
Zahlentheorie

Vorlesungsmitschrift

Prof. Dr. Damaris Schindler

L^AT_EX-Version von Alex Sennewald

Mathematisches Institut
Georg-August-Universität Göttingen
Sommersemester 2021

Inhaltsverzeichnis

1	Primzahlen - Bausteine der ganzen Zahlen	1
1.1	Der Euklidische Algorithmus	4
2	Die Teilerfunktion	7
3	Kongruenzen	11
3.1	Inverse Restklassen	12
3.2	Lineare Kongruenzgleichungen	13
3.3	Der Chinesische Restsatz	14
4	Die Eulersche φ-Funktion	17
4.1	Ordnungen	19
4.2	Primitivwurzeln	21
5	Primzahltests	23
5.1	Die Pollard'sche ρ -Methode	25
6	Quadratreste	27
6.1	Das Jacobi-Symbol	32
	Definitionen	33

Vorlesungsverzeichnis

Vorlesung 1 vom 13.04.2021	1
Vorlesung 2 vom 16.04.2021	5
Vorlesung 3 vom 20.04.2021	13
Vorlesung 4 vom 23.04.2021	18
Vorlesung 5 vom 27.04.2021	22
Vorlesung 6 vom 30.04.2021	27
Vorlesung 7 vom 04.05.2021	30

Vorlesung 8 vom 07.05.2021	32
--------------------------------------	----

Dateiverzeichnis

Datei 1 - Primzahlen & Teilbarkeit	1
Datei 2 - Der Euklidische Algorithmus	4
Datei 3 - Teilerfunktion, Kongruenzen	7
Datei 4 - Inverse Restklassen	12
Datei 5 - Lineare Kongruenzgleichungen	13
Datei 6 - Der Chinesische Restsatz	14
Datei 7 - Eulersche φ -Funktion	17
Datei 8 - Kleiner Satz von Fermat	18
Datei 9 - Ordnungen	19
Datei 10 - Primitivwurzeln	20
Datei 11 - Primzahltests	23
Datei 12 - Pollard- ρ -Methode	25
Datei 13 - Quadratreste, Teil 1	27
Datei 14 - Quadratreste, Teil 2	28
Datei 15 - Quadratreste, Teil 3	29
Datei 16 - Quadratische Reziprozität	31

Dieses Skript stellt keinen Ersatz für die Vorlesungsnotizen von Prof. Schindler dar und wird nicht nochmals von ihr durchgesehen. Im Grunde sind das hier nur meine persönlichen Mitschriften, ich garantiere also weder für Korrektheit noch Vollständigkeit und werde ggf. noch weitere Beispiele und Anmerkungen einfügen. Beweise werde ich in der Regel nicht übernehmen (weil das in \LaTeX einfach keinen Spaß macht).

Falls Ihr Korrekturanmerkungen habt könnt Ihr mir gern bei [Stud.IP](#) schreiben oder direkt im [GitHub Repository](#) einen pull request machen (was für mich deutlich weniger umständlich ist als der Weg über Stud.IP).

glhf,
Alex

„Die Zahlentheorie ist nützlich, weil man mit ihr promovieren kann.“

–Edmund Landau

1 Primzahlen - Bausteine der ganzen Zahlen

Wo ergeben sich für uns in der Zahlentheorie Unterschiede, wenn wir über \mathbb{Z} anstatt über \mathbb{Q} arbeiten?

Beispiel: Seien $a, b \in \mathbb{Z}$, $a \neq 0$. Dann hat die Gleichung

$$ax = b$$

nicht immer eine Lösung $x \in \mathbb{Z}$.

Definition (Teiler)

Seien $a, b \in \mathbb{Z}$. Wir sagen, dass **a ein Teiler von b ist** ($a \mid b$), falls es eine ganze Zahl $x \in \mathbb{Z}$ gibt mit $ax = b$.

Lemma 1.1

Seien $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$.

- i) Falls $d \mid a$ und $d \mid b$, dann $d \mid a + b$.
- ii) Ist $d \mid a$, dann auch $d \mid ab$.
- iii) Ist $d \mid a$, dann gilt $db \mid ab$.
- iv) Gilt $d \mid a$ und $a \mid b$, dann $d \mid b$.
- v) Ist $a \neq 0$ und $d \mid a$, dann gilt $|d| \leq |a|$.

Bemerkung: Eine ganze Zahl $a \neq 0$ hat höchstens endlich viele Teiler.

Satz 1.2 (Teilen mit Rest)

Seien $a, b \in \mathbb{Z}$, $b > 0$. Dann gibt es $q, r \in \mathbb{Z}$ mit

$$a = bq + r, \quad 0 \leq r < b.$$

Vorlesung 1,
13.04.2021,
Datei 1:
Primzahlen &
Teilbarkeit,
Video 1_1

Definition (Primzahl)

Video 1_2 Eine ganze Zahl $p > 1$, die genau zwei positive Teiler hat (1 und sich selbst), nenn wir **Primzahl**.

Beispiel: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, ...

Lemma 1.3

Sei $n \in \mathbb{N}, n > 1$ und sei $p > 1$ der kleinste positive Teiler von n . Dann ist p eine Primzahl. Ist außerdem n nicht prim, dann gilt $p \leq \sqrt{n}$.

Bemerkung: Diese Eigenschaft findet Anwendung im **Sieb von Eratosthenes**¹. Dies ist ein einfacher Algorithmus, um schnell alle Primzahlen bis n zu finden. Hierfür definieren wir zunächst die Menge $A = \{z \in \mathbb{Z} \mid 2 \leq z \leq n\}$. Durch Lemma 1.3 genügt es, zusätzlich lediglich die Menge $B = \{k \cdot p \mid k \in \mathbb{Z}, p \leq \sqrt{n} \text{ prim}\}$, also alle Primzahlen $p \leq \sqrt{n}$ und deren Vielfache zu betrachten. Die Differenz $A \setminus B$ beinhaltet dann nur noch alle Primzahlen $\sqrt{n} \leq p \leq n$.

Satz 1.4 (Euklid²)

Es gibt unendlich viele Primzahlen.

Satz 1.5 (Hauptsatz der Arithmetik, Primfaktorzerlegung)

Jede natürliche Zahl $n > 1$ kann auf eindeutige Weise als Produkt

$$n = p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \cdots p_r^{k_r}$$

mit $k_1, \dots, k_r \in \mathbb{N}$ und $p_1 < p_2 < \dots < p_r$ Primzahlen geschrieben werden.

Lemma 1.6

Video 1_3 Seien $a, b, p \in \mathbb{N}$ und p eine Primzahl. Angenommen $p \mid ab$, dann gilt $p \mid a$ oder $p \mid b$.

Korollar 1.7

Seien $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{N}$ und p eine Primzahl mit $p \mid a_1 \cdots a_n$. Dann $\exists 1 \leq i \leq n$ mit $p \mid a_i$.

¹Nach Eratosthenes von Kryene (zw. 276 und 273 v.Chr. - 194 v.Chr.), ein griechischer Gelehrter

²Nach Euklid von Alexandria (3. Jh. v.Chr.), ein griechischer Mathematiker

Satz 1.8

Seien $a, b \in \mathbb{N}$ mit Primfaktorzerlegungen

$$a = p_1^{a_1} \cdot p_2^{a_2} \cdots p_r^{a_r}, \quad b = p_1^{b_1} \cdot p_2^{b_2} \cdots p_r^{b_r}$$

mit p_1, \dots, p_r Primzahlen, $p_i \neq p_j$ für $i \neq j$ und $a_i, b_i \geq 0 \forall i$. Dann gilt genau dann $b \mid a$, wenn $b_i \leq a_i \forall i$.

Der größte gemeinsame Teiler

Video 1_4

Definition (größter gemeinsamer Teiler)

Seien $a, b \in \mathbb{N}$. Der **größte gemeinsame Teiler von a und b** ist der größte Teiler d mit $d \mid a$ und $d \mid b$. Wir schreiben $\text{ggT}(a, b) = d$ (im englischen $\text{gcd}(a, b)$).

