

Petersen 五行阴阳音乐系统—底层音律说明

Abe.Chua (初稿)

2025-08-25

本文件定义音高空间、五行阴阳音阶分配、音色映射、和弦与旋律生成的底层数学与实现要点。设计目标是清晰、参数化并便于程序化实现 (MIDI / 合成器)。

1 符号与常量

- 黄金比例: $\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \approx 1.6180339887$ 。
- 基频: F_0 (默认 220 Hz, 可改)。
- 五行角度基位: $\theta_e = 72^\circ \cdot e$, $e \in \{0, \dots, 4\}$ (0: 金, 1: 木, 2: 水, 3: 火, 4: 土)。
- 阴阳极性: $p \in \{-1, 0, +1\}$ (阴、中、阳)。
- 阴阳角度偏移: $\Delta\theta$ (默认 5° , 可调)。
- 折叠基准比 (八度选择): R_{oct} , 常见取值 2 或 φ 。

2 角度到频率的映射 (核心公式)

先定义该音的角度:

$$\theta = \theta_e + p \cdot \Delta\theta.$$

定义原始比例因子 (未经折叠):

$$r_{\text{raw}}(\theta) = \varphi^{\theta/72}.$$

原始频率:

$$f_{\text{raw}} = F_0 \cdot r_{\text{raw}}(\theta) = F_0 \cdot \varphi^{\theta/72}.$$

为便于听感, 将频率折叠到一个期望区间:

$$F = f_{\text{raw}} \cdot R_{\text{oct}}^k, \quad k \in \mathbb{Z},$$

其中选择整数 k 使得

$$F \in [F_0, F_0 \cdot R_{\text{oct}}).$$

可取

$$k = - \left\lfloor \log_{R_{\text{oct}}} \frac{f_{\text{raw}}}{F_0} \right\rfloor.$$

2.1 以 cents 表示

$$\text{cents}(F) = 1200 \log_2 \frac{F}{F_0}.$$

单位角度对应的 cents 增量为:

$$\Delta_{1^\circ} = \frac{1200}{72} \log_2 \varphi \approx 11.57 \text{ cents/deg}.$$

3 15 方位与 45 音区的定义

- 15 方位：五行 \times 三极性，共 15 个音位，索引表示为 (e, p) 。
- 三音区扩展 (45 音符)：复制 15 方位到低/中/高区，音区缩放因子 $s \in \{1/\varphi, 1, \varphi\}$ (或 $2^{-1}, 1, 2$)。

频率：

$$F_r = F(e, p) \cdot s_r, \quad r \in \{L, M, H\}.$$

4 五行-阴阳到音色与合成参数的映射

每个方位映射到一组合成控制参数：

$$\text{timbre}(e, p) = \{ \text{instr_set}, \text{filter_cutoff}, \text{harmonic_richness}, \text{env} \}.$$

建议映射（候选乐器/合成器风格）：

- 金 ($e=0$)：钟/铃类；明亮，高谐波；阴暗，轻混响。
- 木 ($e=1$)：拨弦/木琴；强调基频与击发噪声。
- 水 ($e=2$)：垫/木笛；滑音与微分音。
- 火 ($e=3$)：铜管/合成铅；强攻与饱和。
- 土 ($e=4$)：低音弦/鼓；厚重低频。

阴阳参数示例：

$$\begin{aligned} \text{阳 } (p = +1) &: \text{cutoff} + \Delta_c, \text{harmonic} + \Delta_h, \text{attack} \downarrow \\ \text{中 } (p = 0) &: \text{baseline} \\ \text{阴 } (p = -1) &: \text{cutoff} - \Delta_c, \text{harmonic} - \Delta_h, \text{decay} + \Delta_d \end{aligned}$$

5 和弦设计（规则化生成）

给定候选频率 $\{F_i\}$ ，两音间相对于小整数比 $(n:m)$ 的差异：

$$\delta_{ij}^{(n:m)} = \left| 1200 \log_2 \frac{F_i}{F_j} - 1200 \log_2 \frac{n}{m} \right|.$$

取 $\delta_{ij} = \min_{(n:m) \in \mathcal{S}} \delta_{ij}^{(n:m)}$ ，常用 $\mathcal{S} = \{1:1, 2:1, 3:2, 4:3, 5:4\}$ 。和弦评分：

$$S(C) = \sum_{i < j} \exp\left(-\frac{\delta_{ij}^2}{2\sigma^2}\right).$$

生成策略：选根音 (e, p, r) ，在 15 方位或相邻音区中搜索候选并计算 S ，挑选高分 2-3 音为 triad。

6 旋律生成（底层语法）

优先小步移动：在同一五行的三极性间或相邻五行 $(e \pm 1) \bmod 5$ 移动；偶尔长跳 $(e \pm 2)$ 。阴阳用于微分音与音色修饰。概率模型：

$$P(\Delta e, \Delta p) \propto \exp(-\alpha_e |\Delta e| - \alpha_p |\Delta p|) \cdot W(e', p'),$$

其中 W 为音色/和谐权重。

7 节奏、循环与时间

基础 BPM = B 。段落间可按黄金比例调整: $\text{BPM}' = B \cdot \varphi^{\pm q}$ 。五行到节奏密度示例: 金短音, 木琶音, 水 rubato, 火重拍, 土长音。micro-timing:

$$\delta t = \alpha_t \sin\left(\frac{\pi}{180}\theta\right) T_{\text{beat}}.$$

8 实现注意事项

MIDI 实现建议使用 pitch-bend 或 MPE; 合成器要求支持可编程滤波、谐波控制、ADSR、portamento。建议批量扫描超参 $\Delta\theta$, F_0 , R_{oct} , σ , α_e 并导出 MIDI 进行听感测试。

9 结语

此文档提供可工程化的底层规范: 参数化的角度映射、折叠策略、五行/阴阳到音色与时域行为的映射, 以及和弦/旋律生成的评分函数。下一步可基于此实现最小原型 (Python + MIDO 或 SuperCollider), 进行主观听觉测试并迭代超参。