb{C}$*, und* $\varphi : [a,b] \to [c,d] (a < b, c < d)$ *eine stetig differenzierbare Funktion mit* $\varphi(a) = c, \varphi(b) = d$*. Dann gilt* $\int_\gamma f = \int_{\gamma\circ\varphi} f$*.*

Satz 2.1.6
Sei $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ *eine stetige Funktion. Setze* $F(t) = \int_a^b f(s)\ \mathrm{d}s, F : [a,b] \to \mathbb{C}$*. Dann gilt* $F'(t) = f(t)\ \forall\, t \in [a,b]$*. Ist* $\Theta : [a,b] \to \mathbb{C}$ *eine Funktion mit* $\Theta' = f$*, dann gilt*

$$\int_a^b f(s)\ \mathrm{d}s = \Theta(b) - \Theta(a).$$

Korollar 2.1.7
Sei $f : D \to \mathbb{C}$*,* $D \subseteq \mathbb{C}$ *offen, eine stetige Funktion, die eine Stammfunktion* $F : D \to \mathbb{C}$ *besitzt:* $F' = f$*. Dann gilt für jede in* D *verlaufende glatte Kurve* γ*:*

$$\int_\gamma f = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)).$$

Korollar 2.1.8
Wenn eine stetige Funktion $f : D \to \mathbb{C}$ *eine Stammfunktion auf* D *besitzt, so gilt* $\int_\gamma f = 0$ *für* jede *in* D *verlaufende geschlossene stückweise glatte Kurve.*

Satz 2.1.9
Sei γ eine konvexe, geschlossene, einfache, stückweise glatte Kurve. Sei $f : D \to \mathbb{C}$ eine stetige Funktion für die gilt: Für alle Dreiecke $S : [a, b] \to I(\gamma)$ ist $\int_S f = 0$. Dann existiert eine holomorphe Funktion $F : I(\gamma) \to \mathbb{C}$ mit $F'(z) = f(z)\ \forall\, z \in I(\gamma)$.

Satz 2.1.10
Sei γ eine stückweise glatte Kurve und sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von stetigen Funktionen auf S, mit $\mathrm{im}(\gamma) \subseteq S$ und so, dass $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n$ gleichmäßig gegen $F : S \to \mathbb{C}$ konvergiert. Dann gilt

$$\int_\gamma F = \int_\gamma \left(\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z) \right) \mathrm{d}z = \sum_{n=0}^{\infty} \int_\gamma f_n.$$

2.2 Der Cauchy'sche Integralsatz

Definition 2.2.1 (Bogenweise zusammenhängend)
Eine Menge $D \subseteq \mathbb{C}$ heißt *bogenweise zusammenhängend*, falls zu je zwei Punkten $z, w \in D$ eine ganz in D verlaufende, stückweise glatte Kurve existiert, welche z mit w verbindet: $\gamma : [a, b] \to D$ mit $\gamma(a) = z, \gamma(b) = w$.

Bemerkung: Jede bogenweise zusammenhängende Menge $D \subseteq \mathbb{C}$ ist zusammenhängend, denn sie ist wegzusammenhängend. Also ist jede lokal konstante Funktion auf D konstant.

Definition 2.2.2 (Gebiet)
Ein *Gebiet* ist eine offene, bogenweise zusammenhängende Menge $D \subseteq \mathbb{C}$. Der Begriff des Gebietes ist eine Verallgemeinerung des Begriffs des offenen Intervalls.

Zusammensetzung von Kurven

Seien $\begin{matrix} \gamma_1 : [a, b] \to \mathbb{C} \\ \gamma_2 : [b, c] \to \mathbb{C} \end{matrix}$ zwei stückweise glatte Kurven mit der Eigenschaft $\gamma_1(b) = \gamma_2(b)$. Dann wird durch

$$\gamma_1 * \gamma_2 : [a, c] \to \mathbb{C}$$
$$(\gamma_1 * \gamma_2)(t) = \begin{cases} \gamma_1(t) & t \in [a, b] \\ \gamma_2(t) & t \in [b, c] \end{cases}$$

eine stückweise glatte Kurve definiert, die *Zusammensetzung* von γ_1 und γ_2.
Sei $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ eine stückweise glatte Kurve. Dann ist die *reziproke Kurve*

$\bar{\gamma} : [a, b] \to \mathbb{C}, \bar{\gamma}(t) = \gamma(a + b - t)$, also insbesondere $\bar{\gamma}(a) = \gamma(b), \bar{\gamma}(b) = \gamma(a)$.

Es gilt:

i)
$$\int_{\gamma_1 * \gamma_2} f = \int_{\gamma_1} f + \int_{\gamma_2} f$$
für $\gamma_1 : [a, b] \to \mathbb{C}, \gamma_2 : [b, c] \to \mathbb{C}$ mit $\gamma_1(b) = \gamma_2(b)$. Das folgt sofort aus der Definition der Integration entlang stückweise glatten Kurven.

ii)
$$\int_{\bar{\gamma}} f = -\int_{\gamma} f \text{ für } \gamma : [a, b] \to \mathbb{C} \text{ stückweise glatt.}$$

Satz 2.2.3

Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f : D \to \mathbb{C}$ stetig. Dann sind folgende drei Aussagen äquivalent:

i) f besitzt eine Stammfunktion.

ii) Das Integral von f über jede in D verlaufende geschlossene Kurve verschwindet.

iii) Das Integral von f über jede in D verlaufende Kurve hängt nur vom Anfangs- und Endpunkt der Kurve ab.

Dreiecksflächen und Dreieckswege

Seien $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ drei Punkte. Die von z_1, z_2, z_3 aufgespannte Dreiecksfläche ist die Menge

$$\Delta_{z_1,z_2,z_3} = \Delta = \left\{ z \in \mathbb{C} \;\middle|\; z = t_1 z_1 + t_2 z_2 + t_3 z_3,\ 0 \leq t_1, t_2, t_3,\ t_1 + t_2 + t_3 = 1 \right\}.$$

Δ ist die konvexe Hülle der Punkte z_1, z_2, z_3. Mit je zwei Punkten $w_1, w_2 \in \Delta$ liegt auch die gerade Verbindungsstrecke zwischen w_1 und w_2 in Δ.

Der *Dreiecksweg* $< z_1, z_2, z_3 >$ ist die geschlossene Kurve

$$\gamma = \gamma_1 * \gamma_2 * \gamma_3 : [0, 3] \to \Delta$$
$$\begin{aligned} \gamma_1 &: [0, 1] \to \Delta & \gamma_1(t) &= z_1 + t(z_2 - z_1) \\ \gamma_2 &: [1, 2] \to \Delta & \gamma_2(t) &= z_2 + (t - 1)(z_3 - z_2) \\ \gamma_3 &: [2, 3] \to \Delta & \gamma_3(t) &= z_3 + (t - 2)(z_1 - z_3) \end{aligned}$$

$< z_1, z_2, z_3 >$ ist eine Parametrisierung des Randes von Δ.