Bemerkung: Seien $a = p_1^{a_1} \cdot p_2^{a_2} \cdots p_r^{a_r}$, $b = p_1^{b_1} \cdot p_2^{b_2} \cdots p_r^{b_r}$ mit p_1, \dots, p_r Primzahlen, $p_i \neq p_j$ für $i \neq j$ und $a_i, b_i \geq 0 \forall 1 \leq i \leq r$, und $d \in \mathbb{N}$ mit $d = p_1^{d_1} \cdot p_2^{d_2} \cdots p_r^{d_r}$, wobei $d_i \geq 0 \forall 1 \leq i \leq r$. Angenommen $d \mid a$ und $d \mid b$, dann $d_i \leq a_i, b_i \forall 1 \leq i \leq r$. Ist $d = \text{ggT}(a, b)$, dann gilt $d_i = \min(a_i, b_i) \forall 1 \leq i \leq r$ und

$$\text{ggT}(a, b) = p_1^{\min(a_1, b_1)} \cdot p_2^{\min(a_2, b_2)} \cdots p_r^{\min(a_r, b_r)}.$$

Lemma 1.9

Seien $a, b, c, d \in \mathbb{N}$.

- i) Ist $d \mid a$ und $d \mid b$, dann $d \mid \text{ggT}(a, b)$.
- ii) Angenommen $b \mid ac$ und $\text{ggT}(a, b) = 1$. Dann gilt $b \mid c$.
- iii) Sei $a \mid c$, $b \mid c$ und $\text{ggT}(a, b) = 1$. Dann $ab \mid c$.
- iv) Sei $d = \text{ggT}(a, b)$. Dann gilt $\text{ggT}\left(\frac{a}{d}, \frac{b}{d}\right) = 1$.

Das kleinste gemeinsame Vielfache

Definition (kleinstes gemeinsames Vielfaches)

Seien $a, b \in \mathbb{N}$. Die kleinste natürliche Zahl m mit $a \mid m$ und $b \mid m$ nennen wir das **kleinste gemeinsame Vielfache von a und b**. Wir schreiben $\text{kgV}(a, b) = m$ (im englischen $\text{lcm}(a, b)$).

Bemerkung: Seien a, b mit den gleichen Primfaktorzerlegungen wie oben. Dann

$$\text{kgV}(a, b) = p_1^{\max(a_1, b_1)} \cdot p_2^{\max(a_2, b_2)} \cdot \dots \cdot p_r^{\max(a_r, b_r)}.$$

Bemerke: $\max(a_i, b_i) + \min(a_i, b_i) = a_i + b_i$. Also $ab = \text{ggT}(a, b) \cdot \text{kgV}(a, b)$.

Definition

Seien $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{Z}$, nicht alle gleich null. Der größte gemeinsame Teiler von a_1, \dots, a_k ist die größte natürliche Zahl d , die jedes der a_i teilt. Wir schreiben $d = \text{ggT}(a_1, \dots, a_k)$. Analog dazu können wir das kleinste gemeinsame Vielfache von a_1, \dots, a_k als die kleinste positive ganze Zahl m definieren, die durch jedes der a_i teilbar ist, $m = \text{kgV}(a_1, \dots, a_k)$.

1.1 Der Euklidische Algorithmus

Datei 2: Der
Euklidische
Algorithmus,
Video 1_5

Motivation: Seien $a, b \in \mathbb{N}$. Wie können wir $\text{ggT}(a, b)$ schnell berechnen?

Bemerkung: Für $a, b \in \mathbb{N}$ schreibe $a = qb + r$ mit $0 \leq r < b$.

i) Ist $d \in \mathbb{N}$ mit $d \mid a$ und $d \mid b$, dann gilt auch $d \mid r$.

ii) Ist $d \mid b$ und $d \mid r$, dann $d \mid a$.

Es folgt: $\text{ggT}(a, b) = \text{ggT}(b, r)$.

Beispiel: $a = 270$, $b = 192$

$$270 = 1 \cdot 192 + 78$$

$$192 = 2 \cdot 78 + 36$$

$$78 = 2 \cdot 36 + 6$$

$$36 = 6 \cdot 6 + 0$$

$$\implies \text{ggT}(270, 192) = \dots = \text{ggT}(6, 0) = 6$$

Im Allgemeinen sieht das wie folgt aus:

$$\begin{aligned}
 a &= q_0 b + r_1 \\
 b &= q_1 r_1 + r_2 \\
 r_1 &= q_2 r_2 + r_3 \\
 &\dots \\
 r_{k-2} &= q_{k-1} r_{k-1} + r_k \\
 r_{k-1} &= q_k r_k + 0 \\
 \implies \text{ggT}(a, b) &= r_k
 \end{aligned}$$

Warum endet der Euklidische Algorithmus nach endlich vielen Schritten? In jedem Schritt gilt $0 \leq r_{j+1} < r_j \forall j$. Da wir mit einer endlichen Zahl b angefangen haben ist auch unser r_1 endlich, und da sich der Rest in jedem Schritt um mindestens 1 verkleinert sind wir nach maximal $|b|$ Schritten fertig.

Der Euklidische Algorithmus ist schnell. Sei $a > b$, dann ist $r_1 < \frac{a}{2}$. Wenn wir dies fortsetzen erhalten wir

$$\begin{aligned}
 r_2 &< r_1 < \frac{a}{2} \\
 r_3 &< \frac{r_1}{2} < \frac{a}{4} \\
 r_4 &< \frac{r_2}{2} < \frac{a}{4} \\
 &\dots
 \end{aligned}$$

Nach Vollständiger Induktion folgt

$$r_m < \frac{a}{2^{\frac{m}{2}}} \quad \forall m > 0.$$

Daher $1 \leq r_k < \frac{a}{2^{\frac{k}{2}}}$, also $2^{\frac{k}{2}} < a$ und somit

$$k < 2 \frac{\log a}{\log 2}$$

Der erweiterte Euklidische Algorithmus

Der Euklidische Algorithmus kann noch mehr als lediglich den größten gemeinsamen Teiler zu berechnen. Seien $a, b \in \mathbb{N}$.

Vorlesung 2,
16.04.2021,
Video 2_1

$$\begin{array}{ll}
a = q_0 b + r_1 & r_1 = a - q_0 b \\
0 \leq r_1 < b & \\
b = q_1 r_1 + r_2 & r_2 = b - q_1 r_1 = b - q_1(a - q_0 b) \\
0 \leq r_2 < r_1 & = am_2 + bn_2, \quad m_2, n_2 \in \mathbb{Z} \\
r_1 = q_2 r_2 + r_3 & r_3 = r_1 - q_2 r_2 \\
0 \leq r_3 < r_2 & = am_3 + bn_3, \quad m_3, n_3 \in \mathbb{Z} \\
& \vdots \\
r_{k-2} = q_{k-1} r_{k-1} + r_k & r_k = am_k + bn_k \\
0 \leq r_k < r_{k-1} & m_k, n_k \in \mathbb{Z} \\
r_{k-1} = q_k r_k + 0 &
\end{array}$$

Satz 1.10

Seien $a, b \in \mathbb{N}$. Dann gibt es $x, y \in \mathbb{Z}$ mit

$$ax + by = \text{ggT}(a, b).$$

2 Die Teilerfunktion

Definition (Teilerfunktion)

Sei $n \in \mathbb{N}$. Wir definieren $d(n)$ als die Zahl der positiven Teiler von n , d.h.

$$d(n) = \sum_{\substack{d|n \\ d \geq 1}} 1.$$

Weiter definieren wir

$$S(n) = \sum_{\substack{d|n \\ d \geq 1 \\ d < n}} d$$

und

$$\sigma(n) = \sum_{\substack{d|n \\ d \geq 1}} d$$

Beispiel: $d(7) = 2$, $d(6) = 4$

Sei p eine Primzahl, dann gilt $d(p) = 2$ und $d(p^k) = k + 1$ für $k \geq 0$.

Bemerkung: $\sigma(n) = S(n) + n$

Definition (perfekte Zahl)

Wir nennen eine natürliche Zahl n **perfekt**, falls

$$S(n) = n.$$

Beispiel: $6 = 1 + 2 + 3$ ist perfekt. 28 ist perfekt.

