Zahlentheorie

Vorlesungsmitschrift

Prof. Dr. Damaris Schindler

LaTeX-Version von Alex Sennewald

Mathematisches Institut
Georg-August-Universität Göttingen

Sommersemester 2021

Inhaltsverzeichnis

Vorlesungsverzeichnis

Dateiverzeichnis

Dieses Skript stellt keinen Ersatz für die Vorlesungsnotizen von Prof. Schindler dar und wird nicht nochmals von ihr durchgesehen. Im Grunde sind das hier nur meine persönlichen Mitschriften, ich garantiere also weder für Korrektheit noch Vollständigkeit und werde ggf. noch weitere Beispiele und Anmerkungen einfügen. Beweise werde ich in der Regel nicht übernehmen (weil das in LaTeX einfach keinen Spaß macht).

Falls Ihr Korrekturanmerkungen habt könnt Ihr mir gern bei Stud.IP schreiben oder direkt im GitHub Repository einen pull request machen (was vermutlich insgesamt weniger umständlich ist als der Weg über Stud.IP).

glhf,
Alex

1 Primzahlen - Bausteine der ganzen Zahlen

Wo liegen die Unterschiede zwischen $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{Z}$? Vorlesung 1 Datei 1

Beispiel: Seien $a, b \in \mathbb{Z}$, $a \neq 0$. Dann hat die Gleichung

$$ax = b$$

nicht immer eine Lösung $x \in \mathbb{Z}$.

Definition (Teiler)
Seien $a, b \in \mathbb{Z}$. Wir sagen, dass **a *ein Teiler von* b *ist*** ($a \mid b$), falls es eine ganze Zahl $x \in \mathbb{Z}$ gibt mit $ax = b$.

Lemma 1.1
Seien $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$.

i) Falls $d \mid a$ und $d \mid b$, dann $d \mid a + b$.

ii) Ist $d \mid a$, dann auch $d \mid ab$.

iii) Ist $d \mid a$, dann gilt $db \mid ab$.

iv) Gilt $d \mid a$ und $a \mid b$, dann $d \mid b$.

v) Ist $a \neq 0$ und $d \mid a$, dann gilt $|d| \leq |a|$.

Bemerkung: Eine ganze Zahl $a \neq 0$ hat höchstens endlich viele Teiler.

Satz 1.2 (Teilen mit Rest)
Seien $a, b \in \mathbb{Z}, b > 0$. Dann gibt es $q, r \in \mathbb{Z}$ mit

$$a = bq + r, \ 0 \leq r < b.$$

Definition (Primzahl)
Eine ganze Zahl $p > 1$, die genau zwei positive Teiler hat (1 und sich selbst), nenn wir ***Primzahl***.

Beispiel: $2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, \ldots$

Lemma 1.3
Sei $n \in \mathbb{N}, n > 1$ und sei $p > 1$ der kleinste positive Teiler von n. Dann ist p eine Primzahl. Ist außerdem n nicht prim, dann gilt $p \leq \sqrt{n}$.

Definitionen