Differenzial- und Integralrechnung III

Vorlesungsmitschrift

Prof. Dr. Dorothea Bahns

LaTeX-Version von Niklas Sennewald

Mathematisches Institut
Georg-August-Universität Göttingen
Wintersemester 2020/21

Inhaltsverzeichnis

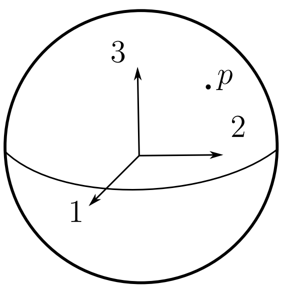
Dieses Skript stellt keinen Ersatz für die Vorlesungsnotizen von Prof. Bahns dar und wird nicht nochmals von ihr durchgesehen, im Grunde sind das hier nur meine persönlichen Mitschriften. Beweise werde ich i.d.R. nicht übernehmen (weil das in LaTeX einfach keinen Spaß macht). glhf

§2 Der Tangentialraum

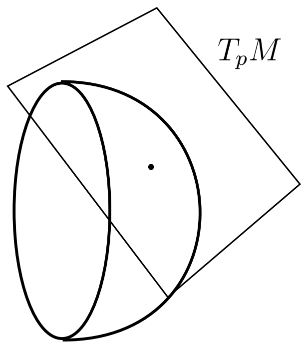
Erinnerung (Diff 2): Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine Untermannigfaltigkeit, $p \in M$. Ein Tangentialvektor $v \in \mathbb{R}^n$ an M in p ist von der Form $v = \gamma'(0)$, wobei $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ mit $\gamma(0) = p$ eine in M verlaufende C^1-Kurve ist. Der ***Tangentialraum*** T_pM (an M in p) ist die Menge aller Tangentialvektoren. Vorlesung 3

- Ist $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $p \in U$, $f : U \to \mathbb{R}^{n-m}$ C^1 mit $M \cap U = \{x \in U \mid f(x) = 0\}$ und $rang(Df(p)) = n - m$. Dann ist der Tangentialraum in p an M $T_pM = \ker(Df(p)) \subset \mathbb{R}^n$ (m-dim. Unterraum).
- Ist $\psi : V \to \mathbb{R}^n$ eine lokale Parametrisierung von M bei p, so sind $\partial_j \psi,\ d = 1, \ldots, m$, Basisvektoren $V \subset \mathbb{R}^n$ für T_pM.

Beispiel: $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3,\ T_pM = p^\perp$, denn $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, f(x) = 1 - \|x\|^2$ für $p \in \mathbb{S}^2$, sodass $p_i > 0$ oder < 0 beschreibt $\mathbb{S}^2 \cap U_i \ni p, U_i = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_i > 0 \text{ oder } < 0\}$ als Nullstellengebilde und $Df(p) = -2p$.



$p_2 > 0$



affin gezeichnet
tatsächlich handelt
es sich um einen
Untervektorraum
des $\mathbb{R}^3$

Zur Verallgemeinerung auf Mannigfaltigkeiten[1] überlegen wir zunächst, dass 2 Kurven zum selben Tangentialvektor führen, wenn sie in einer Umgebung von p Übereinstimmen. Formalisiert und verallgemeinert führen wir daher ein:

Definition 2.1 (Keime)
Auf $\{f \mid f : U \to N,\ U \text{ offene Umgebung von } p \in M\}$ definiert

$$f \sim g \iff \exists \text{ offene Umgebung } V \text{ von } p \text{, sodass } f|_V = g|_V$$

eine Äquivalenzrelation. Eine Äquivalenzklasse bezüglich $\sim$ nennt man ***Keim*** einer Abbildung $M \to N$ bei p. Ist f C^1/glatt bei p, so auch alle Elemente der von f

