Differenzial- und Integralrechnung III

Vorlesungsmitschrift

Prof. Dr. Dorothea Bahns

LaTeX-Version von Niklas Sennewald

Mathematisches Institut
Georg-August-Universität Göttingen
Wintersemester 2020/21

Inhaltsverzeichnis

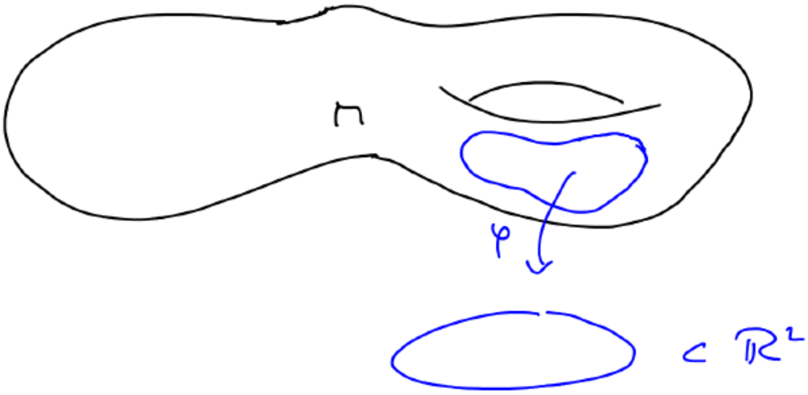
Dieses Skript stellt keinen Ersatz für die Vorlesungsnotizen von Prof. Bahns dar und wird nicht nochmals von ihr durchgesehen, im Grunde sind das hier nur meine persönlichen Mitschriften. Beweise werde ich i.d.R. nicht übernehmen (weil das in LaTeX einfach keinen Spaß macht). glhf

§1 Mannigfaltigkeiten

Vorlesung 1

Definition 1.1 (Topologische Mannigfaltigkeit)
Eine *n-dimensionale topologische Mannigfaltigkeit* M ist ein topologischer Hausdorff-Raum mit abzählbarer Basis der Topologie, der lokal euklidisch ist.

- lokal euklidisch:
  $\forall p \in M \ \exists U$ offene Umgebung von p, die homöomorph zu einer offenen Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ ist, das heißt es gibt eine stetige, injektive Abbildung $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$ mit $\varphi(U)$ offen in $\mathbb{R}^n$ (mit der Standardtopologie) und mit stetiger Umkehrfunktion $\varphi^{-1} : \varphi(U) \to M$.



Bemerkung: φ und auch φ^{-1} sind offene Abbildungen, denn Bilder offener Mengen $\tilde{U} \subset U$ (bezüglich φ), also $\varphi(\tilde{U}) \subset \varphi(U) = \mathrm{im}(\varphi)$, sind Urbilder (bezüglich φ^{-1}) offener Mengen $\tilde{U}$ und somit offen (wegen der Stetigkeit von φ^{-1})

$$\tilde{U} \underset{\varphi^{-1}}{\overset{\varphi}{\rightleftarrows}} \varphi(\tilde{U})$$

Das heißt U und $\varphi(U)$ sind als topologische Räume äquivalent (weil ihre offenen Mengen in $1-1$-Beziehung zueinander stehen).

- Hausdorff-Raum:
  $\forall\, p \neq q \in M \;\exists\, U, V \subset M$ offen, sodass $U \cap V = \emptyset,\; p \in U, q \in V$

  Erinnerung: In topologischen Räumen mit Hausdorff-Eigenschaft sind z.B. Grenzwerte von konvergenten Folgen eindeutig.

- Abzählbare Basis der Topologie:
  Es gibt ein höchstens abzählbares System $\{U_1, U_2, U_3, \dots\}$ von offenen Mengen $U_j \subset M$, sodass $\forall\, p \in M\; \forall$ Umgebungen V von p gibt es einen Index j, sodass $p \in U_j \subset V$.

  Bemerkung: Warum man dies fordert werden wir später bei der Existenz einer Teilung der Eins erkennen.

Notation: Ist M eine topologische Mannigfaltigkeit, $p \in M$, so nennt man einen Homöomorphismus $\varphi : U \to \tilde{U}$, U offen in M, $\tilde{U} = \varphi(U)$ offen in $\mathbb{R}^n$, $p \in U$, eine *(lokale) Karte* bei p. Gilt $\varphi(p) = 0$, sagt man, die Karte sei zentriert bei p.
U heißt *Koordinatenbereich* von φ und die Komponenten von $\varphi(q) = (x_1(q), \dots, x_n(q))$ (für $q \in U$) heißen *lokale Koordinaten* von q.

Bemerkung: Ist φ eine beliebige Karte bei p, so ist $\psi(q) = \varphi(q) - \varphi(p)$ eine bei p zentrierte Karte.

Ein System von Karten $\{(\varphi_\alpha, U_\alpha) \,|\, \alpha \in A\}$ heißt *Atlas* von M, falls gilt $M = \bigcup\limits_{\alpha \in A} U_\alpha$.

Beispiel 1.2: i) $M = \mathbb{R}^n$, versehen mit der Standardtopologie, denn $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n,\; \varphi(x) = x$ ist ein Homöomorphismus. $\mathbb{R}^n$ ist ein Hausdorff-Raum (vlg. Diff 2) und verfügt über eine abzählbare Basis: $\left\{ \dot{B}_r(q) \text{ offener Ball} \,\middle|\, r \in \mathbb{Q}, p \in \mathbb{Q}^n \right\}$.

ii) Graphen von stetigen Funktionen:
$U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f : U \to \mathbb{R}^k$ stetig. Der *Graph* $\Gamma(f) = \{(x, f(x)) \,|\, x \in U\} \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k$, versehen mit der *Teilraumtopologie*[1] ist eine n-dimensionale topologische Mannigfaltigkeit, denn

$$\varphi : \Gamma(f) \to \mathbb{R}^n, \varphi(x, y) = x,\; (x, y) \in \Gamma(f) \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k$$

