Bakatöö

Vootele Rõtov

12. mai 2014. a.

Sisukord

1 Sissejuhatus

Käesoleva bakalaureuse töö on saanud motivatsiooni psühholoogide praktilisest probleemist - kuidas hinnata nende töövaldkonnas tihti kasutatavate valikvastustega testide headust. Tuleb välja, et ühe testide headust kirjeldava karakteristiku - reliaabluse, hindamiseks sobivad vahendid saame klassikalise testiteooria (*Classical Test Theory*) nimelise matemaatilise teooria tulemuste põhjal.
Töö esimeses osas anname vajaliku taustinfo ja probleemipüstituse. Seejärel ehitame üles meile vajamineva osa klassikalisest testiteooriast - defineerime reliaabluse ning rajame vundamendi selle hindamiseks. Järgneval vaatleme erinevaid võimalusie reliaabluse hindamiseks. Lõpetuseks uurime põgusalt ühte võimalikku lähenemist järjestikskaala tõlgendamiseks intervallskaalana, mis kasutab ära eelnevalt uuritud reliaabluse hinnanguid ja sättestab tõlgendamis probleemi optimiseerimisprobleemina.
Tööl on kaks põhilist eesmärki. Esimene nendest on anda eesti keelne ülevaade klassikalisest testiteooria alustest, mida autorile teadaolevalt ei ole käsitletud matemaatilisest aspektist vaadelduna - olemasolevad käsitlused on mõeldud praktiliseks abivahendiks psühholoogile ning seetõttu teistsuguse lähenemisega. Teiseks selle töö eesmärgiks on reliaabluse hindamiseks sobivate vahendite tutvustamine tasemel, millest võiks loodetavasti kasu olla ka teste koostavatele praktikutele.
Lisaks loetavale dokumendile on töö väljundiks ka teek, mis sisaldab funktsioone kõigi töös välja toodud hinnangute leidmiseks testi tulemuste põhjal ning leiab loodetavasti psühholoogide poolt kasutamist.
Autori eesmärgiks on see, et antud tekst oleks lihtsasti järgitav igale keskmisele kolmanda kursuse läbinud matemaatikatudengile - valdkonna spetsiifilised matemaatilised definitsioonid ja tulemused on meeldetuletuseks töö käigus jooksvalt ära toodud.

2 Taustinfo ja probleemipüstitus

Järgnevalt anname vajalikud taustateadmised probleemi mõtestamiseks ning peatüki lõpetuseks püstitame käesoleva töö kesksed probleemid.

2.1 Küsimustik, küsimus ja Likerti skaala

Käesolev uurimus tegeleb küsimustikega (*Likert scale*), milles soovitakse hinnanguid teatud arvule küsimustele (*Likert item*) n pallisel Likerti skaalal [5], kus n jääb enamasi kahe ja kümne vahele. Käsitleme Likerti skaalasid, mis on sümmeetrilised, see tähendab, et positiivsete ja negatiivsete vastuse variantide arv on sama. Näiteks:[1]

Käesoleva bakalaureusetöö ülesehitus on loogiline.

☐ Ei nõustu ☐ Ei nõustu osaliselt ☐ Nii ja naa ☐ Nõustun osaliselt ☑ Nõustun

Joonis 1: Näide väitest, millele palutakse hinnangut Likerti skaalal

2.2 Likerti skaala tõlgendamine intervallskaalana

Likerti skaala tõlgendamisel intervallksaalana on väljakujunenud tava seada valikvastustele vastavusse järjestatud täisarvud, kusjuures mida positiivsem vastuseevariant, seda suurem temale vastavusse seatud arv. Reeglina kasutatakse kas arve alates ühest kuni valikvastuste arvuni või valitakse välja täisarvud nii, et neutraalsele vastusevariandile vastab null.

Käesoleva bakalaureusetöö ülesehitus on loogiline.

-2	-1	0	1	2
↑	↑	↑	↑	↑
☐ Ei nõustu	☐ Ei nõustu osaliselt	☐ Nii ja naa	☑ Nõustun osaliselt	☐ Nõustun
↓	↓	↓	↓	↓
1	2	3	4	5

Joonis 2: Näide kahest levinumast Likerti skaala tõlgendusest invtervallskaalana

Lugejal võib tekkida õigustatud küsimus, kuidas põhjendab autor Likerti skaala käsitlemist intervallskaalana, kui Likerti skaala on olemuseslt järjestikskaala ning

[1]Näited terviklikest küsimustikest on lisades, joonisel 10 ja 11

selle tõlgendamises intervallskaalana on vastuoluline küsimus, näiteks [10]. Siinkohal tõdeme, et Likerti skaala tõlgendamine intervallksaalana on praktikas piisavalt levinud, et selle valdkonna uurimine õigustatud oleks - olenamat selle teoreetilisest põhjendatusest. Siinkohal väärib autori silmis esile toomist kriitikute üks levinumaid argumente - „hea“ ja „väga hea“ keskmine ei ole loomulikul viisil tõlgendatav kui „hea + pool“ ehk pole mingit põhjust eeldada, et kõikide küsimuste omavaheline kaugus on mingil põhjusel võrdne. Autor nõustub selle kriitikaga ning loodab töö neljandas osas pakkuda alternatiivse tõlgendusviisi.

2.3 Testi valiidsus

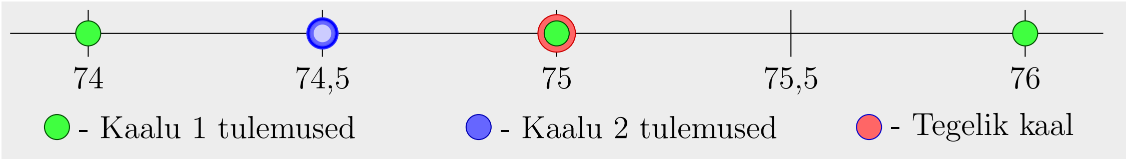
Testi **valiidsus** on testi karakteristik, mis iseloomustab testi võimet mõõta seda, mida ta disainiti mõõtma. Enamikes käsitlustes vaadeltakse valiidsust kui väärtust intervall skaalal nulli ja ühe vahel.
Näitena, kaal mis näitab 75 kilo kaaluva inimese kaaluks 74,5 kilo omab kõrgemat valiidsust kui kaal, mis sama inimese puhul näitab kaaluks 65 kilo.
Arusaadavatel põhjustel on testi valiidsus äärmiselt oluline ning psühholoogiliste testide valiidsuse hindamine on olnud üks psühhomeetria põhilistest uurimisobjektidest. Sellega seoses on palju tööd tehtud ka valiidsuse definitsiooni täpsemaks muutmisega, võrreldes selle paragrahvi alguses antud väga intuitiivse definitsiooniga. Kuna valiidsus on selle töö raames vajalik vaid taustinfona probleemi mõttestamisel tundub antud lihtne definitsioon aga sobivaim.

2.4 Testi reliaablus

Testi **reliaablus** on testi omadust saada sama subjekti erinevatel mõõtmistel sama testiga sama tulemus ehk testi stabiilsus. Nagu valiidsus, on ka reliaablus reeglina määratud intervall skaalal, nulli ja ühe vahel.
Näitena, kaal mis näitab 75 kilo kaaluva inimese kaaluks 74,5 kilo igal kaalumisel omab kõrgemat reliaablust kui kaal, mis näitab juhuslikult kas 74,5 kilo või 75,5 kilo.
Reliaabluse täpsema, matemaatilise definitsioone anname edaspidi.

2.5 Valiidsuse ja reliaabluse suhe

Valiidsuse ja reliaabluse suhestamisel kerkib kiiresti üles loomulik küsimus - kas test võib olla samaaegselt suure valiidsuse ja väikse reliaablusega? Eelpool antud definitsioonid jättavad selle küsimuse lahtiseks - vaatleme järgmist olukorda:

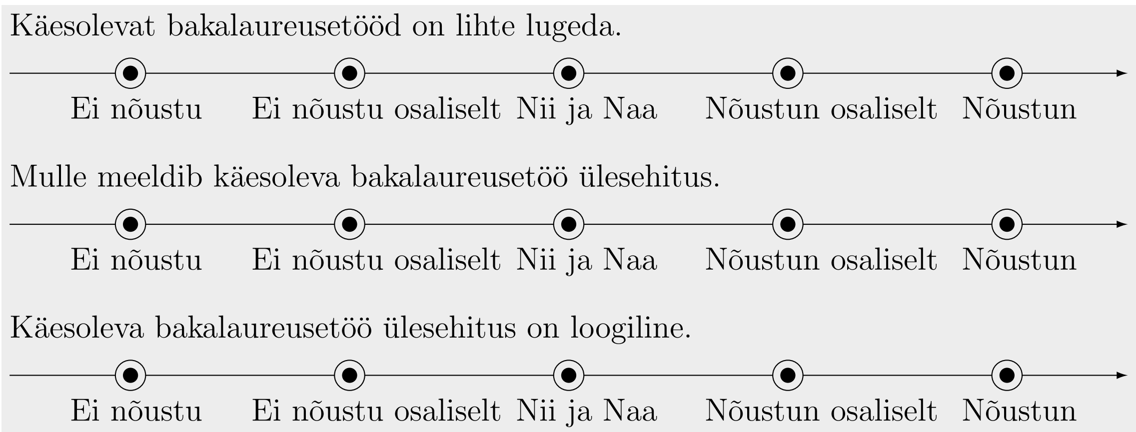


Joonis 3: Kaalumiste tulemused kahe erineva kaaluga kolmel katsel

Kui mõista valiidsust kui testi keskmist tulemust, siis võime väita, et esimene kaal on väiksema reliaabluse aga suurema valiidsusega. Selline valiidsuse mõttestamine aga ei ole küsimustike modeleleerimise korral otstarbekas - katsete kordamine on enamasti keeruline ning väheste mõõtmistulemuste põhjal ei ole võimalik tegeliku väikese reliaablusega testi tulemust välja selgitada.
Seega, meie vaadeldava olukorra - psühholoogiliste testide - korral on mingi valiidsuse taseme jaoks tarvilik tingimus mingi reliaabluse tase.

2.6 Sisemine järjepidevus

Reliaabluse kui termini probleemiks on tema mitmetähenduslikus. Toome siinkohal ära ühe mõiste, mida tihti samuti reliaablusena tuntakse.
Sisemine järjepidavus (*internal consistency* on testi karrakteristik, mis iseloomustab testi erinevate küsimuste vastuste järjepidevust ehk seda, kui hästi on kooskõlas ühist konstruktsiooni hindavad küsimused [8, 177]. Piltlikult väljendudes, olgu meil järgnev küsimustik:



Joonis 4: Küsimustik bakalaureusetöö ülesehituse kohta

Siin on mõõdetavaks konstruktsiooniks käesoleva bakalaureusetöö ülesehitus ning sisemiseks reliaabluseks on vajalik kolmele näites toodud küsimusele antud vastuste kooskõla.

Selle karrakteristiku mõõtmiseks võimalik kasutada sisemise järjepidavuse teste. Segadust suurendab veelgi see, et üks nendest testidest leiab kasutamist ka meie poolt defineeritud reliaabluse hindamisel. Loodame, et nende kahe karakterisitku eristamine aitab lugejal käesolevas töös kergemini orienteeruda.
Märgime, et lisaks toodud kahele definitsioonile on ka teisi reliaabluse definitsioone [1], mis aga selle töö kontekstis ei tohiks segadust tekitada ning mille äratoomist siin ei ole autor pidanud vajalikus.