Satz 2.2.4 (Cauchy'scher Integralsatz für Dreieckswege)

Sei $f : D \to \mathbb{C},\ D \subseteq \mathbb{C}$ offen, eine holomorphe Funktion. Seien $z_1, z_2, z_3 \in D$, sodass

$\Delta_{z_1,z_2,z_3} \subseteq D$. *Dann gilt*

$$\int_{<z_1,z_2,z_3>} f = 0.$$

Definition 2.2.5 (Sterngebiet)
Ein *Sterngebiet* ist eine offene Teilmenge $D \subseteq \mathbb{C}$ mit folgender Eigenschaft:
Es existiert ein Punkt $z_* \in D$, sodass mit jedem Punkt $z \in D$ die ganze Verbindungsstrecke zwischen z_* und z in D enthalten sind, das heißt $\{z_* + t(z - z_*) \mid t \in [0,1]\} \subseteq D$. Der Punkt z_* ist nicht eindeutig bestimmt. Er heißt ein *Sternmittelpunkt* für das Sterngebiet.

Bemerkung: Ein Sterngebiet ist automatisch bogenweise zusammenhängend.

Beispiel 2.2.6:

i) Jedes konvexe Gebiet ist sternförmig. Dabei ist jeder Punkt des Gebietes ein Sternmittelpunkt.

ii) $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\leq 0}$ ist ein Sterngebiet. Die Sternmittelpunkte sind genau alle Punkte $x \in \mathbb{R}, x > 0$.

iii) Eine offene Kreisscheibe $B_r(c)$,aus der man endlich viele Halbgeraden herausnimmt, deren rückwärtige Verlängerungen durch den Punkt $z_* \in B_r(c)$ gehen, ist ein Sterngebiet mit Sternmittelpunkt z_*.

iv) $D = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ist *kein* Sterngebiet. Wäre $z_* \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ein Sternmittelpunkt, so läge das Geradenstück $[-z_*, z_*] \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ $\lightning$

v) Nach der gleichen Begründung wie in iv) ist für $0 < r < R$ das Ringgebiet $R = \{z \in \mathbb{C} \mid r < |z| < R\}$ kein Sterngebiet.

vi) Seien $0 < r < R, \xi \in \mathbb{C}$ mit $|\xi| = 1$, $z_0 \in \mathbb{C}$ und $\beta \in (0, \pi)$ mit $\cos\left(\frac{\beta}{2}\right) > \frac{r}{R}$. Das Kreisringsegment $\{z = z_0 + \xi\rho e^{i\varphi} \mid r < \rho < R, 0 < \varphi < \beta\}$ ist ein Sterngebiet.

Satz 2.2.7 (Cauchy'scher Integralsatz für Sterngebiete, 1)
Sei $f : D \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion auf einem Sterngebiet D. Dann verschwindet das Integral von f längs jeder in D verlaufenden geschlossenen Kurve.

Mit Satz 2.2.3 ist das äquivalent zu:

Satz 2.2.8 (Cauchy'scher Integralsatz für Sterngebiete, 2)
Jede holomorphe Funktion auf einem Sterngebiet D besitzt eine Stammfunktion auf D.

Korollar 2.2.9
Jede in einem beliebigen Gebiet $D \subseteq \mathbb{C}$ holomorphe Funktion besitzt wenigstens lokal eine Stammfunktion, das heißt zu jedem Punkt $a \in D$ gibt es eine offene Umgebung $U \subseteq D$ von a, sodass $f|_U$ eine Stammfunktion besitzt.

Satz 2.2.10
Sei $f : D \to \mathbb{C}$ eine stetige Funktion in einem Sterngebiet D mit Mittelpunkt z_*. Wenn f in allen Punkten $z \neq z_*, (z \in D)$ komplex differenzierbar ist besitzt f eine Stammfunktion auf D.

Definition 2.2.11 (Elementargebiet)
Ein Gebiet $D \subseteq \mathbb{C}$ heißt *Elementargebiet*, wenn jede auf D definierte holomorphe Funktion eine Stammfunktion auf D besitzt.

Beispiel 2.2.12: Nach Satz 2.2.8 ist ein Sterngebiet ein Elementargebiet.

Satz 2.2.13
Sei $f : D \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Abbildung auf einem Elementargebiet D mit den Eigenschaften

i) f' ist ebenfalls holomorph.

ii) $f(z) \neq 0 \ \forall z \in D$.

Dann existiert eine holomorphe Abbildung $h : D \to \mathbb{C}$ mit $f(z) = \exp(h(z)) \ \forall z \in D$.

Bemerkung: In der Situation von 2.2.13 ist die Abbildung h ein holomorpher Zweig des Logarithmus von f.

Korollar 2.2.14
In der Situation von 2.2.13 existiert für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine holomorphe Abbildung $H : D \to \mathbb{C}$ mit $H^n = f$.

Beispiel 2.2.15: Die Funktion $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C},\ z \mapsto \frac{1}{z}$ hat keine Stammfunktion auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Also ist $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ kein Elementargebiet.

Eigenschaften von Elementargebieten:

1. Seien D, D' zwei Elementargebiete. Wenn $D \cap D'$ zusammenhängend und nicht leer ist, so ist auch $D \cup D'$ ein Elementargebiet.

2. Daraus folgt: geschlitzte Kreisringe sind Elementargebiete.

3. Sei $D_1 \subseteq D_2 \subseteq D_3 \subseteq \dots$ eine aufsteigende Folge von Elementargebieten. Dann ist auch die Vereinigung $D = \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n$ ein Elementargebiet.

Proposition 2.2.16
Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ ein Elementargebiet und $\varphi : D \to D'$ eine konforme Abbildung. Sei zudem die Ableitung von φ auch holomorph. Dann ist D' ein Elementargebiet.

2.3 Die Cauchy'sche Integralformel

Satz 2.3.1
Sei $f : D \to \mathbb{C},\ D \subseteq \mathbb{C}$ offen, eine holomorphe Funktion. Seien weiterhin $z_0 \in D$ und $r > 0$, sodass $\overline{B_r(z_0)} \subseteq D$. Dann gilt für jeden Punkt $z \in B_r(z_0)$:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\xi)}{\xi - z}\ \mathrm{d}\xi$$

für die Kurve $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C},\ \gamma(t) = z_0 + re^{it}$.

