TARTU ÜLIKOOL

MATEMAATIKA-INFORMAATIKATEADUSKOND

Matemaatika instituut

Matemaatika eriala

Vootele Rõtov

# Valikvastustega küsimustike reliaabluse hindamine

Bakalaureusetöö (6 EAP)

Juhendaja: Margus Niitsoo

TARTU 2014

## Valikvastustega küsimustike reliaabluse hindamine

**Vootele Rõtov**

### Lühikokkuvõte

Käesolevas bakalaureusetöös vaadeldakse erinevaid võimalusi valikvastustega küsimustike reliaabluse hindamiseks küsimustiku ühekordse läbiviimise põhjal.

Töö käigus antakse lugejale vajaminevad taustteadmised valikvastustega küsimustike ning nende karakteristikute kohta, defineeritakse reliaablus klassikalise testiteooria raamistikus ja antakse vajalik matemaatiline baas reliaabluse hinnangute tuletamiseks. Seejärel tuletatakse viis hinnangut reliaablusele, hinnatakse nende kasutatavust praktikas ja tutvustatakse autori loodud programmiteeki, mis sisaldab programme tuletatud hinnangute leidmiseks testi läbiviimisel saadud andmete põhjal.

Töö annab eesti keelse ülevaate klassikalise testiteooria alustest matemaatilisest vaatepunktist lähtudes, ning tutvustab praktikule erinevaid võimalusi testi reliaabluse hindamiseks, sealjuures tutvustatake meetodeid, mis annavad paremaid tulemusi, kui hetkel enamlevinud meetodid.

VÕTMESÕNAD: psühhomeetria, klassikaline testiteooria, valikvastustega küsimustikud, reliaablus, reliaabluse hindamine, Cronbachi alfa, Guttmani lambdad, glb.

## On the Reliability of Likert Scale Questionnaires

**Vootele Rõtov**

### Abstract

This bachelor's thesis is to give an overview of different possibilities of estimating reliability of Likert scale questionnaires based on a single admission.

The thesis contains a short overview of necessary background information about Likert scales and their characteristics, definition of reliability in the context of the Classical Test Theory and mathematical basis for deriving estimations of reliability. Also, five estimates are derived and their usability in practise is discussed. Finally, the author gives a short overview of a programming library that implements methods for finding derived estimates based on data gathered from admissioning the questionnaire.

The thesis gives an overview of the foundation of the Classical Test Theory in Estonian from mathematical viewpoint and introduces different possibilities for estimating the reliability of a questionnaire, some of which give better results than the ones in widespread use today.

KEYWORDS: psychometrics, classical test theory, Likert scale questionnaires, reliability, estimating reliability, Cronbach's alfa, Guttman's lambdas, glb.

# Sisukord

# 1 Sissejuhatus

Käesolev bakalaureusetöö on ajendatud psühholoogide probleemist – kuidas hinnata nende töövaldkonnas tihti kasutatavate valikvastustega küsimustike usaldusväärsust.

Sellest lähtuvalt on töö peamiseks eesmärgiks pakkuda valikvastustega küsimustike hindamiseks lihtsasti kasutatavaid kvantitatiivseid meetodeid. Lisaks sellele loodab autor pakkuda eestikeelset ülevaadet ühest valikvastustega testidega seotud matemaatiliselt raamistikust – olemasolevad käsitlused on pigem praktilised abivahendid psühholoogidele.

Töö esimeses osas esitame vajaliku taustinfo, definitsioonid ja probleemipüstituse. Seejärel ehitame üles meile vajamineva osa probleemi vaatlemiseks sobivast matemaatilisest teooriast – defineerime testi usaldusväärsuse ning rajame vundamendi selle hindamiseks. Järgnevalt tuletame mõningad erinevad usaldusväärsuse hinnangud. Töö viimases osas tutvustame autori loodud programmiteeki, mis sisaldab eelnevalt tutvustatud hinnangute implementatsioone.

Autori eesmärgiks on, et antud tekst oleks lihtsasti järgitav keskmisele bakalaureuseõppe läbinud matemaatikatudengile – meeldetuletuseks on valdkonna spetsiifilised matemaatilised definitsioonid ja tulemused töö käigus jooksvalt ära toodud.

Lisaks loodab autor, et loodud programmiteek pakkub huvi ka psühholoogidele.

# 2 Taustinfo ja probleemipüstitus

Järgnevalt anname probleemi mõtestamiseks vajalikud taustateadmised ning peatüki lõpetuseks püstitame käesoleva töö keskse probleemi.

