Zahlentheorie

Vorlesungsmitschrift

Prof. Dr. Damaris Schindler

LaTeX-Version von Alex Sennewald

Mathematisches Institut
Georg-August-Universität Göttingen
Sommersemester 2021

Inhaltsverzeichnis

Vorlesungsverzeichnis

Dateiverzeichnis

Dieses Skript stellt keinen Ersatz für die Vorlesungsnotizen von Prof. Schindler dar und wird nicht nochmals von ihr durchgesehen. Im Grunde sind das hier nur meine persönlichen Mitschriften, ich garantiere also weder für Korrektheit noch Vollständigkeit und werde ggf. noch weitere Beispiele und Anmerkungen einfügen. Beweise werde ich in der Regel nicht übernehmen (weil das in LaTeX einfach keinen Spaß macht).

Falls Ihr Korrekturanmerkungen habt könnt Ihr mir gern bei Stud.IP schreiben oder direkt im GitHub Repository einen pull request machen (was für mich deutlich weniger umständlich ist als der Weg über Stud.IP).

glhf,
Alex

„Die Zahlentheorie ist nützlich, weil man mit ihr promovieren kann."

–Edmund Landau

1 Primzahlen - Bausteine der ganzen Zahlen

Vorlesung 1, 13.04.2021, Datei 1: Primzahlen & Teilbarkeit, Video 1_1

Wo ergeben sich für uns in der Zahlentheorie Unterschiede, wenn wir über $\mathbb{Z}$ anstatt über $\mathbb{Q}$ arbeiten?

Beispiel: Seien $a, b \in \mathbb{Z}$, $a \neq 0$. Dann hat die Gleichung

$$ax = b$$

nicht immer eine Lösung $x \in \mathbb{Z}$.

Definition (Teiler)
Seien $a, b \in \mathbb{Z}$. Wir sagen, dass **a *ein Teiler von* b *ist*** $(a \mid b)$, falls es eine ganze Zahl $x \in \mathbb{Z}$ gibt mit $ax = b$.

Lemma 1.1
Seien $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$.

i) Falls $d \mid a$ und $d \mid b$, dann $d \mid a + b$.

ii) Ist $d \mid a$, dann auch $d \mid ab$.

iii) Ist $d \mid a$, dann gilt $db \mid ab$.

iv) Gilt $d \mid a$ und $a \mid b$, dann $d \mid b$.

v) Ist $a \neq 0$ und $d \mid a$, dann gilt $|d| \leq |a|$.

Bemerkung: Eine ganze Zahl $a \neq 0$ hat höchstens endlich viele Teiler.

Satz 1.2 (Teilen mit Rest)
Seien $a, b \in \mathbb{Z}, b > 0$. Dann gibt es $q, r \in \mathbb{Z}$ mit

$$a = bq + r, \ 0 \leq r < b.$$

Definition (Primzahl)
Video 1_2 Eine ganze Zahl $p > 1$, die genau zwei positive Teiler hat (1 und sich selbst), nenn wir ***Primzahl***.

Beispiel: $2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, \ldots$

Lemma 1.3
Sei $n \in \mathbb{N}, n > 1$ und sei $p > 1$ der kleinste positive Teiler von n. Dann ist p eine Primzahl. Ist außerdem n nicht prim, dann gilt $p \leq \sqrt{n}$.

Bemerkung: Diese Eigenschaft findet Anwendung im ***Sieb von Eratosthenes***. Dies ist ein einfacher Algorithmus, um schnell alle Primzahlen bis n zu finden. Hierfür definieren wir zunächst die Menge $A = \{z \in \mathbb{Z} \mid 2 \leq z \leq n\}$. Durch Lemma 1.3 genügt es, zusätzlich lediglich die Menge $B = \{k \cdot p \mid k \in \mathbb{Z}, p \leq \sqrt{n} \text{ prim}\}$, also alle Primzahlen $p \leq \sqrt{n}$ und deren Vielfache zu betrachten. Die Differenz $A \setminus B$ beinhaltet dann nur noch alle Primzahlen $\sqrt{n} \leq p \leq n$.

Satz 1.4 (Euklid)
Es gibt unendlich viele Primzahlen.

Satz 1.5 (Hauptsatz der Arithmetik, Primfaktorzerlegung)
Jede natürliche Zahl $n > 1$ kann auf eindeutige Weise als Produkt

$$n = p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \cdots p_r^{k_r}$$

mit $k_1, \ldots, k_r \in \mathbb{N}$ und $p_1 < p_2 < \cdots < p_r$ Primzahlen geschrieben werden.

Lemma 1.6
Video 1_3 *Seien $a, b, p \in \mathbb{N}$ und p eine Primzahl. Angenommen $p \mid ab$, dann gilt $p \mid a$ oder $p \mid b$.*

Korollar 1.7
Seien $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{N}$ und p eine Primzahl mit $p \mid a_1 \cdots a_n$. Dann $\exists 1 \leq i \leq n$ mit $p \mid a_i$.

