

Petersen 五行阴阳音乐系统—底层音律说明

Abe.Chua (初稿 D 一修订, 匹配黄金率试验)

2025-08-25

本修正版将文档中的映射与常量修正为与“黄金率试验—初稿 D”一致: 360° 对应一个黄金率音区, 五行间隔为 72° , 金 ($e=0$) 阴 ($p=-1$) 对应 0° 基位, 阴阳极性在格内的偏移默认 $\Delta\theta = 4.8^\circ$, 并采用按 φ 的区间归一化 (方案 B) 为首选实现方式。

1 概览与设计目标 (保持不变)

系统以黄金比例为音高生成基准, 并以 Petersen 图与五行/阴阳结构作为语法。目标包括参数化、可复现的音律生成 (15 方位, 扩展至多音区)、便于导出 Scala/.scl 与 MIDI Tuning、以及支持和弦评分与实时合成。

2 符号与默认常量 (修正)

主要符号与默认值:

$$\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \approx 1.61803398875, \quad F_{\text{base}} = 20 \text{ Hz (默认)}.$$

五行角度基位与极性:

$$\begin{aligned} \theta_e &= 72^\circ \cdot e, \quad e \in \{0, 1, 2, 3, 4\} \quad (0 = \text{金}), \\ p &\in \{-1, 0, +1\}, \quad \Delta\theta = 4.8^\circ \text{ (默认)}. \end{aligned}$$

阴阳在格内的角度映射 (使 $p=-1$ 对应基位角 θ_e):

$$\theta = \theta_e + (p + 1) \cdot \Delta\theta, \quad p \in \{-1, 0, +1\}.$$

备注: 上述定义保证金阴 ($e=0, p=-1$) 角度为 0° 。

3 核心映射 (与黄金率试验一致)

将角度按 360° 周期映射到黄金率比例因子。原始比例因子:

$$r_{\text{raw}}(\theta) = \varphi^{\theta/360}.$$

原始频率 (未归一化):

$$f_{\text{raw}} = F_{\text{base}} \cdot r_{\text{raw}}(\theta) = F_{\text{base}} \cdot \varphi^{\theta/360}.$$

推荐优先使用“方案 B (区内归一化)”——把每 360° 映射为单一音区的相对位置:

$$u = \frac{(\theta \bmod 360^\circ)}{360^\circ} \in [0, 1).$$

第 n 音区定义为:

$$\text{区}_n = [F_{\text{base}}\varphi^n, F_{\text{base}}\varphi^{n+1}).$$

在区内按 u 放置音位:

$$f_{e,p,n} = F_{\text{base}} \cdot \varphi^{n+u}.$$

方案 A (折叠) 仍可保留作兼容用途: 先计算 $f_{\text{raw}} = F_{\text{base}}\varphi^{\theta/360}$, 再乘以 φ^k 或 R_{oct}^k 折叠到目标区间; 但推荐以方案 B 作为默认实现以避免折叠二义性。

4 每度 cents 增量 (修正)

当 360° 对应一个完整的 φ 倍程时, 每 1° 对应的 cents 增量为:

$$\Delta_{1^\circ} = \frac{1200}{360} \log_2 \varphi = \frac{10}{3} \log_2 \varphi \approx 2.3147 \text{ cents/deg.}$$

5 如何枚举有效的 n

为了使频率落在工程带宽 $[F_{\min}, F_{\max}]$, 对给定 u :

$$F_{\min} \leq F_{\text{base}} \varphi^{n+u} < F_{\max}$$

等价于

$$\log_\varphi \frac{F_{\min}}{F_{\text{base}}} - u \leq n < \log_\varphi \frac{F_{\max}}{F_{\text{base}}} - u,$$

因此可取

$$n_{\min} = \left\lceil \log_\varphi \frac{F_{\min}}{F_{\text{base}}} - u \right\rceil, \quad n_{\max} = \left\lfloor \log_\varphi \frac{F_{\max}}{F_{\text{base}}} - u \right\rfloor.$$

对所有 15 个 (e, p) 计算对应 u , 再合并不同 n 的结果可得到完整候选集合。

6 15 方位、45 音区与默认参数 (修正)

