Differenzial- und Integralrechnung III

Vorlesungsmitschrift

Prof. Dr. Dorothea Bahns

LaTeX-Version von Niklas Sennewald

Mathematisches Institut
Georg-August-Universität Göttingen
Wintersemester 2020/21

Inhaltsverzeichnis

1 Mannigfaltigkeiten **1**

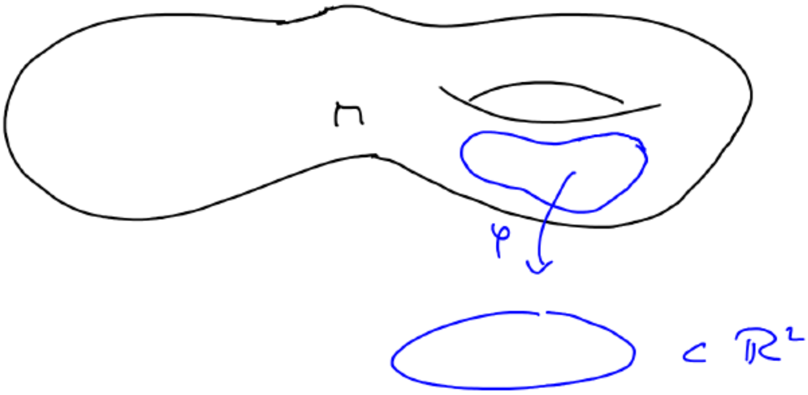
Dieses Skript stellt keinen Ersatz für die Vorlesungsnotizen von Prof. Bahns dar und wird nicht nochmals von ihr durchgesehen, im Grunde sind das hier nur meine persönlichen Mitschriften. Beweise werde ich i.d.R. nicht übernehmen (weil das in LaTeX einfach keinen Spaß macht). glhf

1 Mannigfaltigkeiten

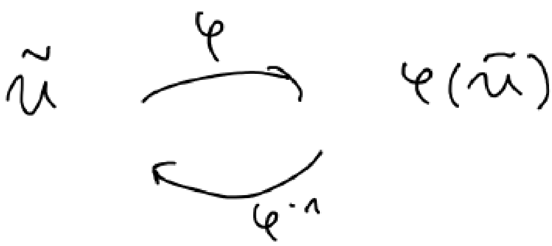
Vorlesung 1

Definition 1.1 (n-dimensionale topologische Mannigfaltigkeit)
Eine *n-dimensionale topologische Mannigfaltigkeit* M ist ein topologischer Hausdorff-Raum mit abzählbarer Basis der Topologie, der lokal euklidisch ist.

- lokal euklidisch:
  $\forall p \in M \ \exists U$ offene Umgebung von p, die homöomorph zu einer offenen Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ ist, das heißt es gibt eine stetige, injektive Abbildung $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$ mit $\varphi(U)$ offen in $\mathbb{R}^n$ (mit der Standardtopologie) und mit stetiger Umkehrfunktion $\varphi^{-1} : \varphi(U) \to M$.



Bemerkung: φ und auch φ^{-1} sind offene Abbildungen, denn Bilder offener Mengen $\tilde{U} \subset U$ (bezüglich φ), also $\varphi(\tilde{U}) \subset \varphi(U) = \operatorname{im}(\varphi)$, sind Urbilder (bezüglich φ^{-1}) offener Mengen $\tilde{U}$ und somit offen (wegen der Stetigkeit von φ^{-1})



Das heißt U und $\varphi(U)$ sind als topologische Räume äquivalent (weil ihre offenen Mengen in $1-1$-Beziehung zueinander stehen).

- Hausdorff-Raum:
  $\forall\, p \neq q \in M\ \exists\, U, V \subset M$ offen, sodass $U \cap V = \emptyset,\ p \in U, q \in V$

  Erinnerung: In topologischen Räumen mit Hausdorff-Eigenschaft sind z.B. Grenzwerte von konvergenten Folgen eindeutig.

- Abzählbare Basis der Topologie:
  Es gibt ein höchstens abzählbares System $\{U_1, U_2, U_3, \dots\}$ von offenen Mengen $U_j \subset M$, sodass $\forall\, p \in M\ \forall$ Umgebungen V von p gibt es einen Index j, sodass $p \in U_j \subset V$.