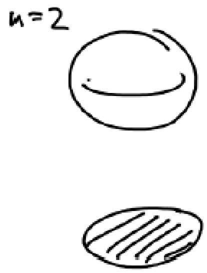
bildet $\Gamma(f)$ homöomorph auf U ab (die Umkehrfunktion ist die stetige Funktion $\varphi^{-1} : U \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k, \varphi^{-1}(x) = (x, f(x))$). Die Hausdorff-Eigenschaft und die Abzählbarkeit einer Basis der Topologie übertragen sich direkt

[1] Eine Teilmenge $M \subset \mathbb{R}^m$ ist mit der Teilraumtopologie versehen, falls $U \subset M$ ist offen $\iff \exists\, V \subset \mathbb{R}^m$ offen, sodass $U = V \cap M$

Bemerkung: Wird nichts anders explizit gesagt, werden wir Teilräume stets als mit der Teilraumtopologie versehen ansehen.

iii) Da (vgl. Diff2) jede Untermannigfaltigkeit N sich lokal als Graph schreiben lässt und da die von uns betrachteten offenen Mengen in N gerade die durch die Teilraumtopologie gegebenen sind folgt, dass eine Untermannigfaltigkeit im Sinne der Diff 2 eine topologische Mannigfaltigkeit im Sinne von 1.1 ist, explizit zum Beispiel:

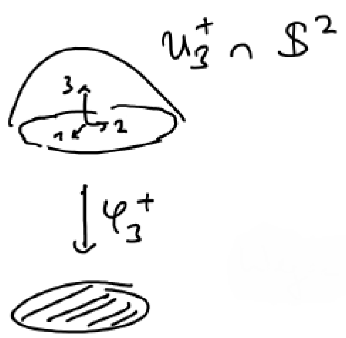
iv) $\mathbb{S} := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\|_E = 1\}$

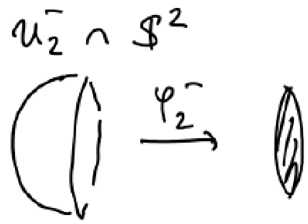


Wir konstruieren $2n+2$ Karten:
Betrachte $U_i^{\pm} = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_i \gtrless 0\}$. Sei $\dot{\mathbb{B}}^n = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \|y\|_E < 1\}$ und $f : \dot{\mathbb{B}}^n \to \mathbb{R}, f(y) = \sqrt{1 - \|y\|_E^2}$. Notiere für $i = 1, \ldots, n+1 : x(\hat{i}) = (x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_{n+1}) = (x_1, \ldots, \hat{x_i}, \ldots, x_{n+1})$.
Es ist dann: $U_i^{\pm} \cap \mathbb{S}^n = \{(x_1, \ldots, x_{i-1}, \pm f(x(\hat{i})), x_{i+1}, \ldots, x_n \mid x(\hat{i}) \in \dot{\mathbb{B}}^n\}$, also nach Umsortieren gleich dem Graphen der Funktion f beziehungsweise $-f$.
Nach ii) sind also Karten durch

$$\varphi_i^{\pm} : U_i^{\pm} \cap \mathbb{S}^n \to \mathbb{R}^n,\ \varphi_i^{\pm}(U_i^{\pm} \cap \mathbb{S}^n) = \dot{\mathbb{B}}^n$$
$$\varphi_i^{\pm}(x_1, \ldots, x_{n+1}) = (x_1, \ldots, \hat{x_i}, \ldots, x_{i+1}$$

gegeben. Also ist $\mathbb{S}^n$ eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit. Wegen $\mathbb{S}^n = \bigcup_{i=1}^{n+1} (U_i^+ \cap \mathbb{S}^n \cup (U_i^- \cap \mathbb{S}^n)$ liegt ein Atlas vor.

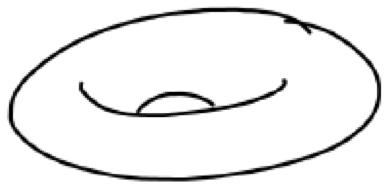




Lemma 1.3
Sind $M_1, \ldots, M_k$ topologische Mannigfaltigkeiten mit Dimensionen $n_1, \ldots, n_k$, so ist

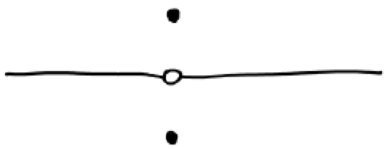
das kartesische Produkt $M_1 \times \cdots \times M_k$ eine $(n_1 + \cdots + n_k)$-dimensionale topologische Mannigfaltigkeit.

Beispiel: Tori $M = \underbrace{\mathbb{S}^1 \times \cdots \times \mathbb{S}^1}_{k-\text{fach}}$ sind k-dimensionale Mannigfaltigkeiten, zum Beispiel $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ eine 2-dimensionale:



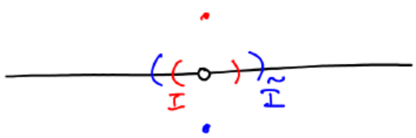
Bemerkung: Die Hausdorff-Eigenschaft folgt nicht aus der lokalen Homöomorphie zu $\mathbb{R}^n$.