Bemerkung: a) Wir sagen, dass γ die Kreislinie mit Mittelpunkt z_0 und Radius r ist. Es ist eine Parametrisierung des Kreises um z_0 mit Radius r, mit konstanter Geschwindigkeit r.

b) Wenn über eine Kreislinie γ integriert wird, schreiben wir

$$\oint_\gamma \text{ für } \int_\gamma, \text{ oder auch } \oint_{|\zeta - z_0| = r}.$$

Lemma 2.3.2
Es gilt für $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C},\ \gamma(t) = z_0 + re^{it}$: $\oint_\gamma \frac{\mathrm{d}\zeta}{\zeta - a} = 2\pi i$ für alle a mit $|a - z_0| < r$. a liegt im Inneren des Kreises um z_0 mit Radius r.

Korollar 2.3.3 („Mittelwertgleichung")
Seien $f : D \to \mathbb{C}$ holomorph, $z_0 \in D$ und $r > 0$, sodass $\overline{B_r(z_0)} \subseteq D$. Dann gilt

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\xi)}{\xi - z_0}\ \mathrm{d}\xi$$

für $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C},\ \gamma(t) = z_0 + re^{it}$, also

$$\begin{aligned} f(z_0) &= \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{rie^{it} f(z_0 + re^{it})}{re^{it}}\ \mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it})\ \mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Bemerkung (Cauchy'sche Integralformel): Die Werte einer holomorphen Funktion im Inneren einer Kreisscheibe können durch die Werte der Funktion auf dem Rand berechnet werden.

Bemerkung (Leibniz'sche Regel): Sei $f : [a,b] \times D \to \mathbb{C}$ stetig, sodass $\forall t \in [a,b]$ $f_t : D \to \mathbb{C},\ f_t(z) = f(t,z)$ holomorph ist. Die Ableitung $\frac{\partial f}{\partial z} : [a,b] \times D \to \mathbb{C}$ sei auch stetig. Dann ist die Funktion $g : D \to \mathbb{C},\ g(z) = \int_a^b f(t,z)\ \mathrm{d}t$ holomorph, und es gilt

$$g'(z) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial z}(t,z)\ \mathrm{d}t.$$

Satz 2.3.4 (Verallgemeinerte Cauchy'sche Integralformel)
Sei $f : D \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Abbildung. Dann ist f beliebig oft komplex differenzierbar. Jede Ableitung ist wieder holomorph.
Sei $z_0 \in D$ und $r > 0$, sodass $\overline{B_r(z_0)} \subseteq D$. $\forall\, n \in \mathbb{N},\ \forall\, z \in B_r(z_0)$ gilt:

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}\ \mathrm{d}\zeta,$$

wobei $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C},\ \gamma(t) = z_0 + re^{it}$.

Satz 2.3.5 (Satz von Morera)
Sei $D \subset \mathbb{C}$ offen und $f : D \to \mathbb{C}$ stetig. Für jeden Dreiecksweg $< z_1, z_2, z_3 >$, für den die jeweilige Dreiecksfläche Δ ganz in D enthalten ist, sei

$$\int_{<z_1,z_2,z_3>} f(\zeta)\ \mathrm{d}\zeta = 0.$$

Dann ist f holomorph.

Satz 2.3.6 (Satz von Liouville)
Jede beschränkte ganze Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ist konstant.

Satz 2.3.7 (Fundamentalsatz der Algebra)
Jedes nichtkonstante komplexe Polynom besitzt eine Nullstelle.

Korollar 2.3.8
Jedes Polynom $P(z) = \sum_{\nu=0}^n a_\nu z^\nu,\ a_\nu \in \mathbb{C}$, vom Grad $n \geq 1$ lässt sich als Produkt von n Linearfaktoren und einer Konstante $C \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ schreiben, d.h.

$$P(z) = C \cdot \prod_{\nu=1}^n (z - \alpha_\nu).$$

Dabei sind die Zahlen $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{C}$ bis auf ihre Reihenfolge eindeutig bestimmt und $C = a_n$.

2.4 Der Potenzreihenentwicklungssatz

Satz 2.4.1
Sei $f : D \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Abbildung. Sei $a \in D$ und $r > 0$, sodass $B_r(a) \subseteq D$. Dann gilt $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n \ \forall\, z \in B_r(a)$, wobei $a_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \ \forall\, n \in \mathbb{N}$.

Bemerkung:

1. Die Formeln $a_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$ folgen aus der Potenzreihenentwicklung; für $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n$ folgt aus Satz 1.3.6. dass die Ableitungen an a $f^{(k)}(a) = k!a_k$ erfüllen, also $a_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!} \ \forall\, k \in \mathbb{N}$.

2. Für die Koeffizienten a_n gilt nach Satz 2.3.4

$$a_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - a| = \rho} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{n+1}} \ \mathrm{d}\zeta$$

für $0 < \rho < R$.

3. Der Satz sagt, dass holomorphe Abbildungen genau die Funktionen sind, welche sich lokal in Potenzreihen mit positivem Konvergenzradius entwickeln lassen! Daher sagt man auch „analytisch“ für „holomorph“.

4. Die Koeffizienten a_n sind die *Taylorkoeffizienten von f zur Stelle a*, und die Potenzreihe ist die *Taylorreihe von f zur Stelle a*.

5. Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine ganze Abbildung. Dann ist nach Satz 2.4.1 $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n \ \forall z \in \mathbb{C}$, oder allgemeiner:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (z-a)^n$$

für $a \in \mathbb{C}$ und alle $z \in \mathbb{C}$.

2.5 Weitere Eigenschaften holomorpher Abbildungen

Satz 2.5.1 (Weierstraß, 1841)
Seien $f_0, f_1, f_2, \cdots : D \to \mathbb{C}$ holomorphe Abbildungen. Die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiere lokal gleichmäßig gegen $f : D \to \mathbb{C}$. Dann ist f holomorph und $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gleichmäßig gegen f'.

Satz 2.5.2
Sei $f : D \to \mathbb{C}$ eine von der Nullfunktion verschiedene holomorphe Funktion, $D \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet. Die Menge $N(f) = \{z \in D \mid f(z) = 0\}$ ist diskret in D, das heißt, $N(f)$ hat keinen Häufungspunkt in D.