Satz 1.8

Seien $a, b \in \mathbb{N}$ mit Primfaktorzerlegungen

$$a = p_1^{a_1} \cdot p_2^{a_2} \cdots p_r^{a_r}, \quad b = p_1^{b_1} \cdot p_2^{b_2} \cdots p_r^{b_r}$$

mit $p_1, \ldots, r_p$ Primzahlen, $p_i \neq p_j$ für $i \neq j$ und $a_i, b_i \geq 0 \; \forall \, i$. Dann gilt genau dann $b \mid a$, wenn $b_i \leq a_i \; \forall \, i$.

Der größte gemeinsame Teiler

Video 1_4

Definition (größter gemeinsamer Teiler)
Seien $a, b \in \mathbb{N}$. Der ***größte gemeinsame Teiler von* a *und* b** ist der größte Teiler d mit $d \mid a$ und $d \mid b$. Wir schreiben $\mathrm{ggT}(a, b) = d$ (im englischen $\gcd(a, b)$).

Bemerkung: Seien $a = p_1^{a_1} \cdot p_2^{a_2} \cdots p_r^{a_r}, \quad b = p_1^{b_1} \cdot p_2^{b_2} \cdots p_r^{b_r}$ mit $p_1, \ldots, r_p$ Primzahlen, $p_i \neq p_j$ für $i \neq j$ und $a_i, b_i \geq 0 \; \forall \, 1 \leq i \leq r$, und $d \in \mathbb{N}$ mit $d = p_1^{d_1} \cdot p_2^{d_2} \cdots p_r^{d_r}$, wobei $d_i \geq 0 \; \forall \, 1 \leq i \leq r$. Angenommen $d \mid a$ und $d \mid b$, dann $d_i \leq a_i, b_i \; \forall \, 1 \leq i \leq r$. Ist $d = \mathrm{ggT}(a, b)$, dann gilt $d_i = \min(a_i, b_i) \; \forall \, 1 \leq i \leq r$ und

$$\mathrm{ggT}(a, b) = p_1^{\min(a_1, b_1)} \cdot p_2^{|(a_2, b_2)} \cdots p_r^{\min(a_r, b_r)}.$$

Lemma 1.9
Seien $a, b, c, d \in \mathbb{N}$.

i) Ist $d \mid a$ und $d \mid b$, dann $d \mid \mathrm{ggT}(a, b)$.

ii) Angenommen $b \mid ac$ und $\mathrm{ggT}(a, b) = 1$. Dann gilt $b \mid c$.

iii) Sei $a \mid c$, $b \mid c$ und $\mathrm{ggT}(a, b) = 1$. Dann $ab \mid c$.

iv) Sei $d = \mathrm{ggT}(a, b)$. Dann gilt $\mathrm{ggT}\left(\frac{a}{d}, \frac{b}{d}\right) = 1$.

Das kleinste gemeinsame Vielfache

Definition (kleinstes gemeinsames Vielfaches)
Seien $a, b \in \mathbb{N}$. Die kleinste natürliche Zahl m mit $a \mid m$ und $b \mid m$ nennen wir das ***kleinste gemeinsame Vielfache von* a *und* b**. Wir schreiben $\mathrm{kgV}(a, b) = m$ (im englischen $\mathrm{lcm}(a, b)$).

Bemerkung: Seien a, b mit den gleichen Primfaktorzerlegungen wie oben. Dann

$$\mathrm{kgV}(a,b) = p_1^{\max(a_1,b_1)} \cdot p_2^{\max(a_2,b_2)} \cdots p_r^{\max(a_r,b_r)}.$$

Bemerke: $\max(a_i, b_i) + \min(a_i, b_i) = a_i + b_i$. Also $ab = \mathrm{ggT}(a,b) \cdot \mathrm{kgV}(a,b)$.

Definition
Seien $a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{Z}$, nicht alle gleich null. Der größte gemeinsame Teiler von $a_1, \ldots, a_k$ ist die größte natürliche Zahl d, die jedes der a_i teilt. Wir schreiben $d = \mathrm{ggT}(a_1, \ldots, a_k)$. Analog dazu können wir das kleinste gemeinsame Vielfache von $a_1, \ldots, a_k$ als die kleinste positive ganze Zahl m definieren, die durch jedes der a_i teilbar ist, $m = \mathrm{kgV}(a_1, \ldots, a_k)$.

1.1 Der Euklidische Algorithmus

Datei 2: Der Euklidische Algorithmus, Video 1_5

Motivation: Seien $a, b \in \mathbb{N}$. Wie können wir $\mathrm{ggT}(a,b)$ schnell berechnen?

Bemerkung: Für $a, b \in \mathbb{N}$ schreibe $a = qb + r$ mit $0 \leq r < b$.

i) Ist $d \in \mathbb{N}$ mit da und $d \mid b$, dann gilt auch $d \mid r$.

ii) Ist $d \mid b$ und $d \mid r$, dann $d \mid a$.

Es folgt: $\mathrm{ggT}(a,b) = \mathrm{ggT}(b,r)$.