Lemma 2.1

Seien $m, n \in \mathbb{N}$ mit $\text{ggT}(m, n) = 1$. Dann gilt

$$d(mn) = d(m)d(n)$$

Datei 3:

Teilerfunktion

Kongruenzen,

Video 2__2

und

$$\sigma(mn) = \sigma(m)\sigma(n).$$

Bemerkung: $d(n)$ und $\sigma(n)$ sind sogenannte *multiplikative Funktionen*.

Kennt man die Primfaktorzerlegung von n , so lassen sich diese Funktionen sehr einfach berechnen. Wir wollen nun eine allgemeine Formel für $d(n)$ aufstellen.

Sei $n = p_1^{k_1} \cdots p_r^{k_r}$ mit $p_1 < \cdots < p_r$ Primzahlen, $k_1, \dots, k_r \geq 0$. Dann gilt nach Lemma 2.1

$$\begin{aligned} d(n) &= d(p_1^{k_1} \cdots p_r^{k_r}) \\ &= d(p_1^{k_1}) \cdots d(p_r^{k_r}) \end{aligned}$$

Es gilt

$$d(p^k) = k + 1,$$

also

$$d(n) = (k_1 + 1)(k_2 + 1) \cdots (k_r + 1).$$

Weiterhin berechnen wir

$$\begin{aligned} \sigma(n) &= \sigma(p_1^{k_1}) \cdots \sigma(p_r^{k_r}) \\ \sigma(p^k) &= 1 + p + p^2 + \cdots + p^k \\ &= \frac{p^{k+1} - 1}{p - 1} \end{aligned}$$

Wir erhalten

$$\sigma(n) = \frac{p_1^{k_1+1} - 1}{p_1 - 1} \cdots \frac{p_r^{k_r+1} - 1}{p_r - 1}$$

Satz 2.2

Sei $n = p_1^{k_1} \cdots p_r^{k_r}$ mit $p_1 < \cdots < p_r$ Primzahlen, $k_1, \dots, k_r \geq 0$. Dann gilt

$$\begin{aligned} d(n) &= \prod_{i=1}^r (k_i + 1) \\ \sigma(n) &= \prod_{i=1}^r \frac{p_i^{k_i+1} - 1}{p_i - 1}. \end{aligned}$$

Beispiel: $d(25 \cdot 3) = d(25)d(3) = d(5^2)d(3) = 3 \cdot 2 = 6$

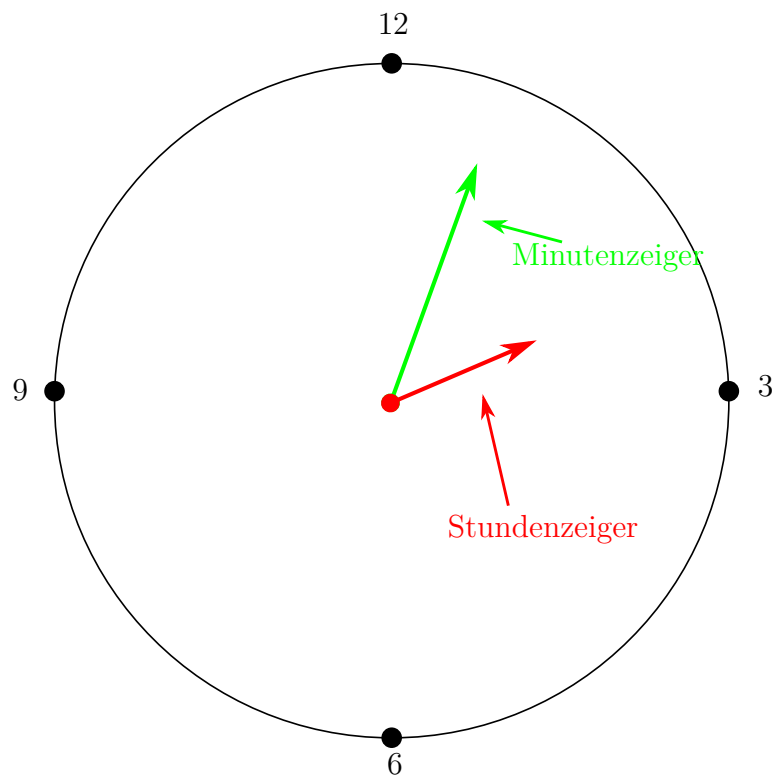
Bemerkung: $S(n)$ ist keine multiplikative Funktion:

$$1 = S(2)S(3) \neq S(6) = 6$$

3 Kongruenzen

Video 2_3

Beispiel: Die Uhr



Der Minutenzeiger weiß nur, wie viele Minuten es nach einer vollen Stunde ist

Definition (Kongruenz, Kongruenzklasse)

Sei $M \in \mathbb{N}$, $M > 1$, $a, b \in \mathbb{Z}$. Wir sagen, dass **a kongruent zu b ist modulo M**, falls $M \mid (a - b)$, schreibe $a \equiv b \pmod{M}$.

Sei $r \in \mathbb{Z}$. Die Menge aller ganzen Zahlen x mit $x \equiv r \pmod{M}$ nennen wir die **Kongruenzklasse von r modulo M**.

Beispiel: $7 \equiv 27 \pmod{10}$, $4 \equiv 1 \pmod{3}$

Lemma 3.1

Sei $M > 1$, $M \in \mathbb{N}$, $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{Z}$ mit $a_1 \equiv a_2 \pmod{M}$ und $b_1 \equiv b_2 \pmod{M}$. Dann

gilt

$$i) \ a_1 + b_1 \equiv a_2 + b_2 \pmod{M}$$

$$ii) \ a_1 - b_1 \equiv a_2 - b_2 \pmod{M}$$

$$iii) \ a_1 b_1 \equiv a_2 b_2 \pmod{M}$$

Notation: Schreibe $\mathbb{Z}/M\mathbb{Z}$ für die Menge aller Restklassen modulo M .

Eine Anwendung: Eine natürliche Zahl n ist durch 9 teilbar genau dann, wenn die Summe ihrer Ziffern in der Dezimaldarstellung (also ihre Quersumme) durch 9 teilbar ist.

Beispiel: 43227 ist durch 9 teilbar.

3.1 Inverse Restklassen

Datei 4: Seien $x, y \in \mathbb{Z}$ mit $2x = 2y$. Die echten Detektive unter uns erkennen, dass man dies
 Inverse einfach zu $x = y$ kürzen kann. Nun ist die Frage, ob das auch funktioniert, wenn wir
 Restklassen, statt über \mathbb{Z} über dem Restklassenring arbeiten, also ob wir auch bei Kongruenzen
 Video 2_4 kürzen können.

Beispiel:

$$1. \ 2x \equiv 2y \pmod{4} \stackrel{?}{\implies} x \equiv y \pmod{4}$$

Nein ⚡, z.B. $2 \cdot 3 \equiv 2 \cdot 1 \pmod{4}$, $3 \not\equiv 1 \pmod{4}$

$$2. \ 2x \equiv 2y \pmod{5} \implies 5 \mid 2(x - y), \text{ d.h. } 5 \mid x - y \implies x \equiv y \pmod{5}$$

oder bemerke, dass $2 \cdot 3 \equiv 1 \pmod{5}$ und multipliziere die obige Kongruenz mit 3.

Definition (Invertierbare Restklasse)

Sei $M \in \mathbb{N}$, $M > 1$. Wir nennen $a \in \mathbb{Z}$ **invertierbar modulo M** , falls es $\exists b \in \mathbb{Z}$ gibt mit $ab \equiv 1 \pmod{M}$. In dem Fall nennen wir die Restklasse a (modulo M) invertierbar.

Beispiel: 2 ist invertierbar modulo 25, denn $2 \cdot 13 \equiv 1 \pmod{25}$.

Satz 3.2

Sei $M \in \mathbb{N}$, $M > 1$, $a \in \mathbb{Z}$. Dann ist a invertierbar modulo M genau dann, wenn $\text{ggT}(a, M) = 1$.

