Đồ thị

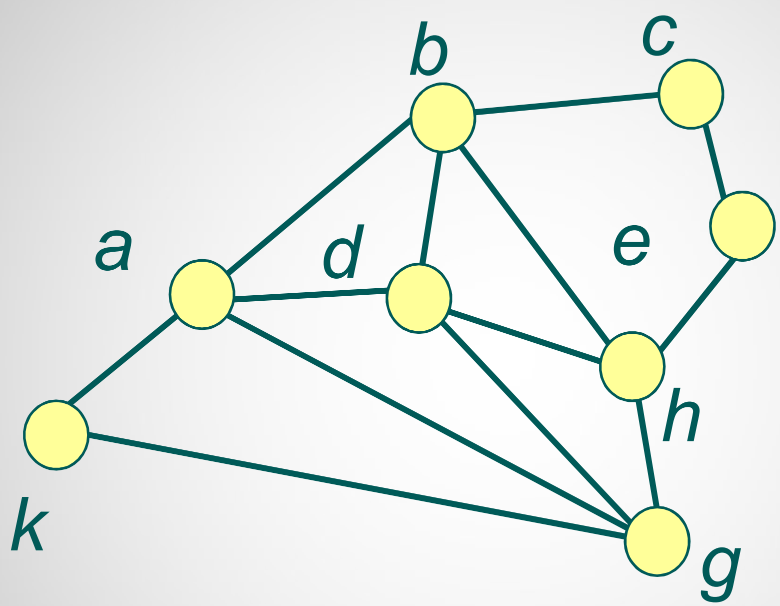
Biên soạn
Nguyễn Viết Hưng

Những khái niệm và tính chất cơ bản

Định nghĩa đồ thị

Đồ thị vô hướng G = (V, E) gồm:

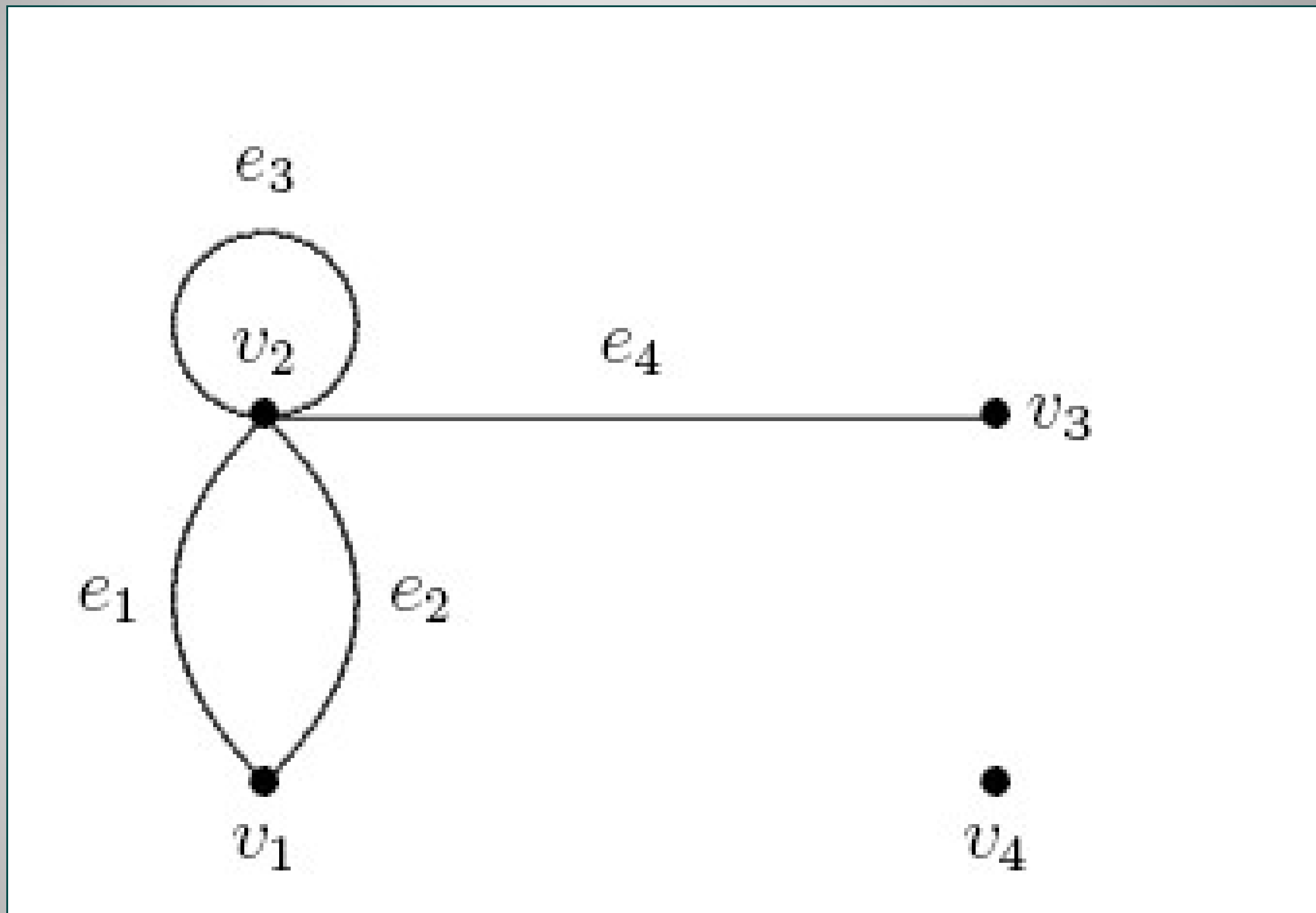
i) V là tập hợp khác rỗng mà các phần tử của nó gọi là *đỉnh* (vertex) của G.
ii) E là đa tập hợp gồm các cặp không sắp thứ tự của hai đỉnh. Mỗi phần tử của E được gọi là một *cạnh* (edge) của G. Ký hiệu uv.


b
c
a
d
e
h
k
g

Những khái niệm và tính chất cơ bản

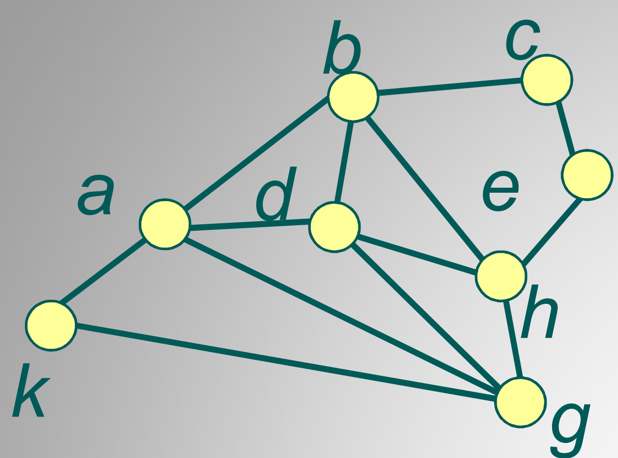
Chú ý

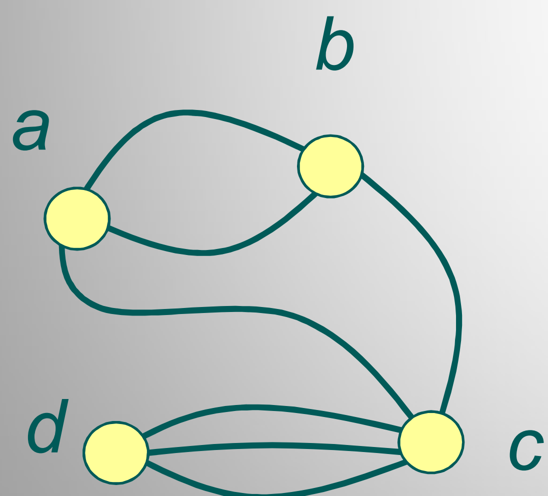
- Ta nói cạnh uv nối u với v, cạnh uv *kề* với u,v.
- Nếu uv $\in$E thì ta nói đỉnh u *kề* đỉnh v.
- Hai cạnh nối cùng một cặp đỉnh gọi là *hai cạnh song song*.
- Cạnh uu có hai đầu mút trùng nhau gọi là một *khuyên*.

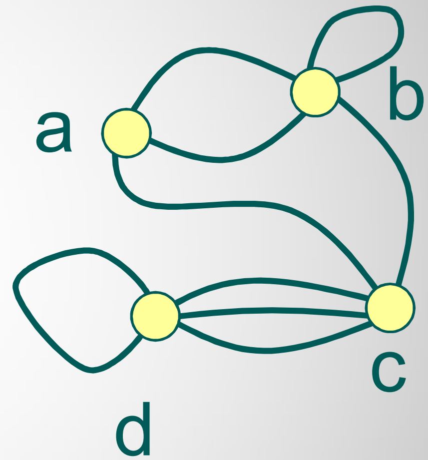

e_3
v_2
e_4
v_3
e_1
e_2
v_1
v_4

Những khái niệm và tính chất cơ bản

- **Định nghĩa 1.** Đồ thị vô hướng không có cạnh song song và không có khuyên gọi là *đơn đồ thị vô hướng*.
- **Định nghĩa 2.** Đồ thị vô hướng cho phép có cạnh song song nhưng không có khuyên gọi là *đa đồ thị* vô hướng.
- **Định nghĩa 3.** Đồ thị vô hướng cho phép có cạnh song song và có khuyên gọi là *giả đồ thị*


b
c
a
d
e
h
k
g

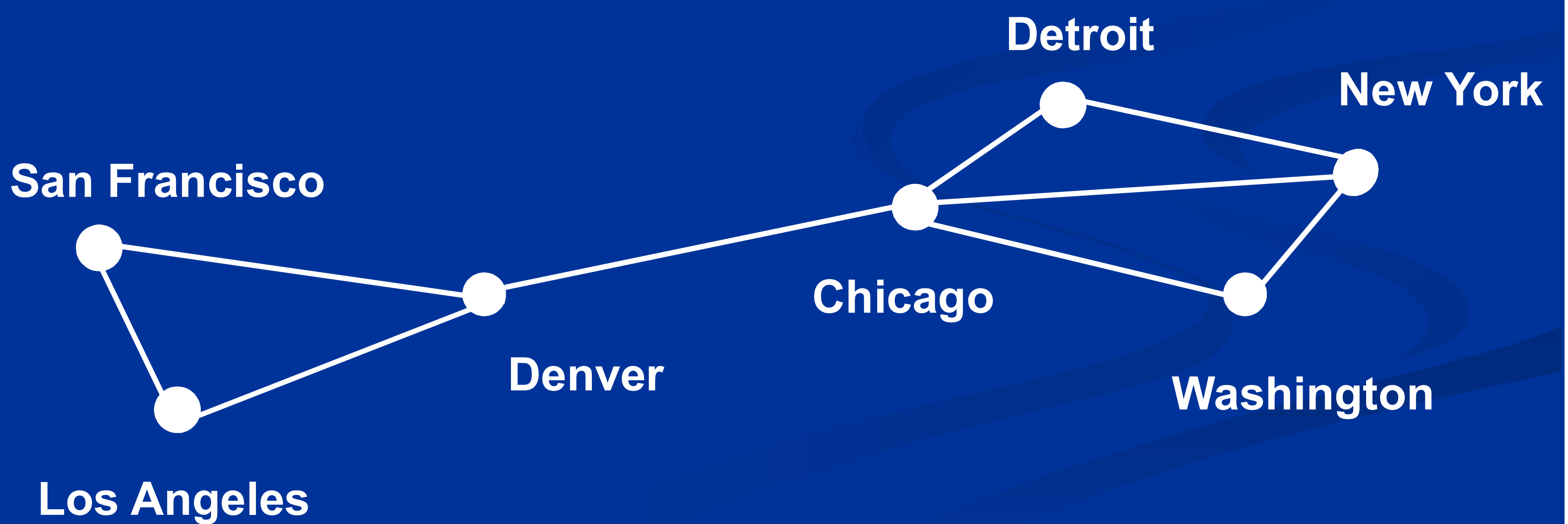

a
b
d
c


b
a
c
d

Những khái niệmvà tính chấtcơ bản

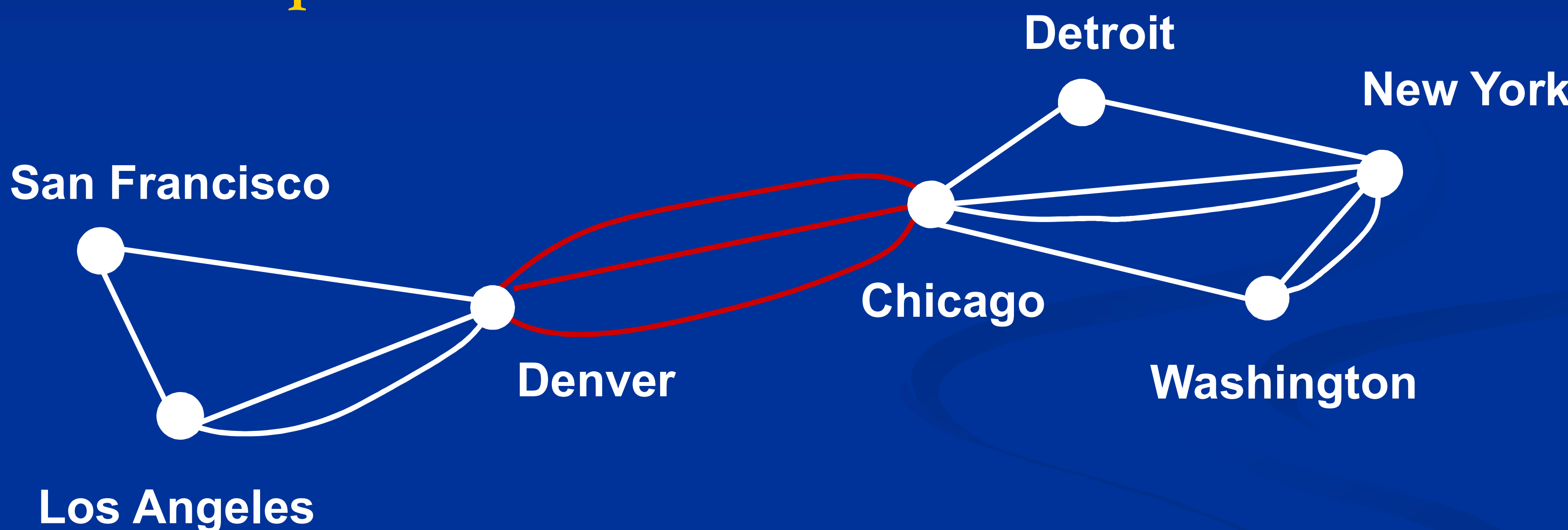
Simple Graph

Definition 1. A ***simple graph*** $G = (V, E)$ consists of V, a nonempty set of ***vertices***, and E, a set of unordered pairs of distinct elements of V called ***edges***.



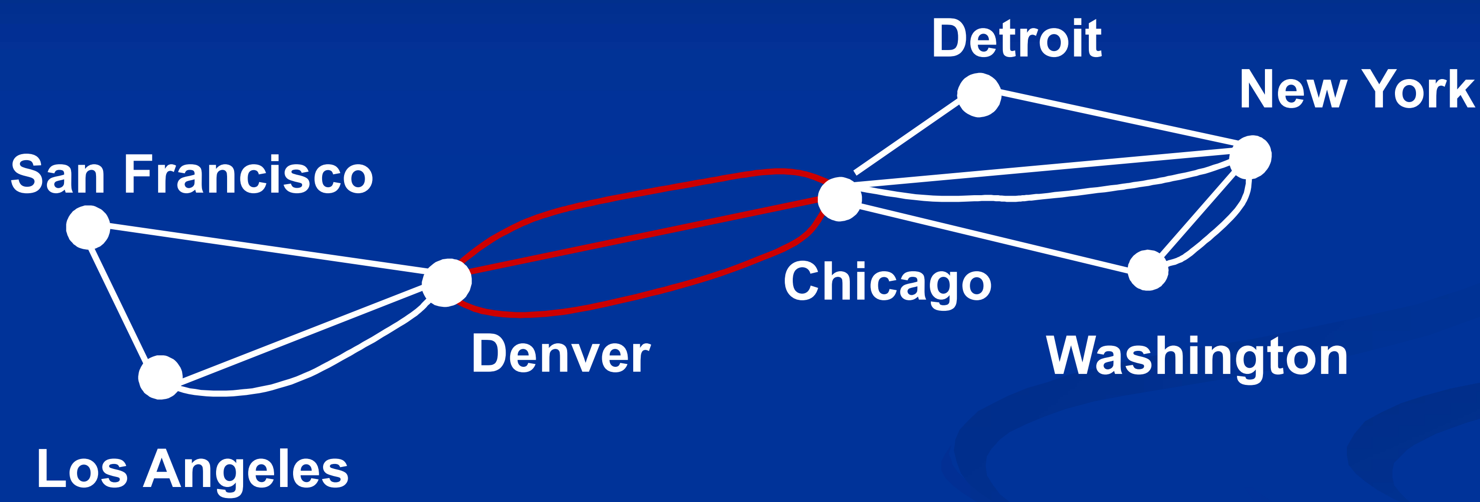
Multigraph -A Non-Simple Graph

There can be multiple telephone lines between two computers in the network.



