Differenzial- und Integralrechnung III

Vorlesungsmitschrift

Prof. Dr. Dorothea Bahns

LaTeX-Version von Niklas Sennewald

Mathematisches Institut
Georg-August-Universität Göttingen

Wintersemester 2020/21

Inhaltsverzeichnis

Dieses Skript stellt keinen Ersatz für die Vorlesungsnotizen von Prof. Bahns dar und wird nicht nochmals von ihr durchgesehen, im Grunde sind das hier nur meine persönlichen Mitschriften. Beweise werde ich i.d.R. nicht übernehmen (weil das in LaTeX einfach keinen Spaß macht). glhf

§7 Differentialformen

Erinnerung an Kapitel §4: Vorlesung 14

Definition (k-Form, k-Differentialform)
Ein Schnitt im Bündel der alternierenden (total anti-symmetrischen) kovarianten k-Tensoren über einer n-dimensionalen differenzierbaren Mannigfaltigkeit M,

$$\alpha : M \to \Lambda^k T^* M := \bigcup_{p \in M} \underbrace{\Lambda^k(T_p^* M)}_{\text{äußere Algebra}},$$

heißt *k-Form*, ein glatter Schnitt heißt *k-Differentialform* und k heißt *Grad*.

Den Vektorraum der k-Differentialformen bezeichnet man mit $\Omega^k(M)$. Das Dachprodukt wird punktweise definiert, also $(\omega \wedge \eta)|_p = \omega|_p \wedge \eta|_p$. Versehen mit $\wedge$ wird dann

$$\Omega^*(M) := \bigoplus_{k=0}^{n} \Omega^k(M) \qquad (\Omega^0(M) = C^\infty(M))$$

zu einer Algebra.

Bemerkung: In Koordinaten lässt sich $\omega \in \Omega^k(M)$ schreiben als

$$\omega = \sum_{i_1 < i_2 < \dots} \omega_{i_1 \dots i_k} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}.$$

Lemma 7.1
Es gilt

$$dx^{i_1} \wedge dx^{i_k}(\partial_{j_1}, \dots, \partial_{j_k}) = \delta^{i_1 \dots i_k}_{j_1 \dots j_k}$$

$$\textit{mit } \delta^{i_1 \dots i_k}_{j_1 \dots j_k} = \det \begin{pmatrix} \delta^{i_1}_{j_1} & \dots & \delta^{i_1}_{j_k} \\ \vdots & & \vdots \\ \delta^{i_k}_{j_1} & \dots & \delta^{i_k}_{j_k} \end{pmatrix}$$

Korollar
$\omega_{i_1 \dots i_k} = \omega(\partial_{i_1}, \dots, \partial_{i_k})$

Beispiel:

- $\omega = \cos(x) dy \wedge dz + \sin(xy) dx \wedge dz \in \Omega^2(\mathbb{R}^3)$

$\omega_{23}(x,y,z) = \cos(x),\ \omega_{13}(x,y,z) = \sin(xy)$

$$\begin{aligned}\omega \wedge dy &= 0 + \sin(xy)dx \wedge dz \wedge dy \\ &= -\sin(xy)dx \wedge dy \wedge dz \\ \omega \wedge \omega &= 0\end{aligned}$$

- $\Omega^n(\mathbb{R}^n) = \Big\{f(x_1,\dots,x_n)dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n \mid f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)\Big\}$

Lemma 7.2
Ist $f : M \to N$ glatt, so gilt für den pullback einer Differentialform auf N entlang f

$$f^*\omega\big|_p(v_1,\dots,v_k) = \omega\big|_{f(p)}(df_p(v_1),\dots,df_p(v_k)) \quad (p \in M, v_j \in T_pM)$$

i) $f^* : \Omega^k(N) \to \Omega^k(M)$ *linear*

ii) $f^*(\omega \wedge \eta) = f^*\omega \wedge f^*\eta$

iii) $f^*\left(\sum\limits_{i_1<i_2<\dots} \omega_{i_1\dots i_k} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}\right) = \sum\limits_{i_1<i_2<\dots} (\omega_{i_1\dots i_k} \circ f) d(x^{i_1} \circ f) \wedge \dots \wedge d(x^{i_k} \circ f))$

Beispiel: $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, f(u,v) = (u,v,u^2), \omega = ydy \wedge dz \in \Omega^2(\mathbb{R}^3)$

$$\begin{aligned}f^*\omega|_{(u,v)} &= \Big(\underbrace{y \circ f}_{=v}(u,v)\Big)d(\underbrace{y \circ f}_{v})|_{(u,v)} \wedge \underbrace{d(\underbrace{z \circ f}_{u^2})|_{(u,v)}}_{2udu} \\ &= -2uv\, du \wedge dv\end{aligned}$$

Beispiel: Kartenwechsel ($f = \mathrm{id}$, aber im Urbild und Bild werden verschiedene Koordinaten verwendet)

$$\begin{aligned}\omega &= dx \wedge dy \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\theta \\ r\sin\theta \end{pmatrix} \\ &= d(r\cos\theta) \wedge d(r\sin\theta) \\ &= (\cos\theta dr - r\sin\theta d\theta) \wedge (\sin\theta dr + r\cos\theta d\theta) \\ &= rdr \wedge d\theta\end{aligned}$$

Das ist kein Zufall:

Lemma 7.3
Sei $f : M \to N$ glatt, $\dim M = \dim N = n$*. Seien $x_1,\dots,x_n$ Koordinaten bei $p \in M$ und $y_1,\dots,y_n$ Koordinaten bei $f(p) \in N$. Dann gilt für $\omega \in \Omega^n(N)$, $\omega =$*

$udy^1 \wedge \cdots \wedge dy^n$ ($u \in C^\infty(N)$):

$$f^*\omega = (u \circ f)\underset{\substack{\uparrow \\ \textit{Jacobimatrix von } f}}{(\det Df)} dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n$$

auf $U \cap f^{-1}(V)$ (U Koordinaten bei p, V Koordinaten bei $f(p)$).