Korollar 2.5.3 (Identitätssatz für holomorphe Funktionen)
Seien $f, g : D \to \mathbb{C}$ zwei holomorphe Funktionen auf einem Gebiet $D \neq \emptyset$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

i) $f = g$

ii) Die Menge $\{z \in D \mid f(z) = g(z)\}$ hat einen Häufungspunkt in D.

iii) Es gibt einen Punkt $z_0 \in D$ mit $f^{(n)}(z_0) = g^{(n)}(z_0)$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Korollar 2.5.4 (Eindeutigkeit der holomorphen Fortsetzung)
Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und $M \subseteq D$ eine Menge mit mindestens einem Häufungspunkt in D und $f : M \to \mathbb{C}$ eine Funktion. Existiert eine holomorphe Funktion $\tilde{f} : D \to \mathbb{C}$, welche f fortsetzt, also $\tilde{f}(z) = f(z)\ \forall\, z \in M$, dann ist $\tilde{f}$ eindeutig bestimmt.

Proposition 2.5.5
Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein nicht-leeres Intervall. Eine Funktion $f : I \to \mathbb{C}$ besitzt genau dann eine holomorphe Fortsetzung auf einem Gebiet $D \subseteq \mathbb{C}$ mit $I \subset D$, wenn f reell-analytisch ist.

Für ein offenes $D \subseteq \mathbb{C}$ definieren wir nun $\mathcal{O}(D) = \{f : D \to \mathbb{C} \mid f \text{ holomorph}\}$. Dann ist $\mathcal{O}(D)$ offensichtlich ein kommutativer Ring mit 1.

Proposition 2.5.6
Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet. Dann ist $\mathcal{O}(D)$ ein Integritätsring, also nullteilerfrei.

Korollar 2.5.7
Im Umkehrschluss gilt, dass falls $\mathcal{O}(D)$ ein Integritätsring ist, D ein Gebiet sein muss.

2.6 Das Maximumsprinzip

Satz 2.6.1 (Satz von der Gebietstreue)
Ist f eine nichtkonstante holomorphe Funktion auf einem Gebiet $D \subseteq \mathbb{C}$, dann ist das Bild $f(D)$ offen und zusammenhängend, also ein Gebiet.

Proposition 2.6.2

- *Jede nichtkonstante holomorphe Abbildung* $f : D \to \mathbb{C}$ *mit* $f(0) = 0$ *ist in einer kleinen offenen Umgebung von* 0 *die Zusammensetzung einer konformen Abbildung mit einer* n*-ten Potenz.*

- *Die Winkel im Nullpunkt werden ver-*n*-facht.*

- *Falls* f *injektiv in einer Umgebung von* $a \in D$ *ist, so ist die Ableitung* f' *in einer Umgebung von* a *von* 0 *verschieden.*

Korollar 2.6.3
Sei $f : D \to \mathbb{C}$ *holomorph auf einem Gebiet* $D \subseteq \mathbb{C}$*. Gilt* $\Re(f) = c$ *oder* $\Im(f) = c$ *oder* $|f| = c,\ c \in \mathbb{R}$*, dann ist* f *selbst konstant.*

Satz 2.6.4 (Das Maximumsprinzip)
Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ *ein Gebiet und* $f : D \to \mathbb{C}$ *holomorph. Existiert ein* $a \in D$ *mit* $|f(a)| \geq |f(z)|\ \forall\, z \in D$*, dann ist* f *konstant auf* D*.*

Bemerkung:

- Wir sehen im Beweis, dass es reicht, wenn wir voraussetzen, dass $|f|$ ein lokales Maximum besitzt. Wegen des Identitätssatzes reicht es, f nur lokal zu betrachten.

- Sei $K \subset D$ eine kompakte Teilmenge des Gebietes D und $f : D \to \mathbb{C}$ holomorph. Dann hat $f|_K : D \to \mathbb{C}$ ein Betragsmaximum, da f stetig ist. Aus Satz 2.6.1 folgt dann, dass dieses Betragsmaximum auf dem Rand von K angenommen werden muss.

Korollar 2.6.5 (Minimumsprinzip)
Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ *ein Gebiet und* $f : D \to \mathbb{C}$ *nicht-konstant und holomorph. Wenn* f *in* $a \in D$ *ein (lokales) Betragsminimum besitzt, dann ist* $f(a) = 0$*.*

Satz 2.6.6 (Schwarz'sches Lemma)
Sei $f : B_1(0) \to B_1(0)$ *eine holomorphe Abbildung mit* $f(0) = 0$*. Dann gilt* $|f(z)| \leq |z|\ \forall\, z \in B_1(0)$*. Daraus folgt auch* $|f'(0)| \leq 1$*.*

Lemma 2.6.7
Sei $\varphi : B_1(0) \to B_1(0)$ *eine bijektive Abbildung, sodass* φ *und* φ^{-1} *holomorph sind. Falls* $\varphi(0) = 0$ *gilt, dann existiert eine komplexe Zahl* $\xi \in \mathbb{C}$ *mit* $|\xi| = 1$*, sodass* $\varphi(z) = \xi z\ \forall\, z \in B_1(0)$*.*

Lemma 2.6.8
Sei $a \in B_1(0)$. *Dann ist* $\varphi_a : B_1(0) \to B_1(0)$ *definiert durch* $\varphi_a(z) = \frac{z-a}{\bar{a}z-1}$ *bijektiv und holomorph mit*

i) $\varphi_a(a) = 0$

ii) $\varphi_a(0) = a$

iii) $\varphi_a^{-1} = \varphi_a$.

Satz 2.6.9
Sei $\varphi : B_1(0) \to B_1(0)$ *eine konforme Abbildung. Dann existieren* $\xi \in \mathbb{C},\ |\xi| = 1$ *und* $a \in B_1(0)$ *mit* $\varphi(z) = \xi \frac{z-a}{\bar{a}z-1}\ \forall\, z \in B_1(0)$.

3 Singularitäten holomorpher Abbildungen

3.1 Außerwesentliche Singularitäten

Definition 3.1.1 (Isolierte Singularität)
Sei $D \subset \mathbb{C}$ offen. Sei $f : D \to \mathbb{C}$ holomorph. Sei $a \in \mathbb{C}$ ein Punkt, der nicht zu D gehört, aber so, dass ein $r > 0$ existiert mit $\underbrace{B_r(a) \setminus \{a\}}_{\dot{B_r}(a)} \subseteq D$. Der Punkt a ist dann eine *isolierte Singularität* von f.

Definition 3.1.2 (Hebbare Singularität)
Eine Singularität a einer holomorphen Abbildung $f : D \to \mathbb{C}$ heißt *hebbar*, falls sich f auf ganz $D \cup \{a\}$ holomorph fortsetzen lässt: $\exists\, \tilde{f} : D \cup \{a\} \to \mathbb{C}$ holomorph mit $\tilde{f}\Big|_D = f$.

Satz 3.1.3 (Riemannscher Hebbarkeitssatz)
Sei $f : D \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Abbildung. Sei $a \in \mathbb{C}$ eine Singularität von f. Dann ist die Singularität a genau dann hebbar, wenn es eine punktierte Umgebung $\dot{B_r}(a) \subset D$ von a gibt, in der f beschränkt ist.