Bemerkung: Ist $a \in \mathbb{Z}$ invertierbar modulo M , dann ist jedes Element in der Restklasse $a \bmod M$ invertierbar modulo M . Die Menge aller $b \in \mathbb{Z}$ mit $ba \equiv 1 \bmod M$ ist eine Restklasse modulo M , schreibe a^{-1} (modulo M) für diese Restklasse. Video 2_5

Sei $a \in \mathbb{Z}$, $M \in \mathbb{N}$, $M > 1$ mit $\text{ggT}(a, M) = 1$. Wie können wir die inverse Restklasse a^{-1} berechnen?

\implies wir verwenden den erweiterten Euklidischen Algorithmus um $x, y \in \mathbb{Z}$ zu finden mit $ax + My = 1$.

Notation: Ist $M > 1$, so schreiben wir $(\mathbb{Z}/M\mathbb{Z})^*$ für die Menge der invertierbaren Restklassen modulo M .

Beispiel:

$$1. (\mathbb{Z}/6\mathbb{Z})^* = \{\bar{1}, \bar{5}\}, \text{ also } |(\mathbb{Z}/6\mathbb{Z})^*| = 2$$

2. Sei p prim.

$$(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^* = \{1, 2, \dots, p-1\} \implies |(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*| = p-1$$

Lemma 3.3 (Satz von Wilson)

Sei p prim. Dann gilt $(p-1)! \equiv -1 \bmod p$.

3.2 Lineare Kongruenzgleichungen

Fragestellung: Seien $a, b \in \mathbb{Z}$, $M \in \mathbb{N}$. Finde alle ganzzahligen Lösungen $x \in \mathbb{Z}$, sodass gilt Vorlesung 3, 20.04.2021,

$$ax \equiv b \bmod M.$$

Datei 5:
Lineare
Kongruenz-
gleichungen,
Video 3_1

Beispiel: i) $5x \equiv 7 \bmod 15$ hat *keine* Lösung

ii) $5x \equiv 25 \bmod 15$, d.h. $15 \mid (5x - 25) = 5(x - 5) \iff 3 \mid x - 5$ oder $x \equiv 5 \bmod 3$, d.h. $x \equiv 2 \bmod 3$. Die Lösungen der Kongruenz $5x \equiv 25 \bmod 15$ sind gegeben durch alle $x \in \mathbb{Z}$ der Form $x = 2 + 3k$ mit $k \in \mathbb{Z}$.

Satz 3.4

Seien $a, b \in \mathbb{Z}$, $M \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$ und $d = \text{ggT}(a, M)$. Die Gleichung

$$ax \equiv b \pmod{M}$$

hat genau dann eine Lösung $x \in \mathbb{Z}$, wenn $d \mid b$.

Wenn dies gilt, dann ist die Gleichung $ax \equiv b \pmod{M}$ äquivalent zu

$$\frac{a}{d}x \equiv \frac{b}{d} \pmod{\frac{M}{d}}.$$

Diese Gleichung hat eine Lösung, denn

$$\text{ggT}\left(\frac{a}{d}, \frac{M}{d}\right) = 1.$$

3.3 Der Chinesische Restsatz

Datei 6: Der
Chinesische
Restsatz,
Video 3_2

Wir wollen alle $x \in \mathbb{Z}$ finden, die nach Teilen mit Rest durch 2,3,5 die Reste 1,2,3 lassen. Anders formuliert: Finde $x \in \mathbb{Z}$ mit

$$x \equiv 1 \pmod{2}$$

$$x \equiv 2 \pmod{3}$$

$$x \equiv 3 \pmod{5}$$

Ist $x \in \mathbb{Z}$ eine Lösung der obigen Kongruenzen, dann auch $x + 30k$ für jedes $k \in \mathbb{Z}$. Sei nun x eine solche Lösung. Dann gilt $x \equiv 3 \pmod{5}$, schreibe $x = 3 + 5u$ mit $u \in \mathbb{Z}$. Es muss außerdem gelten

$$3 + 5u \equiv 2 \pmod{3},$$

d.h. $2u \equiv 2 \pmod{3} \iff u \equiv 1 \pmod{3}$, also $u = 1 + 3v$ mit $v \in \mathbb{Z}$, schreibe also

$$\begin{aligned} x &= 3 + 5(1 + 3v) \\ &= 8 + 15v. \end{aligned}$$

Zuletzt betrachten wir nun

$$8 + 15v \equiv 1 \pmod{2}.$$

Daraus folgt, dass v ungerade ist, d.h. $v = 1 + 2w$ mit $w \in \mathbb{Z}$. Wir erhalten

$$\begin{aligned}x &= 8 + 15(1 + 2w) \\&= 23 + 30w, \quad w \in \mathbb{Z}.\end{aligned}$$

Im Allgemeinen:

Seien $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{Z}$, $m_1, \dots, m_n \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$. Finde alle $x \in \mathbb{Z}$ mit

$$\begin{aligned}x &\equiv c_1 \pmod{m_1} \\x &\equiv c_2 \pmod{m_2} \\x &\equiv c_n \pmod{m_n}\end{aligned} \tag{*}$$

Achtung: Es ist zu beachten, dass es manchmal keine Lösung gibt, z.B. bei

$$\begin{aligned}x &\equiv 1 \pmod{3} \\x &\equiv 2 \pmod{9}.\end{aligned}$$

Dies rührt daher, dass wir bisher keine Annahmen über die Module getroffen haben, was wir später noch für den chinesischen Restsatz tun werden. Zunächst fassen wir unsere Vorüberlegungen, dass sich unsere Lösungsmenge durchs kleinste gemeinsame Vielfache der Module ergibt, in folgendem Lemma zusammen:

Lemma 3.5

Sei $x_0 \in \mathbb{Z}$ eine Lösung zum System $*$. Dann besteht die gesamte Lösungsmenge des Systems aus der Restklasse $x_0 \pmod{M}$ mit $M = \text{kgV}(m_1, \dots, m_n)$.

Satz 3.6 (Chinesischer Restsatz)

Wir benutzen die gleiche Notation wie im System $*$. Angenommen, $\text{ggT}(m_i, m_j) = 1$ für $i \neq j$, dann hat das System $*$ genau eine Restklasse modulo $m_1 \cdots m_n$ als Lösung. Video 3_3

4 Die Eulersche φ -Funktion

1

Datei 7:
Eulersche
 φ -Funktion,
Video 3_4

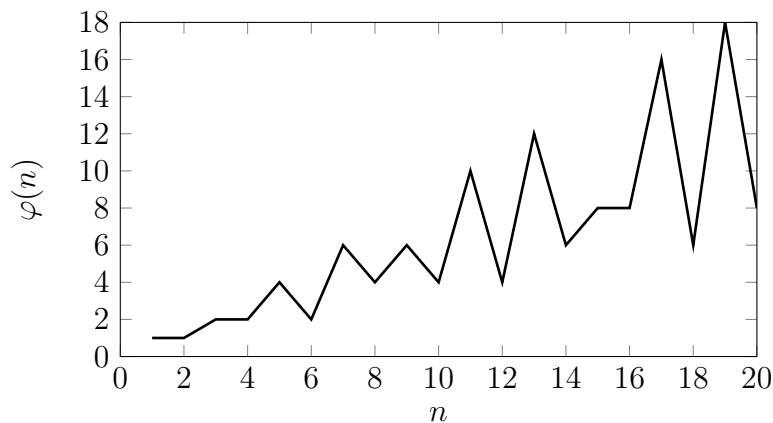
Ordnungen und Primitivwurzeln

Fragestellung: Sei $M \geq 2$. Wie viele invertierbaren Restklassen gibt es modulo M ?