2.7 Probleemi püstitus

Käesoleva tööga üritame pakkuda lahendust järgnevale praktilisele probleemile - kas on võimalik leida paremat hinnangut küsimustiku reliaablusele kui seda on tihti kasutatav Guttmani λ_3 (rohkem tuntud kui Cronbachi α)? Kasutama sellele probleemile lähenemiseks kahte erinevat viisi. Esiteks uurime, kas on olemas paremaid hinnanguid kui seda on λ_3. Teiseks vaatleme, kas küsimustike vastuste alteratiivne tõlgendamine võimaldab meil saavutada paremaid hinnanguid kasutades praktikutele tutavat hinnangut λ_3.
Kõigepealt on meil vaja aga rangemat lähenemist reliaablusele ning selleks vaatleme reliaablust ühe matemaatilise raamistiku - klassikalise testiteooria - kontekstis.

3 Reliaablus klassikalises testiteoorias

Järgevas võtame aluseks Melvin Novicki klassikalise testiteooria [13] [12] ja selle tõlgenduse Klaas Sijtsma poolt. [14, 109]

3.1 Reliaabluse definitsioon

MEELDETULETUSEKS

Definitsioon. *Elementaarsündmuseks* nimetatakse juhusliku katse võimaliku tulemust.

Definitsioon. *Tõenäosuseks* nimetatakse funktsiooni P, mis igale sündmusele $A \in 2^{\Omega}$, kus Ω on mingi juhusliku katse kõikvõimalikke elementaarsündmuste hulk, seab vastavusse arvu $P(A)$, nii et on täidetud järgmised nõuded:

1. $P(A) \geq 0, \forall A \in 2^{\Omega}$,
2. $P(\Omega) = 1$, $P(\emptyset) = 0$,
3. Kui sündmused $A_1, A_2, ...$ on teineteist välistavad, siis

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P\left(A_i\right)$$

.

Definitsioon. *Diskreetseks juhuslikus suuruseks* nimetatakse funktsiooni $X : \Omega \to \mathbb{R}$, mis võtab kas lõpliku või loenduva arvu erinevaid väärtusi $x_1, x_2, ...(x_n)$.

Olgu meil mingi kogum I testile vastajaid ning küsimustik, milles on k küsimust, kus iga küsimus on l-pallisel Likerti skaalal. Nummerdame küsimused naturaalarvudega 1 kuni k. On loomulik eeldada, et nii vastajate arv, küsimuste arv kui ka Likerti skaala suurus on lõplikud. Me võime vaadelda testi läbiviimist kui juhusliku katset ning kõiki erinevaid võimalikke vastuste kombinatsioone küsimustikule kui elementaarsündmusi, tähistame saadud elementaarsündmuste hulga kui Ω ning elementaarsündmusi kui ω. Eeldame ka tõenäosuste $P_i : 2^{\Omega} \to \mathbb{R}$ olemasolu, mida tõlgendame kui testi tulemuste esinemissagededust vastaja i korral.

Küsimus / ω	I	II	II
A	Nõustun osaliselt	Nii ja naa	Nõustun
B	Ei nõustu osaliselt	Nõustun	Nii ja naa
C	Ei nõustu	Nõustun osaliselt	Nii ja naa

Joonis 5: Näited elementaarsündmustest

Olgu X_i^j hulgal Ω määratud juhuslik suurus, mille võimalike väärtusi vaatleme kui vastaja i poolt küsimusele j antud vastuse arvulist tõlgendust. On selge, et sellise tõlgenduse korral on juhusliku suuruse X_i^j muutumispiirkond lõplik - selle hulga võimsus ei ole suurem kui l ning järelikult on juhuslik suurus X_i^j diskreetne. Defineerime vastaja i testi tulemuse X_i kui

$$X_i = \sum_{j=1}^{k} X_i^j.$$

Paneme tähele, et X_i on samuti diskreetne juhuslik suurus - tõepoolest, kuna tegemist on diskreetsete juhuslike suuruste summaga, siis on ta funktsioon hulgast Ω hulka $\mathbb{R}$. Lisaks, kuna kõikide liidetavate muutumispiirkond on tõkkestatud arvuga l ning liidetavaid on k, siis ei saa funktsiooni muutumispiirkonna võimsus olla suurem kui l^k.

MEELDETULETUSEKS

Definitsioon. Disktreetse juhusliku suuruse X *jaotuseks* nimetatakse paaride komplekti $(x_i, p_i), i = 1, 2, ...,$ kus x_i on juhusliku suuruse võimalik väärtus ning $p_i = P(\{\omega | X(\omega) = x_i, \omega \in \Omega\})$.

Definitsioon. Diskreetse juhusliku suuruse X, mille jaotuseks K on paaride komplekt $k_i = (x_i, p_i), i = 1, 2, ...,$ *keskväärtuseks* nimetatakse arvu

$$\epsilon X = \sum_{\{i | k_i \in K\}} x_i p_i$$

eeldusel, et see rida koondub absoluutselt.

Definitsioon. Juhusliku suuruse X *dispersiooniks* nimetatakse arvu $DX = \epsilon\left[(X - \epsilon X)^2\right]$.

Triviaalse juhu vältimiseks eeldame edaspidi, et juhuslike suuruste X_i dispersioonid on nullist erinevad. Defineerime küsimustiku tegeliku tulemuse vastaja i jaoks kui testi tulemuse keskväärtuse ehk

$$t_i = \epsilon\left[X_i\right].$$[2]

Kuna juhusliku suuruse X_i võimalike väärtuste arv on lõplik on ka tema keskväärtus t_i lõplik.
Tõlgendame vastaja i testi tulemuse ja tegeliku tulemuse vahet mõõtmisveana, tähistame seda E_i. Seega $X_i = t_i + E_i$.

MEELDETULETUSEKS

Lause 3.1. Kui X on diskreetne juhuslik suurus, jaotusega K, kus K on paaride komplekt $k_i = (x_i, p_i), i = 1, 2, ...$ ning c on mingi konstant siis $\epsilon(X + c) = \epsilon(X) + c$

Tõestus.

$$\epsilon(X+c) = \sum_{\{i|k_i \in K\}} (x_i + c)p_i = \sum_{\{i|k_i \in K\}} x_i p_i + \sum_{\{i|k_i \in K\}} c p_i =$$
$$= \sum_{\{i|k_i \in K\}} x_i p_i + c \sum_{\{i|k_i \in K\}} p_i = \sum_{\{i|k_i \in K\}} x_i p_i + c = \epsilon(X) + c$$

□

Lause 3.2. Juhuslikule suurusele konstandi liitmine ei muuda dispersiooni : $D(X + c) = DX$

Tõestus.

$$D(X+c) = \epsilon[X+c-\epsilon(X+c)] \overset{\text{Lause 3.1}}{=} \epsilon[X+c-\epsilon(X)+c] = \epsilon[X-\epsilon(X)] = DX$$

□

Paneme tähele, et eelneva põhjal on vastaja i mõõtmisvea keskväärtus võrdne nulliga. Tõepoolest, kuna tegeliku tulemuse definitsiooni põhjal $\epsilon\left[X_i\right] = t_i$, siis saame mõõtmisvea definitsiooni arvesse võttes

$$t_i = \epsilon\left[X_i\right] = \epsilon\left[t_i + E_i\right] \overset{\text{Lause 3.1}}{=} t_i + \epsilon\left[E_i\right] \implies \epsilon\left[E_i\right] = 0.$$

Lisaks on lihtne märgata, et $D\left[X_i\right] = D\left[E_i\right]$, sest

$$D\left[X_i\right] = D\left[E_i + t_i\right] \overset{\text{Lause 3.2}}{=} D\left[E_i\right].$$

[2] Tähistame keskväärtuse tähega ϵ kuna tavapärane tähistus E leiab antud käsitluses teistsuguse rolli.

Eelnevates definitsioonides keskendusime testi tulemuste mõtestamisele fikseeritud vastaja korral. Kuna reeglina mõtestatakse teste praktikas mingi vastajate kogumi raames, siis keskendume ka meie edaspidi sellele.
Vaatleme elementaarsündmustena hulga $I \times \Omega$ elemente ning eeldame, et eksisteerib tõenäosus

$$P_p : 2^{I \times \Omega} \to \mathbb{R},$$

kus funktsiooni P_p tõlgendame kui isiku $i \in I$ ja testi tulemuse $\omega \in \Omega$ koos esinemis sagedust.
Paneme tähele, et sellel elemntaarsündmuste hulgal võime määrata diskreetse juhusliku suuruse T, nii et

$$T\left((i, \omega)\right) = t_i, i \in I.$$

Seda juhuliku suurust tõlgendame kui küsimustiku tegelikku tulemust. Defineerime testi vaadeldava tulemuse kui diskreetse juhusliku suuruse X, nii et

$$X\left(i, \omega)\right) = X_i(\omega)$$

ja testi vea kui diskreetse juhusliku suuruse E, nii et

$$E\left((i, \omega)\right) = E_i(\omega).$$

Paneme tähele, et kehtib $X = E + T$, tõepoolest olgu meil suvaline paar $(i, \omega) \in I \times \Omega$, siis

$$X\left((i, \omega)\right) = X_i(\omega) \stackrel{def}{=} t_i + E_i(\omega) = T\left((i, \omega)\right) + E\left((i, \omega)\right).$$

Eeldame edaspidises, et X ei ole konstante juhuslik suurus - kui X on konstante, siis .

MEELDETULETUSEKS

Definitsioon. Juhusliku suuruste X ja Y *kovariatsiooniks* nimetatakse suurust

$$cov(X, Y) = \epsilon\left[(X - \epsilon X)(Y - \epsilon Y)\right].$$

Definitsioon. Juhusliku suuruste X ja Y *korrelatsioonikordajaks* nimetatakse suurust

$$\rho(X, Y) = \frac{cov(X, Y)}{\sqrt{DX}\sqrt{DY}}$$

Esitame nüüd meie poolt üles ehitatud mudeli omaduse, mis osutub väga kasulikus. Olgu meil kaks suvalist küsimustiku, mille vaadeldavad tulemused on vastavalt $X = T + E$ ja $X' = T' + E'$, siis kehtib

$$cov(T, E') = 0, \tag{3.3}$$

ehk mingi küsimustiku tegeliku tulemuse ja mingi küsimustiku mõõtmisvea vahel ei ole korrelatsiooni. See omadus muudab mudeli rakendamise palju lihtsamaks, kuna me ei pea eeldame, et meie poolt koostatud küsimustikul on selline omadus. Tõestus sellele omadusele kahjuks käesoleva töö raamidesse ei mahu, rangest tõestusest huvitatutele soovitame tutvuda Donald Zimmermani mudeli ülesehitusega [**?**].
Paneme tähele, et kuna me ei seadunud mingeid kitsendusi testide X ja X' jaoks, siis ka $cov(T, E) = 0$.
Küll aga peame me tegema järgneva eelduse - olgu meil kaks erinevat küsimustiku, mille mõõtmisvead on vastavalt E ja E' siis

$$cov(E, E') = 0. \tag{3.4}$$

Tehtud eeldus tähendab seda, et mõõtmisvead ei tohi olla süstemaatilised. Näiteks, jagades küsimustiku pooleks ning vaadeldes mõlemat osa kui eraldi küsimustiku, siis teades esimese mõõtmisviga ei tohiks see meile midagi öelda teise osa mõõtmisvea kohta. Paneme tähele, et see eeldus on siimaani tehtutest praktikas kõige raskemini tagatav ning on potensiaalne ohukoht testiteooria kasutamisel mingi küsimustiku mõtestamisel.