Definition 3.1.4 (Außerwesentliche Singularität, Polstelle)

- Eine Singularität a einer holomorphen Abbildung $f : D \to \mathbb{C}$ heißt *außerwesentlich*, falls es eine ganze Zahl $m \in \mathbb{Z}$ gibt, sodass $g : D \to \mathbb{C},\ g(z) = (z-a)^m f(z)$ eine hebbare Singularität in a hat.
- Ist a nicht hebbar als Singularität von f, so ist a ein *Pol* oder eine *Polstelle* von f.

Proposition 3.1.5
Sei $a \in \mathbb{C}$ eine außerwesentliche Singularität einer holomorphen Abbildung $f : D \to \mathbb{C}$. Wenn f in keiner Umgebung von a identisch verschwindet, so existiert eine kleinste ganze Zahl $k \in \mathbb{Z}$, sodass $z \mapsto (z-a)^k f(z)$ eine hebbare Singularität hat.

Definition 3.1.6 (Ordnung)
Sei $f : D \to \mathbb{C}$ mit einer außerwesentlichen Singularität $a \in \mathbb{C}$ wie in 3.1.5. Sei k die Zahl wie in 3.1.5. Dann ist $-k =: \operatorname{ord}(f, a)$ die Ordnung von f in a.

Proposition 3.1.7
Sei a eine außerwesentliche Singularität einer holomorphen Funktion $f : D \to \mathbb{C}$. Dann gilt, falls f in keiner Umgebung von a identisch verschwindet:

i) $\mathrm{ord}\,(f,a) \geq 0 \iff$ *a ist hebbar, dabei gilt:*

$\mathrm{ord}\,(f,a) = 0 \iff$ *a ist hebbar und* $f(a) \neq 0$

$\mathrm{ord}\,(f,a) > 0 \iff$ *a ist hebbar und* $f(a) = 0$

ii) $\mathrm{ord}\,(f,a) < 0 \iff$ *a ist ein Pol*

Proposition 3.1.8
Sei $a \in \mathbb{C}$ eine außerwesentliche Singularität von zwei holomorphen Abbildungen $f, g : D \to \mathbb{C}$. Dann ist auch a eine außerwesentliche Singularität der Funktion $\alpha f + \beta g,\ f \cdot g$, und $\frac{f}{g}$, falls $g(z) \neq 0\ \forall\, z \in D,\ \alpha, \beta \in \mathbb{C}^*$. Außerdem gilt

$$\begin{aligned} \mathrm{ord}\,(\alpha f + \beta g, a) &\geq \min\{\mathrm{ord}\,(f,a)\,, \mathrm{ord}\,(g,a)\} \\ \mathrm{ord}\,(f \cdot g, a) &= \mathrm{ord}\,(f,a) + \mathrm{ord}\,(g,a) \\ \mathrm{ord}\left(\frac{f}{g}, a\right) &= \mathrm{ord}\,(f,a) - \mathrm{ord}\,(g,a) \end{aligned}$$

3.2 Wesentliche Singularitäten

Proposition 3.2.1
Sei $f : D \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Abbildung und sei $a \in \mathbb{C}$ eine Polstelle von f. Dann gilt $\lim\limits_{z \to a} |f(z)| = \infty$.

Definition 3.2.2 (Wesentliche Singularität)
Eine Singularität $a \in \mathbb{C}$ einer holomorphen Funktion $f : D \to \mathbb{C}$ heißt *wesentlich*, falls sie nicht außerwesentlich ist.

Satz 3.2.3 (Satz von Casorati-Weierstraß)
Sei a eine wesentliche Singularität der holomorphen Abbildung $f : D \to \mathbb{C}$. Sei $\dot{B_r}(a)$ eine beliebige punktierte Umgebung von a. Dann ist das Bild $f\left(\dot{B_r}(a) \cap D\right)$ dicht in $\mathbb{C}$, das heißt für alle $b \in \mathbb{C}$ und $\varepsilon > 0$ gilt $f\left(\dot{B_r}(a) \cap D\right) \cap B_\varepsilon(b) \neq \emptyset$.

Satz 3.2.4 (Klassifikation der Singularitäten durch das Abbildungsverhalten)
Sei a eine isolierte Singularität der holomorphen Abbildung $f : D \to \mathbb{C}$. Die Singularität $a \in \mathbb{C}$ ist

i) hebbar $\iff$ *f ist in einer punktierten Umgebung von a beschränkt*

ii) ein Pol $\iff \lim\limits_{z \to a} |f(z)| = \infty$

iii) wesentlich $\Longleftrightarrow$ *in jeder punktierten Umgebung von a kommt f jedem beliebigen Wert* $b \in \mathbb{C}$ *beliebig nahe*

3.3 Laurentzerlegung

Sei im Folgenden $0 \leq r < R \leq \infty$. Betrachte das Ringgebiet

$$\mathcal{R} := \{z \in \mathbb{C} \mid r < |z| < R\}$$

und z.B. $g : B_R(0) \to \mathbb{C},\ h : B_{\frac{1}{r}}(0) \to \mathbb{R}$. Dann ist $\mathbb{C} \setminus \overline{B_r(0)} \to \mathbb{C}, z \mapsto h\left(\frac{1}{z}\right)$ holomorph. Setze $f : \mathcal{R} \to \mathbb{C},\ f(z) = g(z) + h\left(\frac{1}{z}\right)$. f ist holomorph auf $\mathcal{R}$. Der folgende Satz zeigt, dass jede holomorphe Funktion auf $\mathcal{R}$ sich in dieser Weise zerlegen lässt.

Satz 3.3.1 (Laurentzerlegung)
Sei $0 \leq r < R \leq \infty$*. Jede auf dem Ringgebiet* $\mathcal{R} := \{z \in \mathbb{C} \mid r < |z| < R\}$ *holomorphe Abbildung kann geschrieben werden als*

$$f(z) = g(z) + h\left(\frac{1}{z}\right) \tag{2}$$

mit $g : B_R(0) \to \mathbb{C},\ h : B_{\frac{1}{r}}(0) \to \mathbb{C}$ *holomorph. Fordert man noch* $h(0) = 0$, *so ist diese Zerlegung eindeutig bestimmt.*

Definition 3.3.2 (Hauptteil, Nebenteil, Laurentzerlegung)
In der Situation von Satz 3.3.1 ist $z \to h\left(\frac{1}{z}\right)$ der *Hauptteil* der Funktion f. g ist der *Nebenteil* der Funktion f und 2 ist die *Laurentzerlegung* der Funktion f.