15 方位仍为五行 (5) \times 三极性 (3)。默认参数更新以匹配黄金率试验文档:

- $F_{\text{base}} = 20$ Hz (默认, 可按需要调整为 220 Hz 等)
- $\Delta\theta = 4.8^\circ$
- 映射周期: $360^\circ \rightarrow$ 一完整 φ 区间 (使用方案 B)

可通过对每个 15 方位并对若干 n (由带宽约束) 生成最终频率表; 若需要 45 音区, 可在每个基本 u 上枚举多值 n (低/中/高区)。

7 导出与 DAW/合成器集成 (简要提醒)

建议输出 CSU、Scala (.scl) 与 MIDI Tuning (.tun) 三种格式。注意:

- 若选择 $F_{\text{base}} = 20$ Hz, 导出时可同时给出相对 cents (以本次选定基准如 220Hz 或区下界为准)。
- MPE/pitch-bend 分配策略与先前建议一致, 但 cents 计算需基于本修正后的频率值。

8 和弦评分、搜索、实时与实现注意 (保持)

和弦评分、搜索与实时合成的实现注意点保持不变; 在所有频率/cent 计算处使用本修正后的频率公式与每度 cents 增量。

9 附录: 更新的最小 Python 脚本 (工程化示例, 匹配修正公式)

下面脚本与原附录脚本等效, 但已修正为: 360° 对应完整 φ 倍程, 阴阳极性按 $\theta = \theta_e + (p+1)\Delta\theta$, 默认 $F_{\text{base}} = 20$ Hz, $\Delta\theta = 4.8^\circ$, 并采用方案 B (区内归一化枚举)。将脚本保存在 tools/generate_tuning.py 并在 macOS 终端运行 python3。

```

# filepath: tools/generate_tuning.py
# 运行: python3 tools/generate_tuning.py
import math, csv

phi = (1 + 5**0.5) / 2
F_base = 20.0          # 默认基点频率 (与黄金率试验一致)
delta_theta = 4.8      # 默认角度偏移 (deg)
F_min = 30.0
F_max = 6000.0

elements = ['金','木','水','火','土']
rows = []

def theta_for(e_idx, p):
    theta_e = 72.0 * e_idx
    return theta_e + (p + 1) * delta_theta # p=-1 -> theta_e

def u_from_theta(theta):
    return (theta % 360.0) / 360.0

def freq_in_zone(n, u):
    return F_base * (phi ** (n + u))

for e_idx, name in enumerate(elements):
    for p in (-1, 0, 1):
        theta = theta_for(e_idx, p)
        u = u_from_theta(theta)
        # 枚举满足带宽的 n
        n_min = math.ceil(math.log(F_min / F_base, phi) - u)
        n_max = math.floor(math.log(F_max / F_base, phi) - u)
        for n in range(n_min, n_max + 1):
            f = freq_in_zone(n, u)
            cents = 1200 * math.log2(f / F_base)
            rows.append({
                'element': name,
                'e': e_idx,
                'p': p,
                'theta': round(theta,6),
                'n': n,
                'u': round(u,6),
                'freq': round(f,6),
                'cents': round(cents,3)
            })

# CSV
with open('tools/15_positions_expanded.csv','w', newline='') as f:
    w = csv.DictWriter(f, fieldnames=['element','e','p','theta','n','u','freq','cents'])
    w.writeheader()
    w.writerows(rows)

# 简单 Scala .scl 以 F_base 为参考 (写入相对于 F_base 的 cents)
with open('tools/petersen_15_phi.scl','w') as f:
    f.write("! petersen_15_phi.scl\n")
    f.write("Petersen 五行阴阳 15-tone scale (F_base=20Hz, delta_theta=4.8deg)\n")
    f.write(str(len(rows)) + "\n")
    for r in rows:
        f.write(f"{r['cents']}\n")

```

```
print("Generated tools/15_positions_expanded.csv and tools/petersen_15_phi.scl")
```

10 结语

本修订消除了原底层说明中将 360° 映射为 72° 分母（以及不同默认基频/偏移）造成的不一致。现在文档在角度—频率映射、默认常量与导出脚本上与“黄金率试验—初稿 D”保持一致。