  Bemerkung: Warum man dies fordert werden wir später bei der Existenz einer Teilung der Eins erkennen.

Notation: Ist M eine topologische Mannigfaltigkeit, $p \in M$, so nennt man einen Homöomorphismus $\varphi : U \to \tilde{U}$, U offen in M, $\tilde{U} = \varphi(U)$ offen in $\mathbb{R}^n$, $p \in U$, eine *(lokale) Karte* bei p. Gilt $\varphi(p) = 0$, sagt man, die Karte sei zentriert bei p.
U heißt *Koordinatenbereich* von φ und die Komponenten von $\varphi(q) = (x_1(q), \dots, x_n(q))$ (für $q \in U$) heißen *lokale Koordinaten* von q.

Bemerkung: Ist φ eine beliebige Karte bei p, so ist $\psi(q) = \varphi(q) - \varphi(p)$ eine bei p zentrierte Karte.

Ein System von Karten $\{(\varphi_\alpha, U_\alpha) \,|\, \alpha \in A\}$ heißt *Atlas* von M, falls gilt $M = \bigcup\limits_{\alpha \in A} U_\alpha$.

Beispiel 1.2: i) $M = \mathbb{R}^n$, versehen mit der Standardtopologie, denn $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n,\ \varphi(x) = x$ ist ein Homöomorphismus. $\mathbb{R}^n$ ist ein Hausdorff-Raum (vlg. Diff 2) und verfügt über eine abzählbare Basis: $\left\{ \dot{B}_r(q) \text{ offener Ball} \,\middle|\, r \in \mathbb{Q}, p \in \mathbb{Q}^n \right\}$.

ii) Graphen von stetigen Funktionen:
$U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f : U \to \mathbb{R}^k$ stetig. Der *Graph* $\Gamma(f) = \{(x, f(x)) \,|\, x \in U\} \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k$, versehen mit der *Teilraumtopologie*[1] ist eine n-dimensionale topologische Mannigfaltigkeit, denn

$$\varphi : \Gamma(f) \to \mathbb{R}^n, \varphi(x, y) = x,\ (x, y) \in \Gamma(f) \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k$$

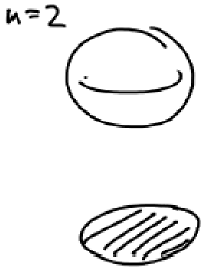
bildet $\Gamma(f)$ homöomorph auf U ab (die Umkehrfunktion ist die stetige Funktion $\varphi^{-1} : U \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k, \varphi^{-1}(x) = (x, f(x))$). Die Hausdorff-Eigenschaft und die Abzählbarkeit einer Basis der Topologie übertragen sich direkt

[1] Eine Teilmenge $M \subset \mathbb{R}^m$ ist mit der Teilraumtopologie versehen, falls $U \subset M$ ist offen $\iff \exists\, V \subset \mathbb{R}^m$ offen, sodass $U = V \cap M$

Bemerkung: Wird nichts anders explizit gesagt, werden wir Teilräume stets als mit der Teilraumtopologie versehen ansehen.

iii) Da (vgl. Diff2) jede Untermannigfaltigkeit N sich lokal als Graph schreiben lässt und da die von uns betrachteten offenen Mengen in N gerade die durch die Teilraumtopologie gegebenen sind folgt, dass eine Untermannigfaltigkeit im Sinne der Diff 2 eine topologische Mannigfaltigkeit im Sinne von 1.1 ist, explizit zum Beispiel:

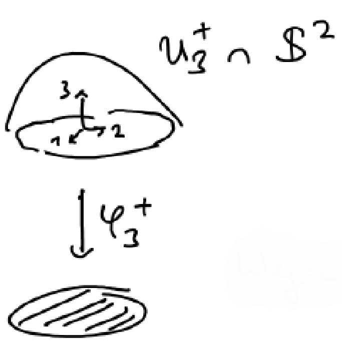
iv) $\mathbb{S} := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\|_E = 1\}$