Beispiel: $a = 270,\ b = 192$

$$\begin{aligned} 270 &= 1 \cdot 192 + 78 \\ 192 &= 2 \cdot 78 + 36 \\ 78 &= 2 \cdot 36 + 6 \\ 36 &= 6 \cdot 6 + 0 \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \mathrm{ggT}(270, 192) = \ldots = \mathrm{ggT}(6, 0) = 6$$

Im Allgemeinen sieht das wie folgt aus:

$$\begin{aligned} a &= q_0 b + r_1 \\ b &= q_1 r_1 + r_2 \\ r_1 &= q_2 r_2 + r_3 \\ &\dots \\ r_{k-2} &= q_{k-1} r_{k-1} + r_k \\ r_{k-1} &= q_k r_k + 0 \\ \implies \text{ggT}(a,b) &= r_k \end{aligned}$$

Warum endet der Euklidische Algorithmus nach endlich vielen Schritten? In jedem Schritt gilt $0 \leq r_{j+1} < r_j \; \forall \, j$. Da wir mit einer endlichen Zahl b angefangen haben ist auch unser r_1 endlich, und da sich der Rest in jedem Schritt um mindestens 1 verkleinert sind wir nach maximal $|b|$ Schritten fertig.

Der Euklidische Algorithmus ist schnell. Sei $a > b$, dann ist $r_1 < \frac{a}{2}$. Wenn wir dies fortsetzen erhalten wir

$$\begin{aligned} r_2 < r_1 &< \frac{a}{2} \\ r_3 < \frac{r_1}{2} &< \frac{a}{4} \\ r_4 < \frac{r_2}{2} &< \frac{a}{4} \\ &\dots \end{aligned}$$

Nach Vollständiger Induktion folgt

$$r_m < \frac{a}{2^{\frac{m}{2}}} \qquad \forall \, m > 0.$$

Daher $1 \leq r_k < \frac{a}{2^{\frac{k}{2}}}$, also $2^{\frac{k}{2}} < a$ und somit

$$k < 2 \frac{\log a}{\log 2}$$

Der erweiterte Euklidische Algorithmus

Der Euklidische Algorithmus kann noch mehr als lediglich den größten gemeinsamen Teiler zu berechnen. Sein $a, b \in \mathbb{N}$.

Vorlesung 2, 16.04.2021, Video 2_1

$$
\begin{aligned}
a &= q_0 b + r_1 && r_1 = a - q_0 b \\
0 &\le r_1 < b \\
b &= q_1 r_1 + r_2 && r_2 = b - q_1 r_1 = b - q_1(a - q_0 b) \\
0 &\le r_2 < r_1 && \quad = am_2 + bn_2,\ m_2, n_2 \in \mathbb{Z} \\
r_1 &= q_2 r_2 + r_3 && r_3 = r_1 - q_2 r_2 \\
0 &\le r_3 < r_2 && \quad = am_2 + bn_3,\ m_3, n_3 \in \mathbb{Z} \\
& && \quad \vdots \\
r_{k-2} &= q_{k-1} r_{k-1} + r_k && r_k = am_k + bn_k \\
0 &\le r_k < r_{k-1} && \quad m_k, n_k \in \mathbb{Z} \\
r_{k-1} &= q_k r_k + 0
\end{aligned}
$$

Satz 1.10
Seien $a, b \in \mathbb{N}$. Dann gibt es $x, y \in \mathbb{Z}$ mit

$$ax + by = \mathrm{ggT}(a, b).$$

2 Die Teilerfunktion

Datei 3:
Teilerfunktion
Kongruenzen,
Video 2_2

Definition (Teilerfunktion)
Sei $n \in \mathbb{N}$. Wir definieren $d(n)$ als die Zahl der positiven Teiler von n, d.h.

$$d(n) = \sum_{\substack{d|n \\ d\geq 1}} 1.$$

Weiter definieren wir

$$S(n) = \sum_{\substack{d|n \\ d\geq 1 \\ d<n}} d$$

und

$$\sigma(n) = \sum_{\substack{d|n \\ d\geq 1}} d$$

Beispiel: $d(7) = 2,\ d(6) = 4$
Sei p eine Primzahl, dann gilt $d(p) = 2$ und $d(p^k) = k + 1$ für $k \geq 0$.

Bemerkung: $\sigma(n) = S(n) + n$

Definition (perfekte Zahl)
Wir nennen eine natürliche Zahl n ***perfekt***, falls

$$S(n) = n.$$

Beispiel: $6 = 1 + 2 + 3$ ist perfekt. 28 ist perfekt.

Lemma 2.1
Seien $m, n \in \mathbb{N}$ *mit* $\mathrm{ggT}(m, n) = 1$. *Dann gilt*

$$d(mn) = d(m)d(n)$$

und

$$\sigma(mn) = \sigma(m)\sigma(n).$$

Bemerkung: $d(n)$ und $\sigma(n)$ sind sogenannte *multiplikative Funktionen.*

Kennt man die Primfaktorzerlegung von n, so lassen sich diese Funktionen sehr einfach berechnen. Wir wollen nun eine allgemeine Formel für $d(n)$ aufstellen.

