

# Petersen 五行阴阳音乐系统—底层音律说明

Abe.Chua (初稿 D)

2025-08-25

本文件在初稿 C 基础上，增加了钢琴频率和可选的音区范围，基本思路是不局限于原先设定的三个音区。主要依据：人耳可接受频率范围：约 20Hz -20kHz，但音乐习惯主要在 40Hz -6kHz。

## 1 概览与设计目标

本系统以黄金比例为音高生成基准、以 Petersen 图与五行/阴阳为结构化语法，目标是：

- 参数化、可复现的音律生成 (15 方位，扩展至多个音区)。
- 便于导出至 Scala/.scl、MIDI Tuning (.tun/SysEx) 与 MPE 友好输出。
- 支持和弦评分、搜索、实时合成与听觉评估流程。

## 2 符号与常量 (总览)

主要符号与默认常量：

- 黄金比例： $\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \approx 1.6180339887$ 。
- 基频： $F_0$  (默认 220 Hz)。
- 五行角度基位： $\theta_e = 72^\circ \cdot e$ ,  $e \in \{0, \dots, 4\}$  (0: 金, 1: 木, 2: 水, 3: 火, 4: 土)。
- 阴阳极性： $p \in \{-1, 0, +1\}$ ；阴阳角度偏移： $\Delta\theta$  (默认  $5^\circ$ )。
- 折叠基准比 (八度选择)： $R_{\text{oct}} \in \{2, \varphi\}$ 。
- 其他超参：和弦相容宽度  $\sigma$ 、音行跳跃惩罚  $\alpha_e$ 、BPM 基准  $B$ 、MPE pitch-bend range 等。

## 3 标准参数表 (默认值与可搜索范围)

建议在实现配置中明确列出默认值与搜索范围：

- $F_0 = 220$  Hz (可试 160-440 Hz)
- $\Delta\theta = 5^\circ$  (可试  $0^\circ$ - $18^\circ$ ；特殊： $1.125^\circ$ ,  $2.25^\circ$ ,  $4.5^\circ$ ,  $9^\circ$ ,  $18^\circ=72^\circ/4$ )
- $R_{\text{oct}} = 2$  (可选  $\varphi$ )
- $\sigma = 50$  cents (可试 10-200 cents)
- $\alpha_e = 1.0$  (可试 0.1-5.0)
- MPE pitch-bend range 建议  $\pm 200$  cents (按需要调整)

## 4 钢琴频率与标准音区

标准 88 键钢琴频率范围:

- 最低音:  $A0 = 27.500 \text{ Hz}$
- 最高音:  $C8 \approx 4186.009 \text{ Hz}$
- 参考:  $A4 = 440 \text{ Hz}$  (等温平均律)

为与本体系的“标准音区”保持一致, 文稿采用标准音区 (基准区间):

$$\text{标准音区} = [440, 880) \text{ Hz}.$$

### 4.1 按 $\varphi = 2$ (即因子为 $2^n$ ) 扩展—候选区间

以基准区间  $[440, 880)$  为中心, 按  $s = 2^n$  向两侧扩展):

- $s = 1/16$ :  $[27.500, 55.000]$
- $s = 1/8$  :  $[55.000, 110.000]$
- $s = 1/4$  :  $[110.000, 220.000]$
- $s = 1/2$  :  $[220.000, 440.000]$
- $s = 1$  :  $[440.000, 880.000]$
- $s = 2$  :  $[880.000, 1760.000]$
- $s = 4$  :  $[1760.000, 3520.000]$
- $s = 8$  :  $[3520.000, 7040.000]$

结论 ( $\varphi = 2$  情形): 可得到 8 个候选区间。

### 4.2 按黄金比例 $\varphi \approx 1.61803398875$ 扩展—候选区间

以基准区间  $[440, 880)$  为中心, 按  $s = \varphi^n$  (整数  $n$ ) 扩展。取  $n \in \{-6, \dots, 5\}$ :