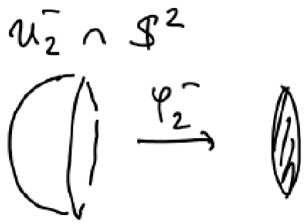


Wir konstruieren $2n+2$ Karten:
Betrachte $U_i^{\pm} = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_i \gtrless 0\}$. Sei $\dot{\mathbb{B}}^n = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \|y\|_E < 1\}$ und $f : \dot{\mathbb{B}}^n \to \mathbb{R}, f(y) = \sqrt{1 - \|y\|_E^2}$. Notiere für $i = 1, \ldots, n+1 : x(\hat{i}) = (x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_{n+1}) = (x_1, \ldots, \hat{x_i}, \ldots, x_{n+1})$.
Es ist dann: $U_i^{\pm} \cap \mathbb{S}^n = \{(x_1, \ldots, x_{i-1}, \pm f(x(\hat{i})), x_{i+1}, \ldots, x_n \mid x(\hat{i}) \in \dot{\mathbb{B}}^n\}$, also nach Umsortieren gleich dem Graphen der Funktion f beziehungsweise $-f$.
Nach ii) sind also Karten durch

$$\varphi_i^{\pm} : U_i^{\pm} \cap \mathbb{S}^n \to \mathbb{R}^n,\ \varphi_i^{\pm}(U_i^{\pm} \cap \mathbb{S}^n) = \dot{\mathbb{B}}^n$$
$$\varphi_i^{\pm}(x_1, \ldots, x_{n+1}) = (x_1, \ldots, \hat{x}_i, \ldots, x_{i+1}$$

gegeben. Also ist $\mathbb{S}^n$ eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit. Wegen $\mathbb{S}^n = \bigcup_{i=1}^{n+1}(U_i^+ \cap \mathbb{S}^n \cup (U_i^- \cap \mathbb{S}^n)$ liegt ein Atlas vor.

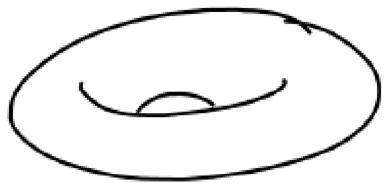




Lemma 1.3
Sind $M_1, \ldots, M_k$ topologische Mannigfaltigkeiten mit Dimensionen $n_1, \ldots, n_k$, so ist

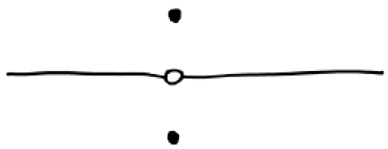
das kartesische Produkt $M_1 \times \cdots \times M_k$ eine $(n_1 + \cdots + n_k)$-dimensionale topologische Mannigfaltigkeit.

Beispiel: Tori $M = \underbrace{\mathbb{S}^1 \times \cdots \times \mathbb{S}^1}_{k-\text{fach}}$ sind k-dimensionale Mannigfaltigkeiten, zum Beispiel $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ eine 2-dimensionale:



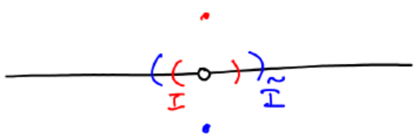
Bemerkung: Die Hausdorff-Eigenschaft folgt nicht aus der lokalen Homöomorphie zu $\mathbb{R}^n$.

Beispiel: $M = (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \times \{0\} \cup \{(0,1)^T, (0,-1)^T\} \subset \mathbb{R}^2$



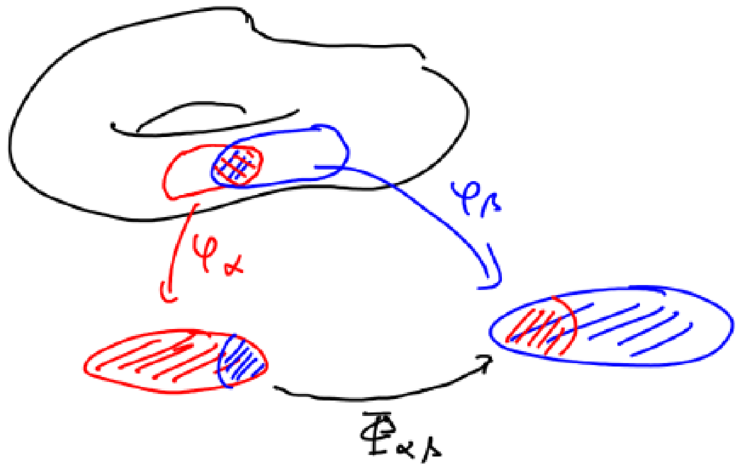
$$\varphi : M \setminus \left\{\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}\right\} \to \mathbb{R}$$
$$\varphi(x,y) = x$$
$$\psi : M \setminus \left\{\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\} \to \mathbb{R}$$
$$\psi(x,y) = x$$