Notation: Wir schreiben

$$\varphi(M) = |(\mathbb{Z}/M\mathbb{Z})^*| = |\{0 < a \leq M \mid \text{ggT}(a, M) = 1\}|.$$

Beispiel: i) $\varphi(2) = 1, \varphi(3) = 2, \varphi(4) = 2, \varphi(5) = 4, \varphi(6) = 2$



ii) Sei p eine Primzahl. Dann ist $\varphi(p) = p - 1$.

iii) Sei $k \geq 1$ und p prim. Dann gilt

$$\begin{aligned}\varphi(p^k) &= p^k - \left| \{0 < a \leq p^k \mid \text{ggT}(a, p^k) > 1\} \right| \\ &= p^k - p^{k-1}\end{aligned}$$

¹Nach Leonhard Euler (1707-1783), ein Schweizer Mathematiker, Physiker, Astronom, Geograph, Logiker und Ingenieur

Eine Beobachtung:

$$\begin{aligned}\varphi(1) + \varphi(p) + \varphi(p^2) + \cdots + \varphi(p^k) &= 1 + (p-1) + (p^2-p) + \cdots + (p^k - p^{k-1}) \\ &= p^k\end{aligned}$$

Satz 4.1

Sei $n \in \mathbb{Z}$. Dann gilt

$$\sum_{d|n} \varphi(d) = n.$$

Nun wollen wir uns mit der Berechnung der Eulerschen φ -Funktion beschäftigen. Für Primzahlpotenzen haben wir das schon getan und wollen dies jetzt auf allgemeine natürliche Zahlen anhand ihrer Primfaktorzerlegung fortsetzen.

Satz 4.2

Video 3_5 φ ist eine multiplikative Funktion, d.h. für $m, n \in \mathbb{N}$ mit $\text{ggT}(m, n) = 1$ gilt

$$\varphi(mn) = \varphi(m)\varphi(n).$$

Korollar 4.3

Sei $m = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \cdots p_r^{k_r}$ mit $p_1 < p_2 < \cdots < p_r$ Primzahlen und $k_i \geq 0$ für $1 \leq i \leq r$. Dann gilt

$$\begin{aligned}\varphi(m) &= \prod_{i=1}^r (p_i^{k_i} - p_i^{k_i-1}) \\ &\text{oder} \\ \varphi(m) &= m \cdot \prod_{\substack{p|m \\ p \text{ prim}}} \left(1 - \frac{1}{p}\right).\end{aligned}$$

Vorlesung 4,

23.04.2021,

Datei 8:

Satz 4.4 (Fermats² kleiner Satz)

Sei $a \in \mathbb{Z}$, p eine Primzahl. Dann gilt

Kleiner Satz

von Fermat,

Video 4_1

Ist $p \nmid a$, dann gilt

$$a^p \equiv a \pmod{p}.$$

$$a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}.$$

²Nach Pierre de Fermat (1607-1665), ein französischer Mathematiker und Jurist

Satz 4.5 (Euler)

Sei $M \geq 2$, $a \in \mathbb{Z}$ mit $\text{ggT}(a, M) = 1$. Dann gilt

$$a^{\varphi(M)} \equiv 1 \pmod{M}.$$

Bemerkung: $(\mathbb{Z}/M\mathbb{Z})^*$ ist eine Gruppe der Ordnung $\varphi(M)$. Ist $a \in (\mathbb{Z}/M\mathbb{Z})^*$, dann gilt $a^{\varphi(M)} = 1$ in $(\mathbb{Z}/M\mathbb{Z})^*$.

4.1 Ordnungen

Sei $M \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$, $a \in \mathbb{Z}$ mit $\text{ggT}(a, M) = 1$. Wir wissen bereits

$$a^{\varphi(M)} \equiv 1 \pmod{M}.$$

Datei 9:
Ordnungen,
Video 4_2

Sei $E = \{k \in \mathbb{N} \mid a^k \equiv 1 \pmod{M}\}$. Dann ist $E \neq \emptyset$.

Definition (Ordnung)

Das kleinste Element in E nennen wir die **Ordnung von a modulo M** .

Notation: $\text{ord}_M(a)$

Beispiel: Seien $M = 5$, $a = 2$. Für welche $k \in \mathbb{N}$ gilt $2^k \equiv 1 \pmod{5}$?

$$2^1 \equiv 2, 2^2 \equiv 4, 2^3 \equiv 3, 2^4 \equiv 1 \pmod{5}$$

Also gilt $\text{ord}_5 2 = 4$.

Lemma 4.6

Sei $M \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$, $a \in \mathbb{Z}$ mit $\text{ggT}(M, a) = 1$. Angenommen $a^k \equiv 1 \pmod{M}$. Dann gilt

$$\text{ord}_M a \mid k.$$

Wir betrachten zunächst eine Verschärfung des Satzes von Euler (4.5):
Sei $M \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$ von der Form

$$M = p_1^{k_1} \cdots p_r^{k_r}$$

mit $p_1 < \cdots < p_r$ prim und $k_1, \dots, k_r \geq 1$. Setze

$$\lambda(M) = \text{kgV}_{1 \leq i \leq r} (p_i^{k_i} - p_i^{k_i-1}) = \text{kgV}_{1 \leq i \leq r} \varphi(p_i^{k_i})$$

Video 4_3

Vergleiche mit

$$\varphi(M) = \prod_{i=1}^r (p_i^{k_i} - p_i^{k_i-1})$$

Unser Ziel ist nun, zu zeigen, dass wir im Satz von Euler $\varphi(M)$ einfach durch $\lambda(M)$ ersetzen können, was kleiner als $\varphi(M)$ sein kann.

Satz 4.7

Sei $M \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$ wie oben, d.h.

$$M = p_1^{k_1} \cdots p_r^{k_r}$$

mit $p_1 < \cdots < p_r$ prim und $k_1, \dots, k_r \geq 1$. Sei $a \in \mathbb{Z}$ mit $\text{ggT}(a, M) = 1$. Dann gilt

$$a^{\lambda(M)} \equiv 1 \pmod{M}.$$

Definition (Primitivwurzel)

Sei $M \geq 2$. Eine ganze Zahl $g \in \mathbb{Z}$ mit $\text{ggT}(M, g) = 1$ und

$$\{\bar{g}, \bar{g}^2, \dots, \bar{g}^{\varphi(M)}\} = (\mathbb{Z}/M\mathbb{Z})^*$$

nennen wir **Primitivwurzel modulo M**.

Beispiel: 1. 2 ist eine Primitivwurzel modulo 5, denn

$$\{2, 2^2, 2^3, 2^4\} = (\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^*.$$

2. Gibt es eine Primitivwurzel modulo $M = 15$? In anderen Worten, gibt es $g \in \mathbb{Z}$, $\text{ggT}(g, 15) = 1$, mit $\{g, g^2, \dots, g^{\varphi(15)}\} = (\mathbb{Z}/15\mathbb{Z})^*$?

Bemerke $\varphi(15) = \varphi(5)\varphi(3) = 4 \cdot 2 = 8$, aber $\lambda(15) = \text{kgV}(\varphi(5), \varphi(3)) = 4$.

Also für $\text{ggT}(g, 15) = 1$ $|\{g, g^2, \dots, g^{\varphi(15)}\}| \leq 4$, denn $g^{\lambda(15)} = g^4 \equiv 1 \pmod{15}$.

Also gibt es keine Primitivwurzel modulo 15.

3. Sei $M = pq$ mit p, q prim, $p, q > 2$. Dann ist $\varphi(M) = (p-1)(q-1)$, aber $\lambda(M) = \text{kgV}(p-1, q-1) < \varphi(M)$. Also gibt es keine Primitivwurzel modulo M .

Im Weiteren wollen wir nun zeigen, dass es im Allgemeinen zu jeder Primzahl auch eine Primitivwurzel gibt. Dafür benötigen wir zunächst folgende Lemmata:

Lemma 4.8

Seien $a, b \in (\mathbb{Z}/M\mathbb{Z})^*$ mit $M \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$, $A = \text{ord}_M a$, $B = \text{ord}_M b$. Angenommen

$\text{ggT}(A, B) = 1$, dann gilt

$$\text{ord}_M ab = AB.$$

Lemma 4.9

Seien $a_1, \dots, a_m \in (\mathbb{Z}/M\mathbb{Z})^*$ mit $M \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$ und $A = \text{kgV}(\text{ord}_M(a_1), \dots, \text{ord}_M(a_m))$.
Dann $\exists b \in (\mathbb{Z}/M\mathbb{Z})^*$ mit $\text{ord}_M b = A$.