MEELDETULETUSEKS

Lause 3.5. Juhuslikke suuruste X ja Y puhul kehtib

$$D(X+Y) = D(X) + D(Y) + 2cov(X, Y)$$

Tõestus.

$$\begin{aligned} D(X+Y) &\overset{def}{=} \epsilon[X+Y-\epsilon(X+Y)]^2 \overset{\epsilon \text{ lin.}}{=} \epsilon[X - \epsilon X + Y + \epsilon Y]^2 = \\ &= \epsilon(X-\epsilon X)^2 + 2\epsilon(X-\epsilon X)(Y-\epsilon Y) + \epsilon(Y-\epsilon Y)^2 \overset{\text{cov def}}{=} \\ &= D(X) + D(Y) + 2cov(X, Y) \end{aligned}$$

□

Järgnevalt tutvume paralleelse küsimustiku mõistega. Kaks küsimustiku, mille vaadeldavad tulemused üle kõigi vastajate kogumi I on $X = T + E$ ja $X' = T' + E'$ ning mille vaadeldavad tulemused vastaja $i \in I$ jaoks on $X_i = t_i + E_i$ ja $X'_i = t'_i + E'_i$, on paralleelsed parajasti siis, kui kehtivad järgmised väited :

1. $t_i = t'_i \ \forall i \in I$,
2. $D[E] = D[E']$.

Eelnevast järeldub lihtsalt, et

$$T = T'. \tag{3.6}$$

Tõepoolest, olgu (i, ω) suvaline paar hulgast $I \times \Omega$, siis kehtib

$$T((i, \omega) \overset{def}{=} t_i = t'_i = T'((i, \omega)).$$

Paneme tähele, et kahe paraleelse küsimustiku X ja X' korral kehtib

$$D[X] = D[X'], \tag{3.7}$$

kuna

$$D[X] = D[T + E] \overset{\text{Lause 3.5}}{=} D[T] + D[E] + 2cov(T, E) \overset{(3.3)}{=} D[T] + D[E] =$$
$$= D[T'] + D[E'] = D[T'] + D[E'] + 2cov(T', E') = D[T' + E'] = D[X'].$$

MEELDETULETUSEKS

Lause 3.8. Olgu meil juhuslikud suurused X, Y ja Z. Siis

$$cov(X + Y, Z) = cov(X, Z) + cov(Y, Z).$$

Tõestus.

$$\begin{aligned} cov(X + Y, Z) &\overset{def}{=} \epsilon\left[(X + Y - \epsilon\left[X + Y\right])(Z - \epsilon\left[Z\right])\right] \overset{\epsilon \text{ lin.}}{=} \\ &= \epsilon\left[(X + Y - \epsilon\left[X\right] + \epsilon\left[Y\right])(Z - \epsilon\left[Z\right])\right] = \\ &= \epsilon\left[\left((X - \epsilon\left[X\right]) + (Y - \epsilon\left[Y\right])\right)(Z - \epsilon\left[Z\right])\right] = \\ &= \epsilon[(X - \epsilon\left[X\right])(Z - \epsilon\left[Z\right]) + (Y - \epsilon\left[Y\right])(Z - \epsilon\left[Z\right])] = \\ &= \epsilon\left[(X - \epsilon\left[X\right])(Z - \epsilon\left[Z\right])\right] + \epsilon\left[(Y - \epsilon\left[Y\right])(Z - \epsilon\left[Z\right])\right] + \\ &= cov(X, Z) + cov(Y, Z) \end{aligned}$$

□

Paralleelse küsimustiku abil saame klassikalise testiteooria raames defineerida reliaabluse. Olgu meil kaks paralleelset küsimustiku, mille vaadeldavad tulemused üle vastajate kogumi I on vastavalt $X = T + E$ ja $X' = T' + E'$. Testi, mille vaadeldav tulemus on X, reliaablus üle vastajate kogumi I on võrdne X ja X' korrelatsioonikordajaga, mida tähistame $\rho_{XX'}$, formaalselt

$$\rho_{XX'} = corr\left(X, X'\right).$$

Eelneva põhjal saame näidata, et kehtib

$$\begin{aligned}\rho_{XX'} &\overset{def}{=} \frac{cov(X,X')}{\sqrt{D\,[X]\,D\,[X']}} \overset{(3.7)}{=} \frac{cov(X,X')}{\sqrt{D\,[X]\,D\,[X]}} = \frac{cov(T+E,T'+E')}{D\,[X]} \overset{\text{Lause 3.8}}{=} \\ &= \frac{cov(T,T')+cov(T,E')+cov(E,T')+cov(E,E')}{D\,[X]} \overset{(3.3)}{=} \\ &= \frac{cov(T,T')+cov(E,E')}{D\,[X]} \overset{(3.4)}{=} \frac{cov(T,T')}{D\,[X]} \overset{(3.6)}{=} \frac{cov(T,T)}{D\,[X]} \overset{def}{=} \\ &= \frac{\epsilon\,[(X-\epsilon\,[X])\,(X-\epsilon\,[X])]}{D\,[X]} \overset{def}{=} \frac{D\,[T]}{D\,[X]}.\end{aligned} \tag{3.9}$$

Samuti märgime, et kuna $T = X - E$, siis kehtib

$$\rho_{XX'} = \frac{D\,[T]}{D\,[X]} = \frac{D\,[X-E]}{D\,[X]} = \frac{D\,[X]-D\,[E]}{D\,[X]} = 1 - \frac{D\,[E]}{D\,[X]}. \tag{3.10}$$

Paneme tähele, kuna $D[X] = D[T] + D[E]$, siis eelneva põhjal $\rho_{XX'} \in [0,1]$.
Eelneva põhjal on selge, et väide "testi reliaablus on suurem" on samaväärne järgmise kolme väitega:

1. testi korrellatsioon paralleelse testiga on suurem,
2. testi tegeliku tulemuse dispersioon on suurem võrreldes testi vaadeldava tulemuse dispersiooniga,
3. testi mõõtmisvea dispersioon on väiksem võrreldes testi vaadeldava tulemuse dispersiooniga.

Märgime, et klassikalise testiteooria raames defineeritud reliaablus sobib kokku eelmises peatükkis antud mitteformaalse definitsiooniga, kuna küsimustik on iseendaga paralleelne testiks võib lugeda ka sama testi uuesti läbiviimise sama vastajate kogumi peal. Paneme tähele, et tegemist on suhteliselt nõrku eeldusi vajava teooriaga, kõigi raskem on praktikas süstemaatiliste vigade puudumist.
Kuna testi tegelik tulemus on suurus, mida me prakikas ei tea ning ka paralleelsete testide läbiviimine ei ole tihti võimalik on kasutusele on üritatud on võimalus testi reliaablust hinnata meie jaoks oluline. Järgnevalt vaatleme, kuidas seda teha.

3.2 Vajalikud taustteadimesd reliaabluse hindamiseks

Järgnev käsitlus tugineb Jacksoni ja Anguwamba 1977. aasta artiklile. [9] Olgu meil vastajate populatsioon I, üle mille me vaatleme küsimustiku, milles on k küsimust. Vaatleme seda küsimustiku klassikalise testiteooria raames ning olgu X küsimustiku vaadeldav tulemus, T küsimustiku tegelik tulemus ning E

küsimustiku mõõtmisviga. Vaatleme iga küsimust kui ühest küsimusest koosnevat alamküsimustiku ja tähistama fikseeritud küsimuse $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$ vaadeltavat tulemust kui X_i, tegeliku tulemust kui T_i ning mõõtmisviga E_i. Seega $X = \sum_{i=0}^{k} X_i$, $T = \sum_{i=0}^{k} T_i$ ja $E = \sum_{i=0}^{k} E_i$. Paneme tähele, et kui eelnevas peatükkis tähistasime alaindeksiga küsimusele vastajat siis edaspidi tähistama sellega kindlat küsimust. Vaatleme testi küsimuste tulemuste ja mõõtmisvea vektoreid: $(X_1, X_2, X_3, \ldots, X_n)$, $(T_1, T_2, T_3, \ldots, T_n)$, $(E_1, E_2, E_3, \ldots, E_n)$. Tähistame nende vektorite kovariatsioonimaatriksid[3], vastavalt $\Sigma_X, \Sigma_T, \Sigma_E$. Seega,

$$\Sigma_X = \begin{pmatrix} cov\,(X_1, X_1) & cov\,(X_1, X_2) & cov\,(X_1, X_3) & \cdots & cov\,(X_1, X_k) \\ cov\,(X_2, X_1) & cov\,(X_2, X_2) & cov\,(X_2, X_3) & \cdots & cov\,(X_2, X_n) \\ cov\,(X_3, X_1) & cov\,(X_3, X_2) & cov\,(X_3, X_3) & \cdots & cov\,(X_n, X_n) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ cov\,(X_n, X_1) & cov\,(X_n, X_2) & cov\,(X_n, X_3) & \cdots & cov\,(X_n, X_n) \end{pmatrix}.$$

Eelnevalt läbiviidud arutelu (vt. (3.9)) põhjal teame, et $cov(X_i, X_j) = cov(T_i, T_j) + cov(E_j, E_j)$. Seega,

$$\Sigma_X = \Sigma_T + \Sigma_E. \tag{3.11}$$

Lisaks kehtib eelduse (3.4) põhjal saame, et et juhul kui $i \neq j$, siis $cov\,(E_i, E_j) = 0$. Sellest tulenevalt kehtib

$$\Sigma_E = \begin{pmatrix} cov\,(E_1, E_1) & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & cov\,(E_2, E_2) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & cov\,(E_3, E_3) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & cov\,(E_n, E_n) \end{pmatrix}. \tag{3.12}$$

Tähistame edaspidi maatriksi Σ_X elemente x_{ij}, maatriksi Σ_T elemente t_{ij} ning maatriksi Σ_E peadiagonaali elemente θ_i. Seega, kui $i \neq j$, siis $t_{ij} = x_{ij}$ ning $t_{ii} = x_{ii} - \theta_i$.

Tuletame meelde, et eelmises peatükkis veendusime (3.10), et testi reliaablus võrdub avaldisega $1 - \frac{D[E]}{D[X]}$.

Veendume, et juhuslike suuruste summa summa dispersioon võrdub liidetavate kovariatsioonimaatriksi elementide summaga ehk kui $X = \sum_{i=1}^{k}$ ja Σ_X on vektori

[3]Praktikas ei ole kovariatsioonimaatriksid meil teada, kuid meil on võimalik valimi põhjal saada hinnang vaadeldavate tulemuste kovariatsioonimaatriksile

$(X_1, X_2, \ldots, X_K)$ kovariatsioonimaatriks siis

$$D[X] = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{k} x_{ij}. \tag{3.13}$$

Eelnevas veendumiseks paneme tähele, et

$$\begin{gathered} D[X] = D[X_1 + X_2 + \ldots + X_k] \overset{\text{Lause 3.5}}{=} \\ = D[X_1] + D[X_2 + X_3 + \ldots + X_k] + 2cov(X_1, X_2 + X_3 \ldots + X_k) \overset{\text{Lause 3.8}}{=} \\ = D[X_1] + D[X_2 + X_3 + \ldots + X_k] + \\ +2[cov(X_1, X_2) + cov(X_1, X_3) + \ldots + cov(X_1, X_k)]. \end{gathered}$$

Näeme, et tegemist on rekkurentse võrrandiga. Arvestades, et $cov(X, X) = D[X]$ (vt.(3.9)), näeme, et igale liidetavale eelnevas summas vastab mingite kovariatsioonimaatriksite elementide summa, kusjuures kõik kovariatsioonimaatriksi elemendid kuuluvad täpselt ühte nendest summadest. Kovariatsiooni maatriksi jagunemist illustreerib järgnev tabel, kus sinisega on tähistatud $D[X_1]$, punasega liidetavad, mille summa on võrdne arvuga $2[cov(X_1, X_2) + cov(X_1, X_3) + \ldots + cov(X_1, X_k)]$ ja rohelisega liikmed, mille summast moodustub $D[X_1 + X_2 + \ldots + X_k]$. Siinkohal meenutame, et kovariatsioon on sümmeetriline ning seega $cov(X_i, X_j) = cov(X_j, X_i)$.