Beispiel: $M = (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \times \{0\} \cup \{(0,1)^T, (0,-1)^T\} \subset \mathbb{R}^2$



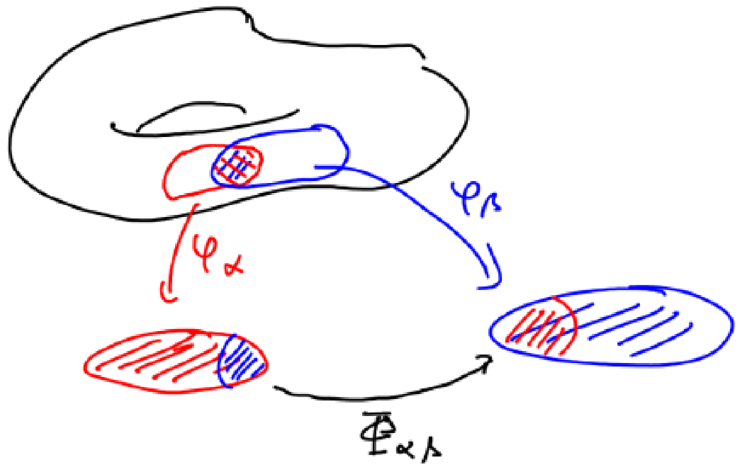
$$\varphi : M \setminus \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} \to \mathbb{R}$$
$$\varphi(x,y) = x$$
$$\psi : M \setminus \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \to \mathbb{R}$$
$$\psi(x,y) = x$$

Wähle die Topologie auf M so, dass φ und ψ homöomorph auf $\mathbb{R}$ abbilden. Dazu erklären wir die offenen Umgebungen von $(0, \pm 1)^T$ als $(I \setminus \{0\} \times \{0\}) \cup \{(0, \pm 1)\}$, wobei I ein offenes Intervall um 0 ist. Sei dann U eine offene Umgebung von $(0,1)$ und $\tilde{U}$ eine offene Umgebung von $(0,-1)$. Dann ist $U \cap \tilde{U} \neq \emptyset$ (da $I \setminus \{0\} \cap \tilde{I} \setminus \{0\} \neq \emptyset$).



Definition 1.4 (Kartenwechsel)
Seien $(\varphi_\alpha, U_\alpha), (\varphi_\beta, U_\beta)$ lokale Karten einer Mannigfaltigkeit M. Dann nennt man die Abbildung

$$\Phi_{\alpha\beta} : \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \to \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta), \quad \Phi_{\alpha\beta} = \varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$$



Kartenwechsel (von φ_α zu φ_β). Kartenwechsel sind also auf offene Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ definierte Homöomorphismen.
Ein Atlas heißt *differenzierbar*, falls alle seine Kartenwechsel glatt, also C^∞-Abbildungen, sind.

Bemerkung: In diesem Fall sind die Kartenwechsel Diffeomorphismen, das heißt auch die Umkehrabbildung ist wieder C^∞, denn

$$\Phi_{\alpha\beta}^{-1} = \left(\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}\right)^{-1} = \varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1} = \Phi_{\beta\alpha}$$

auf dem Definitionsbereich, wo die Abbildung definiert ist: $\varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$.

Definition 1.5 (Differenzierbare Struktur)
Sei $\mathcal{A}$ ein differenzierbarer Atlas (von M), dann bezeichnet man $\mathcal{D} = \mathcal{D}(\mathcal{A})$ die Menge *aller* Karten von M, die mit allen Karten aus $\mathcal{A}$ glatte Kartenwechsel haben,

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}) = \left\{(\psi, U) \text{ Karten} \;\middle|\; \psi \circ \varphi^{-1}\Big|_{\varphi(V\cap U)}, \varphi \circ \psi^{-1}\Big|_{\varphi(V\cap U)} \in C^\infty \text{ für alle } (\varphi, V) \in \mathcal{A}\right\}.$$

Bemerkung: $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ ist *maximal* in dem Sinn, dass es keine weiteren Karten gibt, die C^∞-Kartenwechsel mit den Karten aus $\mathcal{A}$ hätten, die nicht schon in $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ liegen. $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ ist also der größte differenzierbare Atlas, der $\mathcal{A}$ enthält.

Notation: Ein maximaler, differenzierbarer Atlas auf einer Mannigfaltigkeit M heißt *differenzierbare Struktur* (auf M). Eine Mannigfaltigkeit zusammen mit einer differenzierbaren Struktur heißt *differenzierbare Mannigfaltigkeit*.

Bemerkung:
i) Es genügt, einen möglichst kleinen Atlas anzugeben, da dieser die differenzierbare Struktur festlegt.
ii) ACHTUNG: Zwei Atlanten $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ einer Mannigfaltigkeit M führen nur dann zur selben differenzierbaren Struktur, wenn für alle $(\varphi, U) \in \mathcal{A}_1$ und $(\psi, V) \in \mathcal{A}_2$ die Kartenwechsel glatt sind.

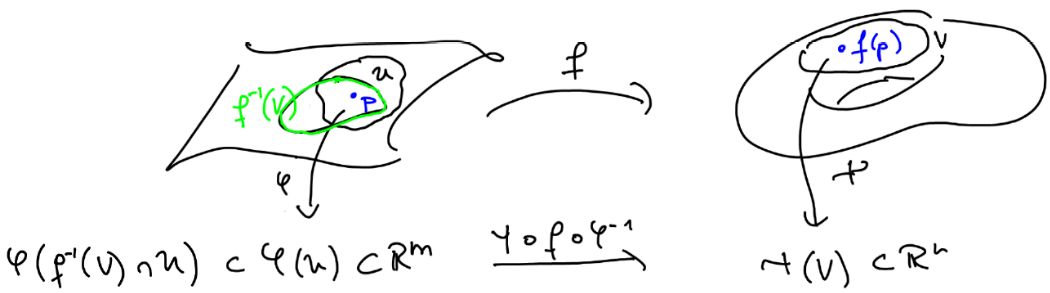
Beispiel: $\mathbb{S}^n$ mit den oben eingeführten Karten ist eine glatte Mannigfaltigkeit.

Vorlesung 2

Definition 1.7 (Differenzierbare Abbildung zwischen Mannigfaltigkeiten)
Seien M, N differenzierbare Mannigfaltigkeiten, M m-dimensional, N n-dimensional. Sei $f : M \to N$ stetig. f heißt *(stetig) differenzierbar/glatt* im Punkt $p \in M$, falls für eine (und damit für jede!) Karte (φ, U) bei p und eine (und damit für jede) Karte (ψ, V) bei $f(p)$ gilt

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \varphi\left(f^{-1}(V) \cap U\right) \to \mathbb{R}^n$$

ist (stetig) differenzierbar/glatt in $\varphi(p)$.



