

# Differenzial- und Integralrechnung III

## Vorlesungsmitschrift

Prof. Dr. Dorothea Bahns

L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X-Version von Niklas Sennewald

Mathematisches Institut  
Georg-August-Universität Göttingen  
Wintersemester 2020/21



# Inhaltsverzeichnis

<b>§1 Mannigfaltigkeiten</b>	<b>1</b>
1.1 Untermannigfaltigkeiten . . . . .	7
<b>Definitionen</b>	<b>11</b>

Dieses Skript stellt keinen Ersatz für die Vorlesungsnotizen von Prof. Bahns dar und wird nicht nochmals von ihr durchgesehen, im Grunde sind das hier nur meine persönlichen Mitschriften. Beweise werde ich i.d.R. nicht übernehmen (weil das in L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X einfach keinen Spaß macht). glhf

# §1 Mannigfaltigkeiten

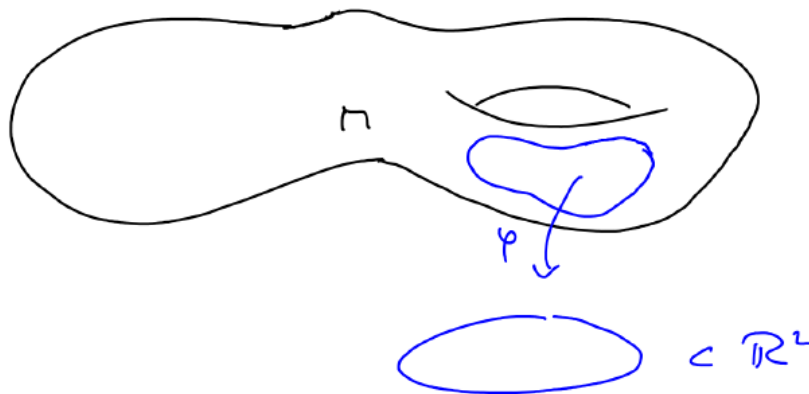
Vorlesung 1

## Definition 1.1 (Topologische Mannigfaltigkeit)

Eine  $n$ -dimensionale topologische Mannigfaltigkeit  $M$  ist ein topologischer Hausdorff-Raum mit abzählbarer Basis der Topologie, der lokal euklidisch ist.

- lokal euklidisch:

$\forall p \in M \exists U$  offene Umgebung von  $p$ , die homöomorph zu einer offenen Teilmenge des  $\mathbb{R}^n$  ist, das heißt es gibt eine stetige, injektive Abbildung  $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  mit  $\varphi(U)$  offen in  $\mathbb{R}^n$  (mit der Standardtopologie) und mit stetiger Umkehrfunktion  $\varphi^{-1} : \varphi(U) \rightarrow M$ .



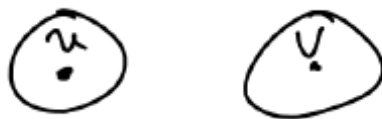
**Bemerkung:**  $\varphi$  und auch  $\varphi^{-1}$  sind offene Abbildungen, denn Bilder offener Mengen  $\tilde{U} \subset U$  (bezüglich  $\varphi$ ), also  $\varphi(\tilde{U}) \subset \varphi(U) = \text{im}(\varphi)$ , sind Urbilder (bezüglich  $\varphi^{-1}$ ) offener Mengen  $\tilde{U}$  und somit offen (wegen der Stetigkeit von  $\varphi^{-1}$ )



Das heißt  $U$  und  $\varphi(U)$  sind als topologische Räume äquivalent (weil ihre offenen Mengen in 1 – 1-Beziehung zueinander stehen).

- Hausdorff-Raum:

$\forall p \neq q \in M \exists U, V \subset M$  offen, sodass  $U \cap V = \emptyset$ ,  $p \in U, q \in V$



Erinnerung: In topologischen Räumen mit Hausdorff-Eigenschaft sind z.B. Grenzwerte von konvergenten Folgen eindeutig.