Wähle die Topologie auf M so, dass φ und ψ homöomorph auf $\mathbb{R}$ abbilden. Dazu erklären wir die offenen Umgebungen von $(0, \pm 1)^T$ als $(I \setminus \{0\} \times \{0\}) \cup \{(0, \pm 1)\}$, wobei I ein offenes Intervall um 0 ist. Sei dann U eine offene Umgebung von $(0,1)$ und $\tilde{U}$ eine offene Umgebung von $(0,-1)$. Dann ist $U \cap \tilde{U} \neq \emptyset$ (da $I \setminus \{0\} \cap \tilde{I} \setminus \{0\} \neq \emptyset$).



Definition 1.4 (Kartenwechsel)
Seien $(\varphi_\alpha, U_\alpha), (\varphi_\beta, U_\beta)$ lokale Karten einer Mannigfaltigkeit M. Dann nennt man die Abbildung

$$\Phi_{\alpha\beta} : \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \to \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta), \quad \Phi_{\alpha\beta} = \varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$$



Kartenwechsel (von φ_α zu φ_β). Kartenwechsel sind also auf offene Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ definierte Homöomorphismen.
Ein Atlas heißt *differenzierbar*, falls alle seine Kartenwechsel glatt, also C^∞-Abbildungen, sind.

Bemerkung: In diesem Fall sind die Kartenwechsel Diffeomorphismen, das heißt auch die Umkehrabbildung ist wieder C^∞, denn

$$\Phi_{\alpha\beta}^{-1} = \left(\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}\right)^{-1} = \varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1} = \Phi_{\beta\alpha}$$

auf dem Definitionsbereich, wo die Abbildung definiert ist: $\varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$.

Definition 1.5 (Differenzierbare Struktur)
Sei $\mathcal{A}$ ein differenzierbarer Atlas (von M), dann bezeichnet man $\mathcal{D} = \mathcal{D}(\mathcal{A})$ die Menge *aller* Karten von M, die mit allen Karten aus $\mathcal{A}$ glatte Kartenwechsel haben,

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}) = \left\{(\psi, U) \text{ Karten} \,\middle|\, \psi \circ \varphi^{-1}\big|_{\varphi(V\cap U)}, \varphi \circ \psi^{-1}\big|_{\varphi(V\cap U)} \in C^\infty \text{ für alle } (\varphi, V) \in \mathcal{A}\right\}.$$

Bemerkung: $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ ist *maximal* in dem Sinn, dass es keine weiteren Karten gibt, die C^∞-Kartenwechsel mit den Karten aus $\mathcal{A}$ hätten, die nicht schon in $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ liegen. $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ ist also der größte differenzierbare Atlas, der $\mathcal{A}$ enthält.

Notation: Ein maximaler, differenzierbarer Atlas auf einer Mannigfaltigkeit M heißt *differenzierbare Struktur* (auf M). Eine Mannigfaltigkeit zusammen mit einer differenzierbaren Struktur heißt *differenzierbare Mannigfaltigkeit*.

Bemerkung: i) Es genügt, einen möglichst kleinen Atlas anzugeben, da dieser die differenzierbare Struktur festlegt.

ii) ACHTUNG: Zwei Atlanten $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ einer Mannigfaltigkeit M führen nur dann zur selben differenzierbaren Struktur, wenn für alle $(\varphi, U) \in \mathcal{A}_1$ und $(\psi, V) \in \mathcal{A}_2$ die Kartenwechsel glatt sind.

Beispiel: $\mathbb{S}^n$ mit den oben eingeführten Karten ist eine glatte Mannigfaltigkeit.

Liste der Definitionen

Kapitel 1

1.1 Definition – n-dimensionale topologische Mannigfaltigkeit 1
1.4 Definition – Kartenwechsel 4
1.5 Definition – Differenzierbare Struktur 5