[1] von nun an betrachten wir nur noch differenzierbare Mannigfaltigkeiten

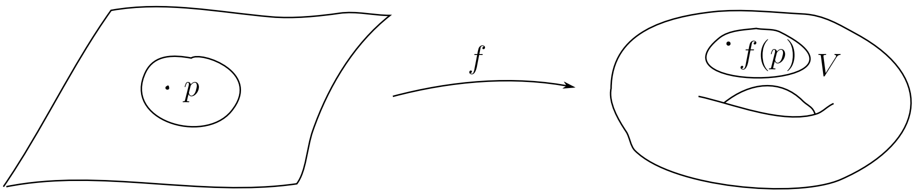
repräsentierten Klasse $\bar{f}$. Man spricht in dem Fall von C^1/glatten Keimen. Wir schreiben $\mathcal{E}^1(p)$ bzw. $\mathcal{E}^\infty(p)$ für die Menge aller C^1 bzw. glatten Keime bei $p \in M$ mit Werten in $\mathbb{R}$ („Funktionskeime“) $(M,p) \to \mathbb{R}$.

Bemerkung 2.2: i) $\mathcal{E}^1(p)$ und $\mathcal{E}^\infty(p)$ bilden eine Algebra (denn die Bildung von Äquivalenzklassen ist mit der punktweisen Addition und Multiplikation verträglich).

ii) Ist $\bar{f} : (M,p) \to N$ ein C^1/glatter Keim bei $p \in M$, so definiert er einen Homomorphismus von Algebren $\Big(\mathcal{E}(f(p))$ Keime $(N, f(p)) \to \mathbb{R}\Big)$

$f^* : \mathcal{E}^{1/\infty}(f(p)) \to \mathcal{E}^{1/\infty}(p)$ vermöge $f^*\left(\bar{h}\right) = \bar{h} \circ \bar{f}$ „pullback“, „Zurückziehung“

Offensichtlich ist das unabhängig von der Wahl des Repräsentanten.



$g \circ f|_{\tilde{V}} = h \circ f|_{\tilde{V}}$ $\qquad$ $g|_V = h|_V\,,\ f(p) \in V$

Es gilt $\mathrm{id}^* = \mathrm{id}$ und $(f \circ g)^* = g^* \circ f^*$. Insbesondere induziert ein bezüglich Komposition invertierbarer Keim $\bar{f}$ ($\bar{f} \circ \bar{f}^{-1} = \bar{f} \circ \overline{f^{-1}} = \mathrm{id}$) einen Isomorphismus $f^*, f^{-1*} \circ f^* = \mathrm{id}$.

iii) Spezialfall: Ist φ eine um $p \in M$ zentrierte Karte, so definiert φ einen invertierbaren Keim $\overline{\varphi} : (M,p) \to \mathbb{R}^n$ mit $\varphi(p) = 0$ und somit einen Isomorphismus $\varphi^* : \mathcal{E}_n^{1/\infty} \to \mathcal{E}^{1/\infty}(p)$, wobei $\mathcal{E}_n = \{\text{Funktionskeime bei } 0\}$, das heißt man kann sich auf Keime aus $\mathcal{E}_n$ beschränken.

2.1 3 Definitionen des Tangentialraums

Definition 2.3 (algebraische Definition)
Eine ***Derivation*** von $\mathcal{E}^\infty(p)$ ist eine lineare Abbildung $X : \mathcal{E}^\infty(p) \to \mathbb{R}$, die der folgenden Leibniz-Regel genügt:

$$X(\bar{f} \cdot \bar{g}) = X(\bar{f}) \cdot g(p) + f(p) \cdot X(\bar{g}).$$

Der ***Tangentialraum*** T_pM in p ist der Vektorraum der Derivationen von $\mathcal{E}^\infty(p)$.
Ein glatter Keim $\bar{f} : (M,p) \to N$ induziert einen Algebra-Homomorphismus $f^* : \mathcal{E}^\infty(f(p)) \to \mathcal{E}^\infty(p)$ und somit eine (lineare) Abbildung, die ***Tangentialabbildung*** (oder Differential) $T_pf : T_pM \to T_{f(p)}N, X \mapsto X \circ f^*$.