- Abzählbare Basis der Topologie:

Es gibt ein höchstens abzählbares System  $\{U_1, U_2, U_3, \dots\}$  von offenen Mengen  $U_j \subset M$ , sodass  $\forall p \in M \forall$  Umgebungen  $V$  von  $p$  gibt es einen Index  $j$ , sodass  $p \in U_j \subset V$ .

**Bemerkung:** Warum man dies fordert werden wir später bei der Existenz einer Teilung der Eins erkennen.

**Notation:** Ist  $M$  eine topologische Mannigfaltigkeit,  $p \in M$ , so nennt man einen Homöomorphismus  $\varphi : U \rightarrow \tilde{U}$ ,  $U$  offen in  $M$ ,  $\tilde{U} = \varphi(U)$  offen in  $\mathbb{R}^n$ ,  $p \in U$ , eine (*lokale*) Karte bei  $p$ . Gilt  $\varphi(p) = 0$ , sagt man, die Karte sei zentriert bei  $p$ .

$U$  heißt *Koordinatenbereich* von  $\varphi$  und die Komponenten von  $\varphi(q) = (x_1(q), \dots, x_n(q))$  (für  $q \in U$ ) heißen *lokale Koordinaten* von  $q$ .

**Bemerkung:** Ist  $\varphi$  eine beliebige Karte bei  $p$ , so ist  $\psi(q) = \varphi(q) - \varphi(p)$  eine bei  $p$  zentrierte Karte.

Ein System von Karten  $\{(\varphi_\alpha, U_\alpha) \mid \alpha \in A\}$  heißt *Atlas* von  $M$ , falls gilt  $M = \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$ .

**Beispiel 1.2:** i)  $M = \mathbb{R}^n$ , versehen mit der Standardtopologie, denn  $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $\varphi(x) = x$  ist ein Homöomorphismus.  $\mathbb{R}^n$  ist ein Hausdorff-Raum (vgl. Diff 2) und verfügt über eine abzählbare Basis:  $\{\dot{B}_r(q) \text{ offener Ball} \mid r \in \mathbb{Q}, p \in \mathbb{Q}^n\}$ .

ii) Graphen von stetigen Funktionen:

$U \subset \mathbb{R}^n$  offen,  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^k$  stetig. Der Graph  $\Gamma(f) = \{(x, f(x)) \mid x \in U\} \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k$ , versehen mit der *Teilraumtopologie*<sup>1</sup> ist eine  $n$ -dimensionale topologische Mannigfaltigkeit, denn

$$\varphi : \Gamma(f) \rightarrow \mathbb{R}^n, \varphi(x, y) = x, (x, y) \in \Gamma(f) \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k$$

bildet  $\Gamma(f)$  homöomorph auf  $U$  ab (die Umkehrfunktion ist die stetige Funktion  $\varphi^{-1} : U \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k, \varphi^{-1}(x) = (x, f(x))$ ). Die Hausdorff-Eigenschaft und die Abzählbarkeit einer Basis der Topologie übertragen sich direkt

<sup>1</sup>Eine Teilmenge  $M \subset \mathbb{R}^m$  ist mit der Teilraumtopologie versehen, falls  $U \subset M$  ist offen  $\iff \exists V \subset \mathbb{R}^m$  offen, sodass  $U = V \cap M$

**Bemerkung:** Wird nichts anders explizit gesagt, werden wir Teilräume stets als mit der Teilraumtopologie versehen ansehen.

iii) Da (vgl. Diff2) jede Untermannigfaltigkeit  $N$  sich lokal als Graph schreiben lässt und da die von uns betrachteten offenen Mengen in  $N$  gerade die durch die Teilraumtopologie gegebenen sind folgt, dass eine Untermannigfaltigkeit im Sinne der Diff 2 eine topologische Mannigfaltigkeit im Sinne von 1.1 ist, explizit zum Beispiel:

iv)  $\mathbb{S} := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\|_E = 1\}$



Wir konstruieren  $2n + 2$  Karten:

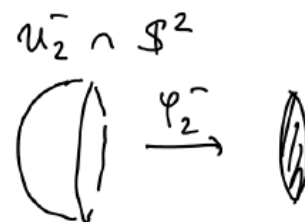
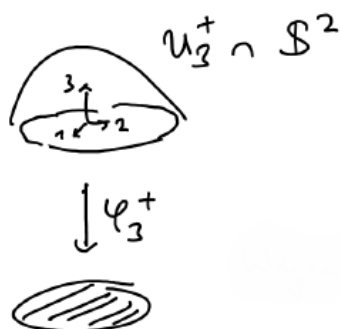
Betrachte  $U_i^\pm = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_i \gtrless 0\}$ . Sei  $\dot{\mathbb{B}}^n = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \|y\|_E < 1\}$  und  $f : \dot{\mathbb{B}}^n \rightarrow \mathbb{R}, f(y) = \sqrt{1 - \|y\|_E^2}$ . Notiere für  $i = 1, \dots, n+1 : x(\hat{i}) = (x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_{n+1}) = (x_1, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_{n+1})$ .

Es ist dann:  $U_i^\pm \cap \mathbb{S}^n = \{(x_1, \dots, x_{i-1}, \pm f(x(\hat{i})), x_{i+1}, \dots, x_n \mid x(\hat{i}) \in \dot{\mathbb{B}}^n\}$ , also nach Umsortieren gleich dem Graphen der Funktion  $f$  beziehungsweise  $-f$ .

Nach ii) sind also Karten durch

$$\begin{aligned} \varphi_i^\pm : U_i^\pm \cap \mathbb{S}^n &\rightarrow \mathbb{R}^n, \quad \varphi_i^\pm(U_i^\pm \cap \mathbb{S}^n) = \dot{\mathbb{B}}^n \\ \varphi_i^\pm(x_1, \dots, x_{n+1}) &= (x_1, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_{n+1}) \end{aligned}$$

gegeben. Also ist  $\mathbb{S}^n$  eine  $n$ -dimensionale Mannigfaltigkeit. Wegen  $\mathbb{S}^n = \bigcup_{i=1}^{n+1} (U_i^+ \cap \mathbb{S}^n \cup (U_i^- \cap \mathbb{S}^n))$  liegt ein Atlas vor.



### Lemma 1.3

Sind  $M_1, \dots, M_k$  topologische Mannigfaltigkeiten mit Dimensionen  $n_1, \dots, n_k$ , so ist

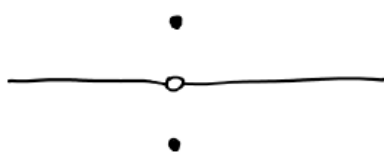
das kartesische Produkt  $M_1 \times \cdots \times M_k$  eine  $(n_1 + \cdots + n_k)$ -dimensionale topologische Mannigfaltigkeit.

**Beispiel:** Tori  $M = \underbrace{\mathbb{S}^1 \times \cdots \times \mathbb{S}^1}_{k\text{-fach}}$  sind  $k$ -dimensionale Mannigfaltigkeiten, zum Beispiel  $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$  eine 2-dimensionale:



**Bemerkung:** Die Hausdorff-Eigenschaft folgt nicht aus der lokalen Homöomorphie zu  $\mathbb{R}^n$ .

**Beispiel:**  $M = (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \times \{0\} \cup \{(0, 1)^T, (0, -1)^T\} \subset \mathbb{R}^2$



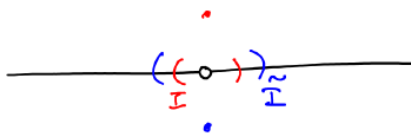
$$\varphi: M \setminus \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\varphi(x, y) = x$$

$$\psi: M \setminus \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\psi(x, y) = x$$

Wähle die Topologie auf  $M$  so, dass  $\varphi$  und  $\psi$  homöomorph auf  $\mathbb{R}$  abbilden. Dazu erklären wir die offenen Umgebungen von  $(0, \pm 1)^T$  als  $(I \setminus \{0\} \times \{0\}) \cup \{(0, \pm 1)\}$ , wobei  $I$  ein offenes Intervall um 0 ist. Sei dann  $U$  eine offene Umgebung von  $(0, 1)$  und  $\tilde{U}$  eine offene Umgebung von  $(0, -1)$ . Dann ist  $U \cap \tilde{U} \neq \emptyset$  (da  $I \setminus \{0\} \cap \tilde{I} \setminus \{0\} \neq \emptyset$ ).