■In a ***multigraph*** *G = (V, E)* two or more edges may connect the same pair of vertices.

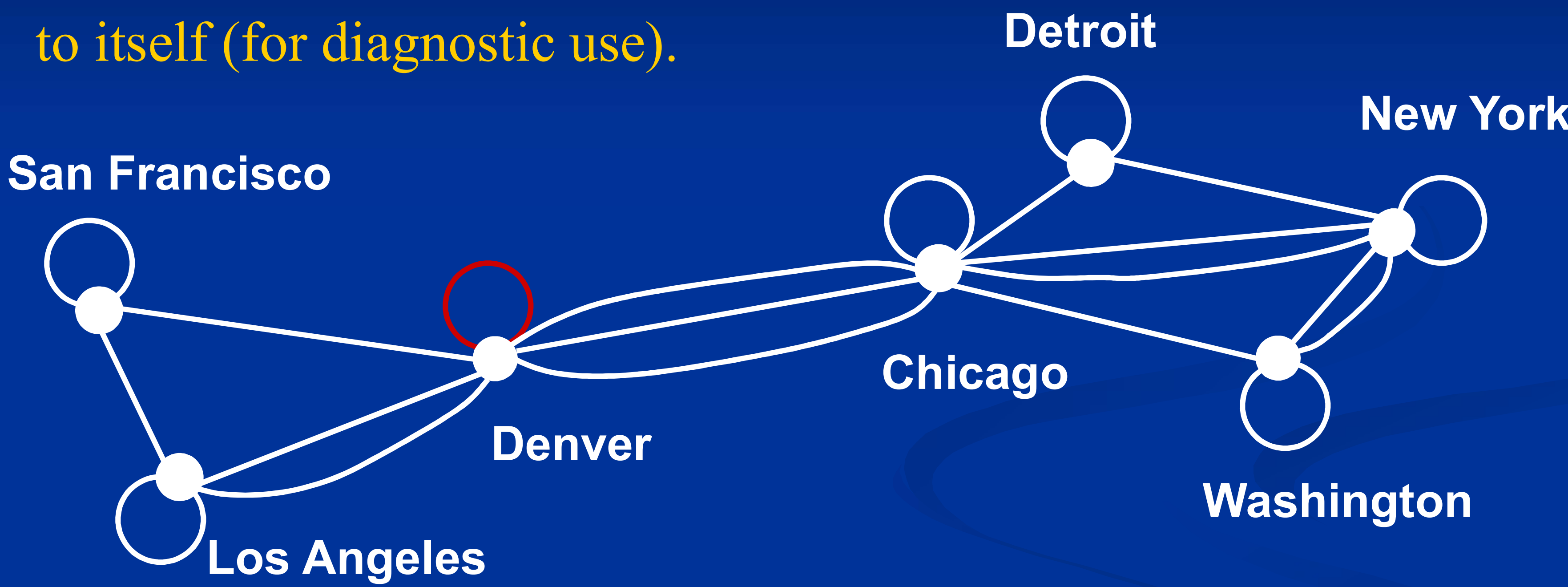
Multiple Edges



Two edges are called ***multiple*** or ***parallel edges*** if they connect the same two distinct vertices.

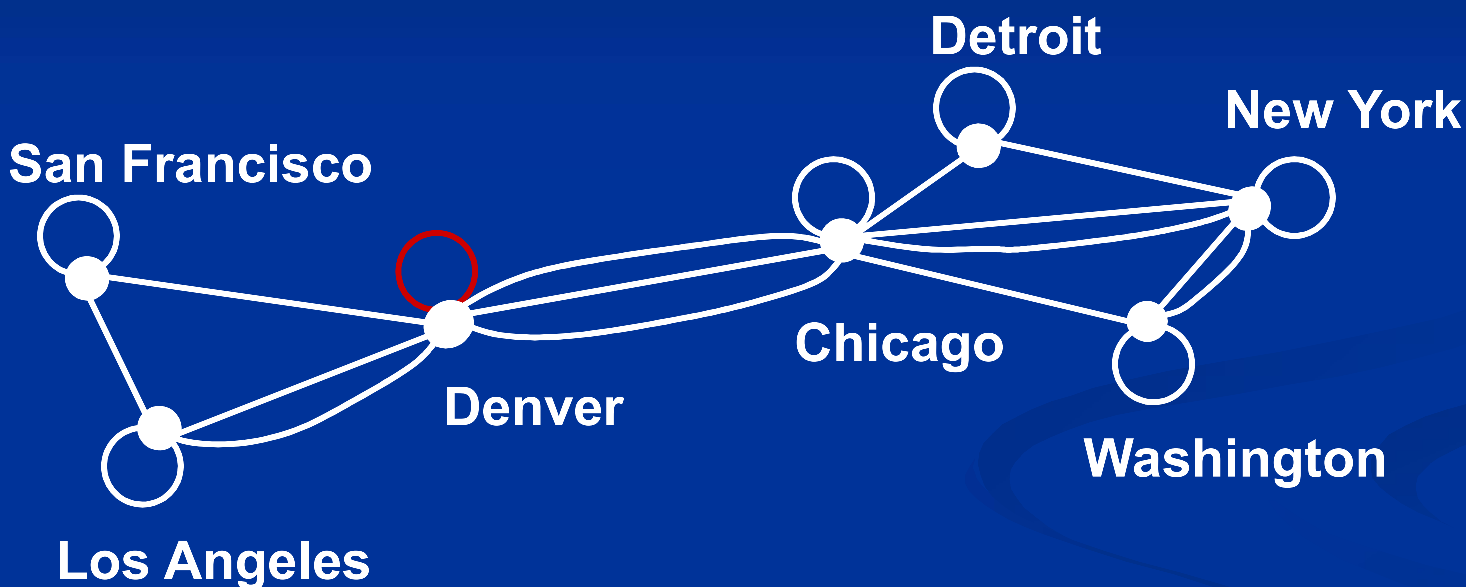
Pseudograph- A Non-Simple Graph

There can be telephone lines in the network from a computer to itself (for diagnostic use).



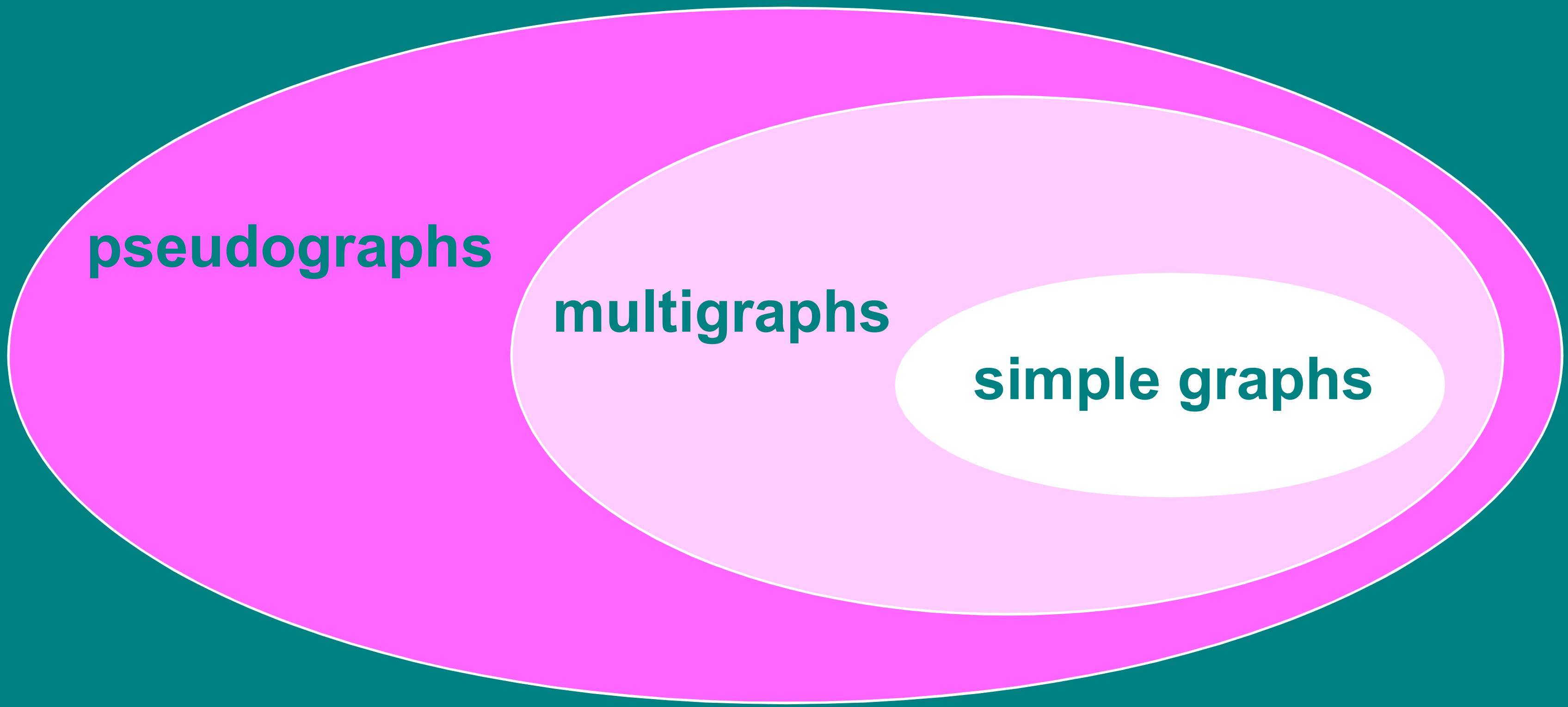
- In a ***pseudograph*** $G = (V, E)$ two or more edges may connect the same pair of vertices,
- and in addition, an edge may connect a vertex to itself.

Loops



An edge is called a ***loop***
if it connects a vertex to itself.

Undirected Graphs



Những khái niệm và tính chất cơ bản

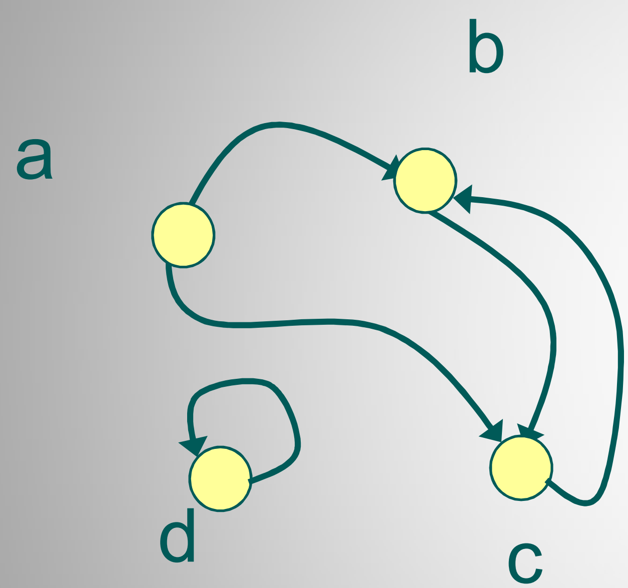
Định nghĩa

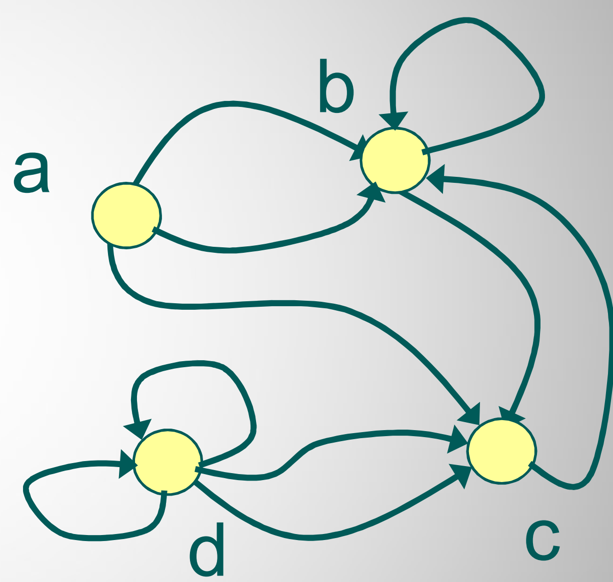
Đa đồ thị có hướng G =(V,E) gồm:

i) V là tập hợp khác rỗng mà các phần tử của nó gọi là đỉnh của G.

ii) E là đa tập hợp gồm các cặp có sắp thứ tự của hai đỉnh. Mỗi phần tử của E được gọi là một cung (cạnh) của G. Ký hiệu uv.

Ta nói cung uv đi từ u đến v, cung uv kề với u,v

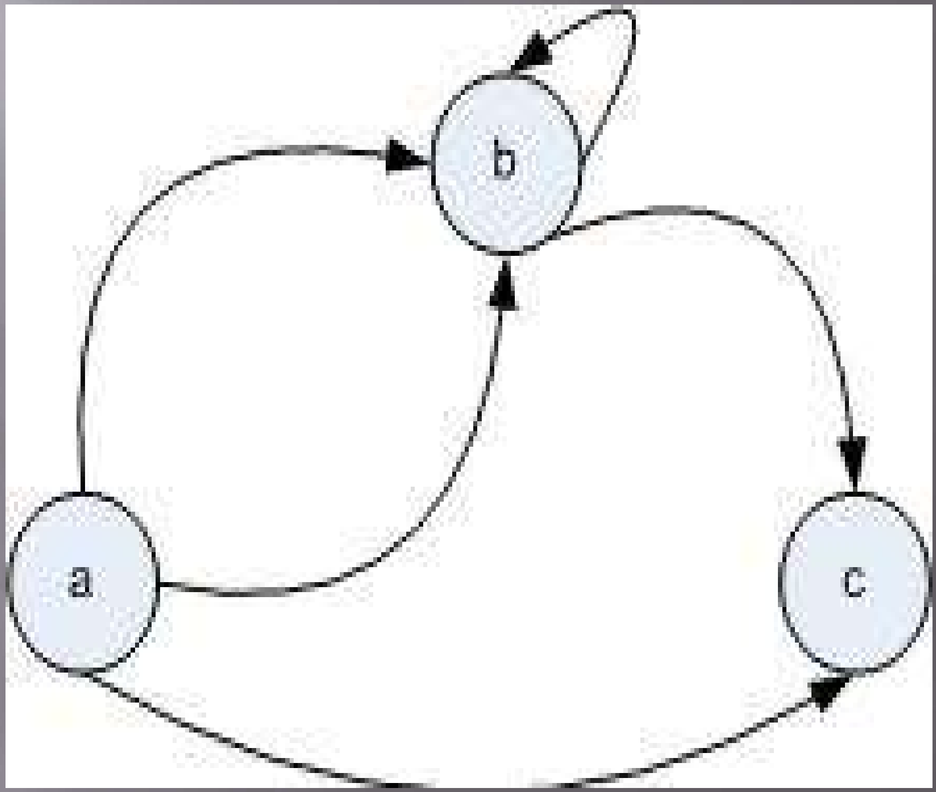

b
a
d
c


b
a
d
c

Những khái niệm và tính chất cơ bản

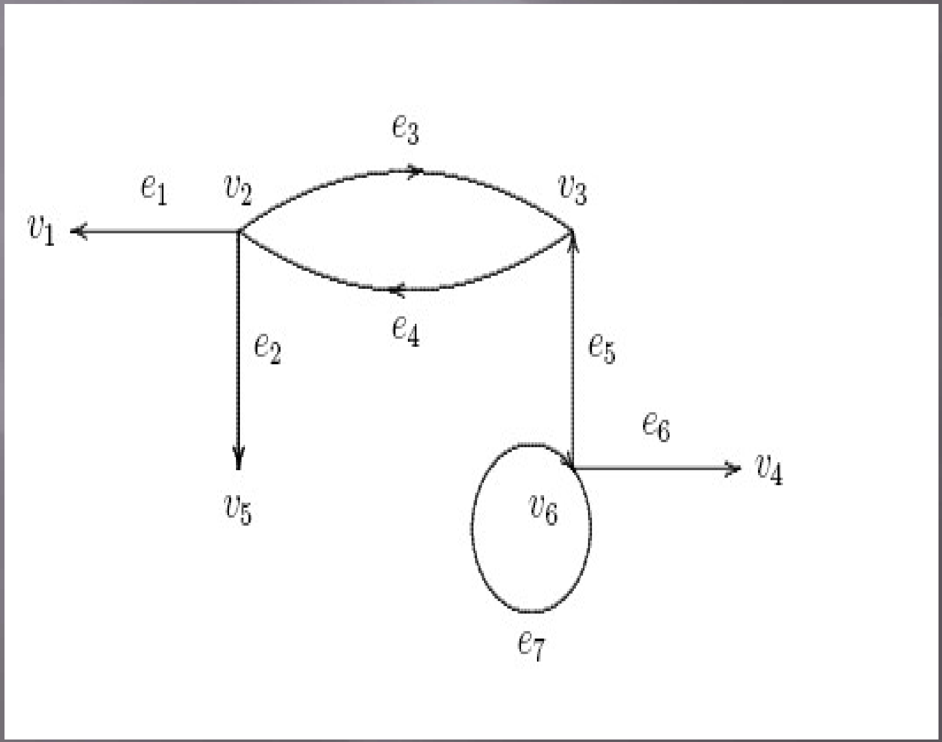
Chú "í"

