

五行阴阳音乐系统—黄金率试验

Abe.Chua (初稿 B)

2025-08-25

目标 (简要)

本试验以可参数化的基点频率 F_{base} (默认 20 Hz, 调整范围视为转调, 小于 1 个 φ) 为出发点, 按黄金比例 φ 向上生成一系列音区; 在每个音区内按五行—阴阳角度分布决定 15 个音位在该区内的落点。下面给出公式、两种可选映射方案、枚举区间的方法与简单示例。

参数与符号

主要符号定义如下:

$$\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \approx 1.61803398875, \quad F_{\text{base}} \text{ (default = 20 Hz)}.$$

五行角度基位与极性定义为:

$$\theta_e = 72^\circ \cdot e, \quad e \in \{0, 1, 2, 3, 4\}, \quad p \in \{-1, 0, +1\}, \quad \Delta\theta \text{ (default = } 72^\circ/15 = 4.8^\circ).$$

令 $p=-1$ 对应基准角 (即 θ_e 本身), 向上按步进 $\Delta\theta$ 配置三极性位置:

$$\theta = \theta_e + (p + 1) \cdot \Delta\theta, \quad p \in \{-1, 0, +1\}.$$

方案 A —折叠 (folding) 方式

方案 A 是对早前文档折叠逻辑的扩展, 适用于需要把原始频率折叠回目标音区的情况。

先计算原始比例因子:

$$r_{\text{raw}}(\theta) = \varphi^{\theta/72}.$$

原始频率 (未折叠) 为

$$f_{\text{raw}} = F_{\text{base}} \cdot r_{\text{raw}}(\theta).$$

将 f_{raw} 折叠到第 n 音区 (区间定义见下):

$$f_{e,p,n} = f_{\text{raw}} \cdot \varphi^k, \quad k \in \mathbb{Z},$$

其中选取 k 使得

$$f_{e,p,n} \in [F_{\text{base}}\varphi^n, F_{\text{base}}\varphi^{n+1}).$$

方案 A 适合于兼容已有折叠逻辑或当角度范围超出一个周期时复用, 但会引入折叠带来的二义性。

方案 B 一归一化 (intra-zone placement) 方式 (推荐)

方案 B 将角度映射到单一区间内的位置参数 $u \in [0, 1)$ ，从而在每个音区内按相对位置放置音位——此法直观且无额外折叠。

角度到区内位置的映射为：

$$u = \frac{\theta \bmod 72^\circ}{72^\circ}.$$

第 n 音区定义为

$$\mathbb{I}_n = [F_{\text{base}}\varphi^n, F_{\text{base}}\varphi^{n+1}).$$

在区内按 u 放置该音位：

$$f_{e,p,n} = F_{\text{base}} \cdot \varphi^{n+u}.$$

方案 B 的优点在于每 72° 的角度周期对应完整的一个黄金率音区，计算简单且无折叠不确定性。因此推荐优先使用方案 B 生成可解释的区间分布。

如何枚举有效的 n

为了使频率落在工程带宽 $[F_{\min}, F_{\max}]$ 内 (示例取 $F_{\min} = 30 \text{ Hz}$, $F_{\max} = 6000 \text{ Hz}$)，对于给定 u 需要满足：

$$F_{\min} \leq F_{\text{base}}\varphi^{n+u} < F_{\max}.$$

等价地，

$$\log_\varphi \frac{F_{\min}}{F_{\text{base}}} - u \leq n < \log_\varphi \frac{F_{\max}}{F_{\text{base}}} - u.$$

因此可以取

$$n_{\min} = \left\lceil \log_\varphi \frac{F_{\min}}{F_{\text{base}}} - u \right\rceil, \quad n_{\max} = \left\lfloor \log_\varphi \frac{F_{\max}}{F_{\text{base}}} - u \right\rfloor.$$

对所有 15 个 (e, p) 计算对应的 u ，再合并不同 n 的结果即可得到完整候选集合。

简单示例

参数示例： $F_{\text{base}} = 20 \text{ Hz}$, $\Delta\theta = 5^\circ$, $F_{\min} = 30 \text{ Hz}$, $F_{\max} = 6000 \text{ Hz}$ 。

按方案 B 枚举 n ：从最小的 n_{\min} 开始，对每个 u 逐步增加 n 直到区间上界超出 F_{\max} 。该过程在脚本中易于实现并可直接导出每个 $f_{e,p,n}$ 与其所属区间。

实现建议与比较

首选方案 B (归一化) 用于生成可解释的、无折叠二义性的区间分布。方案 A 可用于兼容已有折叠逻辑或当角度范围超出一个周期时复用。

导出时建议同时给出：绝对频率、相对 cents (以某一基准如 220 Hz 或局部区下界为基准)、以及所属 n 。在脚本中提供可调参数： F_{base} , $\Delta\theta$, F_{\min} , F_{\max} 与是否使用方案 A/B。

下一步 (工程化清单)

1. 编写生成脚本 (Python)，实现方案 B 的 $f_{e,p,n}$ 枚举并输出 CSV/Scala/.tun。
2. 生成每个候选区段的频率范围表并可视化 (热图/频谱带图)。
3. 在小样本上进行听测与参数微调 (调整 F_{base} 与 $\Delta\theta$)。