$cov(X_1, X_1)$	$cov(X_1, X_2)$	$cov(X_1, X_3)$	$\ldots$	$cov(X_1, X_k)$
$cov(X_2, X_1)$	$cov(X_2, X_2)$	$cov(X_2, X_3)$	$\ldots$	$cov(X_1, X_k)$
$cov(X_3, X_1)$	$cov(X_3, X_2)$	$cov(X_3, X_3)$	$\ldots$	$cov(X_3, X_k)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
$cov(X_k, X_1)$	$cov(X_k, X_2)$	$cov(X_k, X_3)$	$\ldots$	$cov(X_k, X_k)$

Lisaks on sellel rekurentses võrandil on lihtne baasjuht, selleks on olukord, kus summa koosneb ainult ühest liidetavast.
Arvestades maatriksi 3.12 ehitust, saame võrduse

$$1 - \frac{D\left[E\right]}{D\left[X\right]} = 1 - \frac{\sum_i \theta_i}{\sum_i \sum_j x_{ij}}. \tag{3.14}$$

MEELDETULETUSEKS

Definitsioon. Maatriks $C \in Mat_k(\mathbb{R})$ on *mittenegatiivselt määratud* kui iga maatriksi $v \in Mat_{k,1}(\mathbb{R})$ korral $v^T C v \geq 0$.

Veendume järgnevalt, et iga kovariatsioonimaatriks ning järelikult ka Σ_X, Σ_T ja Σ_E on mittenegatiivselt määratud.

MEELDETULETUSEKS

Lause 3.15. Kui X ja Y on juhuslikud suurused ja $\alpha \in \mathbb{R}$, siis

$$cov(X, \alpha Y) = \alpha cov(X, Y)$$

Tõestus.

$$cov(X, \alpha Y) = \epsilon\left[(X - \epsilon\left[X\right])(\alpha Y - \epsilon\left[\alpha Y\right])\right] \overset{\epsilon \text{ lin.}}{=}$$
$$= \epsilon\left[(X - \epsilon\left[X\right])(\alpha Y - \alpha\epsilon\left[Y\right])\right] = \epsilon\left[\alpha\,(X - \epsilon\left[X\right])(Y - \epsilon\left[Y\right])\right] =$$
$$= \alpha\epsilon\left[(X - \epsilon\left[X\right])(Y - \epsilon\left[Y\right])\right] = \alpha cov(X, Y)$$

□

Olgu meil suvaliste juhuslike suuruste vektor $X_1, X_2, \ldots, X_n$, kun $n \in \mathbb{N}$ ja olgu Σ_X selle vektori kovariatsioonimaatriks. Olgu meil suvaline k-vektor $v = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$. Konstrueerime uue juhuslike suuruste vektori $(X'_1, X'_2, \ldots, X'_n)$, kusjuures $X'_i = v_i X_i$ ning olgu Σ'_X selle vektori kovariatsioonimaatriks. Vaatleme juhusliku suurust $X' = \sum_{i=1}^{n} X'_i$. Kuna eelneva põhjal $D[X'] = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \Sigma'_{Xij}$ ja definitsiooni põhjal $D[X'] \geq 0$, siis $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \Sigma'_{Xij} \geq 0$. Kuna Σ'_X on kovariatsioonimaatriks siis,

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \Sigma'_{Xij} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} cov(v_i X_i, v_j X_j) \overset{\text{Lause 3.15}}{=} \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} v_i v_j cov(X_i, X_j). \quad (3.16)$$

Paneme tähele, et

$$v^T \Sigma_X v =$$
$$= \begin{pmatrix} v_1 cov(X_1, X_1) + v_2 cov(X_1, X_2) + \ldots v_n cov(X_1, X_n) \\ v_1 cov(X_2, X_1) + v_2 cov(X_2, X_2) + \ldots v_n cov(X_2, X_n) \\ \vdots \\ v_1 cov(X_k, X_1) + v_2 cov(X_k, X_2) + \ldots v_n cov(X_n, X_n) \end{pmatrix} v =$$

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} v_i v_j cov(X_i, X_j) \overset{(3.16)}{=} \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \Sigma'_{Xij} = D[X']$$

Seega $v^T \Sigma_X v \geq 0$ ning kuna v oli valitud suvaliselt siis on Σ_X mittenegatiivselt määratud. Kuna n ja $X_1, X_2, \ldots X_n$ olid valitud suvaliselt, siis on iga kovariatsioonimaatriks mittenegatiivselt määratud.
Sellega oleme andund reliaablusele matemaatilise definitsiooni ning mõtestanud lahti vajaminevad taustteadmised reliaabluse hindamiseks. Järgnevalt tuletame mõned alumised tõkked reliaablusele.

4 Alumised tõkked reliaablusele

Järgnevalt vaatleme viite alumist tõket reliaablusele ning üritame pakkuda lahendust töö alguses püstitatud probleemile. Vaadeltavatest alumistest tõketest neli - $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$; pakkus aastal 1945 välja Louis Guttman [7]. Viienda vaadeldava tõkke pakkusid välja Jackson ja Anguwamba oma 1977 aasta artiklis [9]. Kõik tõkked tuletame tuginedes Jacksoni ja Anguwamba artiklile.
Olgu meil vastajate kogum I, üle mille me vaatleme k küsimusest koosnev küsimustik, mille vaadeldav tulemus on X, tegelik tulemus on T ja mõõtmisviga üle on E. Nummerdame küsimused arvudega 1 kuni k. Vaatleme igat küsimust eraldi alamküsimustikuna, ning olgu X_i küsimuse i vaadeldav tulemus, T_i küsimuse i tegelik tulemus ja E_i küsimuse i mõõtmisviga. Analoogiliselt eelmise peatükiga tähistame vektorite $(X_1, X_2, \ldots X_k)$, $(T_1, T_2, \ldots, T_k)$ ja $(E_1, E_2, \ldots, E_k)$ kovariatsioonimaatrikseid kui $\Sigma_X, \Sigma_T, \Sigma_E \in Mat_k(\mathbb{R})$. Nagu eelmises peatükkis, tähistame ka siin maatriksi Σ_X elemente kui x_{ij}, maatriksi Σ_T elemente kui t_{ij} ning maatriksi Σ_E peadiagonaali elemente θ_i. Edaspidi vaatleme selles peatükkis küsimustiku, mille vaadeldav tulemus on X, reliaabluse alumisi tõkkeid.

4.1 Alumine tõke λ_1

Vaatleme kovariatsioonimaatriksit Σ_T. Eeldame vastuväiteliselt, et maatriksi Σ_T peadiagonaalil leidub element, mis on negatiivne. Olgu selleks elemendiiks t_{ii}. Olgu v vektor, millel on k elementi, kusjuures

$$v_j = \begin{cases} 1, j = 1 \\ 0, j \neq 1 \end{cases} .$$

Paneme tähele, et nüüd $v^T \Sigma_T v = t_{ii} < 0$. Tõepoolest,

$$v^T \Sigma_T v = \begin{pmatrix} t_{i1} & t_{i2} & \ldots & t_{ik} \end{pmatrix} v = t_{ii}.$$

Seega ei ole maatriks enam positiivselt määratud, mis on eelmises peatükkis läbiviidud arutelu põhjal vastuolus sellega, et Σ_T on kovariatsioonimaatriks .
Seega iga i peab kehtima $t_{ii} \geq 0$ ning kuna eelmise peatüki põhjal $\Sigma_X = \Sigma_T + \Sigma_E$, siis peab kehtima $\theta_i < x_{ii}$ iga $i, 1 \leq i \leq k$ korral.
Seega ka $\sum\limits_{i=1}^{k} \theta_i \leq \sum\limits_{i=1}^{k} x_{ii}$. Võttes arvesse võrdust (3.14), oleme saanud küsimustiku, mille vaadeldav tulemus on X, reliaablusele alumise tõkke, mida tähistame kui λ_1, kus

$$\lambda_1 = 1 - \frac{\sum\limits_{i=1}^{k} x_{ii}}{\sum\limits_{i=1}^{k}\sum\limits_{j=1}^{k} x_{ij}} \leq 1 - \frac{\sum\limits_{i=1}^{k} \theta_i}{\sum\limits_{i=1}^{k}\sum\limits_{j=1}^{k} x_{ij}} = 1 - \frac{D[E]}{D[X]}. \tag{4.1}$$

4.2 Alumine tõke λ_2

Enne järgmise alumise tõke tuletamist, veendume et kehtivad kaks abitulemust. Olgu meil mitte-negatiivselt määratud sümmeetriline maatriks $C, C \in Mat_n(\mathbb{R})$. Näitame, et sellisel juhul kehtib väide, et iga i, j korral

$$c_{ii}c_{jj} \geq c_{ij}^2.$$

Valime suvaliselt i ja j, nii et $i \neq j, 1 \leq i, j \leq n$ ning $\alpha \in \mathbb{R}$. Olgu meil n-vektor v, kus

$$v_k = \begin{cases} 1, k = i \\ \alpha, k = j \\ 0, k \notin \{i, j\} \end{cases}.$$

Kuna eelduste kohaselt on C mitte-negatiivlet määratud, siis peab kehtima

$$0 \leq v^T C v = \begin{pmatrix} \mathbf{0}^T & 1 & \mathbf{0}'^T & \alpha & \mathbf{0}''^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ 1 \\ \mathbf{0}' \\ \alpha \\ \mathbf{0}'' \end{pmatrix}, \tag{4.2}$$

kus $\mathbf{0}, \mathbf{0}', \mathbf{0}''$ on null vektorid pikkustega vastavalt $i-1, j-i-1, n-j$.
Arvutame avaldise 4.2 väärtuse:

$$v^TCv = \begin{pmatrix}\mathbf{0}^T & 1 & \mathbf{0}'^T & \alpha & \mathbf{0}''^T\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_{11} & \cdots & c_{1n}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ c_{n1} & \cdots & c_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{0}\\ 1\\ \mathbf{0}'\\ \alpha\\ \mathbf{0}''\end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix}\mathbf{0}^T & 1 & \mathbf{0}'^T & \alpha & \mathbf{0}''^T\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_{1i}+\alpha c_{1j}\\ \vdots\\ a_{ni}+\alpha c_{nj}\end{pmatrix} = c_{ii}+\alpha c_{ij}+\alpha c_{ji}+\alpha^2 c_{jj} = c_{ii}+2\alpha c_{ij}+\alpha^2 c_{jj}.$$