4.2 Primitivwurzeln

Video 4_5

Satz 4.10

Sei p eine Primzahl. Dann gibt es eine Primitivwurzel modulo p .

Das bedeutet, dass es $g \in \mathbb{Z}$ (oder $g \in \mathbb{N}$) gibt mit $\{g, g^2, \dots, g^{p-1}\} = (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$.
Wie klein kann man dieses g nun wählen?

Vermutung

Sei p eine Primzahl. Dann gibt es eine Primitivwurzel $g \in \mathbb{N}$ mit $g < 2(\log p)^2$.

Von einem Beweis dieser Vermutung sind wir noch sehr weit entfernt. Doch was ist bisher bekannt? Es gibt eine Primitivwurzel $g \in \mathbb{N}$ modulo p mit $g < Cp^{\frac{1}{4}+\varepsilon}$, wobei $C, \varepsilon > 0$ und ε beliebig klein. Dieses Resultat folgt aus Arbeiten von D.A. Burgess aus dem Jahre 1962.

Vermutung (Artin³)

2 ist eine Primitivwurzel für unendlich viele Primzahlen p .

Eine leicht abgeänderte und „aufgefächerte“ Variante dieser Vermutung stellt der folgende Satz dar, der sich auch tatsächlich beweisen ließ:

Satz (Heath-Brown⁴, 1986)

Mindestens eine der Zahlen 2, 3, 5 ist eine Primitivwurzel für unendlich viele Primzahlen p .

³Nach Emil Artin (1898-1962), ein österreichischer Mathematiker

⁴Nach Roger Heath-Brown (geb. 1952), ein britischer Mathematiker

Um den Satz 4.10 nun beweisen zu können bedarf es noch ein wenig Vorbereitung:

Vorlesung 5,
27.04.2021,
Video 5_1

Satz 4.11

Sei $P(X) = a_n X^n + \cdots + a_1 X + a_0$ mit $a_n, \dots, a_0 \in \mathbb{Z}$ und p prim. Angenommen $p \nmid a_n$, dann hat die Gleichung $P(X) \equiv 0 \pmod p$ höchstens n verschiedene Lösungen modulo p .

Video 5_2

Für welche $M \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ gibt es eine Primitivwurzel modulo M ?

Satz 4.12

Sei $k \in \mathbb{N}$ und $p > 2$ eine Primzahl. Dann gibt es eine Primitivwurzel modulo p^k .

Lemma 4.13

Sei p eine ungerade Primzahl und $k \in \mathbb{N}$. Dann gilt

$$(1 + p)^{p^{k-1}} \equiv 1 + p^k \pmod{p^{k+1}}.$$

5 Primzahltests

Wir machen nun einen kleinen Ausflug, um die Theorien von Ordnungen und Kongruenzrechnung zu verwenden und uns über Primzahltests zu unterhalten. Eine große Frage hierbei ist, wie man für eine natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ möglichst schnell herausfinden kann, ob sie eine Primzahl ist oder nicht.¹

Datei 11:
Primzahltests,
Video 5_3

Komplexität eines Algorithmus':

L = Zahl der Bits, die für den Input notwendig sind

Beispiel: Um eine natürliche Zahl N zu beschreiben benötigt man $\sim \log_{10} N$ Ziffern im Dezimal oder $\sim \log_2 N$ Bits.

Wir nennen einen Algorithmus polynomiell, wenn seine Laufzeit begrenzt ist durch $c2^a$ mit $c, a > 0$.

Beispiel: i) Der Euklidische Algorithmus angewandt auf $M, N \in \mathbb{N}$ mit $M < N$ benötigt $\sim c \log_{10} N$ Schritte. Dies ist ein polynomieller Algorithmus.

ii) Um eine Primfaktorzerlegung von $N \in \mathbb{N}$ naiv herzuleiten indem man alle Teiler $\leq \sqrt{N}$ probiert, benötigt man $\sim \sqrt{N} = e^{\frac{\log N}{2}} \cong e^{c^2}$ Schritte. Dies nennen wir einen exponentiellen Algorithmus.

Die schnellste Laufzeit für eine Primfaktorzerlegung ist in $\sim c_1 e^{c_2 \sqrt[3]{\log N \log \log N}}$ Schritten möglich mit $c_1, c_2 > 0$.

Fragestellung: Wie kann man schnell testen, ob eine natürliche Zahl $N \in \mathbb{N}$ prim ist?

Fermats kleiner Satz (4.4) besagt, dass für $N \in \mathbb{N}, a \in \mathbb{Z}, N \nmid a, N$ prim, $A^{N-1} \equiv 1 \pmod{N}$ gilt. (Achtung: Die Rückrichtung gilt hierbei im Allgemeinen nicht!)

Definition

Eine natürliche Zahl N mit $a^{N-1} \equiv 1 \pmod{N}$ für alle $a \in \mathbb{Z}$ mit $\text{ggT}(a, N) = 1$ nennen wir eine Carmichael Zahl².

¹Dieses Kapitel ist nicht klausurrelevant.

²Nach Robert Daniel Carmichael (1879-1967), US-amerikanischer Mathematiker

Satz (Alford³, Granville⁴, Pomerance⁵, 1951)

Es gibt unendlich viele Carmichael Zahlen.

Fragestellung: Weitere Eigenschaften von Primzahlen?

Satz 5.1 (Rabin⁶)

Video 5_4 Sei N ungerade, $a \in \mathbb{Z}$, $N \nmid a$. Angenommen $N - 1 = 2^k \cdot m$ mit m ungerade. Ist N prim, dann gilt

$$a^m \equiv 1 \pmod{N}$$

oder es gilt $0 \leq j \leq k - 1$ mit

$$a^{2^j m} \equiv -1 \pmod{N}.$$

Satz

Sei N ungerade, $a \in \mathbb{Z}$, $N \nmid a$ und $N - 1 = 2^k m$ mit m ungerade. Ist $a^m \not\equiv 1 \pmod{N}$ und $a^{2^j m} \not\equiv -1 \pmod{N}$ für alle $0 \leq j \leq k - 1$, dann ist N zusammengesetzt.

Definition

In diesem Fall nennen wir a einen Zeugen für die Zusammengesetztheit von N .

Satz

Sei N ungerade und zusammengesetzt, Dann sind mindestens 75% der Zahlen $1, 2, \dots, N - 1$ Zeugen für die Zusammengesetztheit von N .

Idee: Führe den Rabin-Test mit k zufällig gewählten Zahlen a aus. Ist N zusammengesetzt, dann ist die Wahrscheinlichkeit, dass wir einen Zeugen nach k Schritten finden $\geq 1 - \left(\frac{1}{4}\right)^k$

Bemerkung: Wenn die verallgemeinerte Riemann-Hypothese gilt, dann gibt es für zusammengesetzte N einen Zeugen $a < 2(\log N)^2$. Dies führt zu einem polynomiellen Algorithmus, der die Zusammengesetztheit von N erkennt.

³William Robert Alford (1937-2003), ein US-amerikanischer Mathematiker

⁴Andrew James Granville (geb. 1962), ein britisch-kanadischer Mathematiker

⁵Carl Bernard Pomerance (geb. 1944), ein US-amerikanischer Mathematiker

⁶Nach Michael O. Rabin (geb. 1931), ein israelischer Informatiker

5.1 Die Pollard'sche ρ -Methode

7

Datei 12:

Pollard- ρ -
Methode,

Video 5_5

Angenommen $N \in \mathbb{N}$ ist zusammengesetzt. Unser Ziel ist, einen echten Teiler von N zu finden.

Sei $b \in \mathbb{Z}$ und betrachte die Folge x_0, x_1, x_2, \dots von Restklassen modulo N , definiert auch $x_0 = 1, x_{i+1} \equiv x_i^2 + b \pmod{N}$ für $i \geq 0$.

Sei $\nu(m)$ für $m \in \mathbb{N}$ die größte Potenz von 2, die kleiner als m ist.