- $n = -5$  ( $s \approx 0.090170$ ):  $[39.675, 79.350]$
- $n = -4$  ( $s \approx 0.145898$ ):  $[64.195, 128.390]$
- $n = -3$  ( $s \approx 0.236068$ ):  $[103.867, 207.735]$
- $n = -2$  ( $s \approx 0.381966$ ):  $[167.667, 335.334]$
- $n = -1$  ( $s \approx 0.618034$ ):  $[271.934, 543.869]$
- $n = 0$  ( $s = 1$ ) :  $[440.000, 880.000]$
- $n = 1$  ( $s \approx 1.618034$ ):  $[711.935, 1423.869]$
- $n = 2$  ( $s \approx 2.618034$ ):  $[1151.935, 2303.869]$
- $n = 3$  ( $s \approx 4.236068$ ):  $[1863.869, 3727.736]$
- $n = 4$  ( $s \approx 6.854102$ ):  $[3015.805, 6031.611]$

### 4.3 按黄金比例 $\varphi \approx 1.61803398875$ 扩展—候选区间

采用黄金比例生成音区时，不以 440/880 为基准，而以 20 Hz 为最低基点，向上按因子  $\varphi$  逐步扩展至区间接近 6000Hz 附近。

每个音区定义为：

$$\text{区}_n = [20\varphi^n, 20\varphi^{n+1}), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

计算结果（保留三位小数）：

- $n = 0$ : [20.000, 32.361) Hz
- $n = 1$ : [32.361, 52.361) Hz
- $n = 2$ : [52.361, 84.721) Hz
- $n = 3$ : [84.721, 137.082) Hz
- $n = 4$ : [137.082, 221.803) Hz
- $n = 5$ : [221.803, 358.885) Hz
- $n = 6$ : [358.885, 580.689) Hz
- $n = 7$ : [580.689, 939.574) Hz
- $n = 8$ : [939.574, 1520.263) Hz
- $n = 9$ : [1520.263, 2459.837) Hz
- $n = 10$ : [2459.837, 3980.100) Hz
- $n = 11$ : [3980.100, 6439.936) Hz

结论：以 20 Hz 为基点并按黄金比例向上扩展，在工程有效带宽 [40, 6000] Hz 内可得到 12 个候选音区。可将上述区间用作多音区生成的候选集合，或按需要合并/细分以匹配 15/45 方位映射与实际听觉/合成器约束。

## 5 角度—频率映射（核心公式）

定义音位角度：

$$\theta = \theta_e + p \cdot \Delta\theta.$$

原始比例因子：

$$r_{\text{raw}}(\theta) = \varphi^{\theta/72}.$$

原始频率：

$$f_{\text{raw}} = F_0 \cdot \varphi^{\theta/72}.$$

折叠到期望区间（单一标准区间）：

$$F = f_{\text{raw}} \cdot R_{\text{oct}}^k, \quad k \in \mathbb{Z},$$

其中可取

$$k = - \left\lfloor \log_{R_{\text{oct}}} \frac{f_{\text{raw}}}{F_0} \right\rfloor$$

以保证

$$F \in [F_0, F_0 \cdot R_{\text{oct}}).$$

以 cents 表示：

$$\text{cents}(F) = 1200 \log_2 \frac{F}{F_0}.$$

每度的 cents 增量：

$$\Delta_{1^\circ} = \frac{1200}{72} \log_2 \varphi \approx 11.57 \text{ cents/deg}.$$

实现注意：

- 使用高精度 double 计算 phi 幂与对数，避免累积误差。
- 若选择  $R_{\text{oct}} = \varphi$ （“黄金八度”），需在导出/播放链路中处理非常规八度映射。

## 6 五行阴阳 5\*3 方位与多音区

定义:

- 15 方位: 五行 (5) × 三极性 (3) = 15 个音位, 索引 (e,p)。
- 多个音区: 复制 15 方位到多个高区, 音区缩放因子  $s \in \{1/\varphi, 1, \varphi\}$  (或  $2^{-1}, 1, 2$ ) 生成更丰富的音高集合。
- 基本音确定为金阴, 还是金中, 取决于未来归一化处理后, 确立对应音区后设定。

## 7 导出格式与 DAW/合成器集成实践

建议同时支持三类输出:

1. Scala (.scl): 用于静态音阶比较、格式通用。
2. MIDI Tuning Standard (.tun) 或 SysEx: 用于支持自定义微分音调律的合成器。
3. MPE + per-voice pitch-bend fallback: 当合成器支持 MPE 时, 每声部使用独立 pitch-bend; 否则用 base MIDI note + pitch-bend。策略建议:
  - 计算目标频率与最邻近 MIDI note (12-TET) 差值 (cents)。
  - 若绝对差值  $\leq 100$  cents, 分配该 MIDI note 并通过 pitch-bend 调整; 否则选择不同基准 note/八度组合以压缩到 pitch-bend 范围。
  - 默认 pitch-bend range =  $\pm 200$  cents; 如需更大范围, 动态调整或采用 MPE 每声部方案。

## 8 和弦评分、搜索与约束 (实现细化)

两音间相对于小整数比 ( $n:m$ ) 的差异:

$$\delta_{ij}^{(n:m)} = \left| 1200 \log_2 \frac{F_i}{F_j} - 1200 \log_2 \frac{n}{m} \right|.$$

取

$$\delta_{ij} = \min_{(n:m) \in S} \delta_{ij}^{(n:m)},$$

常用集合  $S = \{1:1, 2:1, 3:2, 4:3, 5:4\}$  (可扩展)。和弦评分:

$$S(C) = \sum_{i < j} \exp\left(-\frac{\delta_{ij}^2}{2\sigma^2}\right).$$

实现建议:

- 在计算  $\delta_{ij}$  时同时记录对应的小整数比 ( $n:m$ ) 用于分析与可视化。
- 对多音和弦引入基频对齐惩罚 (若两个音接近简单倍频关系则加分)。
- 搜索采取分层策略: 先在同一五行/相邻五行中枚举候选, 再按和弦分数  $S(C)$  排序, 最后做时间窗口内平滑性二次筛选以避免瞬时 cluster。

## 9 旋律生成与 Petersen 图语法

系统将 Petersen 图或其它图结构作为音程/转移约束:

- 将 15 方位映射到图节点, 使用图的边定义允许的音高转移 (例如邻接优先、重复惩罚、五行生克偏好)。
- 概率模型示例:

$$P(\Delta e, \Delta p) \propto \exp(-\alpha_e |\Delta e| - \alpha_p |\Delta p|) \cdot W(e', p'),$$

其中  $W$  为音色/和谐权重,  $\alpha_e, \alpha_p$  为跳跃惩罚参数。

- 优先小步移动 (同一五行三极性或相邻五行), 偶尔长跳以增加张力。

## 10 实时合成、抗失真与实现注意

实时实现注意点：

- 频率变化平滑 (portamento/滑音)：对频率包络应用分段线性或低通滤波，避免瞬时大跳引起 aliasing。
- 采样率与插值：使用至少 48 kHz；对 pitch-bend 引起的频率变化使用带线性相位低通滤波器的 resampler。
- 预计算 LUT：在实时环境中预生成 15/45 音频频率表与 pitch-bend 值，降低运行时负载。
- 合成器 patch 建议（映射五行到音色）：
  - 金：bell FM / high-q resonant filter, bright harmonic boost。
  - 木：plucked sample / physical model, transient + body noise。
  - 水：pad + portamento, low-bend with subtle chorus。
  - 火：brass/lead with saturation, shorter release。
  - 土：low oscillator, heavy LP filter, long decay。