- Nếu uv là một cung thì ta nói:
  - Đỉnh u và v kề nhau.
  - Đỉnh u gọi là đỉnh đầu (gốc), đỉnh v là đỉnh cuối (ngọn).
- Hai cung có cùng gốc và ngọn gọi là cung song song.
- Cung có điểm gốc và ngọn trùng nhau gọi là khuyên.


b
a
c

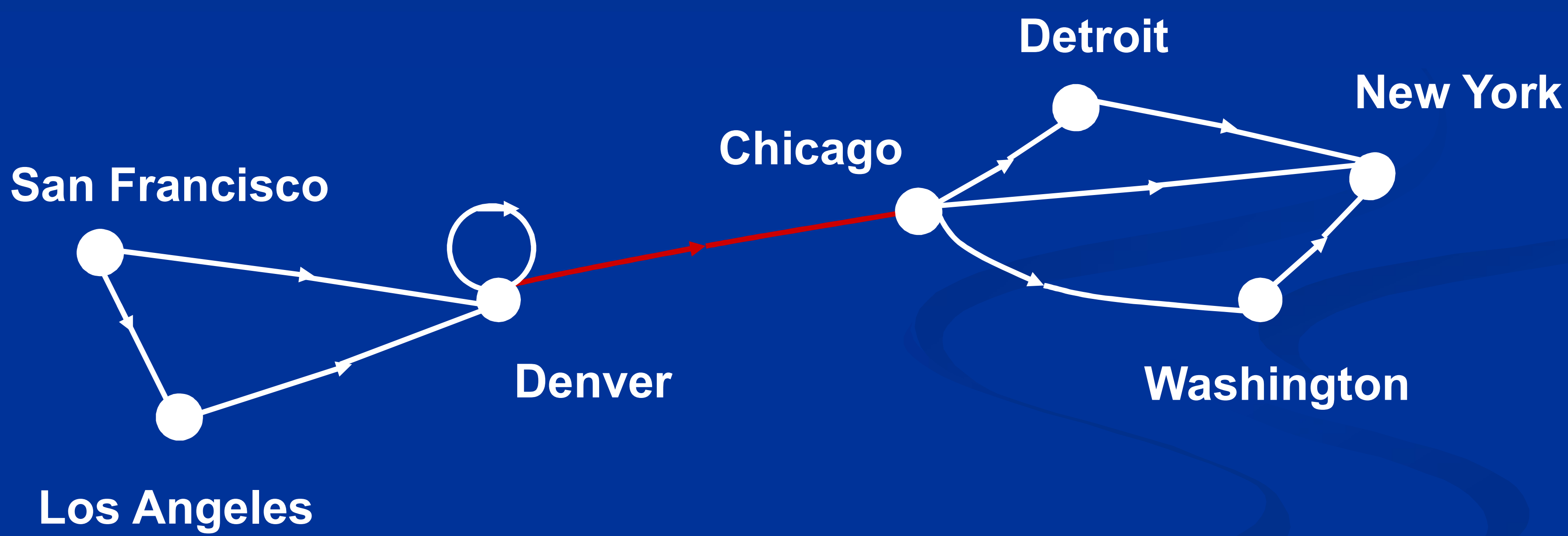
Những khái niệm và tính chất cơ bản

Định nghĩa: Đa đồ thị có hướng không chứa các cạnh song song gọi là đồ thị có hướng



A Directed Graph

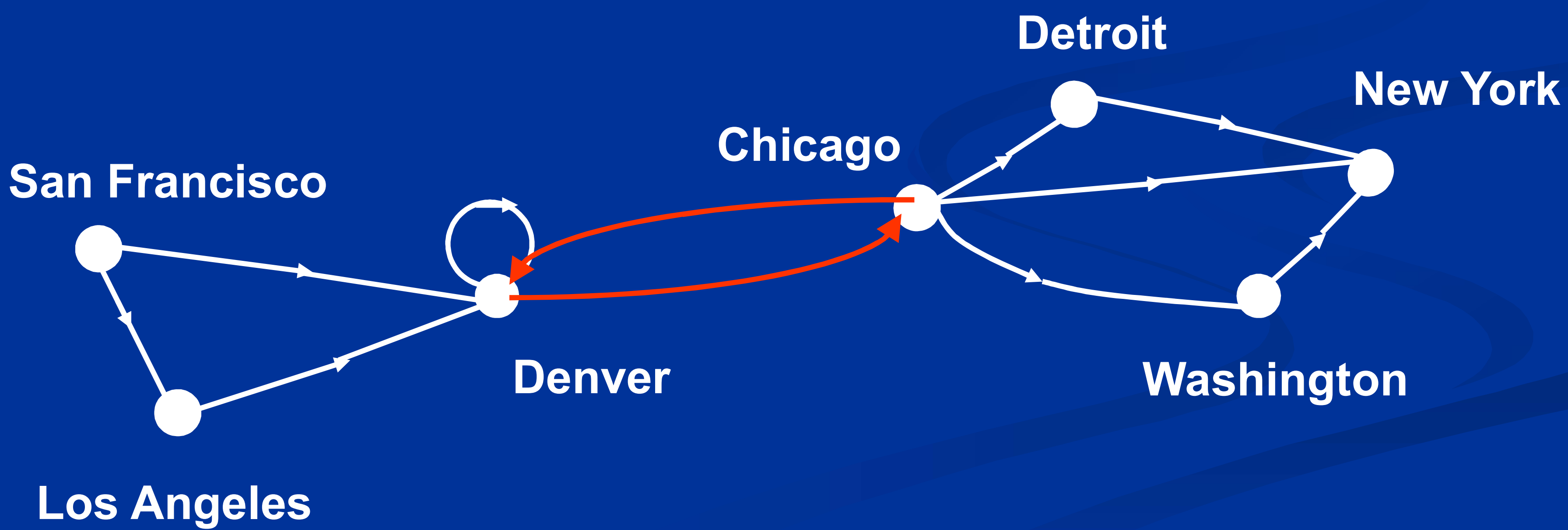
- In a ***directed graph*** $G = (V, E)$ the edges are ordered pairs of (not necessarily distinct) vertices.



Some telephone lines in the network may operate in only one direction .

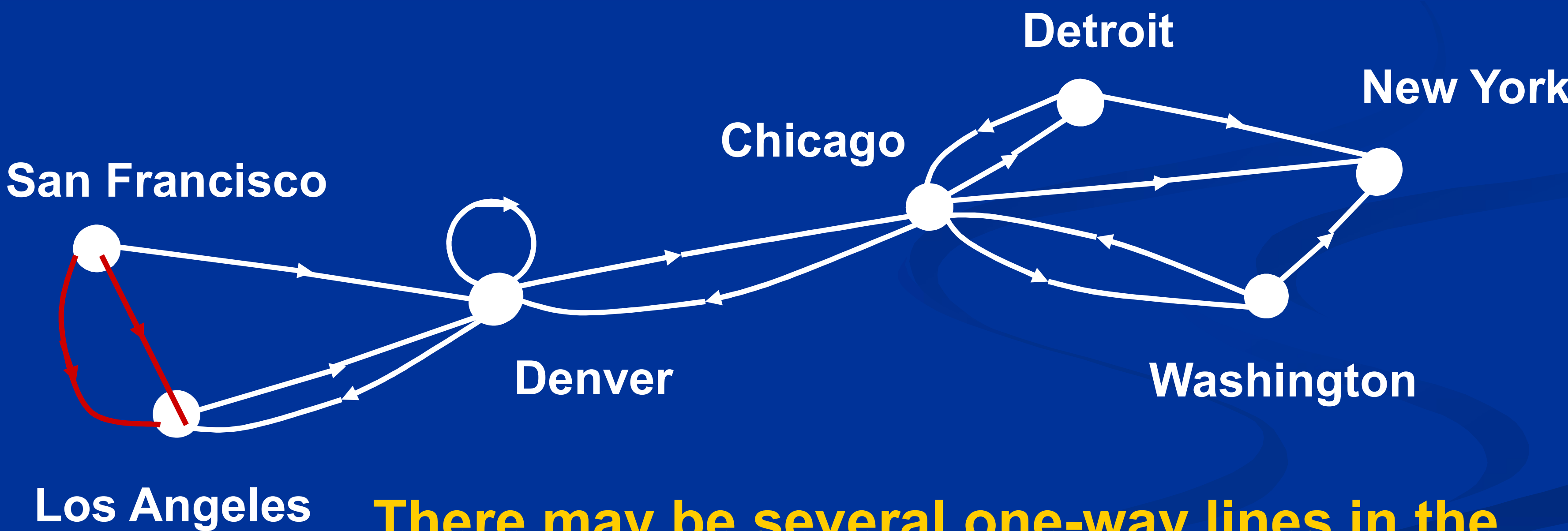
A Directed Graph

The telephone lines in the network that operate in two directions are represented by pairs of edges in opposite directions.



A Directed Multigraph

- In a ***directed multigraph*** $G = (V, E)$ the edges are ordered pairs of (not necessarily distinct) vertices,
- and in addition there may be multiple edges.



There may be several one-way lines in the same direction from one computer to another in the network.

Types of Graphs

TYPE	EDGES	MULTIPLE EDGES ALLOWED?	LOOPS ALLOWED?
Simple graph	Undirected	NO	NO
Multigraph	Undirected	YES	NO
Pseudograph	Undirected	YES	YES
Directed graph	Directed	NO	YES
Directed multigraph	Directed	YES	YES

Những khái niệm và tính chất cơ bản

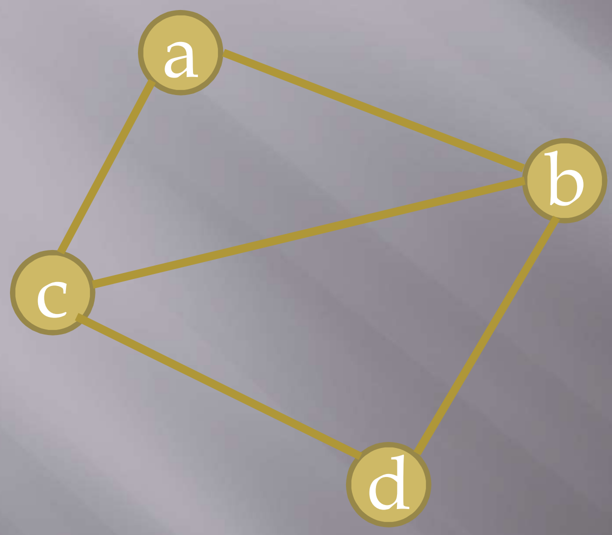
Biểu diễn ma trận của đồ thị:

Ta sử dụng **ma trận kề**.

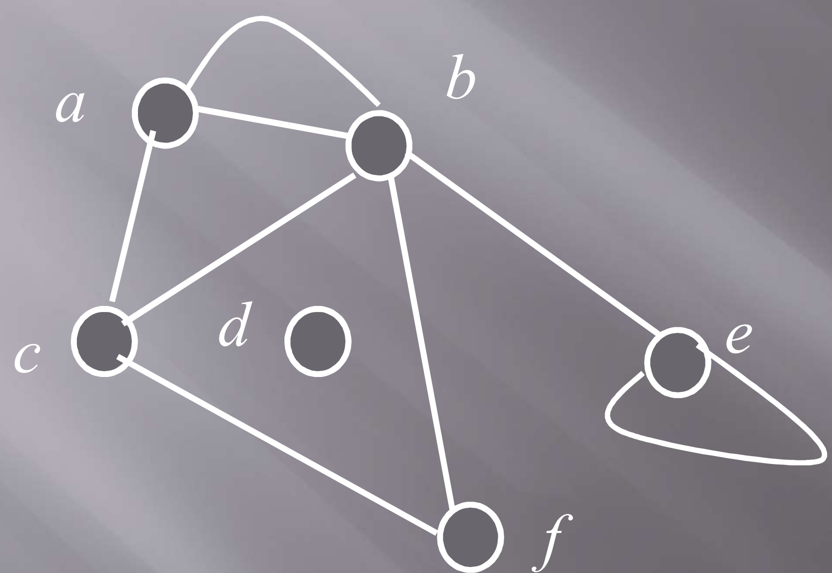
Cho G = (V,E) với V={1,2,…,n}.
Ma trận kề của G là ma trận $A = (a_{ij})_n$ xác định như sau:

a_{ij} = số cạnh (số cung) đi từ đỉnh i đến đỉnh j

Tìm ma trận kề



Tìm ma trận kề



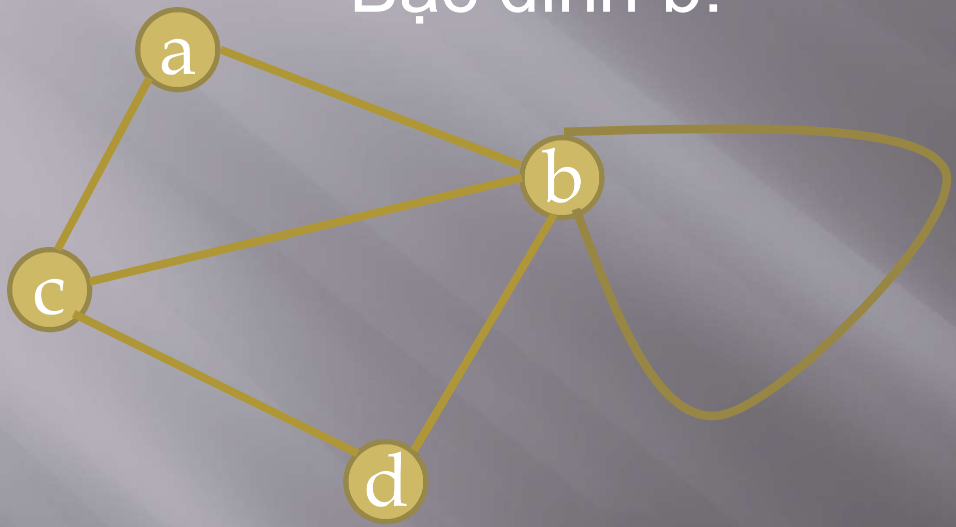
Những khái niệm và tính chất cơ bản

Bậc của đỉnh

- Cho đồ thị vô hướng G = (V,E). Bậc của đỉnh v, ký hiệu **deg(v)**, là số cạnh kề với v trong đó một khuyên tại một đỉnh được đếm hai lần cho bậc của đỉnh ấy.

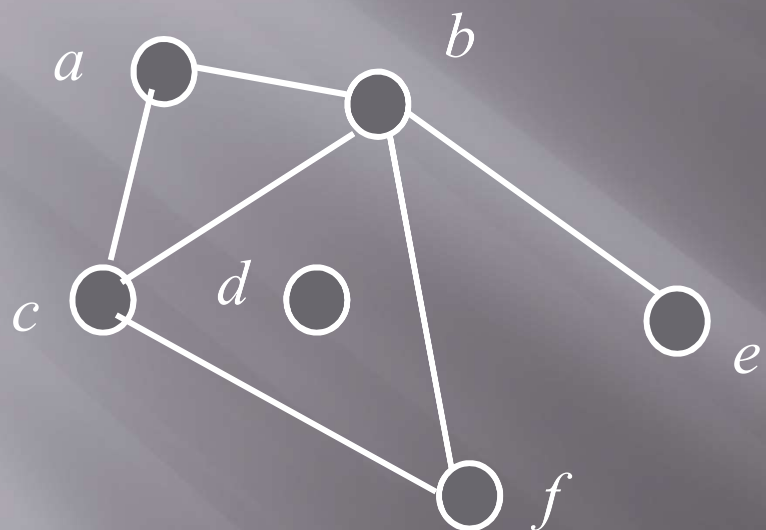
Bậc đỉnh a:

Bậc đỉnh b:



Bậc đỉnh c:

Bậc đỉnh d:



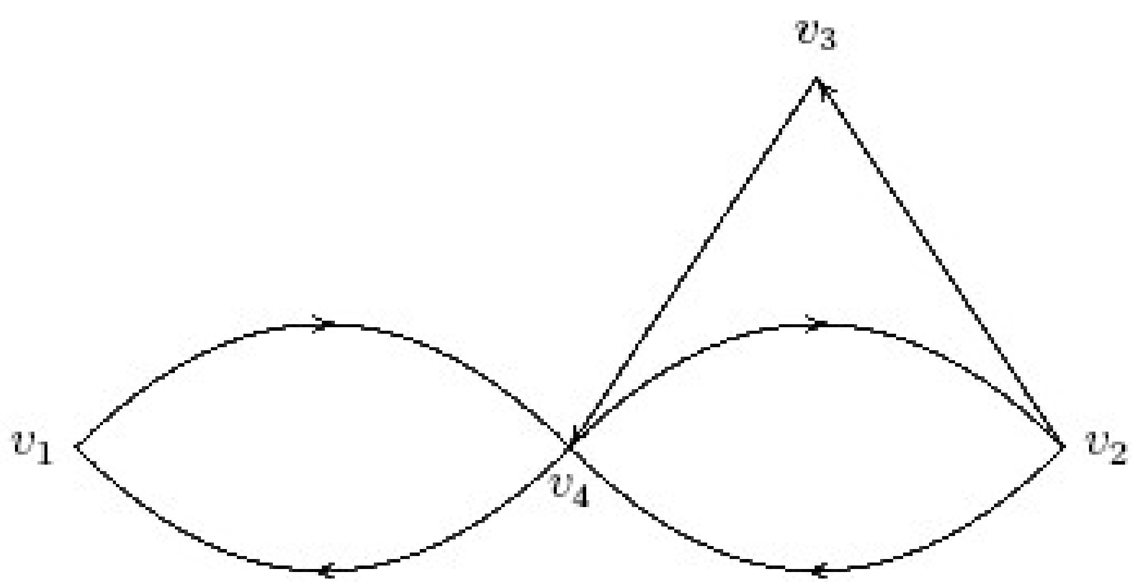
Bậc của các đỉnh?