## 2.1 Küsimustik, küsimus ja Likerti skaala

Käesolev uurimus tegeleb küsimustikega (*Likert scale*), milles soovitakse hinnanguid teatud arvule küsimustele (*Likert item*) $n$-pallisel Likerti skaalal [5], kus $n$ jääb enamasi kahe ja kümne vahele. Käsitleme Likerti skaalasid, mis on sümmeetrilised, see tähendab, et positiivsete ja negatiivsete vastusevariantide arv on sama. Näiteks:[1]

Käesoleva bakalaureusetöö ülesehitus on loogiline.

☐ Ei nõustu ☐ Ei nõustu osaliselt ☐ Nii ja naa ☐ Nõustun osaliselt ☑ Nõustun

Joonis 1: Näide väitest, millele palutakse hinnangut Likerti skaalal

## 2.2 Likerti skaala tõlgendamine intervallskaalana

Likerti skaala tõlgendamisel intervallksaalana on välja kujunenud tava seada valikvastustele vastavusse järjestatud täisarvud, kusjuures mida positiivsem on vastuse variant, seda suurem on temale vastavusse seatud arv. Reeglina kasutatakse kas arve alates ühest kuni valikvastuste arvuni või valitakse välja täisarvud nii, et neutraalsele vastusevariandile vastab null.

Käesoleva bakalaureusetöö ülesehitus on loogiline.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| -2 | -1 | 0 | 1 | 2 |
| ↑ | ↑ | ↑ | ↑ | ↑ |
| ☐ Ei nõustu | ☐ Ei nõustu osaliselt | ☐ Nii ja naa | ☑ Nõustun osaliselt | ☐ Nõustun |
| ↓ | ↓ | ↓ | ↓ | ↓ |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

Joonis 2: Näide kahest levinumast Likerti skaala tõlgendusest invtervallskaalana

[1] Terviklike küsimustike näited on esitatud lisades, joonisel 13 ja 14

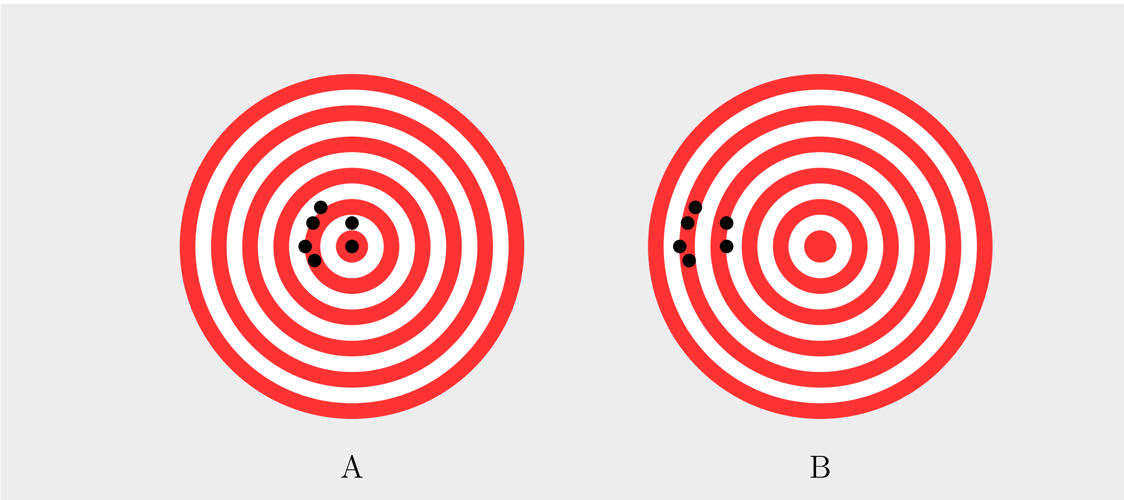
Lugejal võib tekkida õigustatud küsimus, kuidas põhjendab autor Likerti skaala käsitlemist intervallskaalana, kui Likerti skaala on olemuselt järjestikskaala ning selle tõlgendamine intervallskaalana on vastuoluline küsimus, näiteks [9]. Siinkohal tõdeme, et Likerti skaala tõlgendamine intervallksaalana on praktikas piisavalt levinud, et selle valdkonna uurimine oleks õigustatud, olenemata selle teoreetilisest põhjendatusest. Siinkohal väärib autori silmis esile toomist kriitikute üks levinumaid argumente: „hea“ ja „väga hea“ keskmine ei ole loomulikul viisil tõlgendatav kui „hea + pool“ ehk pole põhjust eeldada, et kõikide küsimuste omavaheline kaugus on mingil põhjusel võrdne.