Seega saame, et $0 \leq c_{ii} + 2\alpha c_i j + c_{jj}$. See, et saadud ruutvõrratus on kehtib on samaväärne sellega, et selle ruutvõrrandi diskriminant ei ole nullist suurem. Seega,

$$c_{ij}^2 - c_i c_j \leq 0,$$

milles me soovisimegi veenduda. Eelneva arutelu idee pärineb Ivar Tammeraidi õppikust. [17].
Olgu meil mingid arvud $y_i, 1 \leq i \leq n$. Paneme tähele, et siis kehtib järgvev võrdus

$$\left(\sum_{i=1}^n y_i\right)^2 = \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n y_i y_j = \sum_{i=1}^n y_i^2 + \sum_{i=1}^n\left(\sum_{j=1}^{i-1} y_i y_j + \sum_{m=i+1}^n y_i y_m\right).$$

Järelikult kehtib ka

$$2\left(n-1\right)\left(\sum_{i=1}^n y_i\right)^2 = 2\left(n-1\right)\sum_{i=1}^n y_i^2 + 2\left(n-1\right)\sum_{i=1}^n\left(\sum_{j=1}^{i-1} y_i y_j + \sum_{m=i+1}^n y_i y_m\right).$$

Liidetavad teistmoodi grupeerides saame, et

$$2\left(n-1\right)\sum_{i=1}^n y_i^2 + 2\left(n-1\right)\sum_{i=1}^n\left(\sum_{j=1}^{i-1} y_i y_j + \sum_{m=i+1}^n y_i y_m\right) =$$
$$= \left(y_1^2 - 2y_1y_2 + y_2^2\right) + \left(y_1^2 - 2y_1y_3 + y_3^2\right) + \cdots + \left(y_1^2 - 2y_1y_n + y_n^2\right) +$$
$$+ \left(y_2^2 - 2y_2y_1 + y_1^2\right) + + \left(y_2^2 - 2y_2y_3 + y_3^2\right) + \cdots + \left(y_2^2 - 2y_2y_{nn} + y_n^2\right) +$$
$$+ \cdots +$$
$$+ \left(y_n^2 - 2y_ny_1 + y_1^2\right) + \left(y_n^2 - 2y_ny_1 + y_{11}^2\right) + \cdots + \left(y_n^2 - 2y_ny_{n-1} + y_{n-1}^2\right) +$$
$$+2n\sum_{i=1}^n\left(\sum_{j=1}^{i-1} y_i y_j + \sum_{m=i+1}^n y_i y_m\right) =$$
$$= \sum_{i=1}^n\left(\sum_{j=1}^{i-1}(y_i-y_j)^2 + \sum_{m=i+1}^n (y_i-y_m)^2\right) + 2n\sum_{i=1}^n\left(\sum_{j=1}^{i-1} y_i y_j + \sum_{m=i+1}^n y_i y_m\right)$$

Vaatleme jällegi kovariatsiooni maatriksit Σ_E. Märkame, et kuna $x_{ii} = \theta_i + t_{ii}$ iga $1 \leq i \leq k$, siis kehtib järgnev:

$$\sum_{i=1}^{k} \theta_i = \sum_{i=1}^{k} x_{ii} - \sum_{i=1}^{k} t_{ii}$$

.
Märgime, et kuna kovariatsioon on definitsioon põhjal sümmeetriline siis on ka vektori $(Y_1, Y_2, \ldots, Y_n)$ kovariatsioonimaatriks Σ_Y sümmeetriline. Tõepoolest, iga $1 \leq i, j \leq n$ korral,

$$\Sigma_{Y\,ij} = cov(Y_i, Y_j) = cov(Y_j, Y_i) = \Sigma_{Y\,ji}.$$

Eelnevalt käsitletud algebralise samasuse ning kovariatsioonimaatriksite mitte-negatiivselt määratuse ja sümmetrilisuse põhjal kehtib

$$\sum_{i=1}^{k} t_{ii} = \sqrt{\frac{\sum\limits_{i=1}^{k}\left(\sum\limits_{j=1}^{i-1}(t_{ii} - t_{jj})^2 + \sum\limits_{m=i+1}^{k}(t_{ii} - t_{mm})^2\right) + 2k\sum\limits_{i=1}^{k}\left(\sum\limits_{j=1}^{i-1} t_{ii}t_{jj} + \sum\limits_{m=i+1}^{k} t_{ii}t_{mm}\right)}{2\,(k-1)}} \geq$$

$$\geq \sqrt{\frac{k\sum\limits_{i=1}^{k}\left(\sum\limits_{j=1}^{i-1} t_{ii}t_{jj} + \sum\limits_{m=i+1}^{k} t_{ii}t_{mm}\right)}{(k-1)}}$$

Arvestades, et kovariatsioonimaatriks on mitte-negatiivselt määratud ning seda, et kui $i \neq j$ siis $t_{ij} = x_{ij}$, saame eelnevalt tõestatud abitulemuse põhjal väita, et

$$\sum_{i=1}^{k} t_{ii} \geq \sqrt{\frac{k\sum\limits_{i=1}^{k}\left(\sum\limits_{j=1}^{i-1} t_{ii}t_{jj} + \sum\limits_{m=i+1}^{k} t_{ii}t_{mm}\right)}{(k-1)}} \geq \sqrt{\frac{k\sum\limits_{i=1}^{k}\left(\sum\limits_{j=1}^{i-1} x_{ij}^2 + \sum\limits_{m=i+1}^{k} x_{im}^2\right)}{(k-1)}}$$

Selle taustal saame defineerida alumise tõkke reliaablusele, mida tähistame λ_2:

$$\lambda_2 = 1 - \frac{\sum\limits_{i=1}^{k} x_{ii} - \sqrt{\frac{k\sum\limits_{i=1}^{k}\left(\sum\limits_{j=1}^{i-1} x_{ij}^2 + \sum\limits_{m=i+1}^{k} x_{im}^2\right)}{(k-1)}}}{\sum\limits_{i=1}^{k}\sum\limits_{j=1}^{k} x_{ij}} \leq 1 - \frac{\sum\limits_{i=1}^{k} x_{ii} - \sum\limits_{i=1}^{k} t_{ii}}{\sum\limits_{i=1}^{k}\sum\limits_{j=1}^{k} x_{ij}} = 1 - \frac{\sum\limits_{i=1}^{k} \theta_i}{\sum\limits_{i=1}^{k}\sum\limits_{j=1}^{k} x_{ij}} = 1 - \frac{D\,[E]}{D\,[X]}.$$

Paneme tähele, et

$$\lambda_2 = \lambda_1 + \frac{\sqrt{\frac{k\sum_{i=1}^{k}\left(\sum_{j=1}^{i-1}x_{ij}^2+\sum_{m=i+1}^{k}x_{im}^2\right)}{(k-1)}}}{\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k}x_{ij}}$$

ning seega $\lambda_1 \leq \lambda_2$.

4.3 Alumine tõke $\lambda 3$

Vaatleme jällegi kovariatsioonimaatriksit Σ_T. Olgu meil arvud i, j, nii et $1 \leq i, j \leq k$ ning olgu meil k-vektor v, mille elment kohal i on 1 ja element kohal $1 \leq j \leq k, j \neq i$ on -1. Kuna kovariatsioonimaatriks peab olema mittenegatiivselt määratud siis peab kehtima

$$0 \leq v^T \Sigma_T v = v^T \begin{pmatrix} t_{1i} - t_{1j} \\ t_{2i} - t_{2j} \\ \vdots \\ t_{ki} - tkj \end{pmatrix} = t_{ii} + t_{jj} - 2t_{ij},$$

võttes arvesse seda, et kui $i \neq j$, siis $x_{ij} = t_{ij}$ saame, et $t_{ii} + t_{jj} \geq 2x_{ij}$.
Teame, et võimalusi valida i ja j nii, et $i \neq j$ on $k\,(k-1)$. Summeerides kõikide võimalike i ja j valikul saadud võrratused saame, et

$$2\,(k-1)\sum_{i=1}^{k} t_{ii} \geq 2\sum_{i=1}^{k}\left(\sum_{j=1}^{i-1} x_{ij} + \sum_{m=i+1}^{k} x_{im}\right),$$

mis on samaväärne sellega, et

$$\sum_{i=1}^{k} t_{ii} \geq \frac{1}{k-1}\sum_{i=1}^{k}\left(\sum_{j=1}^{i-1} x_{ij} + \sum_{m=i+1}^{k} x_{im}\right).$$

Eelneva põhjal olema oleme saanud järgmise alumise tõkke reliaablusele -

$$\lambda_3 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^{k} x_{ii} - \frac{1}{k-1}\sum_{i=1}^{k}\left(\sum_{j=1}^{i-1} x_{ij} + \sum_{m=i+1}^{k} x_{im}\right)}{\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k} x_{ij}} \leq 1 - \frac{\sum_{i=1}^{k} x_{ii} - \sum_{i=1}^{k} t_{ii}}{\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k} x_{ij}} = 1 - \frac{\sum_{i=1}^{k}\theta_i}{\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k} x_{ij}} = 1 - \frac{D\,[E]}{D\,[X]}.$$

Tõkke teisendamisel saame, et

$$\lambda_3 = 1 - \frac{\sum\limits_{i=1}^{k} x_{ii} - \frac{1}{k-1} \sum\limits_{i=1}^{k} \left(\sum\limits_{j=1}^{i-1} x_{ij} + \sum\limits_{m=i+1}^{k} x_{im} \right)}{\sum\limits_{i=1}^{k} \sum\limits_{j=1}^{k} x_{ij}} =$$

$$= \frac{\sum\limits_{i=1}^{k} \sum\limits_{j=1}^{k} x_{ij} - \sum\limits_{i=1}^{k} x_{ii} + \frac{1}{k-1} \sum\limits_{i=1}^{k} \left(\sum\limits_{j=1}^{i-1} x_{ij} + \sum\limits_{m=i+1}^{k} x_{im} \right)}{\sum\limits_{i=1}^{k} \sum\limits_{j=1}^{k} x_{ij}} =$$

$$= \frac{\sum\limits_{i=1}^{k} \left(\sum\limits_{j=1}^{i-1} x_{ij} + \sum\limits_{m=i+1}^{k} x_{im} \right) + \frac{1}{k-1} \sum\limits_{i=1}^{k} \left(\sum\limits_{j=1}^{i-1} x_{ij} + \sum\limits_{m=i+1}^{k} x_{im} \right)}{\sum\limits_{i=1}^{k} \sum\limits_{j=1}^{k} x_{ij}} =$$

$$= \frac{k}{k-1} \left(\frac{\sum\limits_{i=1}^{k} \left(\sum\limits_{j=1}^{i-1} x_{ij} + \sum\limits_{m=i+1}^{k} x_{im} \right)}{\sum\limits_{i=1}^{k} \sum\limits_{j=1}^{k} x_{ij}} \right) = \frac{k}{k-1} \left(1 - \frac{\sum\limits_{i=1}^{k} x_{ii}}{\sum\limits_{i=1}^{k} \sum\limits_{j=1}^{k} x_{ij}} \right).$$

Tuletades meelde tõkke λ_1 definitsiooni (4.1) on ilmne, et

$$\lambda_3 = \frac{n\ \lambda_1}{n-1}. \tag{4.3}$$

ja seega $\lambda_1 \leq \lambda_3$. Lisaks on võimalik näidata, et $\lambda_3 \leq \lambda_2$.
Reliaabluse alumine tõke λ_3 on enam tuntud kui Cronbachi α, nimetatud Lee Cronbachi järgi, kes seda oma 1951 aasta artiklis [**?**] kasutas ning on ilmselt enim kasutatud hinnang reliaablusele. Käesolevas töös jääme siiski selle alumise tõkku nimetamisel λ_3 juurde - nii nimetates tuletatud tõket Louis Guttman oma kuus aastat varem ilmunud artiklis [7].
Siinkohal märgima ka ära, et λ_3 kasutatakse tihti ka hinnanguna testi sisemisele järjepidavusele ning sellega kokku puutudes tuleb kindlasti välja selgitada, mida autor reliaabluse all mõistab.