Lemma 3.3.3
Seien $0 \leq r < R \leq \infty$, *und sei* $\mathcal{R} := \{z \in \mathbb{C} \mid r < |z| < R\}$*. Sei* $G : \mathcal{R} \to \mathbb{C}$ *eine holomorphe Abbildung. Sind* $P, \rho \in \mathbb{R}$, *sodass* $r < \rho < P < R$, *dann gilt*

$$\oint_{|\zeta|=\rho} G(\zeta)\ \mathrm{d}\zeta = \oint_{|\zeta|=P} G(\zeta)\ \mathrm{d}\zeta.$$

Satz 3.3.4 (Laurententwicklung)
Die Funktion $f : \mathcal{R} \to \mathbb{C},\ \mathcal{R} := \{z \in \mathbb{C} \mid r < |z| < R\}$ *sei holomorph. Dann lässt sich f in eine Laurentreihe entwickeln, welche auf* $\mathcal{R}$ *lokal normal konvergiert:*

$$f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n (z-a)^n \qquad \forall\, z \in \mathcal{R}.$$

Außerdem gilt

i) Diese Laurententwicklung ist eindeutig bestimmt:

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_{|\zeta-a|=\rho} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}\ \mathrm{d}\zeta \qquad \forall\, n\in\mathbb{Z}, r<\rho<R$$

ii) Sei $M_\rho(f) = \sup\{|f(\zeta)| \mid |\zeta-a|=\rho\}$ *für* $r<\rho<R$. *Dann gilt*

$$|a_n| \leq \frac{M_\rho(f)}{\rho^n}, \qquad n\in\mathbb{Z}$$

Laurentreihen und Singularitäten holomorpher Abbildungen

Sei $f: D\to\mathbb{C}$ eine holomorphe Abbildung und $a\in\mathbb{C}$ eine Singularität von f. Dann ist f für ein geeignetes $r>0$ holomorph auf $\dot{B_r}(a)\subset D$. Nach Satz 3.3.4 besitzt f eine Laurententwicklung auf $\dot{B_r}(a)$

$$f(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n(z-a)^n \qquad \forall\, z\in\dot{B_r}(a).$$

Satz 3.3.5
In der oben geschilderten Situation ist die Singularität a von f

i) hebbar $\iff a_n = 0\ \forall\, n<0$,

ii) ein Pol *der Ordnung* $k\in\mathbb{N} \iff a_{-k}\neq 0$ *und* $a_n=0\ \forall\, n<-k$,

iii) wesentlich $\iff a_n\neq 0$ *für unendlich viele* $n<0$.

Komplexe Fourierreihen

Seien $a<b$ und betrachte $D=\{z\in\mathbb{C}\mid a<\Im(z)<b\}$. Sei $f: D\to\mathbb{C}$ holomorph, sodass $\omega\in\mathbb{R}^*$ mit $f(z+\omega)=f(z)$ für $z\in D$, f hat also die reelle Periode ω.

Sei $g:\tilde{D}\to\mathbb{C},\ g(z)=f(\omega z)$ für $\tilde{D} = \begin{cases}\left\{z\in\mathbb{C}\mid \frac{a}{\omega}<\Im(z)<\frac{b}{\omega}\right\}, & \omega>0\\ \left\{z\in\mathbb{C}\mid \frac{b}{\omega}<\Im(z)<\frac{a}{\omega}\right\}, & \omega<0.\end{cases}$

Es gilt $g(z+1) == f(\omega(z+1)) = f(\omega z+\omega) = f(\omega z) = g(z)\ \forall\, z\in\tilde{D}$, also hat g die Periode $1\in\mathbb{R}$. O.B.d.A habe also f die Periode 1.

Lemma 3.3.6 *i) Die Abbildung* $\phi:\mathbb{C}\to\mathbb{C}, z\mapsto e^{2\pi i z}$ *bildet D auf den Kreisring*

$$\mathcal{R} = \left\{z\in\mathbb{C}\mid \underbrace{e^{-2\pi b}}_{=r} < |z| < \underbrace{e^{-2\pi a}}_{=R}\right\} \text{ ab.}$$

ii) Für $a=-\infty$ *ist* $\mathcal{R}=\{z\in\mathbb{C}\mid r<|z|<\infty\}$ *und für* $b=\infty$ *ist* $\mathcal{R}=\{z\in\mathbb{C}\mid 0<|z|<R\}$.

Setze $g : \mathcal{R} \to \mathbb{C},\ w \mapsto f(z)$ für $w = e^{2\pi i z}$.

- g ist wohldefiniert, denn $$\begin{aligned} e^{2\pi i z} &= e^{2\pi i z'} \\ \iff &\ z - z' \in \mathbb{Z} \\ \iff &\ f(z') = f(z' + z - z') = f(z). \end{aligned}$$
- g ist holomorph: Es gilt $\phi'(z) = 2\pi i e^{2\pi i z} \neq 0 \ \forall\, z \in \mathbb{C}$.

Aus dem Satz für implizite Funktionen folgt, dass $\forall\, z \in D$ eine offene Umgebung $D_0 \subseteq D$ existiert, sodass $\phi : D_0 \to \phi(D_0) \subseteq \mathcal{R}$ konform ist mit $\phi^{-1} = \phi(D_0) \to D_0$ holomorph.
Sei also $w \in \mathcal{R}$. Wähle $z \in D$ mit $\phi(z) = e^{2\pi i z} = w$, und wähle D_0 wie oben. Dann ist

$$\begin{tikzcd} g\big|_{\phi(D_0)} : \phi(D_0) \arrow[rr] \arrow[dr, "\phi^{-1}"] & & \mathbb{C} \\ & D_0 \arrow[ur, "f"'] & \end{tikzcd}$$

holomorph.
Die Funktion $g : \mathcal{R} \to \mathbb{C}$ lässt sich dann in eine Laurentreihe entwickeln:

$$\begin{aligned} g(z) &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n z^n \qquad \text{für } z \in \mathcal{R},\ \text{mit} \\ a_n &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\zeta|=\rho} \frac{g(\zeta)}{\zeta^{n+1}}\ \mathrm{d}\zeta \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_0^1 \frac{2\pi i \rho e^{2\pi i t} \cdot g\left(\rho e^{2\pi i t}\right)}{\rho^{n+1} e^{2\pi i (n+1) t}}\ \mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 \frac{g\left(\rho e^{2\pi i t}\right)}{\rho^n e^{2\pi i n t}}\ \mathrm{d}t \quad \text{für } r < \rho < R,\ \forall\, n \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Satz 3.3.7 (Fourierentwicklung)
Sei $D = \{z \in \mathbb{C} \mid a < \Im(z) < b\}$ für $-\infty \leq a < b \leq \infty$. Sei $f : D \to \mathbb{C}$ holomorph mit der Periode 1, das heißt $f(z) = f(z+1)\ \forall\, z \in D$. Dann lässt sich f in eine in D lokal normal konvergente komplexe Fourierreihe

$$f(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n e^{2\pi i n z}$$

entwickeln. Die Fourierkoeffizienten a_n *sind eindeutig bestimmt: für jedes $y \in (a,b)$ gilt*

$$a_n = \int_0^1 f(x+iy) e^{-2\pi i n (x+iy)}\ \mathrm{d}x.$$

3.4 Der Residuensatz

Satz 3.4.1
Sei $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ *eine geschlossene, stückweise glatte Kurve. Sei* $\Omega := \mathbb{C} \setminus \gamma[a,b]$. *Sei*

$$\operatorname{Ind}_\gamma : \Omega \to \mathbb{C},\ z \mapsto \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{1}{\zeta - z}\ \mathrm{d}\zeta.$$