Sei $n = p_1^{k_1} \cdots p_r^{k_r}$ mit $p_1 < \cdots < p_3$ Primzahlen, $k_1, \cdots, k_r \geq 0$. Dann gilt nach Lemma 2.1

$$\begin{aligned} d(n) &= d\left(p_1^{k_1} \cdots p_r^{k_r}\right) \\ &= d\left(p_1^{k_1}\right) \cdots d\left(p_r^{k_r}\right) \end{aligned}$$

Es gilt

$$d(p^k) = k + 1,$$

also

$$d(n) = (k_1 + 1)(k_2 + 1) \cdots (k_r + 1).$$

Weiterhin berechnen wir

$$\begin{aligned} \sigma(n) &= \sigma\left(p_1^{k_1}\right) \cdots \sigma\left(p_r^{k_r}\right) \\ \sigma\left(p^k\right) &= 1 + p + p^2 + \cdots + p^k \\ &= \frac{p^{k+1} - 1}{p - 1} \end{aligned}$$

Wir erhalten

$$\sigma(n) = \frac{p_1^{k_1+1} - 1}{p_1 - 1} \cdots \frac{p_r^{k_r+1} - 1}{p_r - 1}$$

Satz 2.2
Sei $n = p_1^{k_1} \cdots p_r^{k_r}$ mit $p_1 < \cdots < p_3$ Primzahlen, $k_1, \cdots, k_r \geq 0$. Dann gilt

$$\begin{aligned} d(n) &= \prod_{i=1}^{r} (k_i + 1) \\ \sigma(n) &= \prod_{i=1}^{r} \frac{p_i^{k_i+1} - 1}{p_i - 1}. \end{aligned}$$

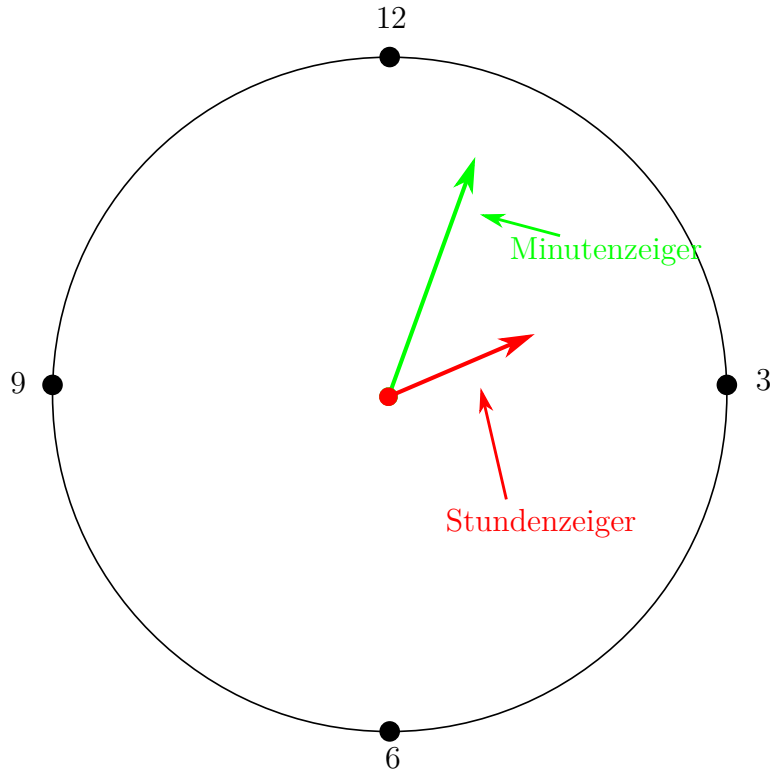
Beispiel: $d(25 \cdot 3) = d(25)d(3) = d(5^2)d(3) = 3 \cdot 2 = 6$

Bemerkung: $S(n)$ ist keine multiplikative Funktion:
$1 = S(2)S(3) \neq S(6) = 6$

3 Kongruenzen

Video 2_3

Beispiel: Die Uhr



Der Minutenzeiger weiß nur, wie viele Minuten es nach einer vollen Stunde ist

Definition (Kongruenz, Kongruenzklasse)
Sei $M \in \mathbb{N},\ M > 1,\ a, b \in \mathbb{Z}$. Wir sagen, dass **a *kongruent zu* b *ist modulo* M**, falls $M \mid (a - b)$, schreibe $a \equiv b \bmod M$.
Sei $r \in \mathbb{Z}$. Die Menge aller ganzen Zahlen x mit $x \equiv r \bmod M$ nennen wir die ***Kongruenzklasse von* r *modulo* M**.

Beispiel: $7 \equiv 27 \bmod 10,\ 4 \equiv 1 \bmod 3$

Lemma 3.1

Sei $M > 1,\ M \in \mathbb{N},\ a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{Z}$ *mit* $a_1 \equiv a_2 \bmod M$ *und* $b_1 \equiv b_2 \bmod M$. *Dann gilt*

i) $a_1 + b_1 \equiv a_2 + b_2 \bmod M$

ii) $a_1 - b_1 \equiv a_2 - b_2 \bmod M$

iii) $a_1 b_1 \equiv a_2 b_2 \bmod M$

Notation: Schreibe $\mathbb{Z}/M\mathbb{Z}$ für die Menge aller Restklassen modulo M.

Eine Anwendung: Eine natürliche Zahl n ist durch 9 teilbar genau denn, wenn die Summe ihrer Ziffern in der Dezimaldarstellung (also ihre Quersumme) durch 9 teilbar ist.

Beispiel: 43227 ist durch 9 teilbar.