## 2.3 Küsimustiku valiidsus

Küsimustiku **valiidsus** on küsimustiku karakteristik, mis iseloomustab testi võimet mõõta seda, mida see kujundati mõõtma. Enamikes käsitlustes vaadeldakse valiidsust kui väärtust intervallskaalal nulli ja ühe vahel.

Näitena olgu meil küsimustikuks kaal, mille näitu vaatleme kui küsimustiku tulemust kaalutava isiku puhul. Kaal, mis näitab 75 kilo kaaluva inimese kaaluks 74,5 kilo, omab kõrgemat valiidsust, kui kaal, mis sama inimese puhul näitab kaaluks 65 kilo.

Küsimustiku valiidsuse mõtestamisel võime kasutada analoogiat täpsuslaskmisega - kui vaatleme küsimustikke kui laskureid, siis tähendaks see, et laskuri $A$ valiidus on kõrgem kui lasukuril $B$, seda, et tema tabamused asuksid märklaua keskkohale lähemal. Olukorda illustreerib järgnev joonis:




Joonis 3: Kahe küsimustiku valiiduse võrdlus

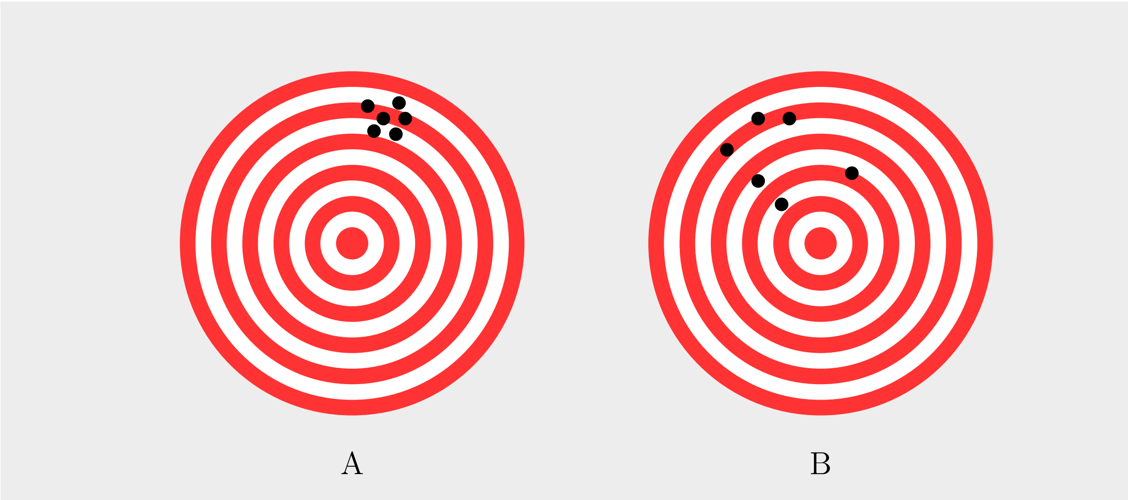
Arusaadavatel põhjustel on testi valiidsus äärmiselt oluline ning psühholoogiliste testide valiidsuse hindamine on olnud üks psühhomeetria põhilistest uurimisobjektidest. Sellega seoses on tehtud palju tööd ka valiidsuse definitsiooni täpsemaks muutmisega, võrreldes selle paragrahvi alguses antud väga intuitiivse definitsiooniga. Kuna valiidsus on käesoleva töö raames vajalik vaid taustinfona probleemi mõtestamiseks, tundub antud lihtne definitsioon aga sobivaim.

## 2.4 Küsimustiku reliaablus

Küsimustiku **reliaablus** on küsimustiku karakteristik, mis kirjeldab, kui järjepidevad on subjekti erinevad mõõtmised sama küsimustikuga. Nii nagu valiidsus, on ka reliaablus reeglina määratud intervallskaalal nulli ja ühe vahel.

Näiteks kaal, mis näitab igal kaalumisel 75 kilo kaaluva inimese kaaluks 74,5 kilo, omab kõrgemat reliaablust, kui kaal, mis näitab juhuslikult kas 74,5 kilo või 75,5 kilo.

Ka küsimustiku reliaabluse mõtestamisel saame kasutada analoogiat täpsuslaskmisega - sellisel juhul tähendaks see, et laskuri $A$ reliaablus on suurem kui laskuril $B$ seda, et laskuri $A$ tabamused asuvad üksteisele lähemal kui laskuri $B$ omad. Olukorda illustreerib järgnev joonis:



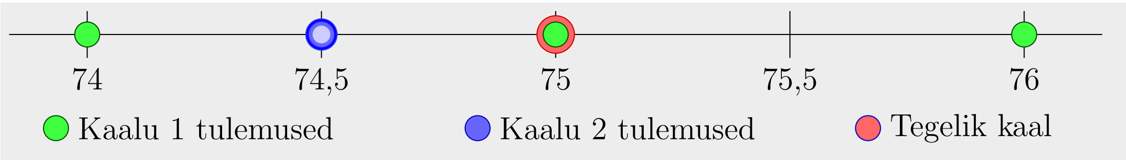

Joonis 4: Kahe küsimustiku reliaabluse võrdlus

Paneme tähele, et kõrgem reliaablus ei tähenda tingimata seda, et testi valiidsus on suurem.