Korollar

Sind $(x_1, \ldots, x_n)$ und $(y_1, \ldots, y_n)$ Koordinaten, so gilt auf dem Überlappungsbereich

$$dy^1 \wedge \cdots \wedge dy^n = \det \frac{\partial_{y_j}}{\partial_{x_i}} dx^1 \wedge dx^n$$

Beispiel: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\theta \\ r\sin\theta \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} dy \wedge dy &= \det \begin{pmatrix} \partial_r(r\cos\theta) & \partial_\theta(r\cos\theta) \\ \partial_r(r\sin\theta) & \partial_\theta(r\sin\theta) \end{pmatrix} dr \wedge d\theta \\ &= r\Big(\cos\theta^2 + \sin\theta^2\Big) dr \wedge d\theta \end{aligned}$$

Definition

Sei $\omega \in \Omega^k(M), X \in \mathfrak{X}(M)$. Man definiert punktweise eine $(k-1)$-Form durch

$$(X \lrcorner \omega)\big|_p := X_p \lrcorner \omega_p := \iota_{X_p}\omega_p,$$

wobei $\iota_v\alpha(v_1, \ldots, v_{k-1}) := \alpha(v, v_1, \ldots, v_{k-1})$ für $v, v_j \in V, \alpha \in \Lambda^k V^*$ das *innere Produkt von α mit v* bzw. *ω mit X* oder die *Einsetzung von X in ω* ist.

Bemerkung 7.4: i) $\iota_X\omega \in \Omega^{k-1}(M), \omega \in \Omega^k$

ii) $\iota_v \circ \iota_v = 0$

iii) $\iota_v(\omega \wedge \eta) = \iota_v(\omega) \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge (\iota_v\eta)$ wenn $\omega \in \Omega^k(M)$

Erinnerung: $\omega \in \Omega^1(M)$ heißt geschlossen, falls $\partial_i\omega_j.\partial_j\omega_i = 0$ lokal in jeder Karte. Vorlesung 15
Idee: Definiere eine Abbildung $d : \Omega^1 \to \Omega^2$, die in Koordinaten gegeben ist als

$$d\omega = d\Big(\sum \omega_j dx^j\Big) = \sum_{i<j} (\partial_i\omega_j - \partial_j\omega i) dx^i \wedge dx^j$$

Geschlossenheit wäre dann gleichbedeutend mit $d\omega = 0$.

Definition 7.5 (äußere Ableitung, Cartan-Ableitung)
Sei $V \subset \mathbb{R}^n$ offen. Sei $\omega \in \Omega^k(V)$, also

$$\omega = \sum_{i_1 < \cdots < i_k} \omega_{i_1 \ldots i_k} dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}.$$

Dann definieren wir die *äußere Ableitung* oder *Cartan-Ableitung $d\omega$ von ω* vermöge

$$d\omega := \sum_{i_1 < \cdots < i_k} \sum_j \partial_j \omega_{i_1 \ldots i_k} dx^j \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}.$$

Bemerkung: i) $\omega = f \in C^\infty(M) = \Omega^0(M)$
$df = \sum_j \partial_j f dx^j = df$ im Sinne der Definition

ii) $\omega \in \Omega^1(M)$

$$\begin{aligned} d\omega &= \sum_j \sum_i \partial_j \omega_i dx^j \wedge dx^i = \sum_{j<i} \ldots + \sum_{j>i} \ldots \\ &= \sum j < i(\partial_j \omega_i - \partial_i \omega_j) dx^j \wedge dx^i \end{aligned}$$

Lemma 7.6
Es gilt für $V, W \subset \mathbb{R}^n$ offen

i) $d : \Omega^k(V) \to \Omega^{k+1}(V)$ *linear*

ii) $d(\omega \wedge \eta) = d\omega \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge d\eta$ *für* $\omega \in \Omega^k(V), \eta \in \Omega^l(V)$.

iii) $d \circ d = 0$

iv) $f : V \to W$ *glatt,* $\omega \in \Omega^k(W) : f^*(d\omega) = d(f^*\omega)$

Satz 7.7
Ist M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit, so gibt es eine eindeutige lineare Abbildung $d : \Omega^k(M) \to \Omega^{k+1}(M)$, sodass

$$d(\omega \wedge \eta) = d\omega \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge d\eta \qquad \forall\, \omega \in \Omega^k, \eta \in \Omega^l$$
$$d \circ d = 0.$$

Für $f \in \Omega^0 = C^\infty$ gilt:

$$df \text{ ist das Differential von } f, \text{ also}$$
$$df(X) = X(f) \qquad \forall\, X \in \mathfrak{X}^1(M)$$

In lokalen Koordinaten ist $d\omega$ gegeben wie in 7.5.

Lemma 7.7
$f : M \to N$ glatt mit differenzierbaren Mannigfaltigkeiten M, N. Dann gilt

$$f^*(d\omega) = d(f^*\omega) \qquad \forall\, \omega \in \Omega^k(N).$$

Definitionen