Những khái niệm và tính chất cơ bản

Cho đồ thị có hướng G = (V, E), $v \in V$

1. **$deg^-(v)$**:= số cung có đỉnh cuối là v, gọi là bậc vào của v.
2. **$deg^+(v)$**:= số cung có đỉnh đầu là v,gọi là bậc ra của v
3. **deg(v)**:= $deg^-(v) + deg^+(v)$

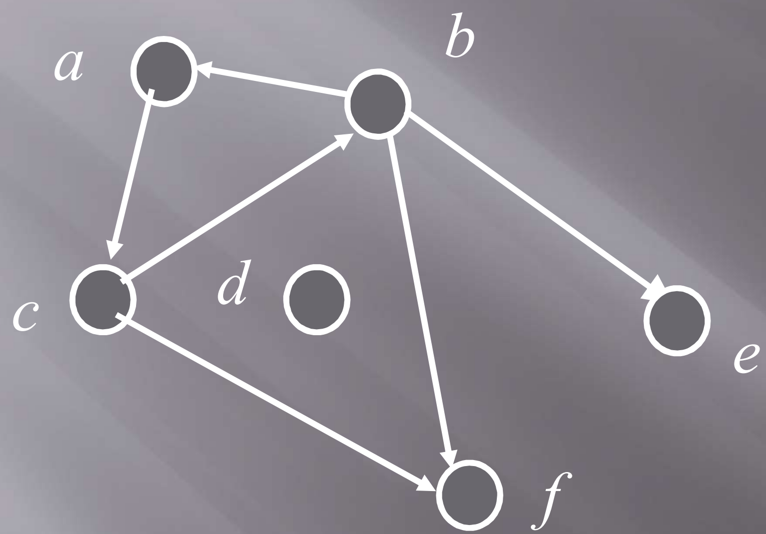
- Đỉnh bậc 0 gọi là *đỉnh cô lập*. Đỉnh bậc 1 gọi là *đỉnh treo*



v_3
v_1
v_4
v_2

Bậc đỉnh a:

Bậc đỉnh b:



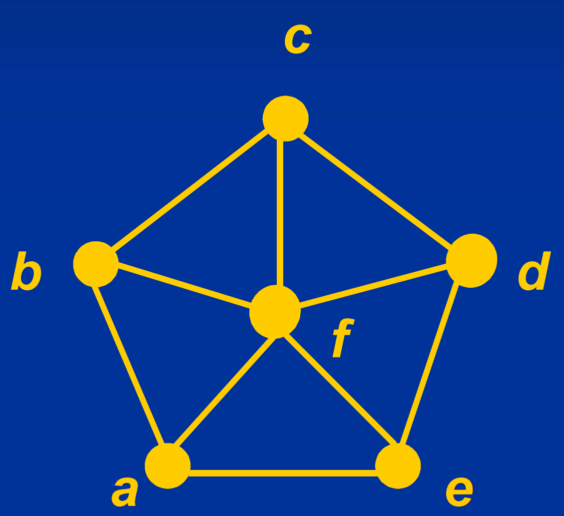
Bậc đỉnh c:

Bậc đỉnh d:

Bậc đỉnh e:

Bậc đỉnh f:

Finding the adjacency matrix



W_5

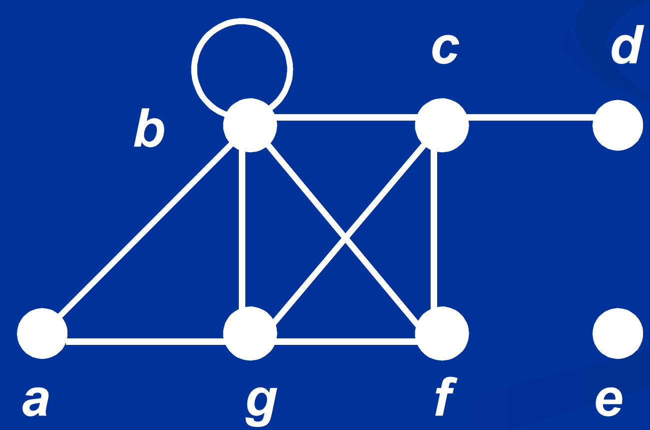
This graph has 6 vertices a, b, c, d, e, f.

We can arrange them in that order.

Degree of a vertex

Find the degree of all the other vertices.

deg(a) deg(c) deg(f) deg(g)



Những khái niệm và tính chất cơ bản

Định lí

Cho đồ thị G = (V,E), m là số cạnh (cung)

1) $\boxed{2m = \sum_{v \in V} \deg(v)}$

2) Nếu G có hướng thì:

$$\boxed{m = \sum_{v \in V} \deg^{-}(v) = \sum_{v \in V} \deg^{+}(v)}$$

3) Số đỉnh bậc lẻ của đồ thị là số chẵn

Những khái niệm và tính chất cơ bản

Đẳng cấu

Định nghĩa

Cho hai đồ thị G = (V,E) và G’= (V’,E’).

Ta nói rằng G đẳng cấu G’, ký hiệu $G \cong G'$, nếu tồn tại song ánh $f: V \rightarrow V'$ sao cho:

uv là cạnh của G $\Leftrightarrow$ f(u)f(v) là cạnh của G’

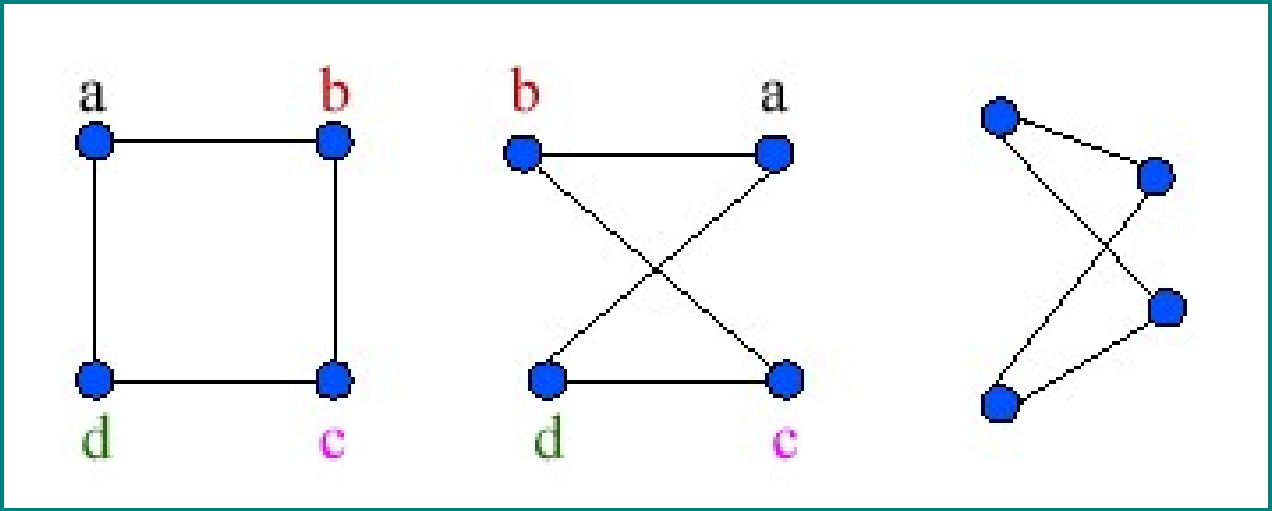
Những khái niệm và tính chất cơ bản

Chú "ý"

❑Nếu G và G' là các đơn đồ thị vô hướng đẳng cấu qua ánh xạ f thì chúng có:

- Cùng số đỉnh
- Cùng số cạnh
- Cùng số đỉnh với bậc cho sẵn (vd: số đỉnh bậc 2 của G và G' bằng nhau)
- deg v = deg f(v)

Graph Isomorphism



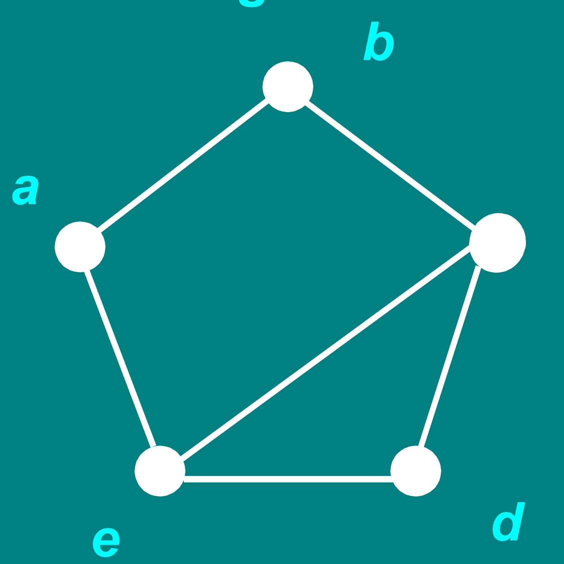
Note. ***Isomporphic*** simple graphs must have the same ***invariants***:

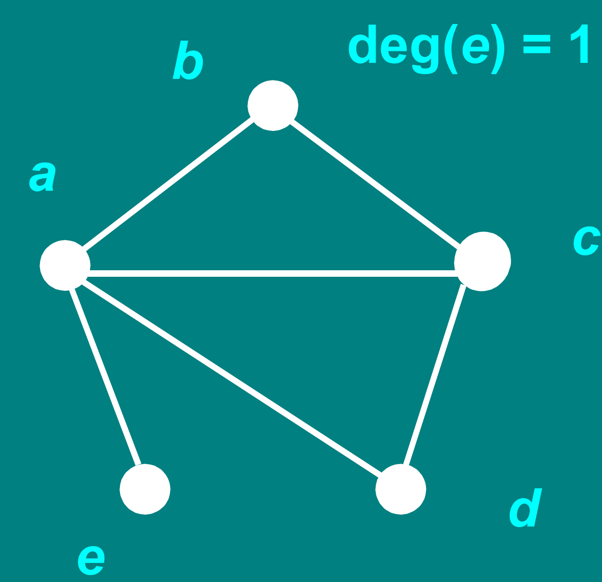
✓The number of vertices

✓The number of edges

✓The degrees of the vertices

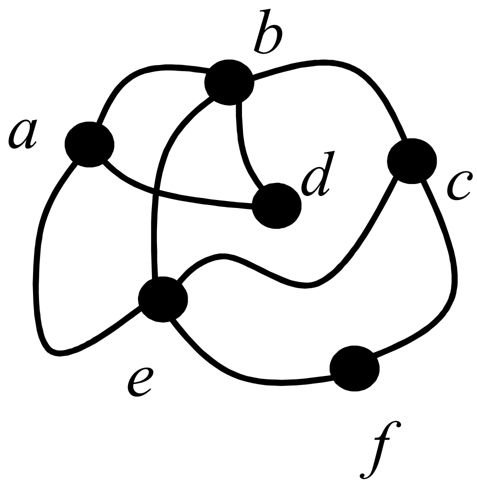
No vertex of deg 1

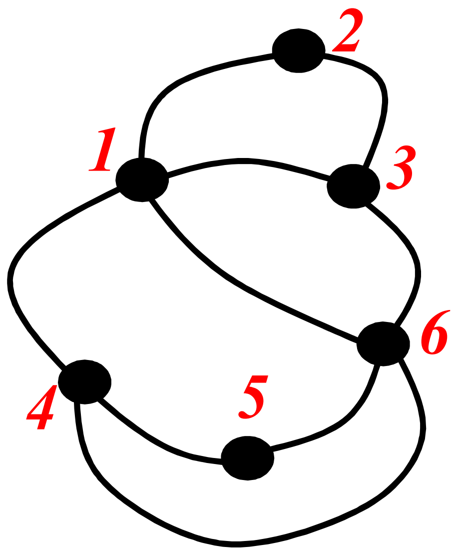




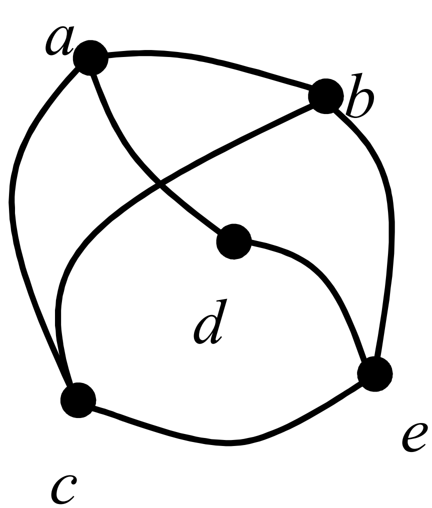
Non-isomorphic graphs

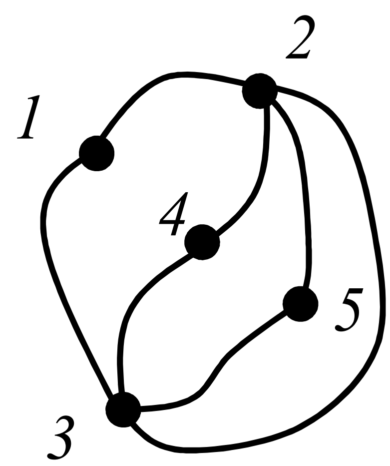
Isomorphism Example





Non-Isomorphic Example





Những khái niệm và tính chất cơ bản

Đồ thị con

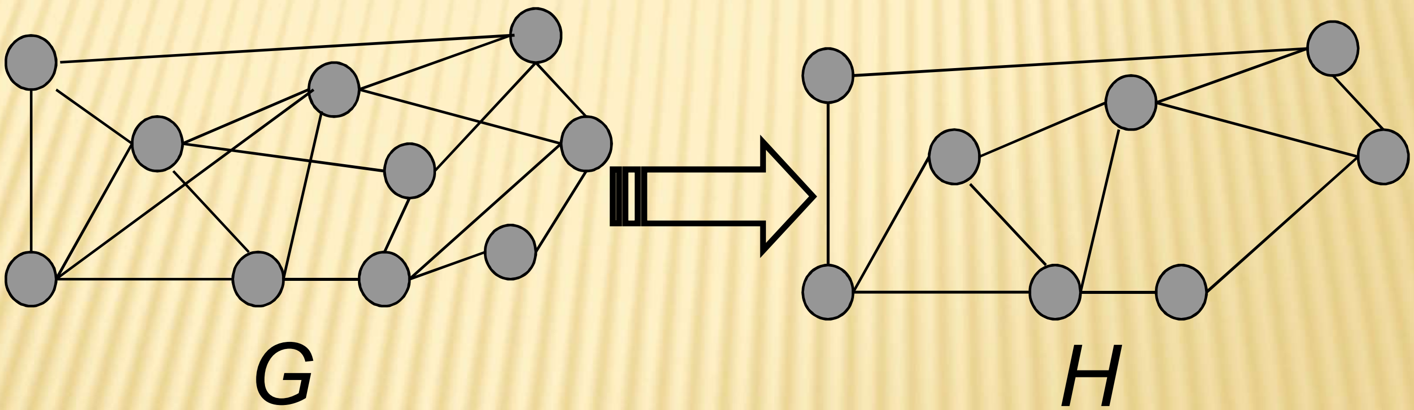
Cho hai đồ thị G = (V,E) và G' = (G',E')

(cùng vô hướng hoặc cùng có hướng).

- G' được gọi là *đồ thị con* của G, ký hiệu $G' \leq G$ nếu $V' \subseteq V$ và $E' \subseteq E$
- Nếu $V' = V$ và $E' \subseteq E$ thì G' được gọi là *đồ thị con khung* của G.