Reliaabluse täpsema, matemaatilise definitsioone anname edaspidi.

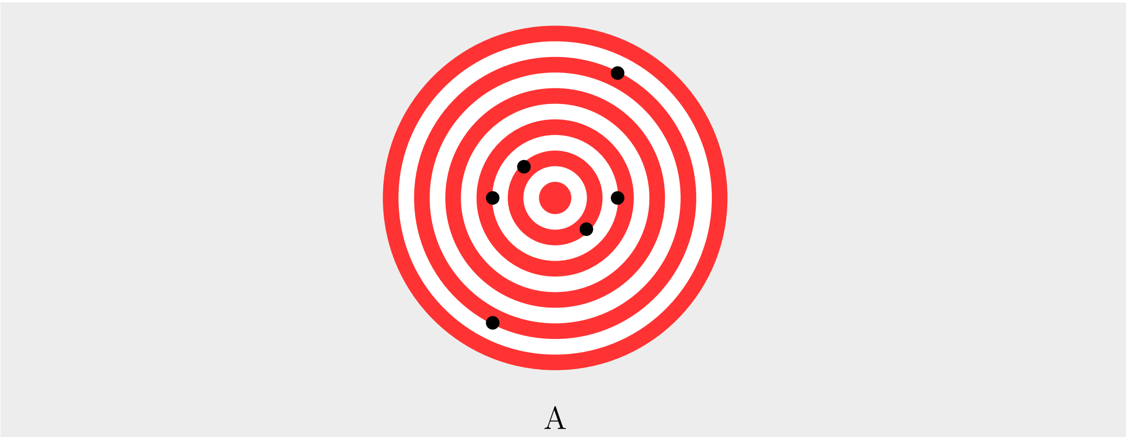
## 2.5 Valiidsuse ja reliaabluse suhe

Valiidsuse ja reliaabluse suhestamisel kerkib kiiresti üles loomulik küsimus – kas test võib olla samaaegselt suure valiidsuse ja väikse reliaablusega? Eelpool antud definitsioonid jätavad selle küsimuse lahtiseks. Vaatleme järgmist olukorda:




Joonis 5: Kaalumiste tulemused kahe erineva kaaluga kolmel katsel

Kui mõista valiidsust kui küsimustiku keskmist tulemust, siis võime väita, et esimene kaal on väiksema reliaabluse, aga suurema valiidsusega. Selline valiidsuse mõtestamine ei ole aga küsimustike modelleerimise korral otstarbekas – katsete kordamine on enamasti keeruline ning väheste mõõtmistulemuste põhjal ei ole võimalik tegeliku väikese reliaablusega testi tulemust välja selgitada. Alternatiivselt võime ka siin vaadelda olukorda kasutades täpsuslaskmise analoogiat. Olgu meil laskur $A$, kelle lasud paiknevad märklaua erinevates punktides, kuid nende geomeetriline keskpunkt asub märklaua keskel. Intuitiivselt on selge, et kui laskude arv on piiratud, ei ole selline definitsioon, mille korral laskuri $A$ valiidsus oleks suur, otstarbekas. Kirjeldatud olukorda illustreerib järgnev joonis:




Joonis 6: Küsimistik, mille reliaablus on väike ja “valiidsus” suur

Seega, meie vaadeldava olukorra – psühholoogiliste testide – korral on mingi valiidsuse taseme jaoks tarvilik tingimus mingi reliaabluse tase.

## 2.6 Sisemine järjepidevus

Reliaabluse kui termini probleemiks on tema mitmetähenduslikkus. Toome siinkohal ära ühe mõiste, mida tihti samuti reliaablusena või sisemise järjepidevuse reliaablusena tuntakse.

Sisemine järjepidavus (*internal consistency*) on küsimustiku karakteristik, mis iseloomustab testi erinevate küsimuste vastuste järjepidevust ehk seda, kui hästi on vastused ühist konstruktsiooni hindavatele küsimustele kooskõlas [7, 177]. Paneme tähele, et erinevalt eelnevalt toodud reliaabluse definitsioonist, on sisemine järjepidevus ühe testi läbiviimise keskne. Piltlikult väljendudes olgu meil järgnev küsimustik:

Käesoleva bakalaureusetöö ülesehitus on loogiline.