4.4 Alumine tõke λ_4

Vaatleme kovariatsioonimaatriksit Σ_T. Vaatleme k vektorite hulka $V = \{v : |v_i| = 1\ \forall i, 1 \leq i \leq k\}$. Olgu meil suvaline vektor $v \in V$, kuna Σ_T on mittenegatiivselt määratud, siis teame, et kehtib

$$0 \leq v^T \Sigma_T v,$$

arvestades kovariatsioonimaatriksi Σ_E omadusi saame võrduse (3.11) põhjal

$$\sum_{i=1}^{k} \theta_i = \sum_{i=1} v_i^2 \theta_i = v^T \Sigma_E v \leq v^T \Sigma_X v.$$

Seega, iga $v \in V$ korral saame alumise tõkke reliaablusele. Tõepoolest, (3.14) põhjal iga vektori $v \in V$ korral,

$$1 - \frac{v^T \Sigma_X v}{\sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{k} x_{ij}} \leq 1 - \frac{\sum_{i=1}^{k} \theta_i}{\sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{k} x_{ij}} = 1 - \frac{D[E]}{D[X]}.$$

Defineerime alumise tõkke λ_4 kui maksimumi kõikidest sellistest tõkketest, seega

$$\lambda_4 = \max_{v \in V} \left(1 - \frac{v^T \Sigma_X v}{\sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{k} x_{ij}} \right).$$

4.5 Alumine tõke *glb*

Paneme tähele, et tänu Σ_E struktuurile (3.12) on tema mittenegatiivselt määratus samaväärne sellega, et $0 \leq \theta_i$ iga $1 \leq i \leq k$ korral.
Tõepoolest, olgu Σ_E mittenegatiivselt määratud ning oletame vastuväiteliselt, et leidub $i, 1 \leq i \leq k$ nii, et $0 > \theta_i$. Olgu v k-vektor, nii et

$$v_j = \begin{cases} 1, j = i \\ 0, j \neq i \end{cases}.$$

Siis $v^T \Sigma_E v = \theta_i < 0$, mis on aga vastuolu sellega, et Σ_E on mittenegatiivselt määratud. Teistpidi, kehtigu $0 \leq \theta_i$ iga $1 \leq i \leq k$ korral. Olgu v suvaline k-vektor. Siis $v^T \Sigma_E v = \sum_{i=1}^{k} v_i^2 \theta_i \geq 0$. Kuna v oli suvaline, siis on Σ_E vastavalt definitsioonile mittenegatiivselt määratud.
Üritame nüüd leida vea suurimat võimaliku dispersiooni, mis on (3.10) põhjal samaväärne summaga $\sum_{i=1}^{k} \theta_i$, arvestades eelnevalt kirjeldatud piiranguid. Saame

selle panna kirja järgneva optimiseerimisülesandena:

$$\begin{gathered} max \sum_i \theta_i \\ \theta_i > 0 \\ \Sigma_X = \Sigma_T + \Sigma_E \\ \Sigma_T \succeq 0, \end{gathered} \tag{4.4}$$

kus kirjapilt $\Sigma_T \succeq 0$ tähistab tingimust "Σ_T on mittenegatiivselt määratud".
Olgu z eelneva optimiseerimisülesande lahend Σ_X korral. Tähistame tähekombinatsiooniga *glb*, mis tuleneb fraasist *greatest lower bound*, lahendi z abil saadud alumise tõkke reliaablusele, kus

$$glb = 1 - \frac{z}{\sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{k} x_{ij}}.$$

Panemet tähele, et kuna z on maksimaalne vea dispersioon fikseeritud Σ_X korral, siis on alumine tõke *glb* minimaalne võimalik reliaablus. Siit aga saame, et iga teine reliaabluse alumine tõke peab olema väiksem võrdne tõkega *glb*. Seega on *glb* suurim võimalik alumine tõke.

4.6 Hinnangute kasutatavus praktikas

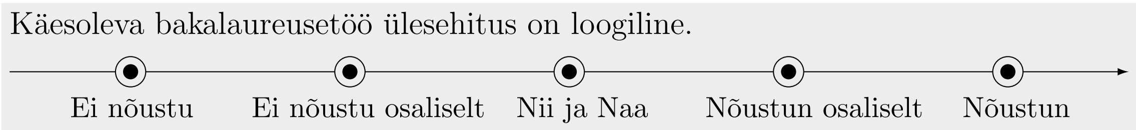
Püstitasime töö alguses probleemi - kas võimalik leida reliaablusele parem hinnang kui seda on λ_3? Käsitletud hinnangutest on nii *glb* kui λ_2 reliaabluse alumised tõkked ning samas vähemalt sama suured kui λ_3, seega ka paremad hinnangud reliaablusele kui seda on λ_3. Kuigi λ_4 ei ole tingimata suurem, kui λ_3, on raske leida empiirilist näidet, kus λ_4 oleks väiksem kui λ_3.
Paneme tähele, et λ_3 leidmine on väga lihtne ning eelmise sajandi keskel, olukorras kus arvutuslik võimsus oli tagashoidlik, oli tegemist olulise eelisega. Tänapäeval on λ_3 lihtsus pea olematu eelis, arvestades, et ka väga suurte küsimustike puhul ei valmista paremate hinnangute leidmine probleeme.
Seega, kui küsimustiku analüüsia mõtestab küsimustiku klassikalise testiteooria raamistikus, siis ei näe autor mingit põhjust, miks peaks kasutama reliaabluse hindamiseks λ_3 ning soovitab eelistada teisi, kõrgemaid, hinnaguid. Autor märgib siinkohal, et tegemist tundub olevat valdkonna ekpertide seas levinud arvamusega. [?] [?] [2]

5 Intervallskaal alternatiivne tõlgendamine

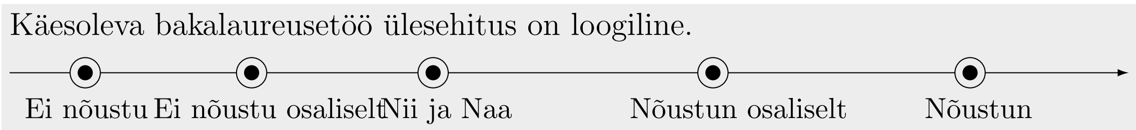
Läheneme nüüd reliaabluse hinnangu parandamisele teisest suunast ning vaatleme, millist mõju avaldab hinnangule λ_3 vastuste teistsugune tõlgendamine intervallskaalal.

5.1 Vastuste tõlgendamine intervallskaalal

Käesoleva töö sissejuhatuses kirjeldasime viisi, kuidas vaikimisi paigutakse intervallskaalal erinevaid vastuseid Likerti skaalalt. Märgime, et selline tõlgendus ei ole põhjendatud - meil ei ole mingit teoreetilist põhjust eeldada, et kõik vastused on üksteisest sama "kaugel".
Sellest tähelepanekust lähtub järgmine küsimus - kas on võimalik leida parem vastuste paigutus intervallskaalal kui vaikimisi meetod? Vaatleme kahte näidet:



Joonis 6: Näide, kuidas hinnangud skaalal vaikimisi meetodit kasutades paigutuvad



Joonis 7: Näide hinnangute alternatiivsest paiknemisest skaalal

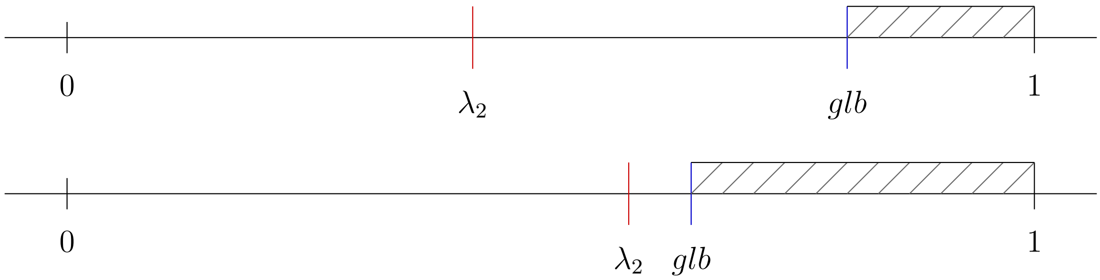
Kui me tahame välja pakkuda alternatiive vaikimisi tõlgendusele, peab meil olema mingi karakteristik, mille alusel tõlgendust hinnata. Pakume välja järgmise idee : üritame leida hinnangute paiknemist skaalal nii, et küsimustiku reliaablus oleks võimalikult suur. Seame endale loomuliku piirangu - vastuste esialgne järjestus ei tohi muutuda.

5.2 Reliaabluse hindamine

Kuna küsimustiku reliaabluse leidmin ei ole praktiliselt võimalik, siis kasutame selle lähendusena eelmises peatükkis käsitletud alumisi tõkkeid. On selge, et parimi tulemuse annab võimalikult täpse alumise tõkku kasutamine. Kuid kuna sobiva tõlgenduse leidmine taandub optimiseerimisülesandeks, siis kasutame siinkohal ühte konservatiivsemat alumist tõket, λ_3 - selle arvutamise lihtsus, mis ei omanud fikseeritud tõlgenduse korral tänapäevase aruvutusvõimuse juures erilist tähtsust osutub siin oluliseks eeliseks.

5.3 Lähenemise korrektsus

Lugejal võib siinkohal tekkida kaks küsimust lähenemise korrektuse kohta.
Esiteks, kas selline lähenemine tagab meile kõrgema küsimustiku kõrgema reliaabluse? Vastus sellele küsimusele on kahjuks eitav - tõepoolest, on võimalik, et me saame teistsuguse tõlgendusega küsimustiku, mille reliaabluse alumine tõke on suurem kui vaikimisi tõlgendusega küsimustiku puhul kuid mille reliaablus on samal ajal madalam. Kuna aga meil ei ole võimalik reliaablust täpselt mõõta, ei ole meil ka otsest põhjust uskuda, et ühe tõlgendusega saadud reliaablus on parem kui teisega.
Küll aga kerkib siinkohal esile praktilisem probleem seoses λ_3 kasutamisega reliaabluse hindamisel. Nimelt võib leida aset olukord, kus meie poolt pakutava tõlgenduse korral on λ_3 kõrgem, kui vaikimisi tõlgenduse puhul kuid mõni tihedam alumine tõke on madalam. Illustreerime seda olukorda näitega.