Diese Eigenschaft ist tatsächlich unabhängig von der Wahl der Karten φ und ψ: Seien φ' und ψ' weitere Karten bei p beziehungsweise $f(p)$, dann ist

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1} = \psi' \circ \left(\psi'^{-1} \circ \psi\right) \circ f \circ \left(\varphi^{-1} \circ \varphi'\right) \circ \varphi'^{-1}$$

genau dann (stetig) differenzierbar/glatt in p, wenn $\psi' \circ f \circ \varphi'^{-1}$ (stetig) differenzierbar/glatt in p ist, denn die Kartenwechsel $\psi'^{-1} \circ \psi, \varphi^{-1} \circ \varphi'$ sind glatt.

Bemerkung: $C^\infty(M, N) := \{f : M \to N \text{ glatt}\}$
Die differenzierbaren Mannigfaltigkeiten mit C^∞-Abbildungen bilden eine Kategorie, die unter Verknüpfungen abgeschlossen ist, das heißt $f, g \in C^\infty \implies f \circ g \in C^\infty$.

Definition 1.8 (Diffeomorphismus)
Eine Abbildung $f : M \to N$ nennt man *Diffeomorphismus*, falls $f \in C^\infty$ umkehrbar ist mit $f(M) = N$ und die Umkehrfunktion wieder C^∞ ist. Gibt es einen Diffeomorphismus $M \to N$ (somit auch einen Diffeomorphismus $N \to M$) nennt man M und N diffeomorph, $M \cong N$.

Bemerkung 1.9:

i) Aufgabe 3 Blatt 1: Verschiedene differenzierbare Strukturen auf $\mathbb{R}$: Atlanten $\{\mathrm{id}_\mathbb{R}\}, \{\varphi : x \mapsto x^3\}$, aber $(\mathbb{R}, \{\mathrm{id}_\mathbb{R}\}) \xrightarrow{\cong} (\mathbb{R}, \{\varphi\})$ diffeomorph.

Allgemeiner: $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, Atlas $\mathcal{A} = \{\mathrm{id}_U\} \to$ „Standard-Differenzierbare-Struktur“. Jeder Homöomorphismus $\varphi : U \to V \in \mathbb{R}^n$ gibt auch einen Atlas und eine differenzierbare Struktur. Sie ist genau dann die Standard differenzierbare Struktur, wenn φ als Abbildung $U \subset \mathbb{R}^n \to \tilde{U} \subset \mathbb{R}^n$ ein Diffeomorphismus ist. ACHTUNG! Als differenzierbare Mannigfaltigkeiten sind $(U, \{\mathrm{id}_U\})$ und $(U, \{\varphi\})$ aber auch dann diffeomorph, wenn $\varphi : U \to \tilde{U}$ kein Diffeomorphismus ist! Denn $\varphi : (U, \{\varphi\}) \to (U, \{\mathrm{id}_U\})$ ist ein Diffeomorphismus differenzierbarer Mannigfaltigkeiten: $\mathrm{id}_U \circ \varphi \circ \varphi^{-1} = \mathrm{id}_U$ ist ein Diffeomorphismus $U \to U$.

ii) Sehr viele Sätze befassen sich damit, ob es auf einer Mannigfaltigkeit verschiedene differenzierbare Strukturen gibt, sodass die entstehenden differenzierbaren Mannigfaltigkeiten nicht diffeomorph sind. Auf $\mathbb{S}^7$ gibt es genau 15 verschiedene differenzierbare Strukturen, die nicht diffeomorph zueinander sind (Milnor + Kervaire 1963, „exotische Sphären“, erstes Beispiel Milnor 1956).

iii) Unser Thema hier: Strukturen, die unter der Anwendung von Diffeomorphismen invariant sind. Daher können wir lokale Eigenschaften immer auf offenen Mengen im $\mathbb{R}^n$ untersuchen (also mit Hilfe von Karten und Koordinaten). Das heißt konkret: Statt $f : U \subset M \to N$ zu betrachten mit M und N als differenzierbare Mannigfaltigkeiten betrachten wir $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ mit $(\varphi, \tilde{U}), \tilde{U} \subset U$, Karte von M und (ψ, V) Karte von N mit $f(\tilde{U}) \subset V$, also eine Abbildung von einer offenen Menge $\subset \mathbb{R}^m$ in eine offene Menge $\subset \mathbb{R}^n$.

iv) Es ist keine Einschränkung, Glattheit der Kartenwechsel zu fordern. Denn es gilt: Ist $\mathcal{A}$ ein Atlas von M mit C^1-Kartenwechseln, so gibt es zu jedem l, $1 \leq l \leq \infty$, einen Atlas $\tilde{\mathcal{A}}$ von M, sodass die Kartenwechsel von $\tilde{\mathcal{A}}$ C^l-Abbildungen sind und so, dass die Kartenwechsel von $\tilde{\mathcal{A}} \cup \mathcal{A}$ C^1 sind [Whitney, 1936], das heißt für $l = \infty$ ist $(M, \mathcal{D}(\tilde{\mathcal{A}}))$ eine differenzierbare Mannigfaltigkeit im Sinne unserer Definitionen.

v) Es gibt topologische Mannigfaltigkeiten, die keinen Atlas besitzen, der C^1-Kartenwechsel hat (somit auch keine differenzierbare Struktur in unserem Sinn).