☐ Ei nõustu ☐ Ei nõustu osaliselt ☐ Nii ja naa ☐ Nõustun osaliselt ☐ Nõustun

Mulle meeldib käesoleva bakalaureusetöö ülesehitus.

☐ Ei nõustu ☐ Ei nõustu osaliselt ☐ Nii ja naa ☐ Nõustun osaliselt ☐ Nõustun

Käesolevat bakalaureusetööd on lihtne lugeda.

☐ Ei nõustu ☐ Ei nõustu osaliselt ☐ Nii ja naa ☐ Nõustun osaliselt ☐ Nõustun

Joonis 7: Küsimustik bakalaureusetöö ülesehituse kohta

Siin on mõõdetavaks konstruktsiooniks käesoleva bakalaureusetöö ülesehitus ning kõrgeks sisemiseks reliaabluseks on vajalik kolmele näites toodud küsimusele antud vastuste kooskõla.

Selleks, et sisemine järjepidavus oleks mõtestatud, peavad meil küsimustikus olema mingi kindla konstruktsiooni mõõtmiseks rohkem kui üks küsimus – vastasel juhul on iga küsimus täielikus kooskõlas kõikide sama konstruktsiooni mõõtvate küsimustega, ehk iseendaga. Rõhutame, et see nõue ei laiene eelnevalt defineeritud reliaablusele.

Sisemise järjepidavuse mõõtmiseks on võimalik kasutada sisemise järjepidavuse teste. Segadust suurendab veelgi see, et üks nendest testidest leiab kasutamist ka meie poolt defineeritud reliaabluse hindamisel. Loodame, et nende kahe karakteristiku eristamine aitab lugejal käesolevas töös kergemini orienteeruda.

Märgime, et lisaks siintoodud kahele definitsioonile on ka teisi reliaabluse käsitlusi [1], mis aga selle töö kontekstis ei tohiks segadust tekitada ning mille äratoomist ei ole autor pidanud siinkohal vajalikus.

## 2.7 Probleemi püstitus

Käesoleva tööga üritame pakkuda lahendust järgmisele praktilisele probleemile: kas on võimalik leida paremat hinnangut küsimustiku reliaabluse kohta, kui seda on tihti kasutatav Guttmani $\lambda_3$ (rohkem tuntud kui Cronbachi $\alpha$)?

Küsimusele vastamiseks on meil vaja rangemat lähenemist reliaablusele ning selleks vaatleme reliaablust ühe matemaatilise raamistiku – klassikalise testiteooria – kontekstis.

# 3 Reliaablus klassikalises testiteoorias

Järgnevas võtame aluseks Melvin Novicki klassikalise testiteooria [12] [11] ja selle tõlgenduse Klaas Sijtsma poolt. [14, 109]

## 3.1 Reliaabluse definitsioon

MEELDETULETUSEKS

**Definitsioon.** *Elementaarsündmuseks* nimetatakse juhusliku katse võimalikku tulemust. [a]

**Definitsioon.** *Tõenäosuseks* nimetatakse funktsiooni $P$, mis igale sündmusele $A \in 2^{\Omega}$, kus $\Omega$ on mingi juhusliku katse kõikvõimalike elementaarsündmuste hulk, seab vastavusse arvu $P(A)$, nii et on täidetud järgmised nõuded:

1. $P(A) \geq 0, \forall A \in 2^{\Omega}$,
2. $P(\Omega) = 1$, $P(\emptyset) = 0$,
3. Kui sündmused $A_1, A_2, ...$ on teineteist välistavad, siis

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P\left(A_i\right)$$

.

**Definitsioon.** *Diskreetseks juhuslikuks suuruseks* nimetatakse funktsiooni $X : \Omega \to \mathbb{R}$, mis võtab kas lõpliku või loenduva arvu erinevaid väärtusi $x_1, x_2, ...(x_n)$.

[a] Siin ja edaspidi toetume tõenäosusteooria definitsioonide ja tulemuste sõnastamisel Kalev Pärna õpikule [?].