3.1 Inverse Restklassen

Datei 4: Inverse Restklassen, Video 2_4

Seien $x, y \in \mathbb{Z}$ mit $2x = 2y$. Die echten Detektive unter uns erkennen, dass man dies einfach zu $x = y$ kürzen kann. Nun ist die Frage, ob das auch funktioniert, wenn wir statt über $\mathbb{Z}$ über dem Restklassenring arbeiten, also ob wir auch bei Kongruenzen kürzen können.

Beispiel:

1. $2x \equiv 2y \bmod 4 \overset{?}{\Longrightarrow} x \equiv y \bmod 4$
   Nein ↯, z.B. $2 \cdot 3 \equiv 2 \cdot 1 \bmod 4,\ 3 \not\equiv 1 \bmod 4$

2. $2x \equiv 2y \bmod 5 \implies 5 \mid (2x - y)$, d.h. $5 \mid x - y \implies x \equiv y \bmod 5$
   oder bemerke, dass $2 \cdot 3 \equiv 1 \bmod 5$ und multipliziere die obige Kongruenz mit 3.

Definition (Invertierbare Restklasse)
Sei $M \in \mathbb{N},\ M > 1$. Wir nennen $a \in \mathbb{Z}$ ***invertierbar modulo*** **M**, falls es $\exists\, b \in \mathbb{Z}$ gibt mit $ab \equiv 1 \bmod M$. In dem Fall nennen wir die Restklasse a (modulo M) invertierbar.

Beispiel: 2 ist invertierbar modulo 25, denn $2 \cdot 13 \equiv 1 \bmod 25$.

Satz 3.2
Sei $M \in \mathbb{N},\ M > 1,\ a \in \mathbb{Z}$. Dann ist a invertierbar modulo M genau dann, wenn $\mathrm{ggT}(a, M) = 1$.

Bemerkung: Ist $a \in \mathbb{Z}$ invertierbar modulo M, dann ist jedes Element in der Restklasse $a \bmod M$ invertierbar modulo M. Die Menge aller $b \in \mathbb{Z}$ mit $ba \equiv 1 \bmod M$ ist eine Restklasse modulo M, schreibe a^{-1} (modulo M) für diese Restklasse. Video 2_5

Sei $a \in \mathbb{Z},\ M \in \mathbb{N},\ M > 1$ mit $\mathrm{ggT}(a, M) = 1$. Wie können wir die inverse Restklasse a^{-1} berechnen?
$\Longrightarrow$ wir verwenden den erweiterten Euklidischen Algorithmus um $x, y \in \mathbb{Z}$ zu finden mit $ax + My = 1$.

Notation: Ist $M > 1$, so schreiben wir $(\mathbb{Z}/M\mathbb{Z})^*$ für die Menge der invertierbaren Restklassen modulo M.

Beispiel:

1. $(\mathbb{Z}/6\mathbb{Z})^* = \left\{\bar{1}, \bar{5}\right\}$, also $|(\mathbb{Z}/6\mathbb{Z})^*| = 2$
2. Sei p prim.

$$(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^* = \{1, 2, \ldots, p-1\} \implies |(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*| = p - 1$$

Lemma 3.3 (Satz von Wilson)
Sei p prim. Dann gilt $(p-1)! \equiv -1 \bmod p$.

3.2 Lineare Kongruenzgleichungen

Fragestellung: Seien $a, b \in \mathbb{Z},\ M \in \mathbb{N}$. Finde alle ganzzahligen Lösungen $x \in \mathbb{Z}$, sodass gilt Vorlesung 3, 20.04.2021, Datei 5: Lineare Kongruenzgleichungen, Video 3_1

$$ax \equiv b \mod M.$$

Beispiel: i) $5x \equiv 7 \bmod 15$ hat *keine* Lösung

ii) $5x \equiv 25 \bmod 15$, d.h. $15 \mid (5x - 25) = 5(x-5) \iff 3 \mid x-5$ oder $x \equiv 5 \bmod 3$, d.h. $x \equiv 2 \bmod 3$. Die Lösungen der Kongruenz $5x \equiv 25 \bmod 15$ sind gegeben durch alle $x \in \mathbb{Z}$ der Form $x = 2 + 3k$ mit $k \in \mathbb{Z}$.

Satz 3.4
Seien $a, b \in \mathbb{Z}$, $M \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$ und $d = \mathrm{ggT}(a, M)$. Die Gleichung

$$ax \equiv b \mod M$$

hat genau dann eine Lösung $x \in \mathbb{Z}$, wenn $d \mid b$.
Wenn dies gilt, dann ist die Gleichung $ax \equiv b \bmod M$ äquivalent zu

$$\frac{a}{d}x \equiv \frac{b}{d} \mod \frac{M}{d}.$$

Diese Gleichung hat eine Lösung, denn

$$\mathrm{ggT}\left(\frac{a}{d}, \frac{M}{d}\right) = 1.$$

3.3 Der Chinesische Restsatz

Datei 6: Der Chinesische Restsatz, Video 3_2

Wir wollen alle $x \in \mathbb{Z}$ finden, die nach Teilen mit Rest durch 2,3,5 die Reste 1,2,3 lassen. Anders formuliert: Finde $x \in \mathbb{Z}$ mit

$$\begin{aligned} x &\equiv 1 \mod 2 \\ x &\equiv 2 \mod 3 \\ x &\equiv 3 \mod 5 \end{aligned}$$