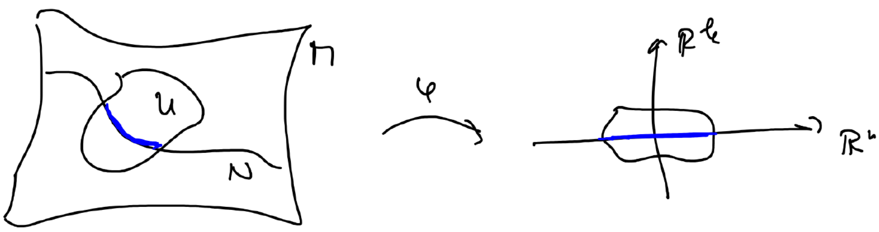
1.1 Untermannigfaltigkeiten

Definition 1.10 (Topologische Untermannigfaltigkeit)
$N \subset M, \dim(M) = n + k$, heißt *$n$-dimensionale (topologische) Untermannigfaltigkeit* der (topologischen) Mannigfaltigkeit M, falls es zu jedem Punkt $p \in N$ eine Karte (φ, U) von M bei p, $\varphi : U \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k$, gibt, sodass $\varphi(U \cap N) = \varphi(U) \cap (\mathbb{R}^n \times \{0\})$. Eine Karte von M mit dieser Eigenschaft heißt N *angepasst*.
Ist M differenzierbar, so heißt N *differenzierbare Untermannigfaltigkeit* von M, falls

es zu jedem $p \in N$ angepasste Karten aus der differenzierbaren Struktur von M gibt. Die Gesamtheit der Karten

$$\Big\{\varphi : U \cap N \to \underset{\substack{\uparrow \\ \mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^n \times \{0\}}}{\varphi(U) \cap \mathbb{R}^n} \mid \varphi \text{ angepasste Karte aus der diff'baren Struktur von } M\Big\}$$

ist ein differenzierbarer Atlas für N.



Beispiel: $\mathbb{S}^n$ ist eine Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^{n+1}$. Angepasste Karten:

$$\psi_{\pm i} : U_i^{\pm} \to \mathbb{R}^{n+1},\ \psi_{\pm i}(x) = \left(x\left(\hat{i}\right), x_i\right)$$

Man nennt eine glatte Abbildung $f : \tilde{M} \to M$ eine *glatte Einbettung*, falls $f\left(\tilde{M}\right) \subset M$ eine differenzierbare Untermannigfaltigkeit von M ist und $f : \tilde{M} \to f\left(\tilde{M}\right)$ ein Diffeomorphismus.

Satz 1.11
Sei M eine $(n+k)$-dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit, $N \subset M$ eine Teilmenge. Dann ist N eine n-dimensionale differenzierbare Untermannigfaltigkeit $\iff$ $\forall\, p \in N\ \exists$ Umgebung U von p in M und eine glatte Abbildung $f : U \to \mathbb{R}^k$, mit $Df(q)$ von maximalem Rang $k\ \forall\, q \in U$, sodass $U \cap N = f^{-1}(0)$.

Beispiel: Betrachte den Torus $\pi = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$. Diese Mannigfaltigkeit lässt sich als differenzierbare Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^3$ realisieren: Sei $0 < r < R$. Rotiere den Kreis von Radius r um $(R, 0)$ in der (x, z)-Ebene um die z-Achse, so entsteht eine zu $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ diffeomorphe Untermannigfaltigkeit. Dazu zunächst folgende Beobachtung:

Bemerkung 1.12: Differenzierbare Struktur auf Produkt-Mannigfaltigkeiten: Die Kartenwechsel der Karten aus Lemma 1.3

$$\varphi_1 \times \cdots \times \varphi_k : \underset{\subset M_1}{U_1} \times \cdots \times \underset{\subset M_k}{U_k} \to \mathbb{R}^{n_1} \times \cdots \times \mathbb{R}^{n_k}$$

sind glatt, wenn die M_j differenzierbare Mannigfaltigkeiten sind, denn

$$\psi_1 \cdots \psi_k \circ (\varphi_1 \times \cdots \times \varphi_k)^{-1} = \psi_1 \circ \varphi_1^{-1} \times \cdots \psi_k \circ \varphi_k^{-1}.$$

Die Tori $\mathbb{S}^1 \times \cdots \times \mathbb{S}^1$ sind somit (kanonisch) mit einer differenzierbaren Struktur versehen. Die Homöomorphie von π mit der Rotationsfläche ist tatsächlich ein Diffeomorphismus.

Bemerkung: Bisher haben wir topologische Mannigfaltigkeiten betrachtet und diese dann mit einer differenzierbaren Struktur versehen.
Gegeben eine Familie von Karten, die gewisse Eigenschaften haben, kann man direkt eine Topologie und eine differenzierbare Struktur auf einer Mannigfaltigkeit in einem Schritt definieren, wie das folgende Lemma zeigt:

Lemma 1.13
Sei M eine Menge und $\{\varphi_\alpha : U_\alpha \to \mathbb{R}^n \mid \alpha \in A\}, U_\alpha \subset M$, eine Familie von Abbildungen mit folgenden Eigenschaften:

i) Es gibt eine abzählbare Menge $I \subset A$, sodass $M = \bigcup\limits_{\alpha \in I} U_\alpha$.

ii) Für $p, q \in M, p \neq q$, gibt es ein U_α, sodass $p, q \in U_\alpha$ oder es gibt $U_\alpha, U_\beta, U_\alpha \cap U_\beta = \emptyset$, mit $p \in U_\alpha, q \in U_\beta$.

iii) Für jedes $\alpha \in A$ ist φ_α eine Bijektion von $U\alpha$ auf eine offene *Teilmenge $\varphi_\alpha(U_\alpha) \subset \mathbb{R}^n$.*

iv) Für alle $\alpha, \beta \in A$ sind $\varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$ und $\varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$ offen in $\mathbb{R}^n$.

v) Für alle $\alpha, \beta \in A$ ist die Abbildung $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(\underbrace{U_\alpha \cap U_\beta}_{\subset \mathbb{R}^n}) \to \varphi_\beta(\underbrace{U_\alpha \cap U_\beta}_{\subset \mathbb{R}^n})$ glatt.

Dann ist M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit, deren differenzierbare Struktur eindeutig durch die Forderung festgelegt ist, dass die $(\varphi_\alpha, U_\alpha)$ glatte Karten sind, das heißt dass alle Kartenwechsel glatt sind.