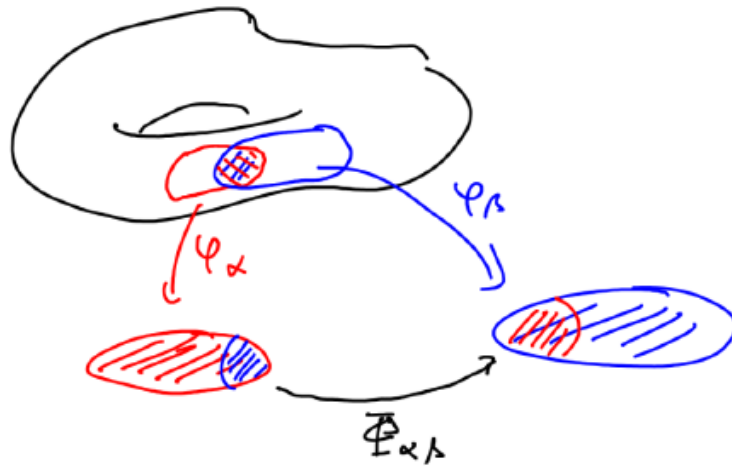


#### Definition 1.4 (Kartenwechsel)

Seien  $(\varphi_\alpha, U_\alpha), (\varphi_\beta, U_\beta)$  lokale Karten einer Mannigfaltigkeit  $M$ . Dann nennt man die Abbildung

$$\Phi_{\alpha\beta}: \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta), \quad \Phi_{\alpha\beta} = \varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$$





*Kartenwechsel* (von  $\varphi_\alpha$  zu  $\varphi_\beta$ ). Kartenwechsel sind also auf offene Teilmenge des  $\mathbb{R}^n$  definierte Homöomorphismen.

Ein Atlas heißt *differenzierbar*, falls alle seine Kartenwechsel glatt, also  $C^\infty$ -Abbildungen, sind.

**Bemerkung:** In diesem Fall sind die Kartenwechsel Diffeomorphismen, das heißt auch die Umkehrabbildung ist wieder  $C^\infty$ , denn

$$\Phi_{\alpha\beta}^{-1} = (\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1})^{-1} = \varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1} = \Phi_{\beta\alpha}$$

auf dem Definitionsbereich, wo die Abbildung definiert ist:  $\varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$ .

**Definition 1.5 (Differenzierbare Struktur)**

Sei  $\mathcal{A}$  ein differenzierbarer Atlas (von  $M$ ), dann bezeichnet man  $\mathcal{D} = \mathcal{D}(\mathcal{A})$  die Menge *aller* Karten von  $M$ , die mit allen Karten aus  $\mathcal{A}$  glatte Kartenwechsel haben,

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}) = \left\{ (\psi, U) \text{ Karten} \mid \psi \circ \varphi^{-1} \Big|_{\varphi(V \cap U)}, \varphi \circ \psi^{-1} \Big|_{\varphi(V \cap U)} \in C^\infty \text{ für alle } (\varphi, V) \in \mathcal{A} \right\}.$$

**Bemerkung:**  $\mathcal{D}(\mathcal{A})$  ist *maximal* in dem Sinn, dass es keine weiteren Karten gibt, die  $C^\infty$ -Kartenwechsel mit den Karten aus  $\mathcal{A}$  hätten, die nicht schon in  $\mathcal{D}(\mathcal{A})$  liegen.  $\mathcal{D}(\mathcal{A})$  ist also der größte differenzierbare Atlas, der  $\mathcal{A}$  enthält.