Beispiel: $\nu(5) = 4, \nu(8) = 4, \nu(12) = 8$

Wir berechnen $\text{ggT}(x_i - x_{\nu(i)}, N)$. Unsere Erwartung ist, dass wenn wir das für $i < 4,5N^{\frac{1}{4}}$ tun die Wahrscheinlichkeit, dass wir einen echten Teiler von N gefunden haben, $> \frac{1}{2}$ ist.

Hemiasdb Sei $p \leq \sqrt{N}$ ein Primteiler von N und $q = \lfloor \sqrt{2p} \rfloor + 1$. Betrachte x_0, x_1, \dots, x_q modulo q .

1. Ziel: Finde $0 \leq k, l \leq q$ mit $x_k - x_l \equiv 0 \pmod{p}$.

Die Wahrscheinlichkeit, dass alle x_0, x_1, \dots, x_q modulo p verschieden sind ist $(1 - \frac{1}{p}) \cdot (1 - \frac{2}{p}) \cdots (1 - \frac{q}{p})$. Wie groß ist das?

$$\begin{aligned} \log \left(1 - \frac{1}{p} \right) \cdot \left(1 - \frac{2}{p} \right) \cdots \left(1 - \frac{q}{p} \right) &= \sum_{r=1}^q \log \left(1 - \frac{r}{p} \right) \\ &\leq - \sum_{r=1}^q \frac{r}{p} = - \frac{1}{2} \frac{q(q+1)}{p} \\ &< -1 \end{aligned}$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass x_0, x_1, \dots, x_q modulo p paarweise verschieden sind, ist also $< e^{-1} < \frac{1}{2}$

Bemerkung: $q < \sqrt{2\sqrt{N}} + 2 < 1,5N^{\frac{1}{4}}$

Unser Problem ist nun, dass wir gerne $\text{ggT}(x_k - x_l, N)$ für alle $0 \leq k, l \leq q$ berechnen würden, dies wären jedoch $\sim N^{\frac{1}{4}} \cdot N^{\frac{1}{4}} \sim N^{\frac{1}{2}}$ Berechnungen!

Idee: Ist

$$x_k \equiv x_l \pmod{p},$$

so auch

⁷Nach John M. Pollard (geb. 1941), ein britischer Mathematiker

$$\begin{aligned}x_{k+1} &\equiv x_{l+1} \pmod{p} \\x_{k+2} &\equiv x_{l+2} \pmod{p} \\&\vdots\end{aligned}$$

Angenommen, wir haben $l < k$ mit $x_k \equiv x_l \pmod{p}$ und $0 \leq l, k \leq q$. Wähle $m \in \mathbb{N}$ mit

$$2^{m-1} < \max\{l, k-l\} \leq 2^m.$$

Dann gilt

$$x_{k-l} \equiv x_{2^m} \pmod{p}$$

und

$$\begin{aligned}k-l+2^m &< k-l+2\max\{l, k-l\} \\&\leq 4,5N^{\frac{1}{4}}\end{aligned}$$

6 Quadratreste

Bisher haben wir lineare Kongruenzgleichungen

$$ax + b \equiv 0 \pmod{M}$$

mit $a, b \in \mathbb{Z}$, $M \in \mathbb{N}$ betrachtet. Nun wollen wir uns die Frage stellen, was passiert, wenn wir zu quadratische Kongruenzgleichungen übergehen.

Seien $a, b, c \in \mathbb{Z}$, $M \in \mathbb{N}_{\geq 2}$. Wann hat die Gleichung

$$ax^2 + bx + c \equiv 0 \pmod{M}$$

eine Lösung? Laut dem chinesischen Restsatz genügt es, $M = p^k$ mit p prim zu betrachten. Wir beginnen mit dem einfachsten Fall

$$x^2 \equiv a \pmod{p}$$

Definition (quadratischer (Nicht-)Rest)

Sei $a \in \mathbb{Z}$, p prim mit $p \nmid a$. Dann nennen wir a einen **quadratischen Rest/Nichtrest** modulo p , falls $x^2 \equiv a \pmod{p}$ lösbar ist/keine Lösung hat.

Beispiel: $p = 7$: Quadratische Reste: 1, 2, 4
Quadratische Nichtreste: 3, 5, 6

$p = 5$: Quadratische Reste: 1, 4
Quadratische Nichtreste: 2, 3

Satz 6.1

Sei p eine ungerade Primzahl. Dann gibt es $\frac{p-1}{2}$ quadratische Reste und $\frac{p-1}{2}$ quadratische Nichtreste modulo p .

Vorlesung 6,
30.04.2021,
Datei 13:
Quadratreste,
Teil 1, Video
6_1

Definition (Legendre¹ Symbol)

Video 6_2 Sei p eine ungerade Primzahl und $a \in \mathbb{Z}$. Wir definieren das **Legendre Symbol** als

$$\left(\frac{a}{p}\right) = \begin{cases} 1 & \text{falls } a \equiv x^2 \pmod{p} \text{ eine Lösung hat} \\ -1 & \text{falls } a \text{ ein quadratischer Nichtrest modulo } p \text{ ist} \\ 0 & p \mid a \end{cases}$$

Beispiel: Sei $p = 7$:

$$\left(\frac{1}{7}\right) = \left(\frac{2}{7}\right) = \left(\frac{4}{7}\right) = 1$$

$$\left(\frac{7}{7}\right) = 0$$

$$\left(\frac{3}{7}\right) = \left(\frac{5}{7}\right) = \left(\frac{1}{6}\right) = -1$$

Satz 6.2

Sei p eine ungerade Primzahl, $a, b \in \mathbb{Z}$. Dann gilt

$$\left(\frac{ab}{p}\right) = \left(\frac{a}{p}\right) \left(\frac{b}{p}\right)$$

Datei 14: **Fragestellung:** Wie lassen sich die Legendre Symbole berechnen?

Quadratreste,

Teil 2,

Video 6_3 **Satz 6.3** (Euler)

Sei p eine ungerade Primzahl, $a \in \mathbb{Z}$ mit $p \nmid a$. Dann gilt

$$\left(\frac{a}{p}\right) \equiv a^{\frac{p-1}{2}} \pmod{p}.$$

Korollar 6.4

Sei p eine ungerade Primzahl. Dann gilt

$$\left(\frac{-1}{p}\right) = \begin{cases} 1 & \text{für } p \equiv 1 \pmod{4} \\ -1 & \text{für } p \equiv -1 \pmod{4} \end{cases}$$

¹Nach Adrien-Marie Legendre (1752-1833), ein französischer Mathematiker

Satz 6.5 (Quadratische Reziprozität)

Seien p, q ungerade Primzahlen mit $p \neq q$. Dann gilt

$$\left(\frac{p}{q}\right) \left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{\frac{(p-1)(q-1)}{4}}.$$

Datei 15:
Quadratreste,
Teil 3,
Video 6_4

Satz 6.6

Sei p eine ungerade Primzahl. Dann gilt

$$\left(\frac{2}{p}\right) = (-1)^{\frac{p^2-1}{8}} = \begin{cases} 1 & p \equiv \pm 1 \pmod{8} \\ -1 & p \equiv \pm 3 \pmod{8} \end{cases}$$

Beispiel:

$$\begin{aligned} \left(\frac{-70}{11}\right) &= \left(\frac{5}{11}\right) \left(\frac{7}{11}\right) \left(\frac{-1}{11}\right) \left(\frac{2}{11}\right) \\ &= \left(\frac{11}{5}\right) (-1) \left(\frac{11}{7}\right) (-1)(-1) \\ &= \left(\frac{1}{5}\right) (-1) \left(\frac{4}{7}\right) \\ &= -1 \end{aligned}$$

Beispiel: Bestimme $\left(\frac{3}{p}\right)$ für ungerade Primzahlen $p \neq 3$.

Fall 1: $p \equiv 1 \pmod{4}$. Dann gilt

$$\left(\frac{3}{p}\right) = \left(\frac{p}{3}\right)$$

und $\left(\frac{3}{p}\right) = 1 \iff p \equiv 1 \pmod{3}$.

Fall 2: $p \equiv -1 \pmod{4}$. Dann gilt

$$\left(\frac{3}{p}\right) = -\left(\frac{p}{3}\right)$$

und $\left(\frac{3}{p}\right) = 1 \iff p \equiv 2 \pmod{3}$.