NHỮNG KHÁI NIỆM VÀ TÍNH CHẤT CƠ BẢN

Subgraphs



Những khái niệm và tính chất cơ bản

Đường đi, chu trình, đồ thị liên thông:

Cho G = (V,E) là đồ thị vô hướng $u,v \in V$

a) Đường đi (dây chuyền) có chiều dài k nối hai đỉnh u,v là dãy đỉnh và cạnh liên tiếp nhau $v_0e_1v_1e_2 \ldots v_{k-1}e_kv_k$ sao cho:

$$v_0=u, v_k = v, e_i=v_{i-1}v_i, i=1,2,\ldots,k$$

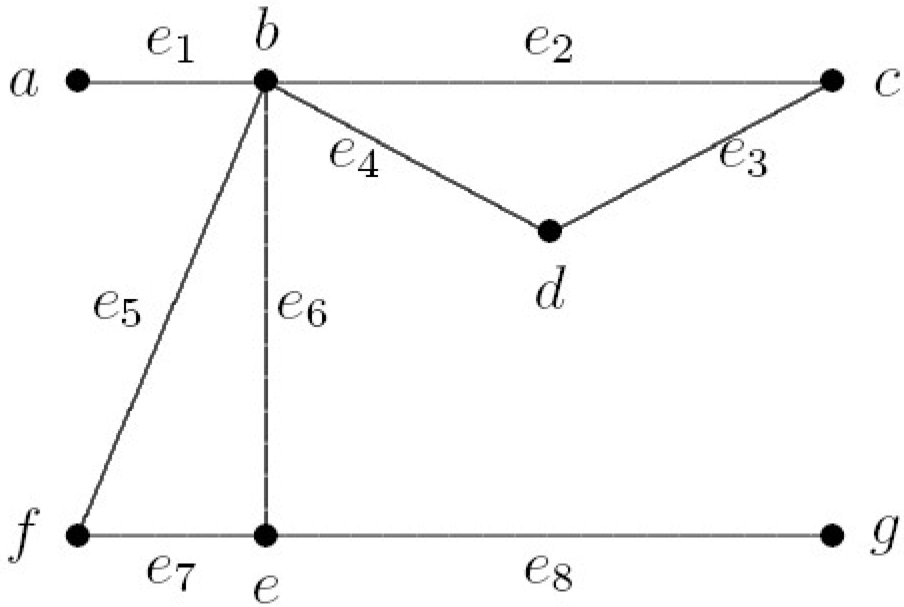
Những khái niệm và tính chất cơ bản

Cho G = (V,E) là đồ thị vô hướng u,v$\in$V

b) Đường đi không có *cạnh* nào xuất hiện quá một lần gọi là *đường đi đơn*

c) Đường đi không có *đỉnh* nào xuất hiện quá một lần gọi là *đường đi sơ cấp*

d) Đường đi được gọi là *chu trình* nếu nó bắt đầu và kết thúc tại cùng một đỉnh



Chu trình sơ cấp nào ko nhỉ

- (a, e_1,b,e_2,c,e_3,d,e_4,b)là đường đi từ đỉnh a tới đỉnh b có chiều dài là 4. Tuy nhiên, trong trường hợp này, đồ thị của chúng ta là đơn đồ thị, do vậy có thể gọi đường đi này bằng 1 cách ngắn gọn như sau: (a,b,c,d,b)

Những khái niệm và tính chất cơ bản

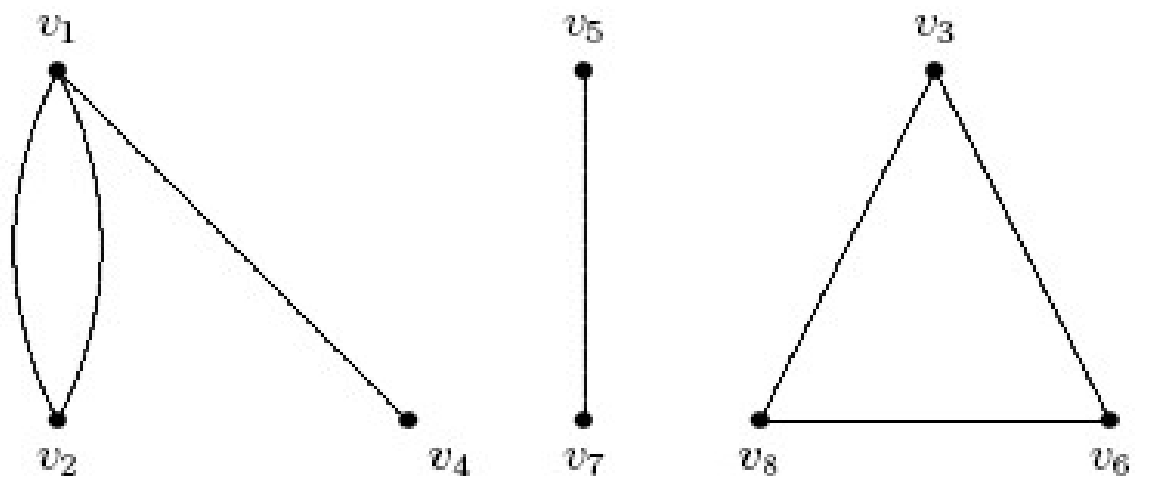
Định nghĩa. Cho G = (V,E). Trên V ta định nghĩa quan hệ tương đương như sau:

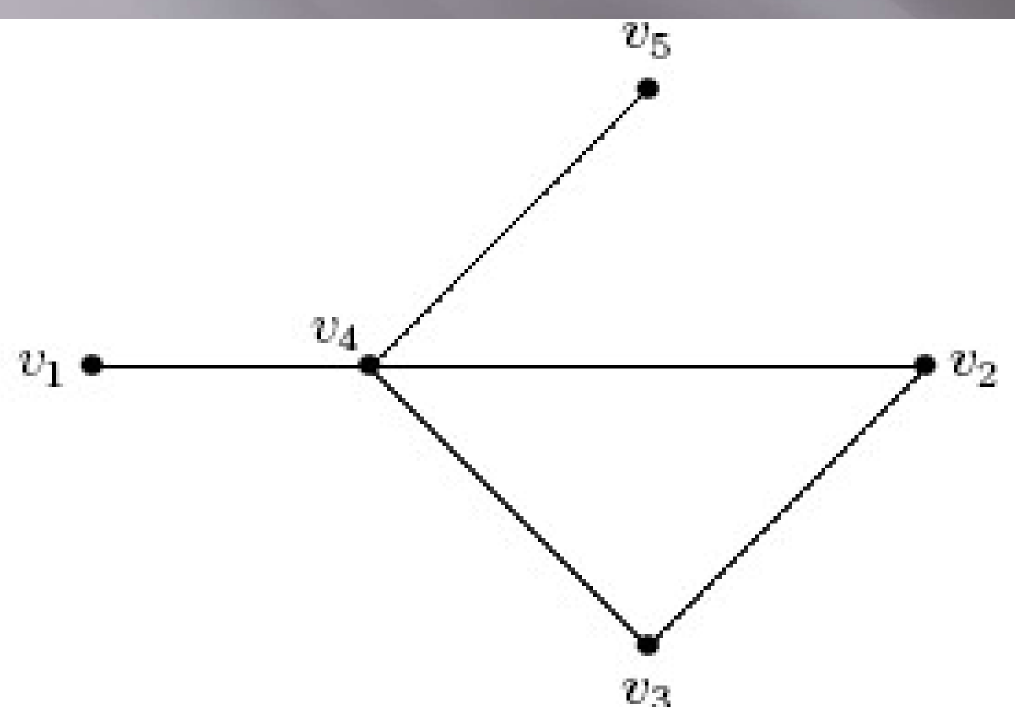
u~v ⇔ u = v hay có một đường đi từ u đến v

a) Nếu u~v thì ta nói hai đỉnh u và v liên thông với nhau

b) Mỗi lớp tương đương được gọi là một thành phần liên thông của G

c) Nếu G chỉ có một thành phần liên thông thì G gọi là liên thông


v_1
v_5
v_3
v_2
v_4
v_7
v_8
v_6

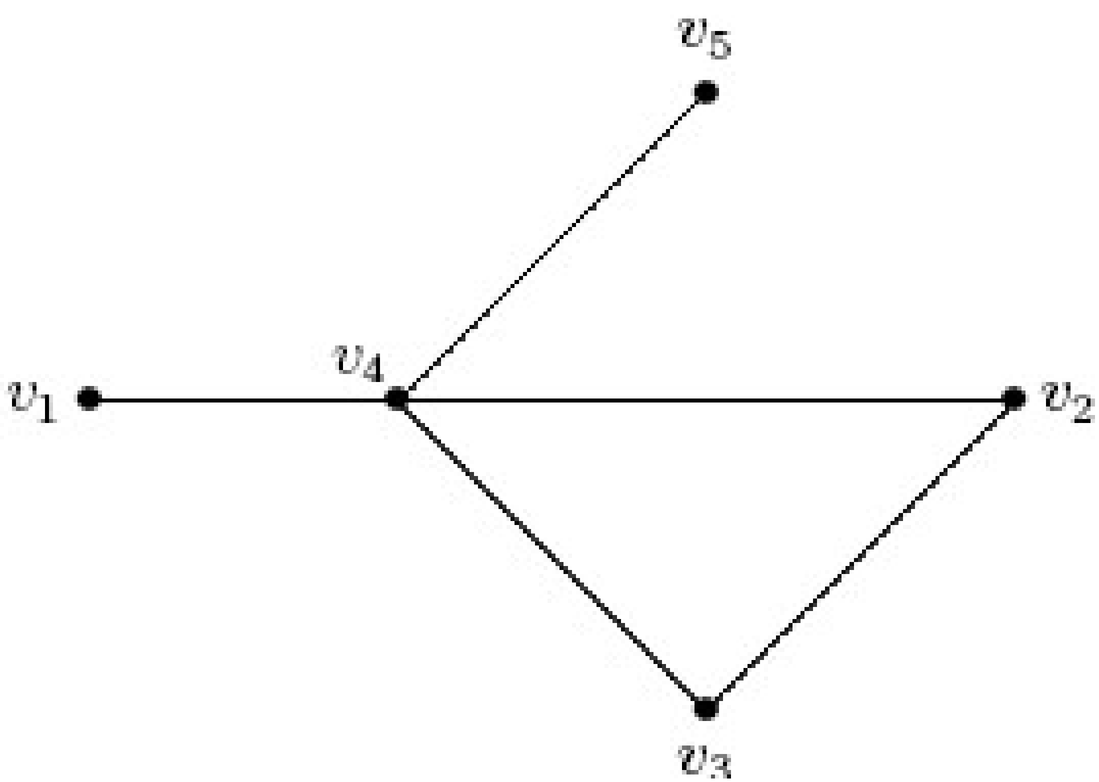

v_5
v_4
v_1
v_2
v_3

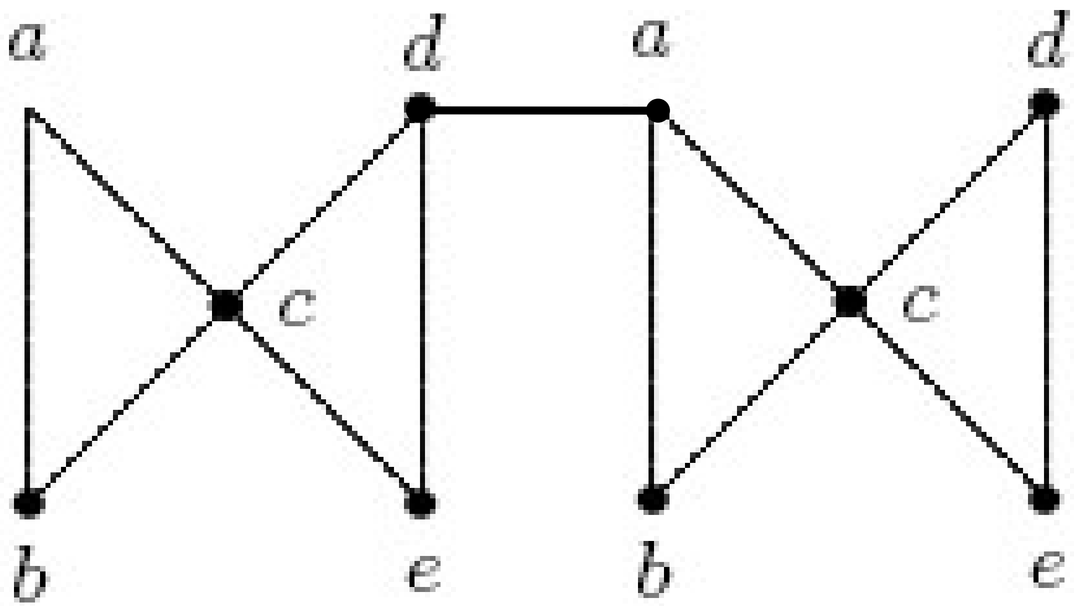
Những khái niệm và tính chất cơ bản

Định nghĩa. Cho G = (V,E) là đồ thị vô hướng liên thông

a) Đỉnh v được gọi là *đỉnh khớp* nếu G – v không liên thông (G – v là đồ thị con của G có được bằng cách xoá v và các cạnh kề với v)

b) Cạnh e được gọi là *cầu* nếu G- e không liên thông(G-e là đồ thị con của G có được bằng cách xoá cạnh e).


v_5
v_4
v_1
v_2
v_3

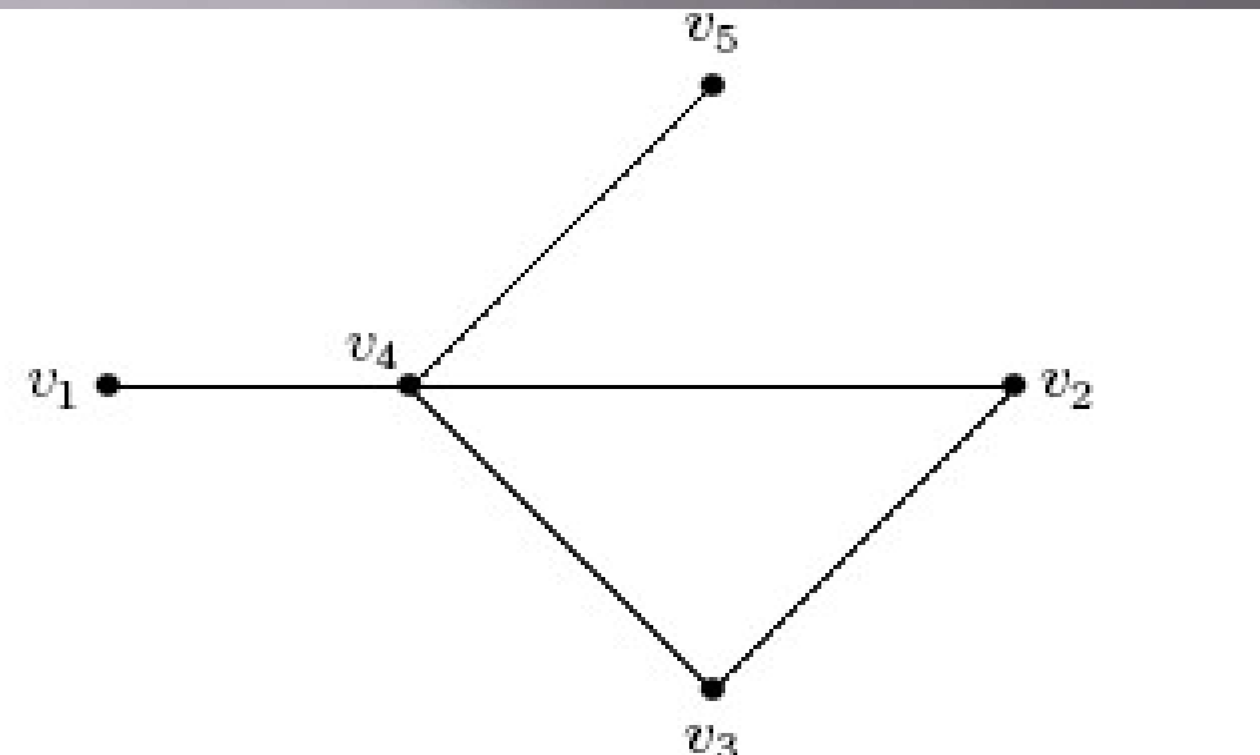

a
d
a
d
c
c
b
e
b
e

Những khái niệm và tính chất cơ bản

Định nghĩa. Cho G = (V,E) vô hướng liên thông, không phải K_n , n>2.

a) *Số liên thông cạnh* của G, ký hiệu e(G) là số cạnh ít nhất mà khi xoá đi G không còn liên thông nữa.

b) *Số liên thông đỉnh* của G, ký hiệu v(G) là số đỉnh ít nhất mà khi xoá đi G không còn liên thông nữa.


v_5
v_4
v_1
v_2
v_3

Những khái niệm và tính chất cơ bản

Định nghĩa. Cho G =(V,E) là đồ thị có hướng u,v$\in$V

a) Đường đi (dây chuyền) có chiều dài k nối hai đỉnh u,v là dãy đỉnh và cung liên tiếp nhau $v_0e_1v_1e_2\ldots.v_{k-1}e_k$ sao cho:

$$v_0 = u,\ v_k = v$$

$$e_i = v_{i-1}v_i\ ,\ i = 1,2,,\ldots,k.$$

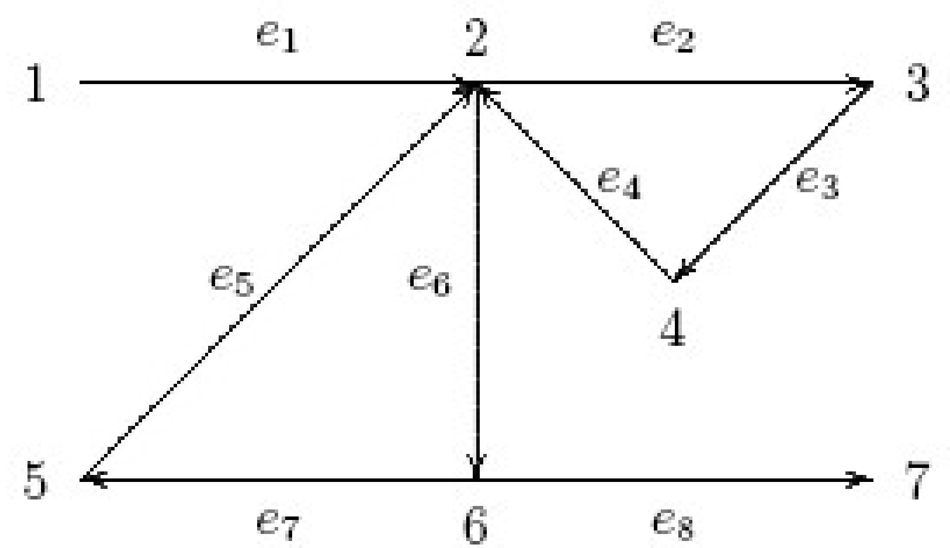
Những khái niệm và tính chất cơ bản

Cho G =(V,E) là đồ thị có hướng u,v$\in$V

b) Đường đi không có *cung* nào xuất hiện quá một lần gọi là *đường đi đơn.*

c) Đường đi không có *đỉnh* nào xuất hiện quá một lần gọi là *đường đi sơ cấp*.

d) Đường đi được gọi là mạch(chu trình) nếu nó bắt đầu và kết thúc tại cùng một đỉnh.