Olgu meil mingi kogum $I$ testile vastajaid ning küsimustik, milles on $k$ küsimust, kus iga küsimus on $l$-pallisel Likerti skaalal. Nummerdame küsimused naturaalarvudega 1 kuni $k$. On loomulik eeldada, et nii vastajate arv, küsimuste arv kui ka Likerti skaala suurus on lõplikud. Me võime vaadelda testi läbiviimist kui juhuslikku katset ning kõiki erinevaid võimalike vastuste kombinatsioone küsimustikule kui elementaarsündmusi, tähistades saadud elementaarsündmuste hulga kui $\Omega$ ning elementaarsündmuse kui $\omega$. Eeldame ka tõenäosuste $P_i : 2^{\Omega} \to \mathbb{R}$ olemasolu, mida tõlgendame kui testi tulemuste esinemissagededust vastaja $i$ korral.

| Küsimus / $\omega$ | I | II | II |
|---|---|---|---|
| A | Nõustun osaliselt | Nii ja naa | Nõustun |
| B | Ei nõustu osaliselt | Nõustun | Nii ja naa |
| C | Ei nõustu | Nõustun osaliselt | Nii ja naa |

Joonis 8: Näited elementaarsündmustest

Olgu $X_i^j$ hulgal $\Omega$ määratud juhuslik suurus, mille võimalikke väärtusi vaatleme kui vastaja $i$ poolt küsimusele $j$ antud vastuse arvulist tõlgendust. On selge, et sellise tõlgenduse korral on juhusliku suuruse $X_i^j$ muutumispiirkond lõplik - selle hulga võimsus ei ole suurem kui $l$ ning järelikult on juhuslik suurus $X_i^j$ diskreetne. Defineerime vastaja $i$ testi tulemuse $X_i$ kui

$$X_i = \sum_{j=1}^{k} X_i^j.$$

Paneme tähele, et $X_i$ on samuti diskreetne juhuslik suurus – tõepoolest, kuna tegemist on diskreetsete juhuslike suuruste summaga, siis on ta funktsioon hulgast $\Omega$ hulka $\mathbb{R}$. Lisaks, kuna kõikide liidetavate muutumispiirkond on tõkestatud arvuga $l$ ning liidetavaid on $k$, siis ei saa funktsiooni muutumispiirkonna võimsus olla suurem kui $l^k$.

MEELDETULETUSEKS

**Definitsioon.** Disktreetse juhusliku suuruse $X$ *jaotuseks* nimetatakse paaride komplekti $(x_i, p_i)\,, i = 1, 2, ...,$ kus $x_i$ on juhusliku suuruse võimalik väärtus ning $p_i = P(\{\omega | X(\omega) = x_i, \omega \in \Omega\})$.
**Definitsioon.** Diskreetse juhusliku suuruse $X$, mille jaotuseks $K$ on paaride komplekt $k_i = (x_i, p_i)\,, i = 1, 2, ...,$ *keskväärtuseks* nimetatakse arvu

$$\epsilon X = \sum_{\{i | k_i \in K\}} x_i p_i$$

eeldusel, et see rida koondub absoluutselt.
**Definitsioon.** Juhusliku suuruse $X$ *dispersiooniks* nimetatakse arvu $DX = \epsilon\left[(X - \epsilon X)^2\right]$.

Triviaalse juhu vältimiseks eeldame edaspidi, et juhuslike suuruste $X_i$ dispersioonid on nullist erinevad. Defineerime küsimustiku tegeliku tulemuse vastaja $i$ jaoks kui testi tulemuse keskväärtuse ehk

$$t_i = \epsilon\left[X_i\right].$$ [2]

Kuna juhusliku suuruse $X_i$ võimalike väärtuste arv on lõplik, on ka tema keskväärtus $t_i$ lõplik.

Tõlgendame vastaja $i$ testi tulemuse ja tegeliku tulemuse vahet mõõtmisveana, tähistame seda kui $E_i$. Seega $X_i = t_i + E_i$.

MEELDETULETUSEKS

**Lause 3.1.** Kui $X$ on diskreetne juhuslik suurus, jaotusega $K$, kus $K$ on paaride komplekt $k_i = (x_i, p_i), i = 1, 2, ...$ ning $c$ on mingi konstant, siis $\epsilon(X + c) = \epsilon(X) + c$

*Tõestus.*

$$\epsilon(X + c) = \sum_{\{i|k_i \in K\}} (x_i + c)p_i = \sum_{\{i|k_i \in K\}} x_i p_i + \sum_{\{i|k_i \in K\}} cp_i =$$
$$= \sum_{\{i|k_i \in K\}} x_i p_i + c \sum_{\{i|k_i \in K\}} p_i = \sum_{\{i|k_i \in K\}} x_i p_i + c = \epsilon(X) + c$$

□

**Lause 3.2.** Juhuslikule suurusele konstandi liitmine ei muuda dispersiooni: $D(X + c) = DX$

*Tõestus.*

$$D(X+c) = \epsilon[X+c-\epsilon(X+c)] \overset{\text{Lause 3.1}}{=} \epsilon[X+c-\epsilon(X)+c] = \epsilon[X-\epsilon(X)] = DX$$

