Algebra

Vorlesungsmitschrift

Prof. Dr. Damaris Schindler

LaTeX-Version von Ben Arnold und Niklas Sennewald

Mathematisches Institut
Georg-August-Universität Göttingen
Wintersemester 2020/21

Inhaltsverzeichnis

Dieses Skript stellt keinen Ersatz für die Vorlesungsnotizen von Prof. Schindler dar und wird nicht nochmals von ihr durchgesehen. Beweise werden wir i.d.R. nicht übernehmen (weil das in LaTeX einfach keinen Spaß macht). glhf

I. Gruppen

§1. Gruppen und Gruppenhomomorphismen

Datei 1

Motivation: aus dem ersten Jahr kennen wir viele Gruppen, z.B. $(\mathbb{R}, +), (\mathbb{Z}, +), \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ für $m \in \mathbb{N}$, $\mathbb{R}^n, S_n =$ Permutationen auf n Elemente, Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ mit punktweiser Addition
erstes Ziel:

- Wiederholung Grundbegriffe von Gruppen
- erste Resultate zur Theorie endlicher Gruppen

Definition (Monoid)
Ein Monoid ist eine Menge M zusammen mit einer Verknüpfung $\circ : M \times M \to M$, die folgende Eigenschaften erfüllt:

i) $\forall\, a, b, c \in M$ gilt $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$

ii) es gibt ein Einselement $e \in M$ mit $e \circ a = a = a \circ e \;\forall\, a \in M$

Bemerkung: $(\mathbb{N}_{\geq 0}, +), (\mathbb{Q}_{\geq 0}, +)$ sind Monoide aber keine Gruppe.

Definition (Inverselemente)
Sei $(M, \circ)$ ein Monoid und $a \in M$. Wir nennen b invers zu a/*inverses Element* zu a, falls $b \circ a = a \circ b = e$.

Bemerkung: Sind $b, b' \in M$ invers zu a, dann ist $b = b'$, denn $b = b \circ e = b \circ (a \circ b') = (b \circ a) \circ b' = e \circ b' = b'$

Beispiel: Im $(\mathbb{N}_{\geq 0}, +)$ ist 0 das einzige Element, das ein inverses Element hat.

Notation: Ist $a \in M$ und $b \in M$ invers zu a, so schreiben wir $b = a^{-1}$.

Definition (Gruppe)
Wir nennen ein Monoid $(G, \circ)$ eine *Gruppe*, falls jedes $a \in G$ ein inverses Element $a^{-1} \in G$ besitzt.

Beispiel: $GL_n(\mathbb{R}) = \{A \in M_{n\times n}(\mathbb{R}) \mid \det(A) \neq 0, n \geq 0\}$ ist eine Gruppe unter Matrixmultiplikation. Für $n \geq 2$ gibt es Matrizen $A, B \in GL_n(\mathbb{R})$ mit $AB \neq BA$.

Definition (abelsche Gruppe)
Sei $(G, \circ)$ eine Gruppe. G heißt *kommutativ* oder *abelsch*, falls gilt $a \circ b = b \circ a \; \forall \, a, b \in G$.

Beispiel: ⓐ Die Gruppe aller Diagonalmatrizen in $GL_n(\mathbb{R})$

$$\left\{ A \in GL_n(\mathbb{R}) \mid A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha_n \end{pmatrix}, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \right\}$$

ist eine kommutative Gruppe unter Matrixmultiplikation.

ⓑ $M_{n\times n}(\mathbb{R})$ ist eine abelsche Gruppe unter Addition von Matrizen mit neutralem Element $\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$

Bemerkung: Sei I eine Indexmenge und $G_i, i \in I$, Gruppen. Dann ist $\prod_{i \in I} G_i$ wieder eine Gruppe unter der Verknüpfung $\big((g_i)_{i\in I}, (h_i)_{i \in I}\big) \mapsto (\underbrace{g_i h_i}_{\in G_i})_{i \in I}$ für $g_i, h_i \in G_i, i \in I$.

Beispiel: Für $m \in N$ ist $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ eine Gruppe unter Addition. Wir können nach dieser Bemerkung daraus (endliche abelsche) Gruppen

$$\mathbb{Z}/m_1\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/m_2\mathbb{Z} \times \dots \times \mathbb{Z}/m_n\mathbb{Z}$$

für $m_1, \dots, m_n \in N$ konstruieren.

Definition (Untermonoid, Untergruppe)
Sei M ein Monoid und $H \subseteq M$. Wir nennen H ein *Untermonoid*, falls $e \in H$ und gilt $a, b \in H \implies a \circ b \in H$. Sei G eine Gruppe. Eine Teilmenge $\emptyset \neq H \subseteq G$ heißt *Untergruppe* von G, falls gilt $\forall \, a, b \in H : a \circ b^{-1} \in H$.
<u>Notation:</u> Ist H eine Untergruppe von G, so schreibe auch $H \leq G$ und $H < G$ falls $H \neq G$.

Beispiel: ⓐ Für eine beliebige Gruppe G sind $\{e\}$ und G stets Untergruppen von G.

ⓑ Sei $(G, \circ) = (\mathbb{Z}, +)$ und $m \in \mathbb{N}$. Dann ist $m \cdot \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Z}$ eine Untergruppe von $\mathbb{Z}$

und $m \cdot \mathbb{Z}_{geq0}$ ein Untermonoid von $\mathbb{Z}$.

ⓒ $(\mathbb{Z}, +)$ ist eine Untergruppe $(\mathbb{C}, +)$, $(\mathbb{Z}_{geq0}, +)$ ist Untermonoid von $(\mathbb{C}, +)$.

ⓓ Sei $\mathbb{K}$ ein Körper und $n \in \mathbb{N}$. Dann ist $SL_n(\mathbb{K}) = \{A \in Mat_{n\times n}(\mathbb{K}) \mid \det(A) = 1\}$ eine Untergruppe von $GL_n(\mathbb{K}) = \{A \in M_{n\times n}(\mathbb{K}) \mid \det(A) \neq 0\}$.

Bemerkung: Sei G eine Gruppe und $H_i, i \in I$ Untergruppen von G. Dann ist auch $\bigcap_{i\in I} H_i$ eine Untergruppe von G.

Datei 2

Definition (Gruppenhomomorphismus)
Seien G, G' Gruppen. Wir nennen eine Abbildung $\varphi : G \to G'$ *Gruppenhomomorphismus*, wenn gilt

$$\varphi(a \circ b) = \varphi(a) \circ \varphi(b) \qquad \forall\, a, b, \in G.$$

Bemerkung: Statt $a \circ b$ schreiben wir im Folgenden kürzer auch ab.

Lemma 1
Sei $\varphi : G \to G'$ ein Gruppenhomomorphismus und e bzw. e' die Einselemente von G bzw. G'. Dann gilt

(i) $\varphi(e) = e'$

(ii) $\varphi(a^{-1}) = (\varphi(a))^{-1} \quad \forall\, a \in G$

Definitionen