**Notation:** Ein maximaler, differenzierbarer Atlas auf einer Mannigfaltigkeit  $M$  heißt *differenzierbare Struktur* (auf  $M$ ). Eine Mannigfaltigkeit zusammen mit einer differenzierbaren Struktur heißt *differenzierbare Mannigfaltigkeit*.

**Bemerkung:** i) Es genügt, einen möglichst kleinen Atlas anzugeben, da dieser die differenzierbare Struktur festlegt.

ii) ACHTUNG: Zwei Atlanten  $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$  einer Mannigfaltigkeit  $M$  führen nur dann zur selben differenzierbaren Struktur, wenn für alle  $(\varphi, U) \in \mathcal{A}_1$  und  $(\psi, V) \in \mathcal{A}_2$  die Kartenwechsel glatt sind.

**Beispiel:**  $\mathbb{S}^n$  mit den oben eingeführten Karten ist eine glatte Mannigfaltigkeit.

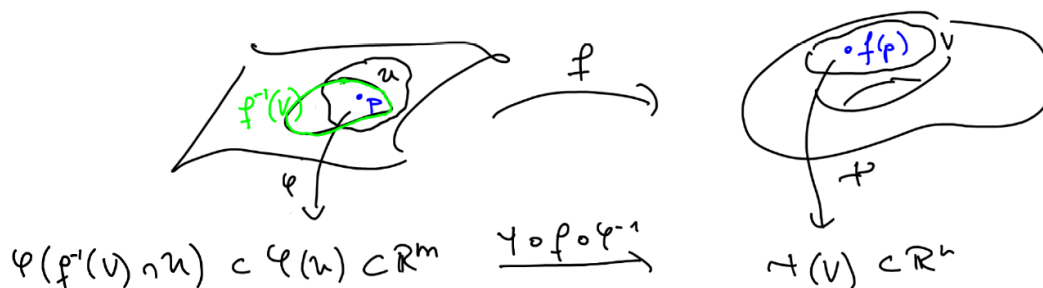
Vorlesung 2

**Definition 1.7 (Differenzierbare Abbildung zwischen Mannigfaltigkeiten)**

Seien  $M, N$  differenzierbare Mannigfaltigkeiten,  $M$   $m$ -dimensional,  $N$   $n$ -dimensional. Sei  $f : M \rightarrow N$  stetig.  $f$  heißt (stetig) differenzierbar/glatt im Punkt  $p \in M$ , falls für eine (und damit für jede!) Karte  $(\varphi, U)$  bei  $p$  und eine (und damit für jede) Karte  $(\psi, V)$  bei  $f(p)$  gilt

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \varphi(f^{-1}(V) \cap U) \rightarrow \mathbb{R}^n$$

ist (stetig) differenzierbar/glatt in  $\varphi(p)$ .



Diese Eigenschaft ist tatsächlich unabhängig von der Wahl der Karten  $\varphi$  und  $\psi$ : Seien  $\varphi'$  und  $\psi'$  weitere Karten bei  $p$  beziehungsweise  $f(p)$ , dann ist

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1} = \psi' \circ (\psi'^{-1} \circ \psi) \circ f \circ (\varphi^{-1} \circ \varphi') \circ \varphi'^{-1}$$

genau dann (stetig) differenzierbar/glatt in  $p$ , wenn  $\psi' \circ f \circ \varphi'^{-1}$  (stetig) differenzierbar/glatt in  $p$  ist, denn die Kartenwechsel  $\psi'^{-1} \circ \psi, \varphi^{-1} \circ \varphi'$  sind glatt.

**Bemerkung:**  $C^\infty(M, N) := \{f : M \rightarrow N \text{ glatt}\}$

Die differenzierbaren Mannigfaltigkeiten mit  $C^\infty$ -Abbildungen bilden eine Kategorie, die unter Verknüpfungen abgeschlossen ist, das heißt  $f, g \in C^\infty \implies f \circ g \in C^\infty$ .