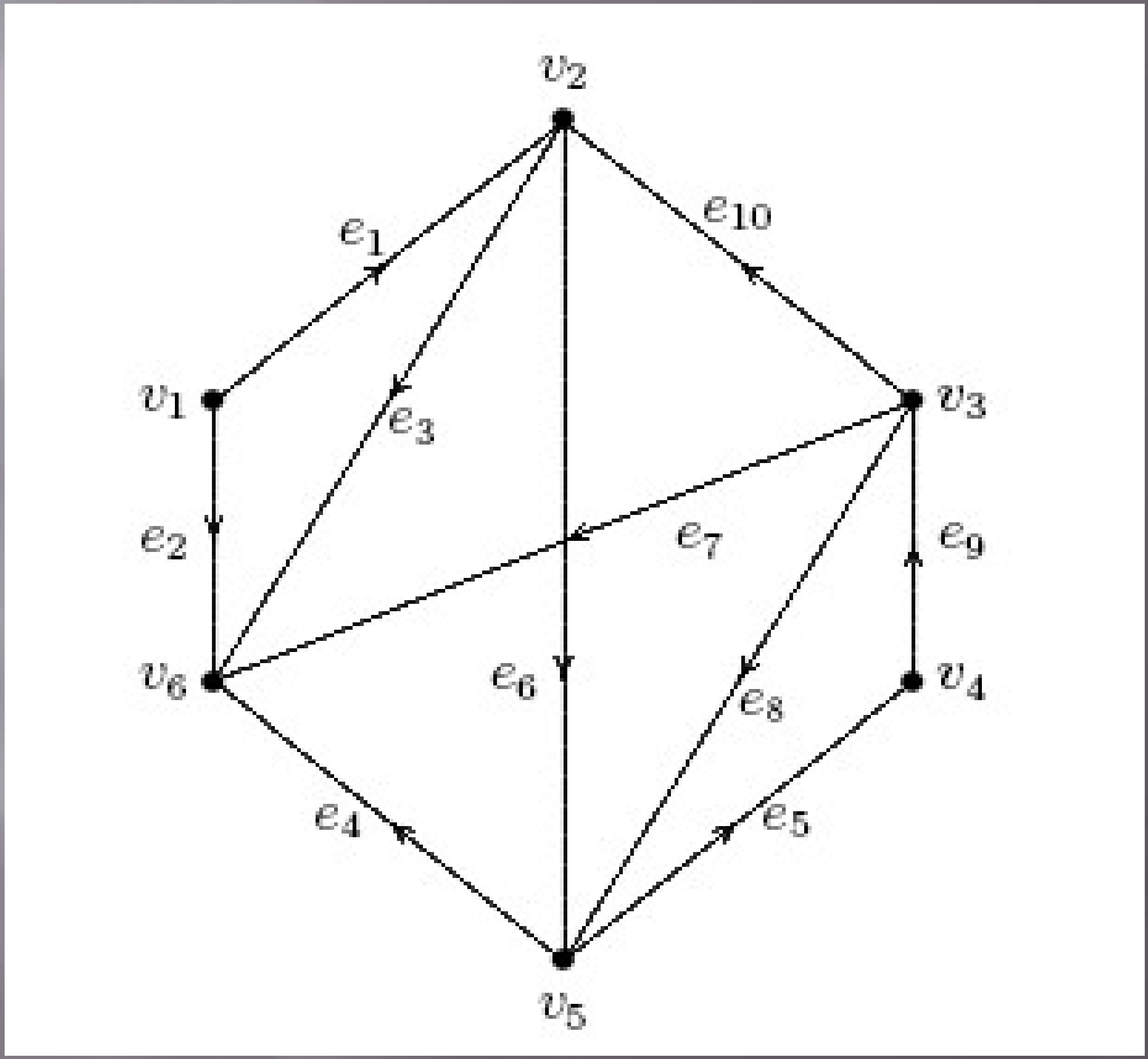
Đường đi có độ dài 4 từ đỉnh 1 tới đỉnh 2 là :

Những khái niệm và tính chất cơ bản

Định nghĩa. Cho G = (V,E). Trên V ta định nghĩa quan hệ tương đương như sau:

u~v $\Leftrightarrow$ u = v hay có một đường đi từ u đến v và đường đi từ v đến u

a) Nếu u~v thì ta nói hai đỉnh u và v liên thông mạnh với nhau
b) Mỗi lớp tương đương được gọi là một thành phần liên thông mạnh của G
c) Nếu G chỉ có một thành phần liên thông mạnh thì G gọi là liên thông mạnh


v_2
e_1
e_{10}
v_1
e_3
v_3
e_2
e_7
e_9
v_6
e_6
e_8
v_4
e_4
e_5
v_5

Những khái niệm và tính chất cơ bản

Một số đồ thị vô hướng đặc biệt

1. *Đồ thị đủ cấp n*: K_n là đơn đồ thị cấp n mà giữa hai đỉnh bất kỳ đều có một cạnh.
2. *Đồ thị k-đều* : là đồ thị mà mọi đỉnh đều có bậc bằng nhau và bằng k.
3. *Đồ thị lưỡng phân:*

   $G = (V,E)$, $V = V_1 \cup V_2$, $V_1 \cap V_2 = \emptyset$.

Mọi cạnh của G đều nối một đỉnh trong V_1 với một đỉnh trong V_2

Những khái niệm và tính chất cơ bản

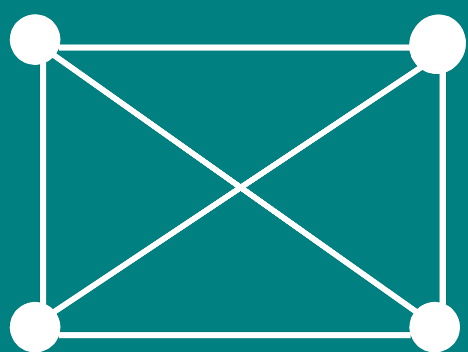
4. *Đồ thị lưỡng phân đủ: l*à đồ thị đơn, lưỡng phân, mỗi đỉnh trong V_1 đều kề với mọi đỉnh trong V_2.

5. Đồ thị bù

Cho $K_n = (V,E)$, G (V,E_1), $\overline{G} = \left(V, E \setminus E_1\right)$

$\overline{G}$ gọi là đồ thị bù của G. Đồ thị G đươc gọi là tự bù nếu G đẳng cấu với đồ thị bù của nó

Một số đồ thị đặc biệt



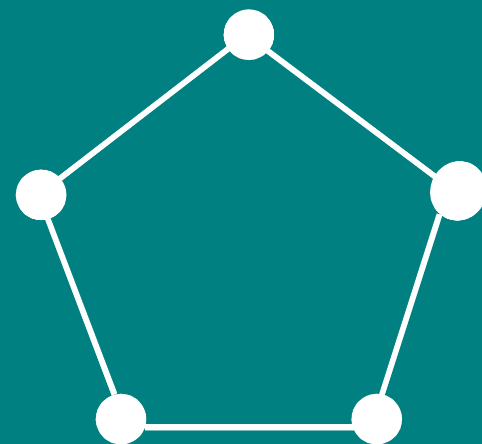
K_4

K_5

Complete graph K_n

Một số đồ thị đặc biệt

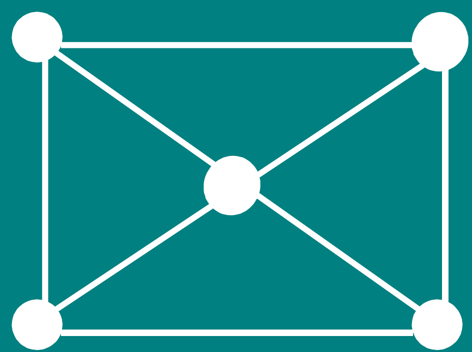
C_4



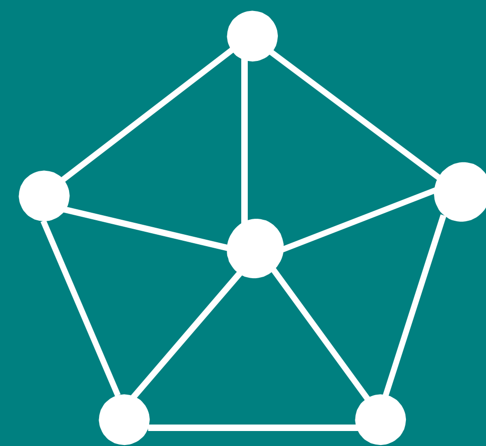
C_5

Cycle C_n

Một số đồ thị đặc biệt



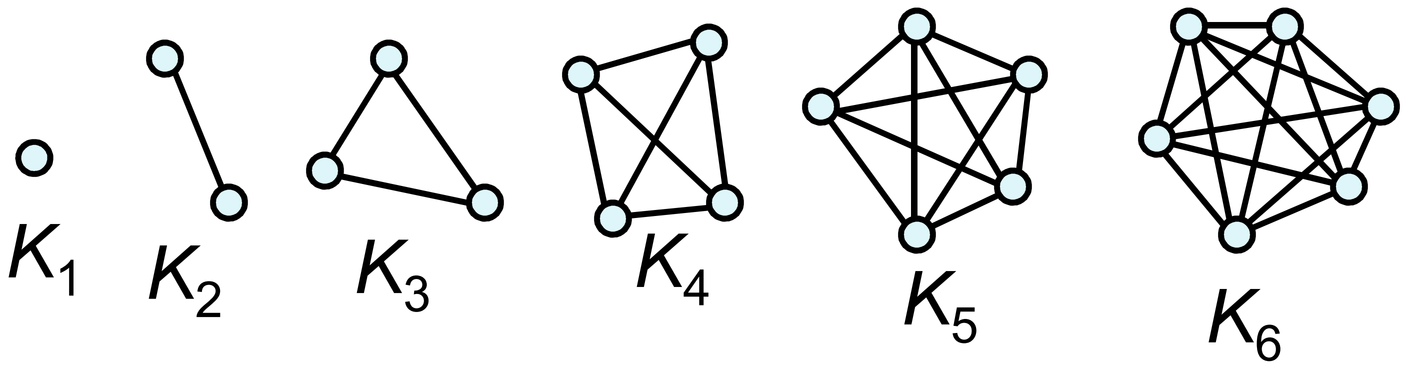
W_4



W_5

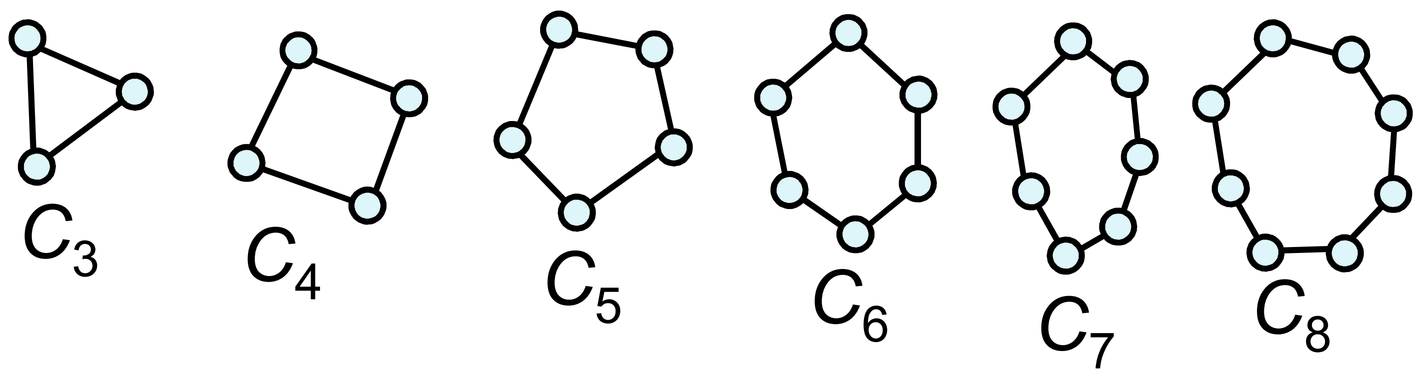
Wheele W_n

Complete Graphs



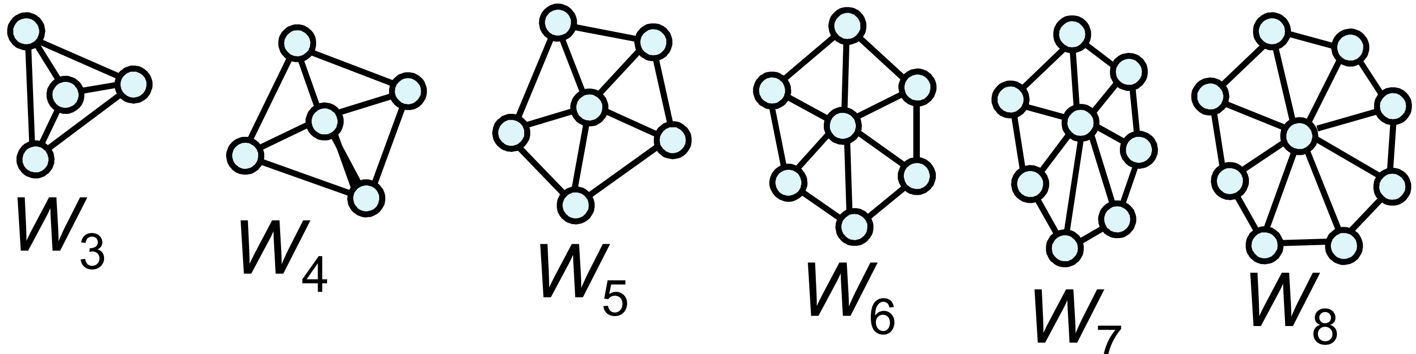
Note that K_n has edges. $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n-1)}{2}$

Cycles



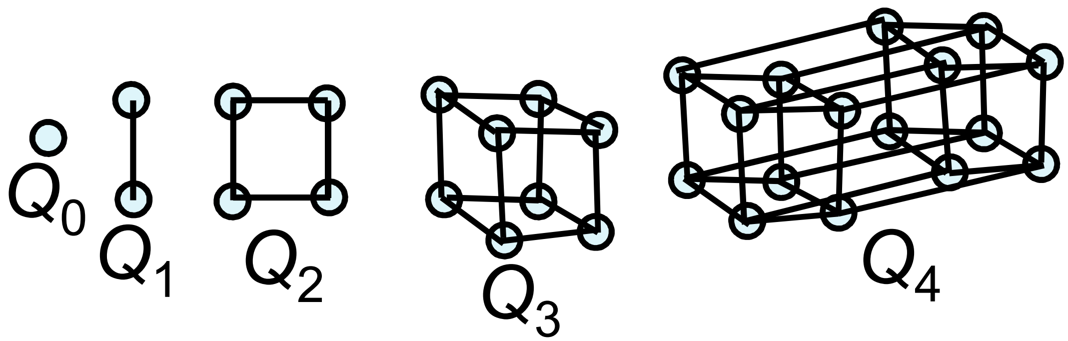
How many edges are there in C_n?

Wheels



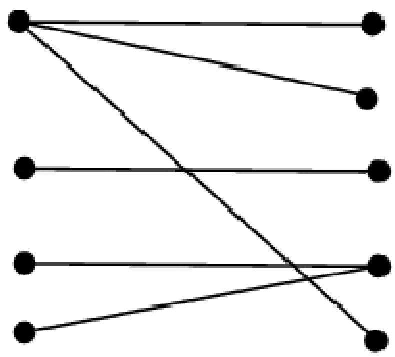
How many edges are there in W_n?