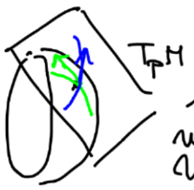
§2 Der Tangentialraum

Erinnerung (Diff 2): Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine Untermannigfaltigkeit, $p \in M$. Ein Tangentialvektor $v \in \mathbb{R}^n$ an M in p ist von der Form $v = \gamma'(0)$, wobei $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ mit $\gamma(0) = p$ eine in M verlaufende C^1-Kurve ist. Der *Tangentialraum* $T_a M$ (an M in p) ist die Menge aller Tangentialvektoren. Vorlesung 3

- Ist $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $pinU$, $f : U \to \mathbb{R}^{n-m}$ C^1 mit $M \cap U = \{x \in U \mid f(x) = 0\}$ und $rang(Df(p)) = n - m$. Dann ist der Tangentialraum in p an M $T_p M = \ker(Df(p)) \subset \mathbb{R}^n$ (m-dim. Unterraum).
- Ist $\psi : V \to \mathbb{R}^n$ eine lokale Parametrisierung von M bei p, so sind $\partial_j \psi,\ d = 1, \ldots, m$, Basisvektoren $V \subset \mathbb{R}^n$ für $T_p M$.

Beispiel: $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$, $T_p M = p^\perp$, denn $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, f(x) = 1 - \|x\|^2$ für $p \in \S^2$, sodass $p_i > 0$ oder < 0 beschreibt $\mathbb{S}^2 \cap U_i \ni p, U_i = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_i > 0 \text{ oder } < 0\}$ als Nullstellengebilde und $Df(p) = -2p$.

$p_2 > 0$



affin gezeichnet. tatsächlich handelt es sich nur um einen Untervektorraum von $\mathbb{R}^3$

Zur Verallgemeinerung auf Mannigfaltigkeiten[1] überlegen wir zunächst, dass 2 Kurven zum selben Tangentialvektor führen, wenn sie in einer Umgebung von p Übereinstimmen. Formalisiert und verallgemeinert führen wir daher ein:

Definition 2.1 (Keime)
Auf $\{f \mid f : U \to N,\ U \text{offene Umgebung von } p \in M\}$ definiert

$$f \sim g \iff \exists \text{ offene Umgebung } V \text{ von } p, \text{ sodass } \left. f \right|_V = \left. g \right|_V$$

eine Äquivalenzrelation. Eine Äquivalenzklasse bezüglich $\sim$ nennt man *Keim* einer Abbildung $M \to N$ bei p. Ist f C^1/glatt bei p, so auch alle Elemente der von f repräsentierten Klasse $\bar{f}$. Man spricht in dem Fall von C^1/glatten Keimen. Wir

[1] von nun an betrachten wir nur noch differenzierbare Mannigfaltigkeiten

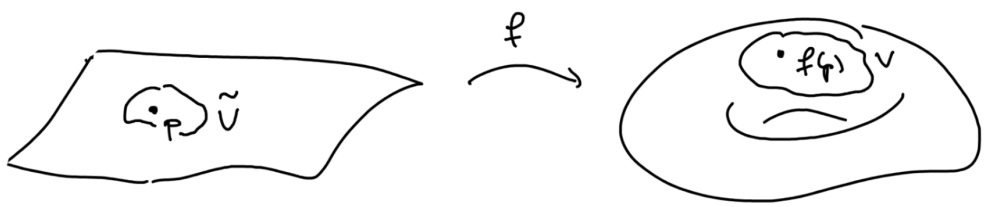
schreiben $\mathcal{E}^1(p)$ bzw. $\mathcal{E}^\infty(p)$ für die Menge aller C^1 bzw. glatten Keime bei $p \in M$ mit Werten in $\mathbb{R}$ („Funktionskeime“) $(M,p) \to \mathbb{R}$.

Bemerkung 2.2: i) $\mathcal{E}^1(p)$ und $E^\infty(p)$ bilden eine Algebra (denn die Bildung von Äquivalenzklassen ist mit der punktweisen Addition und Multiplikation verträglich).

ii) Ist $\bar{f} : (M,p) \to N$ ein C^1/glatter Keim bei $p \in M$, so definiert er einen Homomorphismus von Algebren $\Big(\mathcal{E}(f(p))$ Keime $(N, f(p)) \to \mathbb{R}\Big)$

$f^* : \mathcal{E}^{1/\infty}(f(p)) \to \mathcal{E}^{1/\infty}(p)$ vermöge $f^*\left(\bar{h}\right) = \bar{h} \circ \bar{f}$ „pullback“, „Zurückziehung“

Offensichtlich ist das unabhängig von der Wahl des Repräsentanten.



$g \circ f|_{\tilde{V}} = h \circ f|_{\tilde{V}}$ $\qquad$ $g|_V = h|_V \,, \; f(p) \in V$

Es gilt $\mathrm{id}^* = \mathrm{id}$ und $(f \circ g)^* = g^* \circ f^*$. Insbesondere induziert ein bezüglich Komposition integrierbarer Keim $\bar{f}$ ($\bar{f} \circ \bar{f}^{-1} = \bar{f} \circ \overline{f^{-1}} = \mathrm{id}$) einen Isomorphismus $f^*, f^{-1*} \circ f^* = \mathrm{id}$.

iii) Spezialfall: Ist φ eine um $p \in M$ zentrierte Karte, so definiert φ einen invertierbaren Keim $\bar{\varphi} : (M,p) \to \mathbb{R}^n$ mit $\varphi(p) = 0$ und somit einen Isomorphismus $\varphi^* : \mathcal{E}_n^{1/\infty} \to \mathcal{E}^{1/\infty}(p)$, wobei $\mathcal{E}_n = \{\text{Funktionskeime bei } 0\}$, das heißt man kann sich auf Keime aus $\mathcal{E}_n$ beschränken.