**Definition 1.8 (Diffeomorphismus)**

Eine Abbildung  $f : M \rightarrow N$  nennt man *Diffeomorphismus*, falls  $f \in C^\infty$  umkehrbar ist mit  $f(M) = N$  und die Umkehrfunktion wieder  $C^\infty$  ist. Gibt es einen Diffeomorphismus  $M \rightarrow N$  (somit auch einen Diffeomorphismus  $N \rightarrow M$ ) nennt man  $M$  und  $N$  diffeomorph,  $M \simeq N$ .

**Bemerkung 1.9:** i) Aufgabe 3 Blatt 1: Verschiedene differenzierbare Strukturen auf  $\mathbb{R}$ : Atlanten  $\{\text{id}_{\mathbb{R}}\}, \{\varphi : x \mapsto x^3\}$ , aber  $(\mathbb{R}, \{\text{id}_{\mathbb{R}}\}) \not\cong (\mathbb{R}, \{\varphi\})$  diffeomorph.

Allgemeiner:  $U \subset \mathbb{R}^n$  offen, Atlas  $\mathcal{A} = \{\text{id}_U\} \rightarrow$  „Standard-Differenzierbare Struktur“. Jeder Homöomorphismus  $\varphi : U \rightarrow V \subset \mathbb{R}^n$  gibt auch einen Atlas und eine differenzierbare Struktur. Sie ist genau dann die Standard differenzierbare Struktur, wenn  $\varphi$  als Abbildung  $U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \tilde{U} \subset \mathbb{R}^n$  ein Diffeomorphismus ist. ACHTUNG! Als differenzierbare Mannigfaltigkeiten sind  $(U, \{\text{id}_U\})$  und  $(U, \{\varphi\})$  aber auch dann diffeomorph, wenn  $\varphi : U \rightarrow \tilde{U}$  kein Diffeomorphismus ist! Denn  $\varphi : (U, \{\varphi\}) \rightarrow (U, \{\text{id}_U\})$  ist ein Diffeomorphismus differenzierbarer Mannigfaltigkeiten:  $\text{id}_U \circ \varphi \circ \varphi^{-1} = \text{id}_U$  ist ein Diffeomorphismus  $U \rightarrow U$ .

- ii) Sehr viele Sätze befassen sich damit, ob es auf einer Mannigfaltigkeit verschiedene differenzierbare Strukturen gibt, sodass die entstehenden differenzierbaren Mannigfaltigkeiten nicht diffeomorph sind. Auf  $\mathbb{S}^7$  gibt es genau 15 verschiedene differenzierbare Strukturen, die nicht diffeomorph zueinander sind (Milnor + Kervaire 1963, „exotische Sphären“, erstes Beispiel Milnor 1956).
- iii) Unser Thema hier: Strukturen, die unter der Anwendung von Diffeomorphismen invariant sind. Daher können wir lokale Eigenschaften immer auf offenen Mengen im  $\mathbb{R}^n$  untersuchen (also mit Hilfe von Karten und Koordinaten). Das heißt konkret: Statt  $f : U \subset M \rightarrow N$  zu betrachten mit  $M$  und  $N$  als differenzierbare Mannigfaltigkeiten betrachten wir  $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$  mit  $(\varphi, \tilde{U})$ ,  $\tilde{U} \subset U$ , Karte von  $M$  und  $(\psi, V)$  Karte von  $N$  mit  $f(\tilde{U}) \subset V$ , also eine Abbildung von einer offenen Menge  $\subset \mathbb{R}^m$  in eine offene Menge  $\subset \mathbb{R}^n$ .
- iv) Es ist keine Einschränkung, Glattheit der Kartenwechsel zu fordern. Denn es gilt: Ist  $\mathcal{A}$  ein Atlas von  $M$  mit  $C^1$ -Kartenwechseln, so gibt es zu jedem  $l$ ,  $1 \leq l \leq \infty$ , einen Atlas  $\tilde{\mathcal{A}}$  von  $M$ , sodass die Kartenwechsel von  $\tilde{\mathcal{A}}$   $C^l$ -Abbildungen sind und so, dass die Kartenwechsel von  $\tilde{\mathcal{A}} \cup \mathcal{A}$   $C^1$  sind [Whitney, 1936], das heißt für  $l = \infty$  ist  $(M, \mathcal{D}(\tilde{\mathcal{A}}))$  eine differenzierbare Mannigfaltigkeit im Sinne unserer Definitionen.
- v) Es gibt topologische Mannigfaltigkeiten, die keinen Atlas besitzen, der  $C^1$ -Kartenwechsel hat (somit auch keine differenzierbare Struktur in unserem Sinn).