Bemerkung: i) Es gilt

$$T_p\Big(\bar{g}\circ\bar{f}\Big) = T_{f(p)}\bar{g}\circ T_p\bar{f} \quad \forall\, \bar{f}:(M,p)\to N, \bar{g}:(N,f(p))\to \tilde{N}\in C^\infty,$$

denn für $\bar{h}\in\mathcal{E}^\infty(g(f(p)))$ gilt

$$\begin{aligned} X\circ\left(\left(\bar{g}\circ\bar{f}\right)^*\right)\left(\bar{h}\right) &= X\left(\bar{h}\circ\left(\bar{g}\circ\bar{f}\right)\right)\\ &= \left(X\circ f^*\right)\left(\bar{h}\circ\bar{g}\right)\\ &= T_{f(p)}\bar{g}\left(X\circ f^*\right)(h)\\ \text{und } \left(T_{f(p)}\bar{g}\circ T_p\bar{f}\right) &= T_{f(p)}\bar{g}\left(X\circ\bar{f}^*\right)\left(\bar{h}\right) \end{aligned}$$

ii) Ist $\bar{\varphi}:(M,p)\to\mathbb{R}^n$ ein Keim einer bei p zentrierten Karte, so ist $\mathcal{E}_n^\infty \xrightarrow[\varphi^*]{\cong} \mathcal{E}^\infty(p)$ isomorph und $T_pM \xrightarrow[T_p\varphi]{\cong} T_0\mathbb{R}^n$.

$T_0\mathbb{R}^n$ hat eine besonders einfache Beschreibung:

Lemma 2.4
Die partiellen Ableitungen ∂_j in 0 bilden eine Basis von $T_0\mathbb{R}^n$.

Bemerkung: $\partial_j\big|_0 \xleftrightarrow{1:1} e_j\in\mathbb{R}^n$. Somit ist $T_0\mathbb{R}^n\cong\mathbb{R}^n$ als Vektorraum.

Satz 2.5
Seien $(x_1,\dots,x_m),(y_1,\dots,y_n)$ lokale Koordinaten bei $p\in M, q\in N$, gegeben durch bei p bzw. q zentrierte Karten φ,ψ (das heißt $x_i(\tilde{p})=\varphi_i(\tilde{p})$ mit (φ,U) lokale Karte bei $p\in M, \tilde{p}\in U, \varphi(p)=0$. Analog für y_j.)
Dann sind $\left\{\frac{\partial}{\partial_{x_1}}\Big|_0,\dots,\frac{\partial}{\partial_{x_m}}\Big|_0\right\}$ bzw. $\left\{\frac{\partial}{\partial_{y_1}}\Big|_0,\dots,\frac{\partial}{\partial_{y_n}}\Big|_0\right\}$ Basen von $T_0\mathbb{R}^m\cong T_pM$ bzw. $T_0\mathbb{R}^n\cong T_qN$.
Die Tangentialabbildung eines C^∞-Keimes $\bar{f}:(M,p)\to N$ ist bezüglich dieser Basen durch die Jacobimatrix $D(\psi\circ f\circ\varphi^{-1})(0):\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^n$ gegeben.

$$\uparrow$$

Keim $(\mathbb{R}^m,0)\to\mathbb{R}^n$

$$\begin{array}{ccc} T_pM & \xrightarrow{Df} & T_{f(p)}N \\ \big\downarrow{\scriptstyle\varphi} & & \big\downarrow{\scriptstyle\psi} \\ T_0\mathbb{R}^m & \longrightarrow & T_0\mathbb{R}^n \end{array}$$

Bemerkung: Hierbei setzen wir φ^{-1} außerhalb von $\varphi(U)$ glatt auf $\mathbb{R}^m$ fort.

Beispiel: $M = \mathbb{S}^1, p = (0,1,0)^T, \varphi : U_2^+ \cap \mathbb{S}^2 \to \mathbb{R}^2,$
$\varphi(x) = (x_1, x_3)$

Basis des Tangentialraums $T_0\mathbb{R}^2$ $\partial_1|_0, \partial_2|_0$

$f_{1,2} : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{S}^2, f_1(x) = (x_1, -x_2, x_3),$

$f_2(x) = (x_1, x_2, -x_3)$

$\overline{g_1} = \psi_1 \circ \overline{f_1} \circ \varphi^{-1} : (\mathbb{R}^2, 0) \to \mathbb{R}^2,\ \psi_1 : U_2^- \cap \mathbb{S}^2 \to \mathbb{R}^2, \psi_1(x_1,x_2,x_3) = (x_1,x_3)$