## 11 可视化、调试与听觉评估流程

推荐最小可行试验 (MVP) 流程：

1. 使用默认参数生成 15/45 的 Scala 与 MIDI 文件（见附录最小脚本）。
2. 在受控条件下进行主观 A/B 听测（建议 20-30 位受试者），并记录偏好。
3. 同步记录客观指标：平均偏差 (cents)、最大偏差、与常见小整数比的分布。
4. 用热力图显示 Petersen 图上节点被访问频度、和弦评分分布与路径转移矩阵。

## 12 测试、参数搜索与自动化建议

建议的自动化策略：

- 使用网格或贝叶斯优化搜索  $\Delta\theta$ ,  $\sigma$ ,  $\alpha_e$ ,  $R_{\text{oct}}$ 。
- 每组参数自动生成一组 MIDI/Audio，记录客观指标并进行批量 A/B（或对照 12-TET）听测。
- 保存所有结果与元数据（参数 JSON + timestamp + render 文件名），便于复现与分析。

## 13 元数据、引用与许可证

请在项目中添加术语表与参考文献（例如 Bohlen-Pierce, Sevish, microtonal tuning 文献），并声明代码与数据许可证（建议 MIT + CC-BY 组合以兼容科研与艺术共享）。

## 14 附录 A：实现注意的细节与实践清单

实现时的快速清单：

- 使用 double 精度计算 phi 的幂与对数，避免累积误差。
- 折叠到区间  $[F_0, F_0 \cdot R_{\text{oct}})$  时使用上文公式计算 k。
- 当导出 cents 时采用基准  $F_0$  的相对 cents:  $\text{cents} = 1200 \log_2(F/F_0)$ 。
- 提前生成 LUT 与 Scala/.tun 的 mapping，测试合成器对非常规八度（若使用  $\varphi$  八度）的支持。

## 15 附录 B：生成与导出最小 Python 脚本（工程化示例）

下列脚本为最小可运行示例：生成 15 音位表，导出 CSV 与 Scala (.scl)。将脚本保存在 tools/generate\_tuning.py 并在 macOS 终端运行 python3。

```
# filepath: tools/generate_tuning.py
# 运行: python3 tools/generate_tuning.py
import math, csv

phi = (1+5**0.5)/2
F0 = 220.0
dtheta = 5.0
R_oct = 2.0

elements = ['金','木','水','火','土']
rows = []

def raw_freq(theta):
    return F0 * (phi ** (theta/72.0))

def fold_freq(f):
    k = -math.floor(math.log(f / F0, R_oct))
    return f * (R_oct ** k)

def cents(f):
    return 1200*math.log2(f / F0)

for e_idx, name in enumerate(elements):
    theta_e = 72.0 * e_idx
    for p in (-1,0,1):
        theta = theta_e + p*dtheta
        f_raw = raw_freq(theta)
        F = fold_freq(f_raw)
        rows.append({
            'element': name,
            'e': e_idx,
            'p': p,
            'theta': theta,
            'freq': round(F,6),
            'cents': round(cents(F),3)
        })

# CSV
with open('tools/15_positions.csv','w', newline='') as f:
    w = csv.DictWriter(f, fieldnames=['element','e','p','theta','freq','cents'])
    w.writeheader()
    w.writerows(rows)

# Scala .scl (single octave relative to F0)
with open('tools/petersen_15.scl','w') as f:
    f.write("! petersen_15.scl\n")
    f.write("Petersen 五行阴阳 15-tone scale (F0=220Hz, dtheta=5deg)\n")
    f.write("15\n")
    for r in rows:
        cents_val = r['cents']
        f.write(f"{cents_val}\n")
print("Generated tools/15_positions.csv and tools/petersen_15.scl")
```

## 16 结语与下一步建议

本合并稿（初稿 C）整合数学定义、参数表、实现细化、导出策略与最小脚本。下一步建议：

1. 将附录脚本放入 `tools` 并运行以验证 15/45 导出；
2. 在支持 MPE 或 `.tun` 的 DAW/合成器中进行对照听测；
3. 启动参数扫描并记录结果（自动化保存 `metadata`）。