## 1.1 Untermannigfaltigkeiten

### Definition 1.10 (Topologische Untermannigfaltigkeit)

$N \subset M$ ,  $\dim(M) = n + k$ , heißt *n-dimensionale (topologische) Untermannigfaltigkeit* der (topologischen) Mannigfaltigkeit  $M$ , falls es zu jedem Punkt  $p \in N$  eine Karte  $(\varphi, U)$  von  $M$  bei  $p$ ,  $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k$ , gibt, sodass  $\varphi(U \cap N) = \varphi(U) \cap (\mathbb{R}^n \times \{0\})$ . Eine Karte von  $M$  mit dieser Eigenschaft heißt *N angepasst*.

Ist  $M$  differenzierbar, so heißt *N differenzierbare Untermannigfaltigkeit* von  $M$ , falls

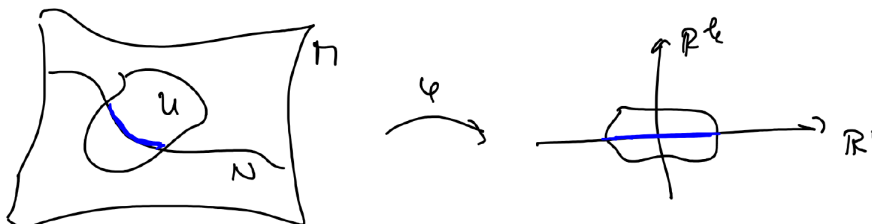
es zu jedem  $p \in N$  angepasste Karten aus der differenzierbaren Struktur von  $M$  gibt. Die Gesamtheit der Karten

$$\left\{ \varphi : U \cap N \rightarrow \varphi(U) \cap \mathbb{R}^n \mid \varphi \text{ angepasste Karte aus der diff'baren Struktur von } M \right\}$$

$$\uparrow$$

$$\mathbb{R}^n \simeq \mathbb{R}^n \times \{0\}$$

ist ein differenzierbarer Atlas für  $N$ .



**Beispiel:**  $\mathbb{S}^n$  ist eine Untermannigfaltigkeit des  $\mathbb{R}^{n+1}$ . Angepasste Karten:

$$\psi_{\pm i} : U_i^{\pm} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}, \quad \psi_{\pm i}(x) = \left( x \begin{pmatrix} \hat{i} \\ \end{pmatrix}, x_i \right)$$

Man nennt eine glatte Abbildung  $f : \tilde{M} \rightarrow M$  eine *glatte Einbettung*, falls  $f(\tilde{M}) \subset M$  eine differenzierbare Untermannigfaltigkeit von  $M$  ist und  $f : \tilde{M} \rightarrow f(\tilde{M})$  ein Diffeomorphismus.

### Satz 1.11

Sei  $M$  eine  $(n+k)$ -dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit,  $N \subset M$  eine Teilmenge. Dann ist  $N$  eine  $n$ -dimensionale differenzierbare Untermannigfaltigkeit  $\iff \forall p \in N \exists$  Umgebung  $U$  von  $p$  in  $M$  und eine glatte Abbildung  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^k$ , mit  $Df(q)$  von maximalem Rang  $k \forall q \in U$ , sodass  $U \cap N = f^{-1}(0)$ .