Joonis 8: Olukord, kus alternatiivne tõlgendus suurendab alumist tõket λ_3 ja vähendab alumist tõket *glb*

Joonisel kujutatud olukord on kindlasti ebasoovitav. Lihtsam võimalik lahendus on uue tõlgenduse korral leida teised alumised tõkked ning juhul, kui parim alumine tõke vaikimisi tõlgendusele on kõrgem kui leitud tõlgendusele, siis jääda vaikimisi tõlgenduse juurde. Keerukam lahendus oleks kasutada mõnda optimiseerimisel mõnda paremat alumist tõket - selle lähenemise puuduseks on aga kaasnev vajadus lahendada keerukam optimiseerimisülesanne.
Teiseks, kuidas mõjutab vastuste tavapärasest erinev tõlgendus testi valiidsust? Sellele küsimusele märgime ära, et kuigi vaikimisi definitsioon on laialdaselt levinud, on ta siiski täiesti arbitraarne ning seega samaväärne meie poolt pakutud tõlgendusega - meil ei ole mingit kindlati põhjust uskuda, et ühe tõlgenduse korral on valiidsus parem kui teise korral. Ühelt poolt on selline vastus mitterahuldav -

meie poolt pakutud lahendus ei pruugi olla parem kui olemasolev. Teiselt poolt - vaikimisi kasutatav tõlgendus ei pruugi olla parem kui meie poolt pakutav.
Meie poolt paktuava tõlgenduse väikese eelisena võib siiski ära tuua järgneva. Kuna enamike valiidsuse definitsioonide korral on valiidsus ülevalt tõkesatud mingi funktsiooniga reliaablusest (kõige levinuma definitsiooni korral on tõkkeks reliaabluse positiivne ruutjuur), siis reliaabluse alumise tõkke abil saame me midagi öelda valiidsuse kõige väiksema võimaliku ülemise tõkke kohta. Paneme tähele, et kuna me teame ainult reliaabluse alumist tõket ja mitte reliaablust ennast, ei ole meil mingit põhjust väita, et vähim võimalik ülemine tõke ka on küsimustiku valiidsuse ülemiseks tõkkeks.

5.4 Alternatiivse tõlgenduse matemaatiline sõnastus

Olgu meil populatsioon I ning k küsimusega küsimustik, kus iga küsimuse kohta palutakse hinnangut l-palli Likerti skaalal. Nummerdama küsimused naturaalarvudega 1 kuna k Olgu meil juhuslikud suurused $K_1, K_2, ..., K_k$, mille määramispiirkonnaks on kõik erinevad võimalikud vastuste kombinatsioonid küsimustikule ning muutumispiirkonnaks on hulk $\{1, 2, \ldots, l\}$ ning tõlgendame juhusliku suurust kui küsimusele k antud vastuse tõlgendust vaikimisi kasutataval intervallskaalal. Toome sisse ka tähistused $p_{i\alpha}, i \in \{1, 2, ..., n\}, \alpha \in \{1, 2, \ldots, l\}$, kus $p_{i\alpha}$ tähistab põhjal tõenäosusust, et juhusliku suuruse K_i väärtus on α.
Tuletame meelde λ_3 definitsiooni üle vektori $(K_1, K_2, \ldots, K_k)$ kovariatsioonimaatriksi Σ_K:

$$\lambda_3 = (\frac{k}{k-1})(1 - \frac{\sum\limits_{i=1}^{k} \Sigma_{Kii}}{\sum\limits_{i=1}^{k}\sum\limits_{j=1}^{k} \Sigma_{Kij}})$$

Paneme tähele, et võttes arvesse seda, et $\Sigma_{Kij} = cov(K_i, K_j)$ ja definitsiooni järgi $cov(X, X) = \epsilon\left[(X - \epsilon\left[X\right])(X - \epsilon\left[X\right])\right]$, saame, et

$$\lambda_3 = (\frac{k}{k-1})(1 - \frac{\sum\limits_{i=1}^{k} \Sigma_{Kii}}{\sum\limits_{i=1}^{k}\sum\limits_{j=1}^{k} \Sigma_{Kij}}) = \frac{k}{k-1}\left(1 - \frac{\sum\limits_{1=0}^{k} D(K_i)}{\sum\limits_{i=1}^{k}\sum\limits_{j=1}^{k} cov(K_i, K_j)}\right)$$

Soovime leida sellise viisi vastute tõlgendamiseks, et λ_3 oleks maksimaalne. Kujutame juhuslikud suurused $K_1, K_2, \ldots, K_n$ juhuslikeks suurusteks $M_1, M_2, M_2, \ldots, M_n$, kusjuures juhusliku suuruse M_i määramispiirkond ühtib suuruse K_i määramispiirkonnaga ning M_i saab väärtusi hulgast $M_i = \{\mu_{1i}, \mu_{2i}, \ldots, \mu_{li}\}$ $i \in 1, 2, ...n$. Lisaks kehtigu järgnevad kitsendused:

$$\mu_{i1} < \mu_{i2} < \ldots < \mu_{il},$$

$$K_i(\omega) = j \implies M_i(\omega) = \mu_{ij}, \forall j, 1 \leq j \leq l.$$

Siinkohal märgime, et hinnangute tõlgenduste juures ei huvita meid mitte absoluutne, vaid suhteline paigutus. Seda arvesse võttes lisame järgnevad normaliseerivad kitsendused:

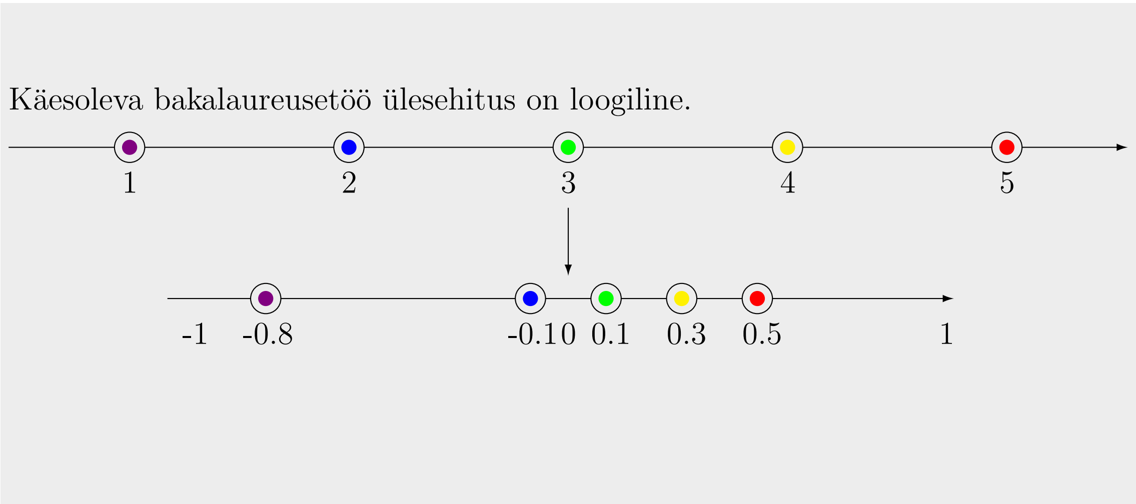
$$E(L_i) = \sum_{j=1}^{l} p_{ij}\mu_{ij} = 0, \tag{5.1}$$

$$D(L_i) = \sum_{j=1}^{l} p_{ij}(\mu_{ij} - E(L_i))^2 = \sum_{j=1}^{l} p_{ij}\mu_{ij}^2 = 1. \tag{5.2}$$

Paneme tähele, et selliste piirangute korral esitub λ_3 lihtsamal kujul. Tõepoolest ,

$$\lambda_3 = \frac{k}{k-1}\left(1 - \frac{\sum\limits_{1=0}^{k} D(M_i)}{\sum\limits_{i=1}^{k}\sum\limits_{j=1}^{k} cov(M_i, M_j)}\right) = \frac{k}{k-1}\left(1 - \frac{k}{\sum\limits_{i=1}^{k}\sum\limits_{j=1}^{k} cov(M_i, M_j)}\right).$$

Siit näeme, et sellisel juhul taandub λ_3 maksimeerimine avaldise $\sum\limits_{i=0}^{n}\sum\limits_{j=0}^{n} COV(M_i, M_j)$ maksimeerimisele.



Joonis 9: Üks võimalik näide sellest, kuidas suhestudad hulgad $ran(K_i)$ ja $ran(M_i)$

Olgu meil tõenäosuste maatriks P, kusjuures

$$P=\begin{pmatrix} p_{(11)(11)} & p_{(11)(12)} & \cdots & p_{(11)(1l)} & p_{(11)(21)} & p_{(11)(22)} & \cdots & p_{(11)(nl)} \\ p_{(12)(11)} & p_{(12)(12)} & \cdots & p_{(12)(1l)} & p_{(12)(21)} & p_{(12)(22)} & \cdots & p_{(12)(nl)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{(nl)(11)} & p_{(nl)(12)} & \cdots & p_{(nl)(1l)} & p_{(nl)(21)} & p_{(nl)(22)} & \cdots & p_{(nl)(nl)} \end{pmatrix}$$

kus $p_{(i\alpha)(j\beta)}, i, j \in \{1, 2, ..., n\}, \alpha, \beta \in \{1, 2, \ldots, l\}$ tähistab tõenäosust, et juhuslik suurus K_i saab väärtuse α ja juhuslik suurus K_j saab väärtuse β.
Defineerime vektori x, nii et

$$x = (\mu_{11}, \mu_{12}, \ldots, \mu_{1l}, \mu_{21}, \mu_{22}, \ldots, \mu_{nl})$$

- - - SIIA MAANI REFAKTOREERITUD! EDASI OMAL VASTUTUSEL! - - - -
Siis $xPx^T = \sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n} cov(M_i, M_j)$. Veendume selles:

$$xPx^T = \begin{pmatrix}\mu_{11} & \mu_{12} & \cdots & \mu_{nl}\end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{(11)(11)} & p_{(11)(12)} & \cdots & p_{(11)(nl)} \\ p_{(12)(11)} & p_{(12)(12)} & \cdots & p_{(12)(nl)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{(nl)(11)} & p_{(nl)(12)} & \cdots & p_{(nl)(nl)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix}\mu_{11} \\ \mu_{12} \\ \vdots \\ \mu_{nl}\end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \sum\limits_{j=1}^{n}\sum\limits_{r=1}^{l} \lambda_{jr} p_{(jr)(11)} & \sum\limits_{j=1}^{n}\sum\limits_{r=1}^{l} \lambda_{jr} p_{(jr)(12)} & \cdots & \sum\limits_{j=1}^{n}\sum\limits_{r=1}^{l} \lambda_{jr} p_{(jr)(nl)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix}\mu_{11} \\ \mu_{12} \\ \vdots \\ \mu_{nl}\end{pmatrix} =$$

$$= \sum_{j=1}^{n}\sum_{r=1}^{l} \lambda_{jr} p_{(jr)(11)} + \sum_{j=1}^{n}\sum_{r=1}^{l} \lambda_{jr} p_{(jr)(12)} + \cdots + \sum_{j=1}^{n}\sum_{r=1}^{l} \lambda_{jr} p_{(jr)(nl)} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{l}\sum_{j=1}^{n}\sum_{r=1}^{l} \lambda_{jr} p_{(jr)(ik)} \lambda_{ik} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{l}\sum_{r=1}^{l} \lambda_{jr} p_{(jr)(ik)} \lambda_{ik} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} E(L_i L_j) =$$

$$\underset{(5.1)}{=} \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} E(L_i L_j) - E(L_i)E(L_j) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} cov(M_i, M_j)$$

Eelneva põhjal piisab meile,arvestades eelnevalt äratoodud piiranguid L_i keskväärtusele ja dispersioonile, suurima võimaliku λ_3 leidmiseks ruutvõrrandi xPx^T maksimeerimisest. Selle põhjal saame püstitada *Quadratically constrained quadratic programm(QCQP)*'i Mingi pädev eestikeelne termin selle kohta ? tüüpi optimeerimisprobleemi, mille lahendus annab meile otsitavad tõlgendused. Teeme seda:

$$
\begin{gathered}
min\ x^T(-P)x \\
R_i^T x = 0, i \in 1,2,...,n \\
R_i = (\underbrace{0,0,...0,0}_{(i-1)*5} p_i a, p_i b, p_i c, p_i d, p_i e, \underbrace{0,0,...,0,0}_{(n-i)*5})
\end{gathered} \tag{5.3}
$$

$$
x^T P_i x = 1, i \in \{1,2,...,n\},\ P_i = \begin{pmatrix} p_{ja} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & p_{jb} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & p_{je} \end{pmatrix}
$$

$$
p_j\alpha = \begin{cases} 0 & j \neq i \\ p_i\alpha & i = j \end{cases}, \alpha \in \{a,b,c,d,e\}
$$

6 Lahenduse idee

Kas probleem on SDP tüüpi või SDP? Miidlale kirjutan vast nendes küsimustes. Mingi sissejuhatav jutt QCQP ja SDP kohta, kas algusessse taust peatükki või pigem teksti sisse ? Püstitatud optimeerimis probleemi lahendamiseks teisendame probleemi *semidefinite programming(SDP)* tüüpi optimeerimisülesandeks ning seejärel lahendame saadud ülesande.