Ist $x \in \mathbb{Z}$ eine Lösung der obigen Kongruenzen, dann auch $x + 30k$ für jedes $k \in \mathbb{Z}$. Sei nun x eine solche Lösung. Dann gilt $x \equiv 3 \bmod 5$, schreibe $x = 3 + 5u$ mit $u \in \mathbb{Z}$. Es muss außerdem gelten

$$3 + 5u \equiv 2 \mod 3,$$

d.h. $2u \equiv 2 \bmod 3 \iff u \equiv 1 \bmod 3$, also $u = 1 + 3v$ mit $v \in \mathbb{Z}$, schreibe also

$$\begin{aligned} x &= 3 + 5(1 + 3v) \\ &= 8 + 15v. \end{aligned}$$

Zuletzt betrachten wir nun

$$8 + 15v \equiv 1 \mod 2.$$

Daraus folgt, dass v ungerade ist, d.h. $v = 1 + 2w$ mit $w \in \mathbb{Z}$. Wir erhalten

$$\begin{aligned} x &= 8 + 15(1 + 2w) \\ &= 23 + 30w, \quad w \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Im Allgemeinen:

Seien $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{Z}$, $m_1, \ldots, m_n \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$. Finde alle $x \in \mathbb{Z}$ mit

$$\begin{aligned} x &\equiv c_1 \mod m_1 \\ x &\equiv c_2 \mod m_2 \\ x &\equiv c_n \mod m_n \end{aligned} \tag{$*$}$$

Achtung: Es ist zu beachten, dass es manchmal keine Lösung gibt, z.B. bei

$$\begin{aligned} x &\equiv 1 \mod 3 \\ x &\equiv 2 \mod 9. \end{aligned}$$

Dies rührt daher, dass wir bisher keine Annahmen über die Module getroffen haben, was wir später noch für den chinesischen Restsatz tun werden. Zunächst fassen wir unsere Vorüberlegungen, dass sich unsere Lösungsmenge durchs kleinste gemeinsame Vielfache der Module ergibt, in folgendem Lemma zusammen:

Lemma 3.5
Sei $x_0 \in \mathbb{Z}$ eine Lösung zum System $*$. Dann besteht die gesamte Lösungsmenge des Systems aus der Restklasse $x_0 \bmod M$ mit $M = \mathrm{kgV}(m_1, \ldots, m_n)$.

Satz 3.6 (Chinesischer Restsatz)
Wir benutzen die gleiche Notation wie im System $*$. Angenommen, $\mathrm{ggT}(m_i, m_j) = 1$ für $i \neq j$, dann hat das System $*$ genau eine Restklasse modulo $m_1 \cdots m_n$ als Lösung. Video 3_3

4 Die Eulersche ϕ-Funktion

Ordnungen und Primitivwurzeln

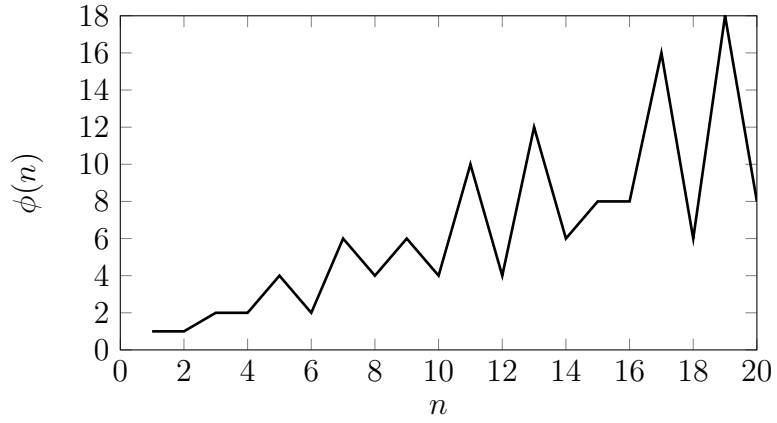
Datei 7: Eulersche ϕ-Funktion, Video 3_4

Fragestellung: Sei $M \geq 2$. Wie viele invertierbaren Restklassen gibt es modulo M?

Notation: Wir schreiben

$$\phi(M) = |(\mathbb{Z}/M\mathbb{Z})^*| = |\{0 < a \leq M \mid \mathrm{ggT}(a, M) = 1\}|.$$

Beispiel: i) $\phi(2) = 1, \phi(3) = 2, \phi(4) = 2, \phi(5) = 4, \phi(6) = 2$



ii) Sei p eine Primzahl. Dann ist $\phi(p) = p - 1$.

iii) Sei $k \geq 1$ und p prim. Dann gilt

$$\begin{aligned}\phi(p^k) &= p^k - \left|\left\{0 < a \leq p^k \mid \mathrm{ggT}\left(a, p^k\right) > 1\right\}\right| \\ &= p^k - p^{k-1}\end{aligned}$$

Eine Beobachtung:

$$\begin{aligned}\phi(1) + \phi(p) + \phi(p^2) + \cdots + \phi(p^k) &= 1 + (p-1) + (p^2 - p) + \cdots + (p^k - k^{k-1}) \\ &= p^k\end{aligned}$$

Satz 4.1
Sei $n \in \mathbb{Z}$. Dann gilt

$$\sum_{d|n} \phi(d) = n.$$

Nun wollen wir uns mit der Berechnung der Eulerschen ϕ-Funktion beschäftigen. Für Primzahlpotenzen haben wir das schon getan und wollen dies jetzt auf allgemeine natürliche Zahlen anhand ihrer Primfaktorzerlegung fortsetzen.