**Beispiel:** Betrachte den Torus  $\pi = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ . Diese Mannigfaltigkeit lässt sich als differenzierbare Untermannigfaltigkeit des  $\mathbb{R}^3$  realisieren: Sei  $0 < r < R$ . Rotiere den Kreis von Radius  $r$  um  $(R, 0)$  in der  $(x, z)$ -Ebene um die  $z$ -Achse, so entsteht eine zu  $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$  diffeomorphe Untermannigfaltigkeit. Dazu zunächst folgende Beobachtung:

**Bemerkung 1.12:** Differenzierbare Struktur auf Produkt-Mannigfaltigkeiten:  
Die Kartenwechsel der Karten aus Lemma 1.3

$$\varphi_1 \times \cdots \times \varphi_k : \underbrace{U_1}_{\subset M_1} \times \cdots \times \underbrace{U_k}_{\subset M_k} \rightarrow \mathbb{R}^{n_1} \times \cdots \times \mathbb{R}^{n_k}$$

sind glatt, wenn die  $M_j$  differenzierbare Mannigfaltigkeiten sind, denn

$$\psi_1 \cdots \psi_k \circ (\varphi_1 \times \cdots \times \varphi_k)^{-1} = \psi_1 \circ \varphi_1^{-1} \times \cdots \psi_k \circ \varphi_k^{-1}.$$

Die Tori  $\mathbb{S}^1 \times \cdots \times \mathbb{S}^1$  sind somit (kanonisch) mit einer differenzierbaren Struktur versehen. Die Homöomorphie von  $\pi$  mit der Rotationsfläche ist tatsächlich ein Diffeomorphismus.

**Bemerkung:** Bisher haben wir topologische Mannigfaltigkeiten betrachtet und diese dann mit einer differenzierbaren Struktur versehen.

Gegeben eine Familie von Karten, die gewisse Eigenschaften haben, kann man direkt eine Topologie und eine differenzierbare Struktur auf einer Mannigfaltigkeit in einem Schritt definieren, wie das folgende Lemma zeigt:

**Lemma 1.13**

Sei  $M$  eine Menge und  $\{\varphi_\alpha : U_\alpha \rightarrow \mathbb{R}^n \mid \alpha \in A\}, U_\alpha \subset M$ , eine Familie von Abbildungen mit folgenden Eigenschaften:

- i) Es gibt eine abzählbare Menge  $I \subset A$ , sodass  $M = \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha$ .
- ii) Für  $p, q \in M, p \neq q$ , gibt es ein  $U_\alpha$ , sodass  $p, q \in U_\alpha$  oder es gibt  $U_\alpha, U_\beta, U_\alpha \cap U_\beta = \emptyset$ , mit  $p \in U_\alpha, q \in U_\beta$ .
- iii) Für jedes  $\alpha \in A$  ist  $\varphi_\alpha$  eine Bijektion von  $U_\alpha$  auf eine offene Teilmenge  $\varphi_\alpha(U_\alpha) \subset \mathbb{R}^n$ .
- iv) Für alle  $\alpha, \beta \in A$  sind  $\varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$  und  $\varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$  offen in  $\mathbb{R}^n$ .
- v) Für alle  $\alpha, \beta \in A$  ist die Abbildung  $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$   
 $\subset \mathbb{R}^n \qquad \qquad \qquad \subset \mathbb{R}^n$   
glatt.

Dann ist  $M$  eine differenzierbare Mannigfaltigkeit, deren differenzierbare Struktur eindeutig durch die Forderung festgelegt ist, dass die  $(\varphi_\alpha, U_\alpha)$  glatte Karten sind, das heißt dass alle Kartenwechsel glatt sind.



# Definitionen

Diffeomorphismus, 6

Differenzierbare Abbildung zwischen  
Mannigfaltigkeiten, 6

Differenzierbare Struktur, 5

Kartenwechsel, 4

Topologische Mannigfaltigkeit, 1

Topologische Untermannigfaltigkeit, 7