2.1 3 Definitionen des Tangentialraums

Definition 2.3 (algebraische Definition)
Eine *Derivation* von $\mathcal{E}^\infty(p)$ ist eine lineare Abbildung $X : \mathcal{E}^\infty(p) \to \mathbb{R}$, die der folgenden Leibniz-Regel genügt:

$$X(\bar{f} \cdot \bar{g}) = X(\bar{f}) \cdot g(p) + f(p) \cdot X(\bar{g}).$$

Der *Tangentialraum* T_pM in p ist der Vektorraum der Derivationen von $\mathcal{E}^\infty(p)$.
Ein glatter Keim $\bar{f} : (M,p) \to N$ induziert einen Algebra-Homomorphismus $f^* : \mathcal{E}^\infty(f(p)) \to \mathcal{E}^\infty(p)$ und somit eine (lineare) Abbildung, die *Tangentialabbildung* (oder Differential) $T_pf : T_pM \to T_{f(p)}N, X \mapsto X \circ f^*$.

Bemerkung: i) Es gilt

$$T_p\left(\bar{g}\circ\bar{f}\right) = T_{f(p)}\bar{g}\circ T_p\bar{f} \quad \forall\, \bar{f}:(M,p)\to N, \bar{g}:(N,f(p))\to\tilde{N}\in C^\infty,$$

denn für $\bar{h}\in\mathcal{E}^\infty(g(f(p)))$ gilt

$$\begin{aligned}
X\circ\left(\left(\bar{g}\circ\bar{f}\right)^*\right)\left(\bar{h}\right) &= X\left(\bar{h}\circ\left(\bar{g}\circ\bar{f}\right)\right)\\
&= \left(X\circ f^*\right)\left(\bar{h}\circ\bar{g}\right)\\
&= T_{f(p)}\bar{g}\left(X\circ f^*\right)(h)\\
\text{und}\ \left(T_{f(p)}\bar{g}\circ T_p\bar{f}\right) &= T_{f(p)}\bar{g}\left(X\circ\bar{f}^*\right)\left(\bar{h}\right)
\end{aligned}$$

ii) Ist $\bar{\varphi}:(M,p)\to\mathbb{R}^n$ ein Keim einer bei p zentrierten Karte, so ist $\mathcal{E}_n^\infty \xrightarrow[\varphi^*]{\cong} \mathcal{E}^\infty(p)$ isomorph und $T_pM \xrightarrow[T_p\varphi]{\cong} T_0\mathbb{R}^n$. $T_0\mathbb{R}^n$ hat eine besonders einfache Beschreibung:

Lemma 2.4
Die partiellen Ableitungen ∂_j in 0 bilden eine Basis von $T_0\mathbb{R}^n$.

Bemerkung: $\partial_j\big|_0 \xleftrightarrow{1:1} e_j\in\mathbb{R}^n$. Somit ist $T_0\mathbb{R}^n\cong\mathbb{R}^n$ als Vektorraum.

Satz 2.5
Seien $(x_1,\dots,x_m),(y_1,\dots,y_n)$ lokale Koordinaten bei $p\in M, q\in N$, gegeben durch bei p bzw. q zentrierte Karten φ,ψ (das heißt $x_i(\tilde{p})=\varphi_i(\tilde{p})$ mit (φ,U) lokale Karte bei $p\in M,\tilde{p}\in U,\varphi(p)=0$. Analog für y_j.)
Dann sind $\left\{\frac{\partial}{\partial x_1}\Big|_0,\dots,\frac{\partial}{\partial x_m}\Big|_0\right\}$ bzw. $\left\{\frac{\partial}{\partial y_1}\Big|_0,\dots,\frac{\partial}{\partial y_n}\Big|_0\right\}$ Basen von $T_0\mathbb{R}^m\cong T_pM$ bzw. $T_0\mathbb{R}^n\cong T_qN$.
Die Tangentialabbildung eines C^∞-Keimes $\bar{f}:(M,p)\to N$ ist bezüglich dieser Basen durch die Jacobimatrix $D(\underbrace{\psi\circ f\circ\varphi^{-1}}_{\text{Keim } (\mathbb{R}^m,0)\to\mathbb{R}^n})(0):\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^n$ gegeben.

$$\begin{tikzcd}
T_pM \arrow[r, "Df"] \arrow[d, "\varphi"] & T_{f(p)}N \arrow[d, "\psi"] \\
T_0\mathbb{R}^m \arrow[r] & T_0\mathbb{R}^n
\end{tikzcd}$$

Bemerkung: Hierbei setzen wir φ^{-1} außerhalb von $\varphi(U)$ glatt auf $\mathbb{R}^m$ fort.

Beispiel: $M=\mathbb{S}^1, p=(0,1,0)^T, \varphi:U_2^+\cap\mathbb{S}^2\to\mathbb{R}^2,$
$\varphi(x)=(x_1,x_3)$

Basis des Tangentialraums $T_0\mathbb{R}^2$ $\partial_1\big|_0, \partial_2\big|_0$

$f_{1,2}:\mathbb{S}^2\to\mathbb{S}^2, f_1(x)=(x_1,-x_2,x_3),$
$f_2(x)=(x_1,x_2,-x_3)$

$\overline{g_1} = \psi_1 \circ \overline{f_1} \circ \varphi^{-1} : (\mathbb{R}^2, 0) \to \mathbb{R}^2,\ \psi_1 : U_2^- \cap \mathbb{S}^2 \to \mathbb{R}^2, \psi_1(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_3)$
$\overline{g_2} = \psi_2 \circ \overline{f_2} \circ \varphi^{-1} : (\mathbb{R}^2, 0) \to \mathbb{R}^2,\ \psi_2 = \varphi$

$$
\begin{aligned}
Dg_j(0,0) &= D\psi_j(f_j(\overbrace{\varphi(0,0)}^{=p})) \circ Df_j(p) \circ D\varphi^{-1}(0,0) \\
Dg_1(0,0) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} \left.\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{-u_1}{\sqrt{1-\|u\|^2}} & \frac{-u_2}{\sqrt{1-\|u\|^2}} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right|_{u=0} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
Dg_2(0,0) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Verhalten unter Kartenwechseln

Seien $\bar{\varphi}, \bar{\psi} : (M,p) \to (\mathbb{R}^n, 0)$ Kartenkeime. Dann ist der Kartenwechsel $\Phi = \bar{\psi} \circ \bar{\varphi}^{-1} : (\mathbb{R}^m, 0) \to \mathbb{R}^m$ ein glatter invertierbarer Keim und Φ ist eindeutig durch ψ, φ festgelegt. Solche Φ bilden eine Gruppe $\mathcal{G}$ (bezüglich Komposition $\circ$). Durch die Zuordnung $\Phi \mapsto D\Phi(0)$ erhält man einen Gruppenhomomorphismus $\mathcal{G} \to GL(m, \mathbb{R})$.