Satz 4.2
Video 3_5 *ϕ ist eine multiplikative Funktion, d.h. für $m, n \in \mathbb{N}$ mit $\mathrm{ggT}(m, n) = 1$ gilt*

$$\phi(mn) = \phi(m)\phi(n).$$

Korollar 4.3
Sei $m = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \cdots p_r^{k_r}$ mit $p_1 < p_1 < \cdots < p_r$ Primzahlen und $k_i \geq 0$ für $1 \leq i \leq r$. Dann gilt

$$\phi(m) = \prod_{i=1}^{r} \left(p_i^{k_1} - p_i^{k_i - 1} \right)$$

oder

$$\phi(m) = m \cdot \prod_{\substack{p|m \\ p \ prim}} \left(1 - \frac{1}{p} \right).$$

Vorlesung 4, 23.04.2021, Datei 8: Kleiner Satz von Fermat, Video 4_1

Satz 4.4 (Fermats kleiner Satz)
Sei $a \in \mathbb{Z}$, p eine Primzahl. Dann gilt

$$a^p \equiv a \mod p.$$

Ist $p \nmid a$, dann gilt

$$a^{p-1} \equiv 1 \mod p.$$

Satz 4.5 (Euler)
Sei $M \geq 2$, $a \in \mathbb{Z}$ mit $\mathrm{ggT}(a, M) = 1$. Dann gilt

$$a^{\phi(M)} \equiv 1 \mod M.$$

Bemerkung: $(\mathbb{Z}/M\mathbb{Z})^*$ ist eine Gruppe der Ordnung $\phi(M)$. Ist $a \in (\mathbb{Z}/M\mathbb{Z})^*$, dann gilt $a^{\phi(M)})1$ in $(\mathbb{Z}/M\mathbb{Z})^*$.

4.1 Ordnungen

Sei $M \in \mathbb{Z}_{\geq 2},\ a \in \mathbb{Z}$ mit $\mathrm{ggT}(a, M) = 1$. Wir wissen bereits

$$a^{\phi(M)} \equiv 1 \mod M.$$

Datei 9: Ordnungen, Video 4_2

Sei $E = \{k \in \mathbb{N} \mid a^k \equiv 1 \bmod M\}$. Dann ist $E \neq \emptyset$.

Definition (Ordnung)
Das kleinste Element in E nennen wir die ***Ordnung von* a *modulo* M**.

Notation: $\mathrm{ord}_M(a)$

Beispiel: Seien $M = 5,\ a = 2$. Für welche $k \in \mathbb{N}$ gilt $2^k \equiv 1 \bmod 5$?

$$2^1 \equiv 2,\ 2^2 \equiv 4,\ 2^3 \equiv 3,\ 2^4 \equiv 4 \mod 5$$

Also gilt $\mathrm{ord}_5\, 2 = 4$.

Lemma 4.6
Sei $M \in \mathbb{Z}_{\geq 2},\ a \in \mathbb{Z}$ mit $\mathrm{ggT}(M, a) = 1$. Angenommen $a^k \equiv 1 \bmod M$. Dann gilt

$$\mathrm{ord}_M\, a \mid k.$$

Wir betrachten zunächst eine Verschärfung des Satzes von Euler (4.5): Video 4_3
Sei $M \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$ von der Form

$$M = p_1^{k_1} \cdots p_r^{k_r}$$

mit $p_1 < \cdots < p_r$ prim und $k_1, \ldots, k_r \geq 1$. Setze

$$\lambda(M) = \mathrm{kgV}_{1 \leq i \leq r} \left(p_1^{k_i} - p_i^{k_i - 1}\right) = \mathrm{kgV}_{1 \leq i \leq r}\, \phi\left(p_i^{k_i}\right)$$

Vergleiche mit

$$\phi(M) = \prod_{i=1}^{r} \left(p_1^{k_i} - p_i^{k_i - 1}\right)$$

Unser Ziel ist nun, zu zeigen, dass wir im Satz von Euler $\phi(M)$ einfach durch $\lambda(M)$ ersetzen können, was kleiner als $\phi(M)$ sein kann.

Satz 4.7
Sei $M \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$ wie oben, d.h.

$$M = p_1^{k_1} \cdots p_r^{k_r}$$

mit $p_1 < \cdots < p_r$ prim und $k_1, \ldots, k_r \geq 1$. Sei $a \in \mathbb{Z}$ mit $\mathrm{ggT}(a, M) = 1$. Dann gilt

$$a^{\lambda(M)} \equiv 1 \mod M.$$

Definition (Primitivwurzel)
Sei $M \geq 2$. Eine ganze Zahl $g \in \mathbb{Z}$ mit $\mathrm{ggT}(M, g) = 1$ und

$$\left\{\bar{g}, \bar{g}^2, \ldots, \bar{g}^{\phi(M)}\right\} = (\mathbb{Z}/M\mathbb{Z})^*$$

nennen wir ***Primitivwurzel modulo*** **M**.