Dann gilt:

a) $\operatorname{Ind}_\gamma$ *ist stetig und nimmt nur Werte in* $\mathbb{Z}$ *an. Also ist* $\operatorname{Ind}_\gamma$ *auf jeder Zusammenhangskomponente von* Ω *konstant.*

b) *Auf der unbeschränkten Zusammenhangskomponente von* Ω *ist* $\operatorname{Ind}_\gamma = 0$.

Insbesondere gilt für $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C},\ t \mapsto z_0 + re^{2\pi ikt}$ mit $z_0 \in \mathbb{C},\ k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$

$$\operatorname{Ind}_\gamma(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{1}{\zeta - z}\ \mathrm{d}\zeta = \begin{cases} 0 & |z - z_0| > r, \\ k & |z - z_0| < r. \end{cases}$$

Definition 3.4.2 (Umlaufzahl)
Sei γ eine geschlossene, stückweise glatte Kurve, deren Bild den Punkt $z \in \mathbb{C}$ nicht enthält. Dann ist $\operatorname{Ind}_\gamma$ die *Umlaufzahl* von γ bezüglich z.

Definition 3.4.3 (Residuum)
Sei $f : D \to \mathbb{C},\ D \subset \mathbb{C}$ offen, eine holomorphe Abbildung und $a \in \mathbb{C}$ eine Singularität von f. Sei

$$f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n (z - a)^n, \quad z \in \dot{B_r}(a)$$

die Laurententwicklung von f auf $\dot{B_r}(a) \subseteq D$. Der Koeffizient

$$a_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\zeta - a| = \rho} f(\zeta)\ \mathrm{d}\zeta, \quad 0 < \rho < r$$

dieser Reihe heißt das *Residuum* von f an der Stelle a und wird $\operatorname{Res}(f; a)$ geschrieben.

Beispiel:

a) Falls a eine hebbare Singularität von f ist, ist nach Satz 3.3.5 $a_n = 0$ für alle $n < 0$, also $\operatorname{Res}(f; a) = a_{-1} = 0$.

b) Sei $f_n : D_n \to \mathbb{C},\ z \mapsto z^n$ mit $D_n = \begin{cases} \mathbb{C} & n \geq 0, \\ \mathbb{C} \setminus \{0\} & n < 0. \end{cases}$

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}(f_n; 0) &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\zeta|=1} f(\zeta)\ \mathrm{d}\zeta \\ &= \int_0^1 \left(e^{2\pi i t}\right)^{n+1}\ \mathrm{d}t \\ &= \begin{cases} 1 & n = -1, \\ \left[\frac{1}{2\pi i(n+1)} e^{(2\pi i t)(n+1)}\right]_0^1 = 0 & n \neq -1. \end{cases} \end{aligned}$$

Also gilt $\operatorname{Res}(f_n; 0) = 0$ für alle $n \leq -2$, obwohl 0 eine Singularität von f_n ist.

Satz 3.4.4 (Der Residuensatz)
Es seien $D \subseteq \mathbb{C}$ ein Elementargebiet und $z_1, \ldots, z_k \in D$ paarweise verschiedene Punkte. Sei $f : D \setminus \{z_1, \ldots, z_k\} \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Abbildung. Für eine geschlossene, stückweise glatte Kurve $\gamma : [a, b] \to D \setminus \{z_1, \ldots, z_k\}$ gilt dann

$$\int_\gamma f = 2\pi i \sum_{j=1}^{k} \operatorname{Res}(f; z_j) \cdot \operatorname{Ind}_\gamma(z_j).$$

Beispiel: $f_n : D_n \to \mathbb{C},\ z \mapsto z^n$ mit $D_n = \begin{cases} \mathbb{C} & n \geq 0, \\ \mathbb{C} \setminus \{0\} & n < 0. \end{cases}$

$$\begin{aligned} \oint_{|\zeta|=1} f_n &= 2\pi i \operatorname{Res}(f_n; 0) \\ &= 2\pi i \operatorname{Res}(f_n; 0) \cdot \operatorname{Ind}_\gamma(0) \quad \text{da } \operatorname{Ind}_\gamma(0) = 1 \end{aligned}$$

Bemerkung:

a) In Satz 3.4.4 liefern nur die Punkte z_j einen Beitrag, für die $\operatorname{Ind}_\gamma(z_j) \neq 0$, also die Punkte $z_j \in I(\gamma)$, die von γ umlaufen werden. So gibt etwa im Beispiel oben die Residuenformel

$$\begin{aligned} \oint_{|\zeta-2|=1} &= 2\pi i \operatorname{Res}(f_n; 0) \cdot \operatorname{Ind}_\gamma(0) \\ &= 0 \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}, \end{aligned}$$

denn $\operatorname{Ind}_\gamma(0) = 0$ für γ als Kreis mit Radius 1 um den Punkt 2. (Es passt, denn alle Funktionen besitzen auf $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\leq 0}$ eine Stammfunktion und $\gamma[0, 1] \subset \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\leq 0}$.)

b) Falls f hebbare Singularitäten in $z_1, \ldots, z_k$ besitzt, also falls f auf D holomorph fortsetzbar ist, ist $\int_\gamma f = 0$ für alle $\gamma : [a, b] \to D \setminus \{z_1, \ldots, z_k\}$, denn D ist ein

Elementargebiet. Satz 3.4.4 ist also eine Verallgemeinerung des Cauchy'schen Integralsatzes für Elementargebiete.

c) Sei $f : D \to \mathbb{C}$ holomorph, D ein Elementargebiet. Dann ist für alle $a \in D$ die Funktion $h : D \setminus \{a\} \to \mathbb{C},\ z \mapsto \frac{f(z)}{z-a}$ holomorph und es gilt

$$\begin{aligned}\operatorname{Res}(h;a) &= \frac{1}{2\pi i}\oint_{|\zeta-a|=\rho} h(\zeta)\ \mathrm{d}\zeta\\ &= f(a).\end{aligned}$$