$\overline{g_2} = \psi_2 \circ \overline{f_2} \circ \varphi^{-1} : (\mathbb{R}^2, 0) \to \mathbb{R}^2,\ \psi_2 = \varphi$

$$Dg_j(0,0) = D\psi_j(f_j(\overbrace{\varphi(0,0)}^{=p})) \circ Df_j(p) \circ D\varphi^{-1}(0,0)$$

$$Dg_1(0,0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} \left.\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{-u_1}{\sqrt{1-\|u\|^2}} & \frac{-u_2}{\sqrt{1-\|u\|^2}} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right|_{u=0} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$Dg_2(0,0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Verhalten unter Kartenwechseln

Seien $\bar{\varphi}, \bar{\psi} : (M,p) \to (\mathbb{R}^n, 0)$ Kartenkeime. Dann ist der Kartenwechsel $\Phi = \bar{\psi} \circ \bar{\varphi}^{-1} : (\mathbb{R}^m, 0) \to \mathbb{R}^m$ ein glatter invertierbarer Keim und Φ ist eindeutig durch ψ, φ festgelegt. Solche Φ bilden eine Gruppe $\mathcal{G}$ (bezüglich Komposition $\circ$). Durch die Zuordnung $\Phi \mapsto D\Phi(0)$ erhält man einen Gruppenhomomorphismus $\mathcal{G} \to GL(m, \mathbb{R})$.

Definition 2.6 (physikalische Definition)
Ein ***Tangentialvektor*** an $p \in M$ (m-dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit) ist eine Zuordnung, die einem Kartenkeim $\bar{\varphi} : (M,p) \to \mathbb{R}^m$ (einer bei p zentrierten Karte) einen Vektor $v \in \mathbb{R}^m$ zuordnet, sodass $\underbrace{(\overline{\psi \circ \varphi^{-1}})}_{=\Phi} \circ \bar{\varphi}$ (ψ weitere bei p zentrierte Karte) der Vektor $D\Phi(0) \cdot v$ zugeordnet wird.

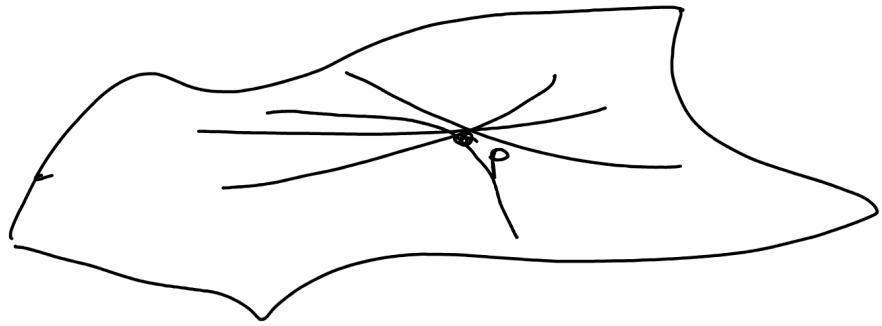
Lemma 2.7
$(T_pM)_{phys} \cong T_pM$ (als Vektorräume)

Schließlich die anschaulichste Definition:

Definition 2.8 (geometrische Definition)
Sei Γ_p die Menge der glatten Keime $\bar{\gamma} : (\mathbb{R}, 0) \to M$ mit $\gamma(0) = p$. Wir definieren auf Γ_p eine Äquivalenzrelation

$$\overline{\gamma_1} \sim \overline{\gamma_2} \iff \frac{d}{dt}\Big(\bar{f} \circ \overline{\gamma_1}\Big)(0) = \frac{d}{dt}\Big(\bar{f} \circ \overline{\gamma_2}\Big)(0) \qquad \forall\, \bar{f} \in \mathcal{E}^\infty(p).$$