Beispiel: 1. 2 ist eine Primitivwurzel modulo 5, denn

$$\left\{2, 2^2, 2^3, 2^4\right\} = (\mathbb{Z}/M\mathbb{Z})^*.$$

2. Gibt es eine Primitivwurzel modulo $M = 15$? In anderen Worten, gibt es $g \in \mathbb{Z}$, $\mathrm{ggT}(g, 15) = 1$, mit $\left\{g, g^2, \ldots, g^{\phi(15)}\right\} = (\mathbb{Z}/15\mathbb{Z})^*$?
Bemerke $\phi(15) = \phi(5)\phi(3) = 4 \cdot 2 = 8$, aber $\lambda(15) = \mathrm{kgV}(\phi(15), \phi(3)) = 4$.
Also für $\mathrm{ggT}(g, 15) = 1$ $\left|\left\{g, g^2, \ldots, g^{\phi(15)}\right\}\right| \leq 4$, denn $g^{\lambda(15)} = g^4 \equiv 1 \mod 15$.
Also gibt es keine Primitivwurzel modulo 15.

3. Sei $M = pq$ mit pq, prim, $p, q > 2$. Dann ist $\phi(M) = (p-1)(q-1)$, aber $\lambda(M) = \mathrm{kgV}(p-1, q-1) < \phi(M)$. Also gibt es keine Primitivwurzel modulo M.

Im Weiteren wollen wir nun zeigen, dass es im Allgemeinen zu jeder Primzahl auch eine Primitivwurzel gibt. Dafür benötigen wir zunächst folgende Lemmata:

Lemma 4.8
Datei 10: Primitivwurzeln, Video 4_4
Seien $a, b \in (\mathbb{Z}/M\mathbb{Z})^*$ mit $M \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$, $A = \mathrm{ord}_M\, a, B = \mathrm{ord}_M\, b$. Angenommen $\mathrm{ggT}(A, B) = 1$, dann gilt

$$\mathrm{ord}_M\, ab = AB.$$

Lemma 4.9
Seien $a_1, \ldots, a_m \in (\mathbb{Z}/M\mathbb{Z})^*$ mit $M \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$ und $A = \mathrm{kgV}(\mathrm{ord}_M(a_1), \ldots, \mathrm{ord}_M(a_m))$.

Dann $\exists\, b \in (\mathbb{Z}/M\mathbb{Z})^*$ *mit* $\operatorname{ord}_M b = A$.

4.2 Primitivwurzeln

Video 4_5

Satz 4.10
Sei p eine Primzahl. Dann gibt es eine Primitivwurzel modulo p.

Das bedeutet, dass es $g \in \mathbb{Z}$ (oder $g \in \mathbb{N}$) gibt mit $\{g, g^2, \ldots, g^{p-1}\} = (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$. Wie klein kann man dieses g nun wählen?

Vermutung
Sei p eine Primzahl. Dann gibt es eine Primitivwurzel $g \in \mathbb{N}$ mit $g < 2(\log p)^2$.

Von einem Beweis dieser Vermutung sind wir noch sehr weit enfernt. Doch was ist bisher bekannt? Es gib eine Primitivwurzel $g \in \mathbb{N}$ modulo p mit $g < Cp^{\frac{1}{4}+\varepsilon}$, wobei $C, \varepsilon > 0$ und ε beliebig klein. Dieses Resultat folgt aus Arbeiten von D.A. Burgess aus dem Jahre 1962.

Vermutung (Artin)
2 ist eine Primitivwurzel für unendlich viele Primzahlen p.

Eine leicht abgeänderte und „aufgefächerte“ Variante dieser Vermutung stellt der folgende Satz dar, der sich auch tatsächlich beweisen ließ:

Satz (Heath-Brown, 1986)
Mindestens eine der Zahlen 2,3,5 ist eine Primitivwurzel für unendlich viele Primzahlen p.

Um den Satz 4.10 nun beweisen zu können bedarf es noch ein wenig Vorbereitung:

Vorlesung 5, 27.04.2021, Video 5_1

Satz 4.11
Sei $P(X) = a_n X^n + \cdots + a_1 X + a_0$ mit $a_n, \ldots, a_0 \in \mathbb{Z}$ und p prim. Angenommen $p \nmid a_n$, dann hat die Gleichung $P(X) \equiv 0 \bmod p$ höchstens n verschiedene Lösungen modulo p.

Video 5_2 Für welche $M \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ gibt es eine Primitivwurzel modulo M?

Satz 4.12
Sei $k \in \mathbb{N}$ und $p > 2$ eine Primzahl. Dann gibt es eine Primitivwurzel modulo p^k.

Lemma 4.13
Sei p eine ungerade Primzahl und $k \in \mathbb{N}$. Dann gilt

$$(1+p)^{p^{k-1}} \equiv 1 + p^k \mod p^{k+1}.$$

Definitionen