Insgesamt folgt also

$$\left(\frac{3}{p}\right) = \begin{cases} 1 & p \equiv \pm 1 \pmod{12} \\ -1 & p \equiv \pm 5 \pmod{12} \end{cases}$$

Satz 6.7

Es gibt unendlich viele Primzahlen $p \equiv 1 \pmod{4}$.

Video 6_5

Beobachtung: Das Legendre Symbol $\left(\frac{a}{p}\right)$ ist beinahe periodisch in p .

Satz 6.8

Sei $a \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, p, q ungerade Primzahlen mit $p \nmid a$ und $q \nmid a$. Angenommen $a \equiv 1 \pmod{4}$ und $p \equiv q \pmod{|a|}$, oder $a \not\equiv 1 \pmod{4}$ und $p \equiv q \pmod{4|a|}$, dann gilt

$$\left(\frac{a}{p}\right) = \left(\frac{a}{q}\right)$$

Lemma 6.9

Seien $u_1, \dots, u_r \in \mathbb{Z}$ ungerade. Dann gilt

$$\sum_{i=1}^r \frac{u_i - 1}{2} \equiv \frac{u_1 \cdots u_r - 1}{2} \pmod{2}$$

und

$$\sum_{i=1}^r \frac{u_i^2 - 1}{8} \equiv \frac{(u_1 \cdots u_r)^2 - 1}{8} \pmod{2}$$

Satz 6.10

Vorlesung 7, 04.05.2021 Sei p eine Primzahl mit $p \equiv -1 \pmod{4}$ und wir nehmen an, dass $2p + 1$ ebenfalls prim ist. Dann gilt

Video 7_2

$$2p + 1 \mid 2^p - 1.$$

Dieser Satz sagt insbesondere, dass für $p > 3$ in diesem Fall $2^p - 1$ keine Primzahl ist. Er vor allem relevant in der noch offenen Frage, ob es unendlich viele Mersenne²-Primzahlen (also Primzahlen der Form $2^p - 1$) gibt.

Satz 6.11 (Pépin³-Test)

Definiere $F_n := 2^{2^n} + 1$ für $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt, dass F_n genau dann prim ist, wenn gilt

$$3^{\frac{1}{2}(F_n - 1)} \equiv -1 \pmod{F_n}.$$

²Nach Marin Mersenne (1588-1648), ein französischer Theologe, Mathematiker und Musiktheoretiker

³Nach Théophile Pépin (1826-1904), ein französischer Mathematiker

Die im Satz 6.11 definierten Zahlen F_n werden Fermat-Zahlen genannt. Bisher ist noch unbekannt, ob unendlich viele der Fermat-Zahlen auch Primzahlen sind. Fermat hatte seinerzeit behauptet, alle Fermat-Zahlen seien Primzahlen, dies wurde allerdings von Euler widerlegt, der zeigte, dass F_5 nicht prim ist. Inzwischen wird angenommen, dass tatsächlich lediglich F_0, \dots, F_4 prim sind. Da die Fermat-Zahlen allerdings durch die doppelte Exponentialität so dünn sind ist es sehr schwer, sie tatsächlich zu überprüfen. Die kleinste bisher ungetestete Fermat-Zahl ist F_{33} , welche 2.585.287.973 Stellen hat.

Lemma 6.12 (Gauß'sches Lemma)

Sei $p > 2$ eine Primzahl. Wir nennen $1, 2, \dots, \frac{p-1}{2} \bmod p$ positive Restklassen und $-1, -2, \dots, -\frac{p-1}{2} \bmod p$ negative Restklassen $\bmod p$. Sei $a \in \mathbb{Z}$ mit $p \nmid a$ und μ die Zahl der negativen Restklassen in der Folge $a, 2a, \dots, \frac{p-1}{2}a \bmod p$. Dann gilt

Datei 16:
Quadratische
Reziprozität,
Video 7_3

$$\left(\frac{a}{p}\right) = (-1)^\mu.$$

Beispiel: $\left(\frac{3}{5}\right)$:

1, 2 positive Restklassen modulo 5

3, 4 negative Restklassen modulo 5

$3 \cdot 1 \equiv -2, 3 \cdot 2 \equiv 1$. Das heißt in diesem Beispiel haben wir $\mu = 1$ und $\left(\frac{3}{5}\right) = (-1)^\mu = -1$.

Definition (Untere Gaußklammer)

Sei $x \in \mathbb{R}$. Wir definieren

Video 7_5

$$\lfloor x \rfloor = \max\{m \in \mathbb{Z} \mid m \leq x\}.$$

Beispiel: $\lfloor 3 \rfloor = 3, \lfloor 2, 8 \rfloor = 2$

Lemma 6.13

Sei $p > 2$ eine Primzahl, $a \in \mathbb{Z}$ mit $2 \nmid a$ und $p \nmid a$. Sei

$$S(a, p) := \sum_{s=1}^{\frac{p-1}{2}} \left\lfloor \frac{as}{p} \right\rfloor.$$

Dann gilt

$$\left(\frac{a}{p}\right) = (-1)^{S(a, p)}.$$

6.1 Das Jacobi-Symbol

Vorlesung 8, **Motivation:** schnelle Berechnung von Legendre Symbolen. Angenommen p ist eine
 07.05.2021, (große) Primzahl, $n < p$ und wir wollen $\left(\frac{n}{p}\right)$ berechnen. Unsere Strategie sah dafür
 Video 8_1 sah bisher wie folgt aus:

Nehme eine Primfaktorzerlegung von $n = q_1 \cdot q_2 \cdots q_r$ mit q_1, \dots, q_r prim. Dann gilt

$$\left(\frac{n}{p}\right) = \left(\frac{q_1}{p}\right) \left(\frac{q_2}{p}\right) \cdots \left(\frac{q_r}{p}\right)$$

Wende jetzt quadratische Reziprozität an.

Problem: Wir müssen für dieses Vorgehen zunächst eine Primfaktorzerlegung von n finden.

Definition (Jacobi-Symbol)

Sei $n \in \mathbb{N}$ ungerade und $m \in \mathbb{Z}$ mit $\text{ggT}(m, n) = 1$. Sei $n = p_1 p_2 \cdots p_r$ mit p_1, \dots, p_r Primzahlen. Dann definieren wir

$$\left(\frac{m}{n}\right) = \left(\frac{m}{p_1}\right) \left(\frac{m}{p_2}\right) \cdots \left(\frac{m}{p_r}\right).$$

Achtung: Ist $\left(\frac{m}{n}\right) = 1$, dann wissen wir im Allgemeinen noch nicht, ob die Kongruenz $m \equiv x^2 \pmod{n}$ eine Lösung hat!

Beispiel:

$$\begin{aligned} \left(\frac{-1}{21}\right) &= \left(\frac{-1}{7}\right) \left(\frac{-1}{3}\right) \\ &= (-1)(-1) \\ &= 1, \end{aligned}$$

aber $x^2 \equiv -1 \pmod{21}$ hat keine Lösung!

Satz 6.14 (Eigenschaften von Jacobi-Symbolen)

Seien $m, n \in \mathbb{N}$ ungerade mit $\text{ggT}(m, n) = 1$. Dann gilt

- i) $\left(\frac{-1}{n}\right) = (-1)^{\frac{n-1}{2}}$
- ii) $\left(\frac{2}{n}\right) = (-1)^{\frac{n^2-1}{8}}$
- iii) $\left(\frac{m}{n}\right) \left(\frac{n}{m}\right) = (-1)^{\frac{(m-1)(n-1)}{4}}$

Definitionen

größter gemeinsamer Teiler, [3](#)

Jacobi-Symbol, [32](#)

kleinstes gemeinsames Vielfaches, [3](#)

Kongruenzklasse, [11](#)

 Invertierbare Restklasse, [12](#)

Legendre Symbol, [28](#)

Ordnung, [19](#)

perfekte Zahl, [7](#)

Primitivwurzel, [20](#)

Primzahl, [2](#)

quadratischer (Nicht-)Rest, [27](#)

Teiler, [1](#)

Teilerfunktion, [7](#)