Definition 2.6 (physikalische Definition)
Ein *Tangentialvektor* an $p \in M$ (m-dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit) ist eine Zuordnung, die einem Kartenkeim $\bar{\varphi} : (M,p) \to \mathbb{R}^m$ (einer bei p zentrierten Karte) einen Vektor $v \in \mathbb{R}^m$ zuordnet, sodass $\underbrace{(\overline{\psi \circ \varphi^{-1}})}_{=\Phi} \circ \bar{\varphi}$ (ψ weitere bei p zentrierte Karte) der Vektor $D\Phi(0) \cdot v$ zugeordnet wird.

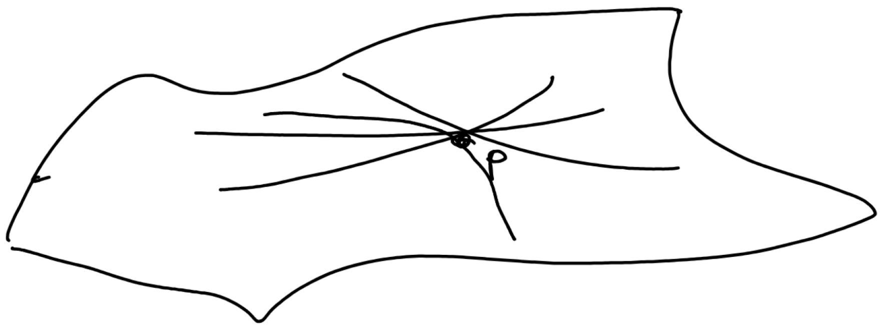
Lemma 2.7
$(T_pM)_{phys} \cong T_pM$ *(als Vektorräume)*

Schließlich die anschaulichste Definition:

Definition 2.8 (geometrische Definition)
Sei Γ_p die Menge der glatten Keime $\bar{\gamma} : (\mathbb{R}, 0) \to M$ mit $\gamma(0) = p$. Wir definieren auf Γ_p eine Äquivalenzrelation

$$\overline{\gamma_1} \sim \overline{\gamma_2} \iff \frac{d}{dt}\left(\bar{f} \circ \overline{\gamma_1}\right)(0) = \frac{d}{dt}\left(\bar{f} \circ \overline{\gamma_2}\right)(0) \qquad \forall\, \bar{f} \in \mathcal{E}^\infty(p).$$

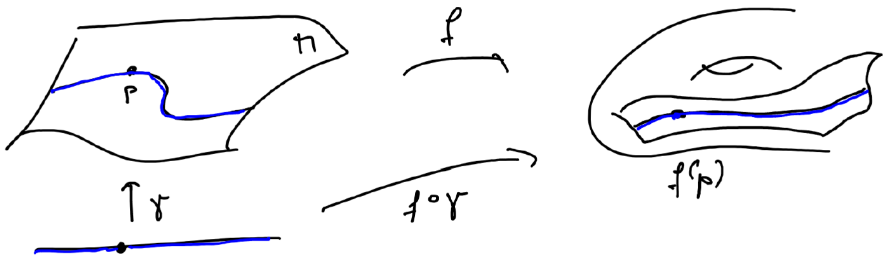
Eine Äquivalenzklasse $[\gamma]$ ist ein Tangentialvektor $\in (T_pM)_{geom}$.



Bemerkung: $[\gamma] \mapsto X_\gamma,\ X_\gamma(\bar{f}) = \frac{d}{dt}\bar{f} \circ \bar{\gamma}(0)$ liefert eine bijektive Abbildung $(T_pM)_{geom} \to T_pM$
Injektivität: Nach Konstruktion sind für $\tilde{\gamma} \notin [\gamma] : \frac{d}{dt}(\bar{f} \circ \bar{\gamma})(0) \neq \frac{d}{dt}(\bar{f} \circ \bar{\tilde{\gamma}})(0)$
Surjektivität: Schreibt man γ in lokalen Koordinaten $\gamma(t) = (ta_1, \ldots, ta_m)$, so ist $X_\gamma = \sum_{i=1}^m a_i\, \partial_i\big|_0$.

Bemerkung: Tangentialabbildung:
Sei $\bar{f} : (M,p) \to N$ ein glatter Keim, dann ist $\underbrace{[\gamma]}_{\in (T_pM)_{geom}} \mapsto \underbrace{[f \circ \gamma]}_{\in (T_{f(p)}N)_{geom}}$ die Tangentialabbildung T_pf, denn

$$\begin{aligned} X_{f\circ\gamma}(\bar{h}) &= \frac{d}{dt}(\bar{h} \circ \bar{f} \circ \bar{\gamma})(0)\ \forall\, \bar{h} \in \mathcal{E}^\infty_{f(p)} \\ &= X_\gamma(\bar{h} \circ \bar{f}) \\ &= T_pf(X_\gamma)(\bar{h}) \end{aligned}$$



Wir werden im Folgenden die drei Definitionen des Tangentialraums je nach Praktikabilität verwenden und in der Notation nicht unterscheiden.

Beispiel: Ist V ein endlich-dimensionaler Vektorraum, so ist V eine differenzierbare Mannigfaltigkeit. Die Wahl der Basis liefert einen Isomorphismus $V \cong \mathbb{R}^n$ (Karte). Da lineare Abbildung $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ differenzierbar sind erhält man für jede Basis die selbe differenzierbare Struktur. Es gilt $T_pV \cong V\ \forall\, p$. $(v \in V, \gamma_v(t) = p + tv, [\gamma_v] \in T_pV)$

Definitionen