7 Teisendus *QCQP* tüüpi ülesandelt *SDP* tüüpi ülesandele

Esiteks teisendame saadud $QCQP$ standartkujule. Siia vaja selgitusi, mis ja kuidas

$$
\begin{gathered}
min\ -\theta \\
x^T P x - \theta \leq 0 \\
R_i^T x \leq 0, i \in 1,2,...,n \\
-R_i^T x \leq 0, i \in 1,2,...,n \\
R_i = (\underbrace{0,0,...0,0}_{(i-1)*5} p_i a, p_i b, p_i c, p_i d, p_i e, \underbrace{0,0,...,0,0}_{(n-i)*5}) \\
x^T P_i x - 1 \leq 0, i \in \{1,2,...,n\} \\
-(x^T P_i x - 1) \leq 0, i \in \{1,2,...,n\}
\end{gathered} \tag{7.1}
$$

$$P_i = \begin{pmatrix} p_{ja} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & p_{jb} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & p_{je} \end{pmatrix}$$

$$p_j\alpha = \begin{cases} 0 & j \neq i \\ p_i\alpha & i = j \end{cases}, \alpha \in \{a, b, c, d, e\}$$

[6, 116]
Paneme tähele, et kuna maatriksid P, R_i, P_i on sümmeetrilised ja mittenegatiivselt määratud, siis leiduvad maatrikisd Q, S_i, Q_i nii, et $P = QQ^T, R_i = S_iS_i^T, P_i = Q_iQ_i^T$. Nende maatriksite leidmiseks saab kasutada Cholesky lahutust. [17, 151] raamatus juhj positiivselt määratud maatriksi korral, mittenegatiivselt määratud maatriksi korral sellied maatriksid leiduvad, kuid ei ole alati üheselt määratud.
Olgu A mittenegatiivselt määratud maatriks, olgu $A = LL^T$.Märkame, et kehtib järgnev:

$$x^TAx \leq b^Tx + c \iff \begin{pmatrix} I_k & L^Tx \\ x^TL & b^Tx + c \end{pmatrix} \succeq 0 \tag{7.2}$$

[11, 31]
Seega saame anda oma optimeerimisprobleemile järgneva kuju:

$$\begin{gathered} min \ -\theta \\ \begin{pmatrix} I_k & Q^Tx \\ x^TQ & \theta \end{pmatrix} \succeq 0 \\ R_i^Tx \leq 0, i \in 1, 2, ..., n \\ -R_i^Tx \leq 0, i \in 1, 2, ..., n \\ R_i = (\underbrace{0, 0, ...0, 0}_{(i-1)*5} p_ia, p_ib, p_ic, p_id, p_ie, \underbrace{0, 0, ..., 0, 0}_{(n-i)*5}) \\ \begin{pmatrix} I_k & Q_i^Tx \\ t^T & 1 \end{pmatrix} \succeq 0 \\ \begin{pmatrix} I_k & Q_i^Tx \\ -x^TQ_i & -1 \end{pmatrix} \succeq 0 \end{gathered} \tag{7.3}$$

8 Teek

Põhjendan siin ka lühidalt Pythoni eeliseid teegi realiseerimisel, alternatiividega (näiteks Java või MATLAB) võrreldes:

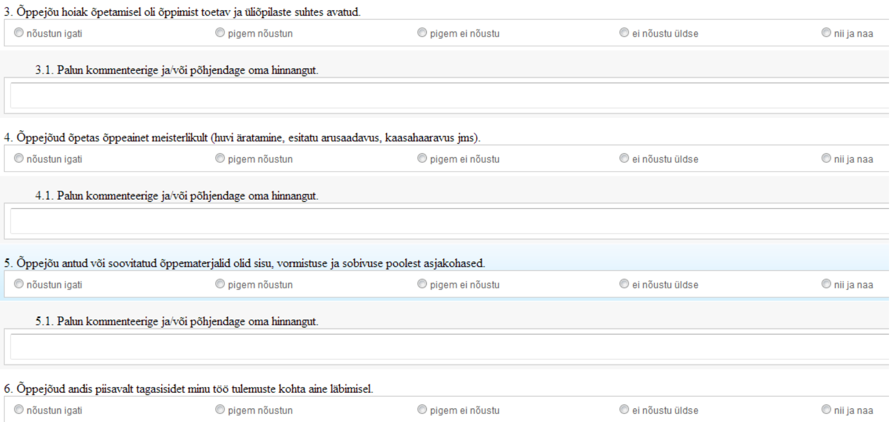
1. Python on hetkel keel, millega programeerimisalased õppingud tavaliselt algavad. Näiteks Tartu Ülikoolis õpetatakse programeerimist keeles Python nii matemaatika-informaatika teaduskonnale suunatud aines kui ka teistele huvilistele suunatud aines "Programeerimise alused", mida 2013/2014 aasta kevadel kuulas 150 inimest. Autor loodab, et nende seas on ka mõned psühholoogia tudengid.

2. Pythonil on läbi NumPy ja SciPy teekide väga hea arvutuslik tugi soovitud hinnangute implementeerimiseks.

3. Pythoni teek on väga lihte integreerida mõne veebiraamistikuga, mis võiks olla loodava teegi üks rakenduskohti.

4. Python on vabavara ning kõigile tasuta kasutatav.

9 Lisa



3. Õppejõu hoiak õpetamisel oli õppimist toetav ja üliõpilaste suhtes avatud.

nõustun igati | pigem nõustun | pigem ei nõustu | ei nõustu üldse | nii ja naa

3.1. Palun kommenteerige ja/või põhjendage oma hinnangut.

4. Õppejõud õpetas õppeainet meisterlikult (huvi äratamine, esitatu arusaadavus, kaasahaaravus jms).

nõustun igati | pigem nõustun | pigem ei nõustu | ei nõustu üldse | nii ja naa

4.1. Palun kommenteerige ja/või põhjendage oma hinnangut.

5. Õppejõu antud või soovitatud õppematerjalid olid sisu, vormistuse ja sobivuse poolest asjakohased.

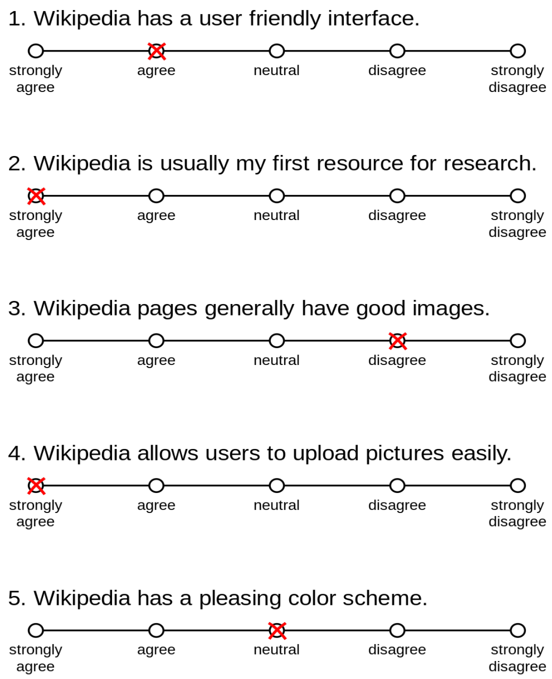
nõustun igati | pigem nõustun | pigem ei nõustu | ei nõustu üldse | nii ja naa

5.1. Palun kommenteerige ja/või põhjendage oma hinnangut.

6. Õppejõud andis piisavalt tagasisidet minu töö tulemuste kohta aine läbimisel.

nõustun igati | pigem nõustun | pigem ei nõustu | ei nõustu üldse | nii ja naa

Joonis 10: Näide Tartu Ülikooli õppeinfo süsteemi tagasiside ankeedist, kus rakendatakse Likerti skaalat [18]



Joonis 11: Näide küsimustikust, kus on rakendatud Likerti skaalat; küsimused on paigutatud nende järjestikulisuse rõhutamiseks teljele [15]

Viited

[1] Lee J. Cronbach. Test "Reliability": Its Meaning and Determination. *Psychometrika*, 12(1):1–16, 1947.

[2] Lee J. Cronbach and Richard J. Shavelson. My Current Thoughts on Coefficient Alpha and Successor Procedures. *Educational and Psychological Measurement*, 64(3):391–418, June 2004.

[3] Dato N. M. de Gruijter and Leo J. Th. van der Kamp. *Statistical Test Theory For Education And Psychology.* Number October. Taylor & Francis, 2007.

[4] N. Dilmen. Reliability and Validity, 2008.

[5] Diane R. Edmondson. Likert Scales: A History. http://faculty.quinnipiac.edu/charm/CHARM%20proceedings/CHARM%20article%20archive 2005.

[6] M. A. Epelman. Introduction to Semidefinite Programming (SDP). http://www-personal.umich.edu/~mepelman/teaching/IOE511/Handouts/511notes07-16.pdf, 2007.

[7] Louis Guttman. A Basis for Analyzing Test-Retest Reliability. *PSYCHOMETRIKA*, 1[(4):255–282, 1945.

[8] Robin K. Henson. Understanding Internal Consistency Reliability Estimates: A Conceptual Primer on Coefficient Alpha. *Measurement & Evaluation in Counseling & Development*, 34(3):177, 2001.

[9] Paul H Jackson and Christian C. Agunwamba. Lower Bounds for the Reliability of the Total Score on a Test Composed of Non-Homogeneous Items: I: Algebraic Lower Bounds. *PSYCHOMETRIKA*, 42(2):567–578, 1977.

[10] Susan Jamieson. Likert scales: how to (ab)use them. *Medical education*, 38(12):1217–8, December 2004.

[11] Monique Laurent and Frank Vallentin. Semidefinite Optimization. http://page.mi.fu-berlin.de/fmario/sdp/laurentv.pdf, 2012.

[12] F.M. Lord and M.R Novick. *Statistical theories of mental test scores.* 1968.

[13] Melvin R. Novick. The axioms and principal results of classical test theory. *Journal of Mathematical Psychology*, 3(1):1–18, February 1966.

[14] Klaas Sijtsma. On the use, the misuse, and the very limited usefulness of cronbach's alpha. *PSYCHOMETRIKA*, 74(1):107–120, 2009.

[15] Nicholas Smith. Example of Likert Scale. http://en.wikipedia.org/wiki/File:Example_Likert_Scale.svg.

[16] David L Streiner. Starting at the Beginning : An Introduction to Coefficient Alpha and Internal Consistency Starting at the Beginning : An Introduction to Coefficient Alpha and Internal Consistency. (February 2013):37–41, 2010.

[17] Ivar Tammeraid. *Lineaaralgebra rakendused*. TTÜ Kirjastus, Tallinn, 1999.

[18] UT. Õisi tagasiside. http://is.ut.ee.