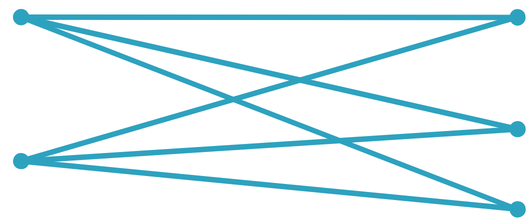
n–cubes (hypercubes)



Number of vertices: 2^n. Number of edges:Exercise to try!

Bipartite Graph





Bài toán đường đi ngắn nhất

Đồ thị có trọng số

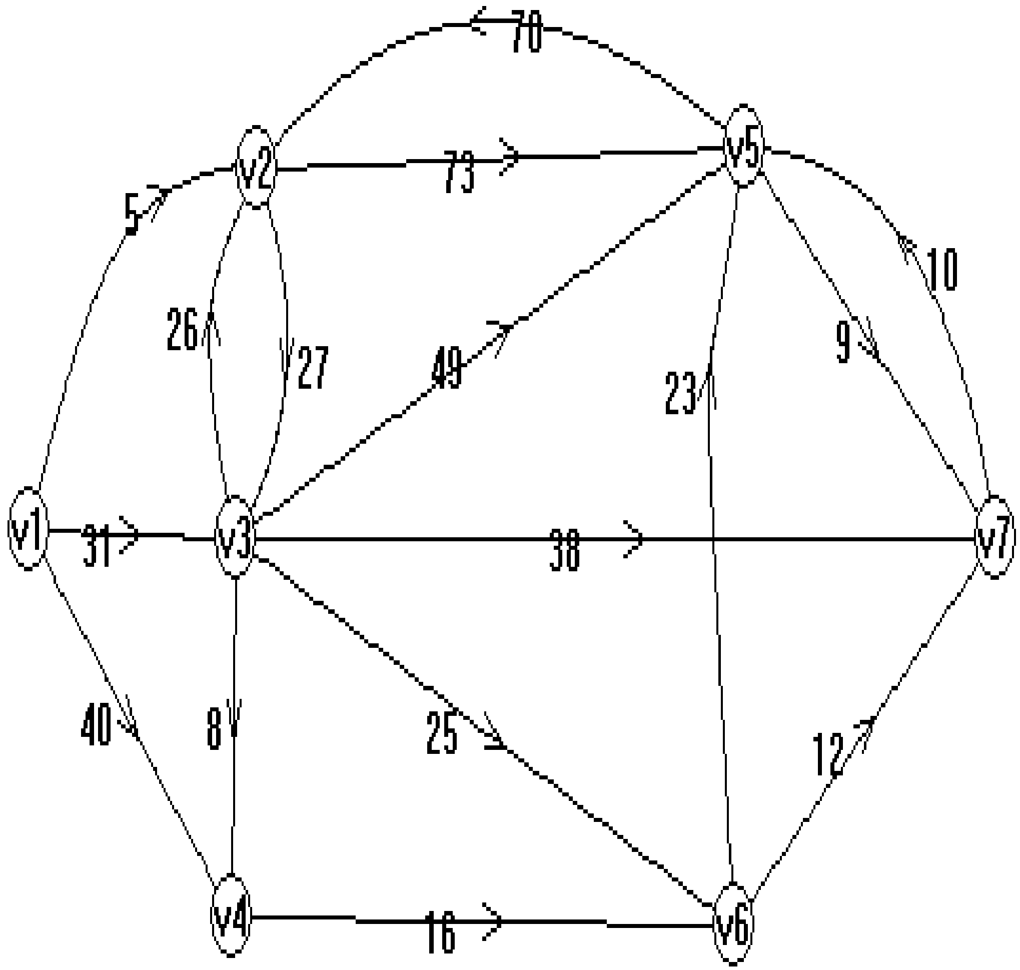
1. Đồ thị G = (V,E) gọi là đồ thị có *trọng số* (hay chiều dài, trọng lượng) nếu mỗi cạnh(cung) e được gán với một số thực w(e).Ta gọi w(e) là *trọng lượng* của e.
2. *Độ dài* của đường đi từ u đến v bằng tổng độ dài các cạnh mà đường đi qua
3. *Khoảng cách* giữa 2 đỉnh u,v là độ dài ngắn nhất của các đường đi từ u đến v.

Bài toán đường đi ngắn nhất

Ma trận khoảng cách(trọng số)

Cho G = (V, E), V = $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ là đơn đồ thị có trọng số. Ma trận khoảng cách của G là ma trận D= (d_{ij}) xác định như sau:

$$d_{ij} = \begin{cases} 0 & khi\ i = j \\ w(v_i, v_j) & khi\ v_i v_j \in E \\ \infty & khi\ v_i v_j \notin E \end{cases}$$


70
73
5
26
27
49
23
9
10
v1
v2
v3
v4
v5
v6
v7
31
38
40
8
25
12
16

Bài toán đường đi ngắn nhất

Thuật toán Dijkstra

Bài toán.

Cho G = (V, E) đơn, liên thông, có trọng số dương ($w(u,v) > 0$ với mọi u khác v). Tìm đường đi ngắn nhất từ u_0 đến v và tính khoảng cách $d(u,v)$.

Bài toán đường đi ngắn nhất

Phương pháp

Xác định tuần tự các đỉnh có khoảng cách đến u_0 từ nhỏ đến lớn.

1. Trước tiên đỉnh có khoảng cách nhỏ nhất đến u_0 là u_0.
2. Trong $V \setminus \{u_0\}$ tìm đỉnh có khoảng cách đến u_0 nhỏ nhất (đỉnh này phải là một trong các đỉnh kề với u_0) giả sử đó là u_1

Bài toán đường đi ngắn nhất

3. Trong $V\setminus\{u_0,u_1\}$ tìm đỉnh có khoảng cách đến u_0 nhỏ nhất(đỉnh này phải là một trong các đỉnh kề với u_0 hoặc u_1)giả sử đó là u_2
4. Tiếp tục như trên cho đến bao giờ tìm được khoảng cách từ u_0 đến mọi đỉnh .

Nếu G có n đỉnh thì:

$0 = d(u_0,u_0) < d(u_0,u_1) \leq d(u_0,u_2) \leq \ldots \leq d(u_0,u_{n-1})$

Thuật toán Dijkstra

Bước1. i:=0, S:=V\{u_0}, L(u_0):=0, L(v):= ∞ với mọi v ∈S và đánh dấu đỉnh v bởi (∞,-). Nếu n=1 thì xuất d(u_0,u_0)=0=L(u_0)

Bước2. Với mọi v ∈S và kề với u_i(nếu đồ thị có hướng thì v là đỉnh sau của u_i), đặt L(v):=min{L(v),L(u_i)+w(u_i,v)}.Xác định k =minL(v) ,v∈S.

Nếu k=L(v_j) thì xuất d(u_0,v_j)=k và đánh dấu v_j bởi (L(v_j);u_i). u_{i+1}:=v_j S:=S\{u_{i+1}}

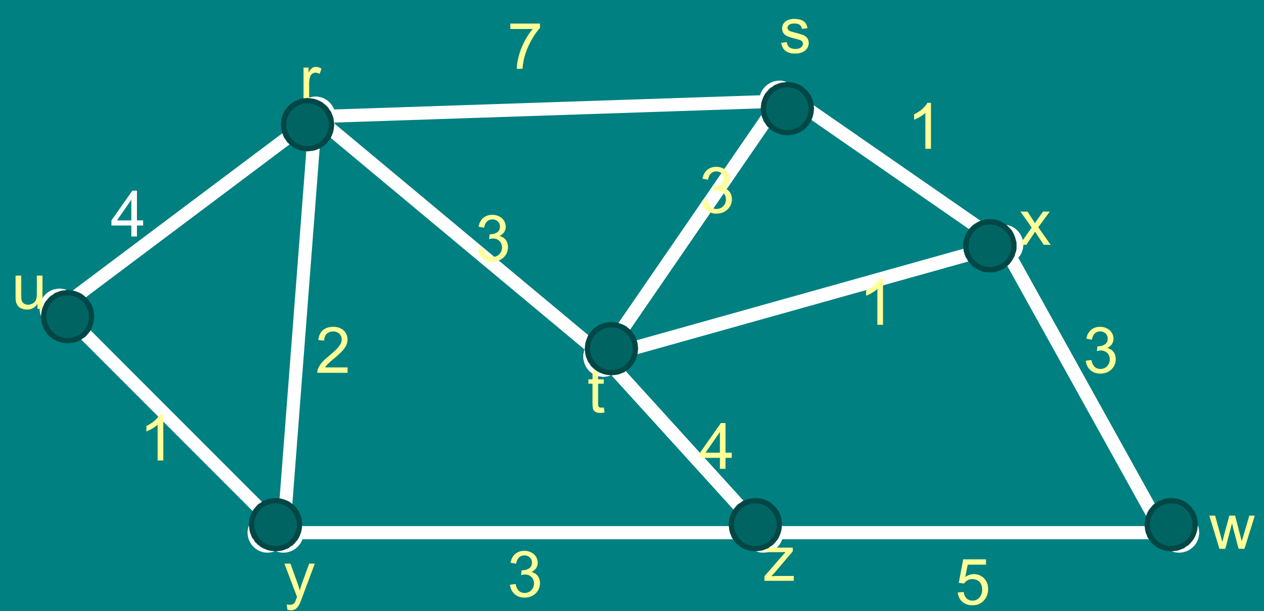
Bước3 i:=i+1

Nếu i = n-1 thì kết thúc

Nếu không thì quay lại Bước 2

Bài toán đường đi ngắn nhất

Bài tập 1. Tìm đường đi ngắn nhất từ u_0 đến các đỉnh còn lại



Bài toán đường đi ngắn nhất

Bài tập 2 (ĐHKHTN,2006).

<u>Câu 5.</u> Cho đồ thị có trọng số G = (V, E) , $V = \{ v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6 , v_7\}$ xác định bởi ma trận trọng số D. Dùng thuật toán Dijkstra tìm đường đi ngắn nhất từ v_1 đến các đỉnh v_2, v_3, v_5, v_6, v_7

Bài toán đường đi ngắn nhất

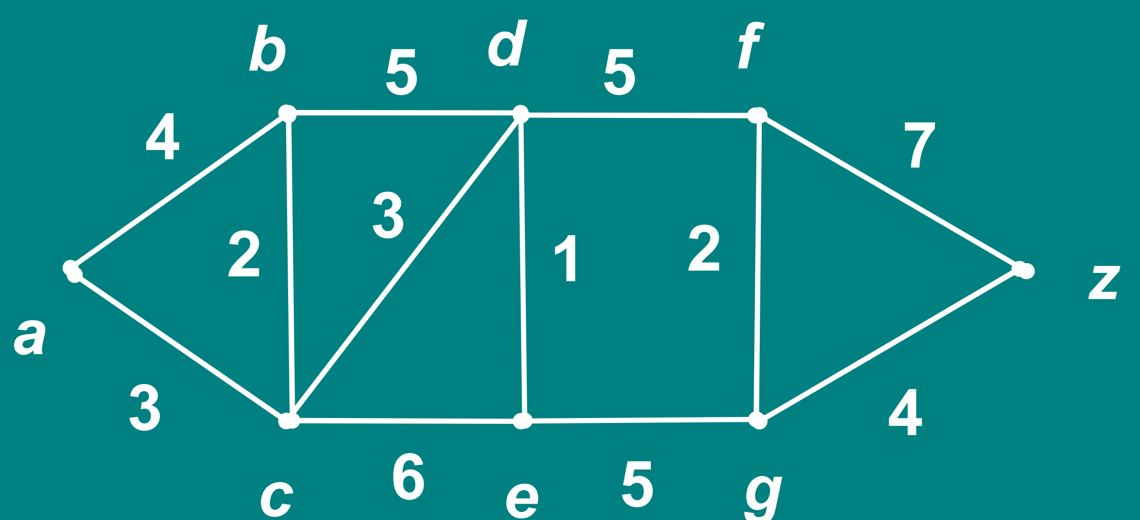
Bài tập 3 (ĐHKHTN2005).

Cho một ví dụ chứng tỏ rằng thuật toán Dijkstra để tìm đường đi ngắn nhất từ một đỉnh đến các đỉnh khác không áp dụng được cho đồ thị có trọng lượng nếu có cạnh có trọng lượng âm

Bài toán đường đi ngắn nhất

BÀI 4 (Đề2007)

Dùng thuật toán Dijsktra để tìm đường đi ngắn nhất từ đỉnh ***a*** đến đỉnh *z* và chiều dài của nó trong đồ thị vô hướng có trọng lượng sau:



Bài toán đường đi ngắn nhất

Thuật toán Ford – Bellman

Tìm đường đi ngắn nhất từ u_0 đến các đỉnh hoặc chỉ ra đồ thị có mạch âm.

Bước 1. $L_0(u_0) = 0$ và $L_0(v) = \infty \ \forall v \neq u_0$. Đánh dấu đỉnh v bằng $(\infty, -)$; k=1.

Bước 2. $L_k(u_0) = 0$ và

$$L_k(v) = \min\{L_{k-1}(u) + w(u,v) / u \text{ là đỉnh trước của } v\}$$

Nếu $L_k(v) = L_{k-1}(y) + w(y,v)$ thì đánh dấu đỉnh v bởi $(L_k(v), y)$

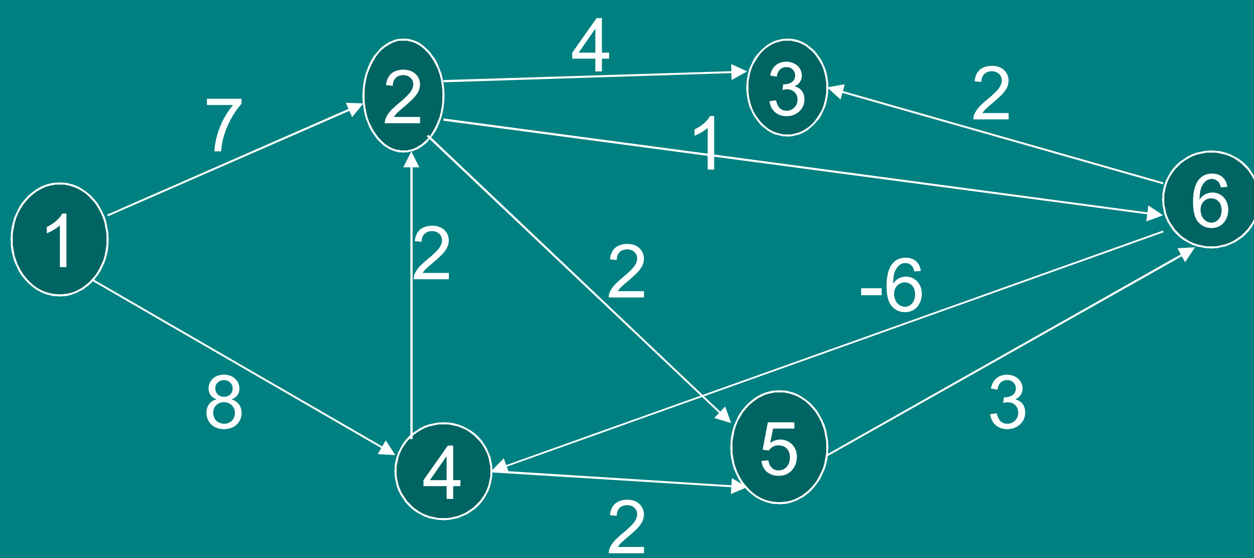
Bài toán đường đi ngắn nhất

Bước 3. Nếu $L_k(v) = L_{k-1}(v)$ với mọi v, tức $L_k(v)$ ổn định thì dừng. Ngược lại đến bước 4.

Bước 4. Nếu k = n thì dừng. G có mạch âm. Nếu $k \leq n-1$ thì trở về bước 2 với $k:=k+1$

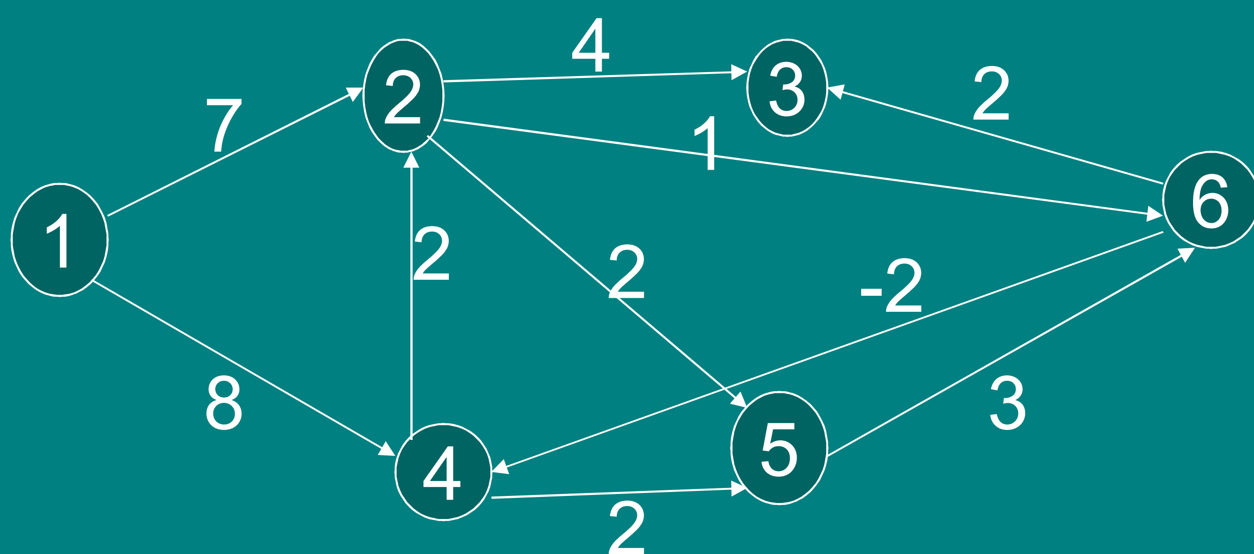
Bài toán đường đi ngắn nhất

- BT1.