□

Paneme tähele, et eelneva põhjal on vastaja $i$ mõõtmisvea keskväärtus võrdne nulliga. Tõepoolest, kuna tegeliku tulemuse definitsiooni põhjal $\epsilon\left[X_i\right] = t_i$, siis saame mõõtmisvea definitsiooni arvesse võttes

$$t_i = \epsilon\left[X_i\right] = \epsilon\left[t_i + E_i\right] \overset{\text{Lause 3.1}}{=} t_i + \epsilon\left[E_i\right] \implies \epsilon\left[E_i\right] = 0.$$

[2] Tähistame keskväärtuse tähega $\epsilon$, kuna tavapärane tähistus $E$ omab antud käsitluses teistsugust tähendust.

Lisaks on lihtne märgata, et $D[X_i] = D[E_i]$, sest

$$D[X_i] = D[E_i + t_i] \overset{\text{Lause 3.2}}{=} D[E_i].$$

Eelnevates definitsioonides keskendusime testi tulemuste mõtestamisele fikseeritud vastaja korral. Kuna reeglina mõtestatakse teste praktikas mingi vastajate kogumi raames, siis keskendume ka meie edaspidi sellele.

Vaatleme elementaarsündmustena hulga $I \times \Omega$ elemente ning eeldame, et eksisteerib tõenäosus

$$P_p : 2^{I\times\Omega} \to \mathbb{R},$$

kus funktsiooni $P_p$ tõlgendame kui isiku $i \in I$ ja testi tulemuse $\omega \in \Omega$ koos esinemis sagedust. vaata üle

Paneme tähele, et sellel elementaarsündmuste hulgal võime määrata diskreetse juhusliku suuruse $T$, nii et

$$T((i,\omega)) = t_i, i \in I.$$

Seda juhulikku suurust tõlgendame kui küsimustiku tegelikku tulemust. Defineerime testi vaadeldava tulemuse kui diskreetse juhusliku suuruse $X$, nii et

$$X(i,\omega)) = X_i(\omega)$$

ja testi vea kui diskreetse juhusliku suuruse $E$, nii et

$$E((i,\omega)) = E_i(\omega).$$

Paneme tähele, et kehtib $X = E + T$. Tõepoolest, olgu meil suvaline paar $(i,\omega) \in I \times \Omega$, siis

$$X((i,\omega)) = X_i(\omega) \overset{def}{=} t_i + E_i(\omega) = T((i,\omega)) + E((i,\omega)).$$

Eeldame edaspidises, et $X$ ei ole konstante juhuslik suurus – kui $X$ on konstantne, siis vaata üle.

MEELDETULETUSEKS

**Definitsioon.** Juhusliku suuruste $X$ ja $Y$ *kovariatsiooniks* nimetatakse suurust

$$cov(X,Y) = \epsilon\left[(X-\epsilon X)(Y-\epsilon Y)\right].$$

**Definitsioon.** Juhusliku suuruste $X$ ja $Y$ *korrelatsioonikordajaks* nimetatakse suurust

$$\rho(X,Y) = \frac{cov(X,Y)}{\sqrt{DX}\sqrt{DY}}$$

Esitame nüüd meie poolt üles ehitatud mudeli omaduse, mis osutub väga kasulikus. Olgu meil kaks suvalist küsimustikku, mille vaadeldavad tulemused on vastavalt $X = T + E$ ja $X' = T' + E'$, siis kehtib

$$cov(T, E') = 0. \tag{3.3}$$

Teisisõnu, küsimustiku tegeliku tulemuse ja küsimustiku mõõtmisvea vahel ei ole korrelatsiooni. See omadus muudab mudeli rakendamise palju lihtsamaks, kuna me ei pea eeldama, et meie koostatud küsimustikul on selline omadus. Kahjuks ei mahu selle omaduse tõestus käesoleva töö raamidesse, rangest tõestusest huvitatutele soovitame tutvuda Donald Zimmermani mudeli ülesehitusega [19].

Paneme tähele, et kuna me ei seadnud testidele $X$ ja $X'$ mingeid kitsendusi, siis ka $cov(T, E) = 0$.