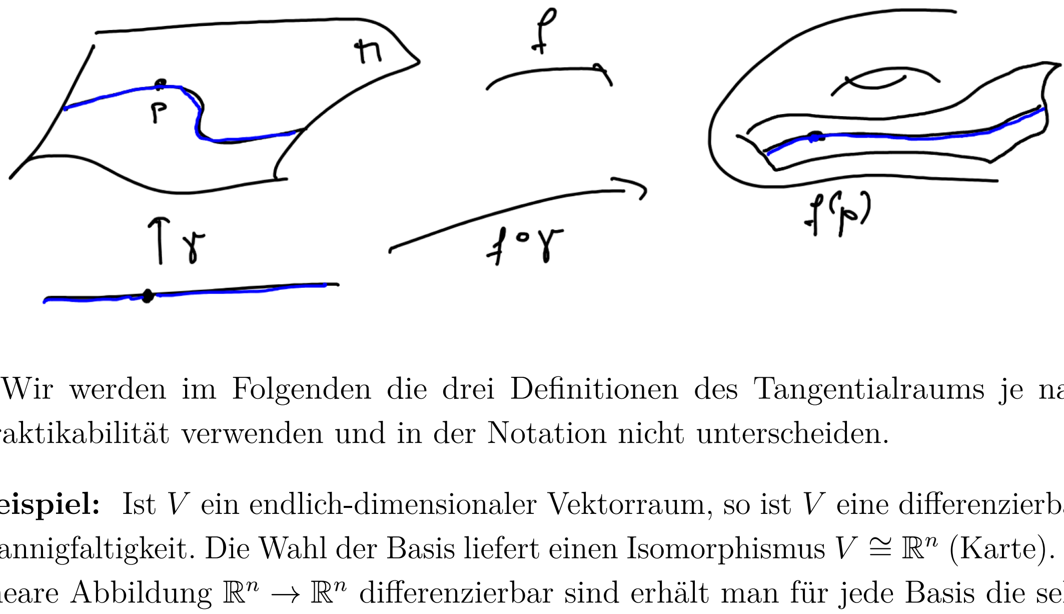
Eine Äquivalenzklasse $[\gamma]$ ist ein Tangentialvektor $\in (T_pM)_{geom}$.



Bemerkung: $[\gamma] \mapsto X_\gamma,\ X_\gamma(\bar{f}) = \frac{d}{dt}\bar{f} \circ \bar{\gamma}(0)$ liefert eine bijektive Abbildung $(T_pM)_{geom} \to T_pM$
Injektivität: Nach Konstruktion sind für $\tilde{\gamma} \notin [\gamma] : \frac{d}{dt}(\bar{f} \circ \bar{\gamma})(0) \neq \frac{d}{dt}(\bar{f} \circ \bar{\tilde{\gamma}})(0)$
Surjektivität: Schreibt man γ in lokalen Koordinaten $\gamma(t) = (ta_1, \ldots, ta_m)$, so ist $X_\gamma = \sum_{i=1}^m a_i\, \partial_i\big|_0$.

Bemerkung: Tangentialabbildung:
Sei $\bar{f} : (M, p) \to N$ ein glatter Keim, dann ist $\underbrace{[\gamma]}_{\in (T_pM)_{geom}} \mapsto \underbrace{[f \circ \gamma]}_{\in (T_{f(p)}N)_{geom}}$ die Tangentialabbildung T_pf, denn

$$\begin{aligned} X_{f\circ\gamma}(\bar{h}) &= \frac{d}{dt}(\bar{h} \circ \bar{f} \circ \bar{\gamma})(0)\ \forall\, \bar{h} \in \mathcal{E}^\infty_{f(p)} \\ &= X_\gamma(\bar{h} \circ \bar{f}) \\ &= T_pf(X_\gamma)(\bar{h}) \end{aligned}$$



Wir werden im Folgenden die drei Definitionen des Tangentialraums je nach Praktikabilität verwenden und in der Notation nicht unterscheiden.

Beispiel: Ist V ein endlich-dimensionaler Vektorraum, so ist V eine differenzierbare Mannigfaltigkeit. Die Wahl der Basis liefert einen Isomorphismus $V \cong \mathbb{R}^n$ (Karte). Da lineare Abbildung $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ differenzierbar sind erhält man für jede Basis die selbe differenzierbare Struktur. Es gilt $T_pV \cong V\ \forall\, p$. $(v \in V, \gamma_v(t) = p + tv, [\gamma_v] \in T_pV)$

Definitionen

Vorlesungen