Bài toán đường đi ngắn nhất

- BT2.



Đường đi Euler - Đường đi Hamilton

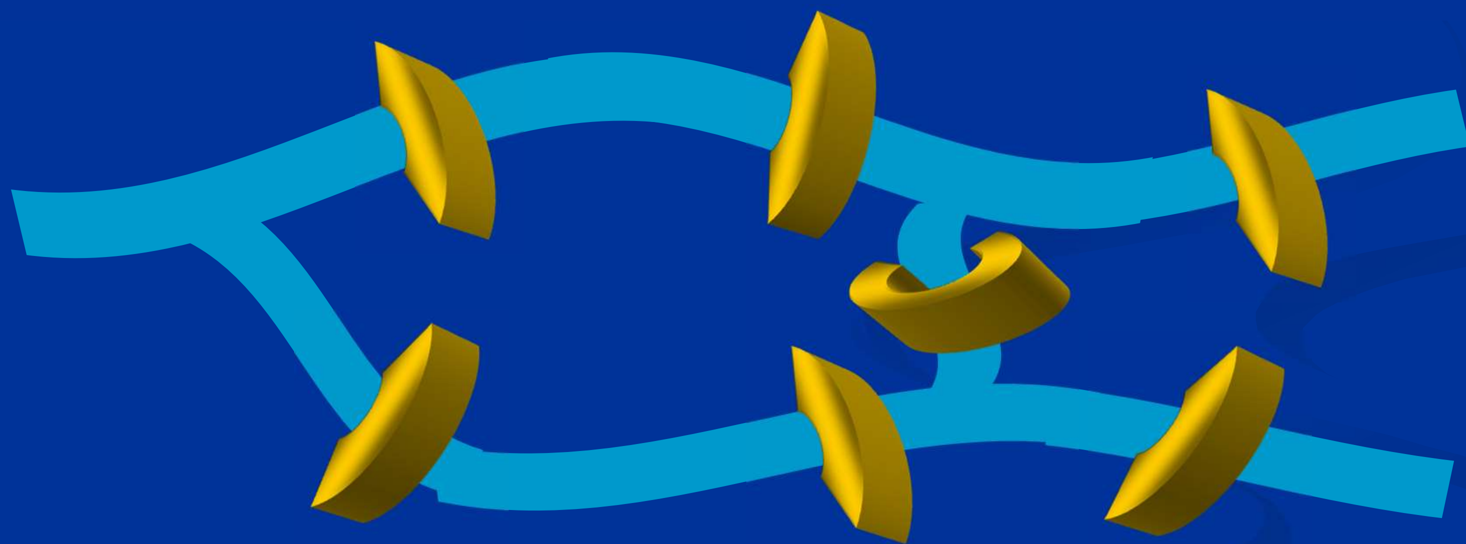
Euler

Đường đi Euler - Đường đi Hamilton

Hamilton
(1755-1804)

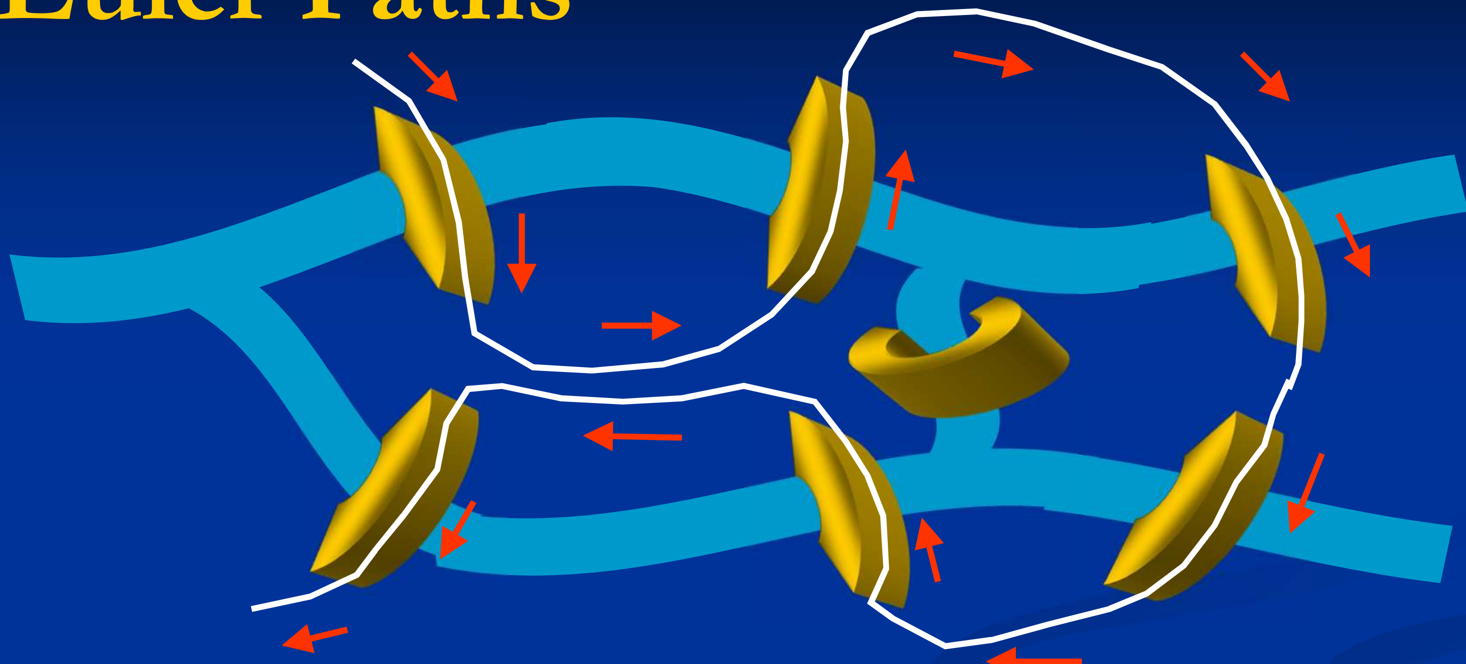
Đường đi Euler - Đường đi Hamilton

Problem. The town of Königsberg was divided into four sections by the branch of the Pregel River



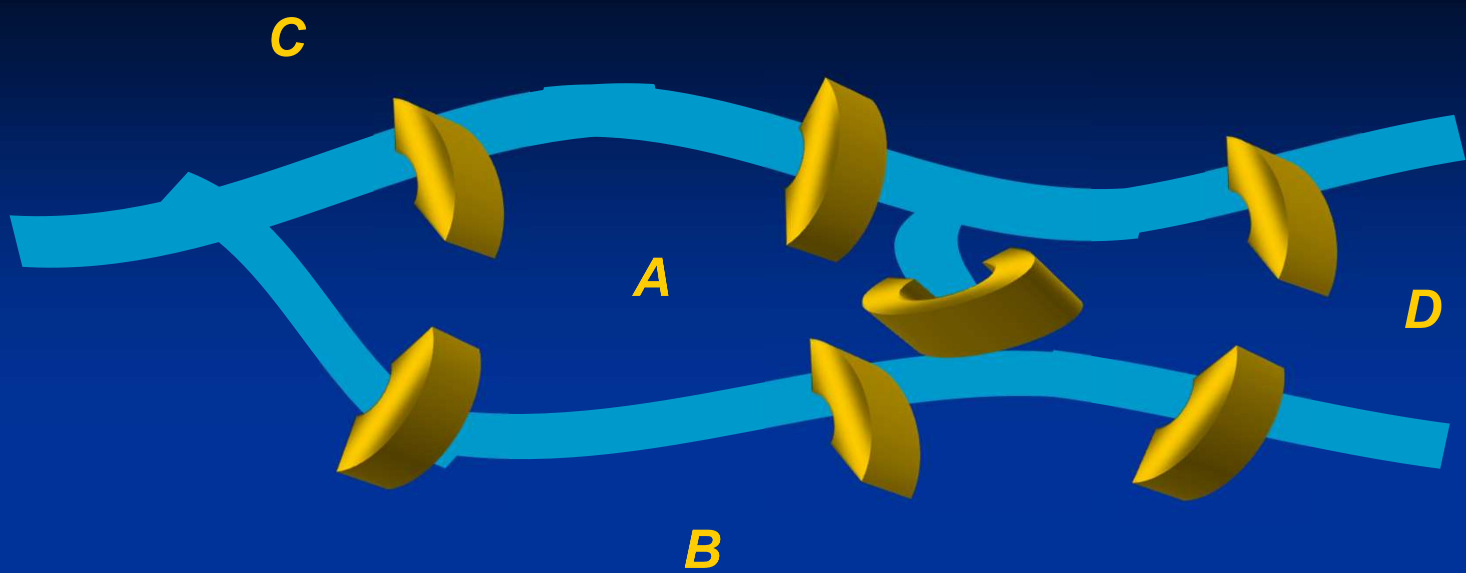
These four sections are connected by seven bridges

Euler Paths



Question. Can one cross seven bridges and return to the starting point without crossing any bridge twice?

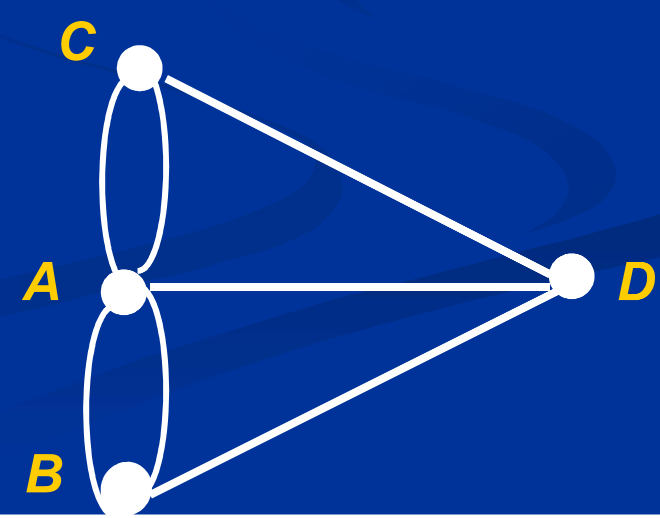
In the eighteenth century, Euler solved this problem using Graph Theory



Euler modeled this problem using the multigraph:

✓ four sections correspond to four vertices *A*, *B*, *C*, *D*.

✓ each bridge corresponds to an edge



Đường đi Euler - Đường đi Hamilton

Đường đi Euler

Định nghĩa.

i. Đường đi Euler là đường đi qua tất cả các cạnh mỗi cạnh (cung) đúng một lần. Chu trình Euler là chu trình đi qua tất cả các cạnh của đồ thị mỗi cạnh đúng một lần.

ii. Đồ thị được gọi là đồ thị Euler nếu nó có chu trình Euler

Đường đi Euler - Đường đi Hamilton

Điều kiện cần và đủ.

i. Cho G = (V,E) là đồ thị vô hướng liên thông. G là đồ thị Euler $\Leftrightarrow$ Mọi đỉnh của G đều có bậc chẵn. Nếu G có hai đỉnh bậc lẻ còn mọi đỉnh khác đều có bậc chẵn thì G có đường đi Euler.

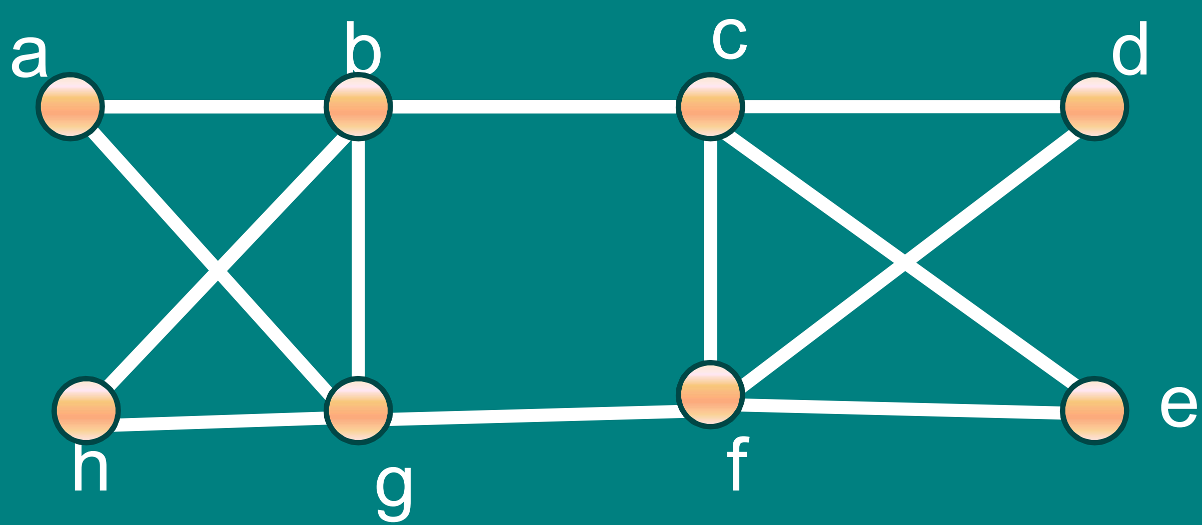
ii. Cho G là đồ thị có hướng liên thông. G là đồ thị Euler $\Leftrightarrow$ G cân bằng.

Đường đi Euler-Đường đi Hamilton

Thuật toán Fleury để tìm chu trình Euler.

1. Bắt đầu từ một đỉnh bất kỳ của G và tuân theo qui tắc sau: Mỗi khi đi qua một cạnh nào đó thì xoá nó đi, sau đó xoá đỉnh cô lập nếu có.
2. Không bao giờ đi qua một cầu trừ phi không còn cách đi nào khác.

Đường đi Euler-Đường đi Hamilton



Đường đi Euler - Đường đi Hamilton

Đường đi Hamilton.

Định nghĩa. Đường đi Hamilton là đường đi qua tất cả các đỉnh của đồ thị mỗi đỉnh đúng một lần.

- Định nghĩa tương tự cho chu trình Hamilton (mạch Hamilton).
- Đồ thi gọi là đồ thị Hamilton nếu nó có chu trình Hamilton

Đường đi Euler - Đường đi Hamilton

Điều kiện đủ (cho đồ thị đơn vô hướng).

i. Định lý Ore(1960). Cho đồ thị G có n đỉnh. Nếu deg(i)+deg(j) $\geq n \geq 3$ với i và j là hai đỉnh không kề nhau tuỳ ý thì G là Hamilton.

ii. Định lý Dirac (1952) Cho đồ thị G có n đỉnh. Nếu deg(i) $\geq n/2$ với i tuỳ ý thì G là Hamilton

Đường đi Euler - Đường đi Hamilton

Qui tắc để xây dựng một chu trình Hamilton H hoặc chỉ ra đồ thị vô hướng không là Hamilton

Qui tắc 1. Tất cả các cạnh kề với đỉnh bậc 2 phải ở trong H

Qui tắc 2. Không có chu trình con(chu trình có chiều dài <n) nào được tạo thành trong quá trình xây dựng H

Đường đi Euler - Đường đi Hamilton

Qui tắc 3. Khi chu trình Hamilton mà ta đang xây dựng đi qua đỉnh i thì xoá tất cả các cạnh kề với i mà ta chưa dùng(vì không được dùng đến nữa). Điều này lại có thể cho ta một số đỉnh bậc 2 và ta lại dùng qui tắc.

Qui tắc 4. Không có đỉnh cô lập hay cạnh treo nào được tạo nên sau khi áp dụng qui tắc 3.

Đường đi Euler-Đường đi Hamilton

Điều kiện đủ cho đồ thị có hướng, đơn(không có khuyên và không có cạnh song song cùng chiều)

ĐK Meyniel. ij và ji $\notin E \Rightarrow deg(i)+deg(j) \geq 2n-1$ với i, j tùy ý.

ĐLMeyniel(1973). Nếu G là đồ thị đơn, liên thông mạnh và thoả ĐK Meyniel thì G là đồ thị Hamilton.

ĐL Camion(1959). Nếu G là đơn đồ thị đủ, liên thông mạnh thì G Hamilton

Đường đi Euler-Đường đi Hamilton

ĐLGhouila-Houri(1960) Nếu G là đơn đồ thị liên thông mạnh sao cho mọi đỉnh đều có bậc không nhỏ hơn n thì G Hamilton.

ĐL Woodall(1972). Cho G là đơn đồ thị thoả $ij \notin E \Rightarrow deg^{+}(i)+deg^{-}(j) \geq n$, với mọi i,j thì G Hamilton