Für $\gamma : [\alpha,\beta] \to D \setminus \{a\}$ gilt also nach der Residuenformel

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma h(\zeta)\ \mathrm{d}\zeta &= \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta-a}\ \mathrm{d}\zeta\\ &= \operatorname{Res}(h;a)\operatorname{Ind}_\gamma(a)\\ &= f(a)\operatorname{Ind}_\gamma(a).\end{aligned}$$

Es gilt also:

$$f(a)\operatorname{Ind}_\gamma(a) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta-a}\ \mathrm{d}\zeta,$$

und insbesondere für $\operatorname{Ind}_\gamma(a) = 1$:

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta-a}\ \mathrm{d}\zeta.$$

Das sind Verallgemeinerungen der Cauchy'schen Integralformel.

Proposition 3.4.5

Sei D ein Gebiet und $a \in D$. Seien $f, g : D \setminus \{a\} \to \mathbb{C}$ holomorphe Abbildungen mit einer außerwesentlichen Singularität in a. Dann gilt:

a) Falls $\operatorname{ord}(f,a) \geq -1$, *so gilt* $\operatorname{Res}(f;a) = \lim_{z\to a}(z-a)f(z)$.

b) Falls a ein Pol der Ordnung k ist (also $\operatorname{ord}(f,a) = -k,\ k \in \mathbb{N}^*$*), so gilt* $\operatorname{Res}(f;a) = \frac{\tilde{f}^{(k-1)}(a)}{k-1}$ *mit* $\tilde{f}(z) = (z-a)^k f(z)$.

c) Falls $\operatorname{ord}(f,a) \geq 0$ *und* $\operatorname{ord}(g,a) = 1$, *so gilt* $\operatorname{Res}\left(\frac{f}{g};a\right) = \frac{f(a)}{g(a)}$.

d) Falls $f \neq 0$, so ist für alle $a \in D$: $\operatorname{Res}\left(\frac{f'}{f};a\right) = \operatorname{ord}(f,a)$.

e) Falls g holomorph auf D ist, gilt $\operatorname{Res}\left(g \cdot \frac{f'}{f};a\right) = g(a)\operatorname{ord}(f,a)$.

3.5 Anwendungen des Residuensatzes

Satz 3.5.1

Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ ein Elementargebiet, sei f eine in D meromorphe Funktion mit den Nullstellen $a_1, \ldots, a_n \in D$ und den Polstellen $b_1, \ldots, b_m \in D$. Sei $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C} \setminus \{a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_m\}$ eine geschlossene, stückweise glatte Kurve. Dann gilt

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f'}{f} = \sum_{\mu=1}^{n} \operatorname{ord}(f, a_\mu) \operatorname{Ind}_\gamma(a_\mu) + \sum_{\nu=1}^{m} \operatorname{ord}(f, b_\nu) \operatorname{Ind}_\gamma(b_\nu).$$

Satz 3.5.2 (Hurwitz, 1889)

Sei $(f_j)_{j\in\mathbb{N}}$ eine Folge von holomorphen Abbildungen $f_j : D \to \mathbb{C}$ mit einem Gebiet D. Seien die f_j außerdem alle nullstellenfrei.
Falls $(f_j)_{j\in\mathbb{N}}$ lokal gleichmäßig gegen $f : D \to \mathbb{C}$ konvergiert, ist f entweder identisch 0 oder f hat ebenfalls keine Nullstelle in D.

Bemerkung: Nach Satz 2.5.1 ist f holomorph!

Korollar 3.5.3

Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von injektiven holomorphen Funktionen, die lokal gleichmäßig gegen $f : D \to \mathbb{C}$ konvergiert. Dann ist f entweder konstant oder injektiv.

Korollar 3.5.4 (aus Satz 3.5.1)

Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ ein Elementargebiet, $f : D \to \mathbb{C}$ eine meromorphe Funktion mit $S(f) = \{b_1, \ldots, b_m\} \subset D$ und $N(f) = \{a_1, \cdots, a_n\} \subset D$. Seien

$$N(0) = \sum_{\mu=1}^{n} \operatorname{ord}(f, a_\mu)$$

die Gesamtzahl der Nullstellen und

$$N(\infty) = -\sum_{\nu=1}^{m} \operatorname{ord}(f, b_\nu)$$

die Gesamtzahl der Polstellen (jeweils mit Vielfachheiten gerechnet). Sei $\gamma : [a, b] \to D \setminus (N(f) \cup S(f))$ eine stückweise glatte, geschlossene Kurve mit $\operatorname{Ind}_\gamma(a_\mu) = 1 = \operatorname{Ind}_\gamma(b_\nu)$ für $1 \le \mu \le n,\ 1 \le \nu \le m$. Dann gilt

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f'}{f}(\zeta)\ \mathrm{d}\zeta = N(0) - N(\infty), \quad \textit{Anzahlformel für Null- und Polstellen.}$$

Korollar 3.5.5

$f : D \to \mathbb{C}$ holomorph, $\gamma : [a, b] \to D$ geschlossene, stückweise stetige Kurve mit

$f(\gamma(t)) \neq 0$ für alle $t \in [a,b]$. Dann ist

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'}{f}(\zeta)\ \mathrm{d}\zeta = \mathrm{Ind}_{f\circ\gamma}(0) \in \mathbb{Z}.$$

In der Situation von Satz 3.5.4 (mit $N(\infty) = 0$ da $S(f) = \emptyset$) ist also $\mathrm{Ind}_{f\circ\gamma}(0) = N(0)$.

Korollar 3.5.6 (aus 3.5.1)
Seien $D \subseteq \mathbb{C}$ ein Elementargebiet, $f : D \to \mathbb{C}$ eine meromorphe Funktion mit $N(f) = \{a_1, \ldots, a_n\}$ und $S(f) = \{b_1, \ldots, b_m\} \in D$.
Sei $g : D \to \mathbb{C}$ holomorph. Dann gilt für jede geschlossene, stückweise stetige Kurve $\gamma : [a,b] \to D \setminus (N(f) \cup S(f))$:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'g}{f} = \sum_{\mu=1}^{n} \mathrm{ord}\,(f, a_\mu)\,\mathrm{Ind}_\gamma(a_\mu)g(a_\mu) + \sum_{\nu=1}^{m} \mathrm{ord}\,(f, b_\nu)\,\mathrm{Ind}_\gamma(b_\nu)g(b_\nu).$$

Anhang

Liste der Definitionen