Küll aga peame tegema järgmise eelduse – olgu meil kaks erinevat küsimustikku, mille mõõtmisvead on vastavalt $E$ ja $E'$, siis

$$cov(E, E') = 0. \tag{3.4}$$

Tehtud eeldus tähendab seda, et mõõtmisvead ei tohi olla süstemaatilised. Näiteks, jagades küsimustiku pooleks ning vaadeldes mõlemat osa kui eraldi küsimustikku, siis esimese mõõtmisviga teades ei tohiks see meile midagi öelda teise osa mõõtmisvea kohta. Paneme tähele, et see eeldus on siiamaani tehtutest praktikas kõige raskemini tagatav ning on potentsiaalne ohukoht testiteooria kasutamisel mingi küsimustiku mõtestamiseks.

MEELDETULETUSEKS

**Lause 3.5.** Juhuslike suuruste $X$ ja $Y$ puhul kehtib

$$D(X+Y) = D(X) + D(Y) + 2cov(X,Y)$$

*Tõestus.*

$$D(X+Y) \overset{def}{=} \epsilon[X+Y-\epsilon(X+Y)]^2 \overset{\epsilon \text{ lin.}}{=} \epsilon[X-\epsilon X+Y+\epsilon Y]^2 =$$
$$= \epsilon(X-\epsilon X)^2 + 2\epsilon(X-\epsilon X)(Y-\epsilon Y) + \epsilon(Y-\epsilon Y)^2 \overset{\text{cov def}}{=}$$
$$= D(X) + D(Y) + 2cov(X,Y)$$

□

Järgnevalt tutvume paralleelse küsimustiku mõistega. Kaks küsimustikku, mille vaadeldavad tulemused üle kõigi vastajate kogumi $I$ on $X = T + E$ ja $X' = T' + E'$ ning mille vaadeldavad tulemused vastaja $i \in I$ jaoks on $X_i = t_i + E_i$ ja $X'_i = t'_i + E'_i$, on paralleelsed parajasti siis, kui kehtivad järgmised väited:

1. $t_i = t'_i \; \forall i \in I$,
2. $D[E] = D[E']$.

Eelnevast järeldub lihtsalt, et

$$T = T'. \tag{3.6}$$

Tõepoolest, olgu $(i, \omega)$ suvaline paar hulgast $I \times \Omega$, siis kehtib

$$T((i,\omega) \overset{def}{=} t_i = t'_i = T'((i,\omega)).$$

Paneme tähele, et kahe paralleelse küsimustiku $X$ ja $X'$ korral kehtib

$$D[X] = D[X'], \tag{3.7}$$

kuna

$$D[X] = D[T+E] \overset{\text{Lause 3.5}}{=} D[T] + D[E] + 2cov(T,E) \overset{(3.3)}{=} D[T] + D[E] =$$
$$= D[T'] + D[E'] = D[T'] + D[E'] + 2cov(T',E') = D[T'+E'] = D[X'].$$

MEELDETULETUSEKS

**Lause 3.8.** Olgu meil juhuslikud suurused $X$, $Y$ ja $Z$. Siis

$$cov(X+Y,Z) = cov(X,Z) + cov(Y,Z).$$

*Tõestus.*

$$\begin{aligned}
cov(X+Y,Z) &\overset{def}{=} \epsilon\left[(X+Y-\epsilon\left[X+Y\right])(Z-\epsilon\left[Z\right])\right] \overset{\epsilon \text{ lin.}}{=} \\
&= \epsilon\left[(X+Y-\epsilon\left[X\right]+\epsilon\left[Y\right])(Z-\epsilon\left[Z\right])\right] = \\
&= \epsilon\left[\left((X-\epsilon\left[X\right])+(Y-\epsilon\left[Y\right])\right)(Z-\epsilon\left[Z\right])\right] = \\
&= \epsilon[(X-\epsilon\left[X\right])(Z-\epsilon\left[Z\right])+(Y-\epsilon\left[Y\right])(Z-\epsilon\left[Z\right])] = \\
&= \epsilon\left[(X-\epsilon\left[X\right])(Z-\epsilon\left[Z\right])\right]+\epsilon\left[(Y-\epsilon\left[Y\right])(Z-\epsilon\left[Z\right])\right]+ \\
&= cov(X,Z)+cov(Y,Z)
\end{aligned}$$

$\square$

Paralleelse küsimustiku abil saame klassikalise testiteooria raames defineerida reliaabluse. Olgu meil kaks paralleelset küsimustikku, mille vaadeldavad tulemused üle vastajate kogumi $I$ on vastavalt $X = T + E$ ja $X' = T' + E'$. Küsimustiku, mille vaadeldav tulemus on $X$, reliaablus üle vastajate kogumi $I$ on võrdne $X$ ja $X'$ korrelatsioonikordajaga, mida tähistame $\rho_{XX'}$, teisisõnu

$$\rho_{XX'} = corr\left(X, X'\right).$$

Eelneva põhjal saame näidata, et kehtib

$$\begin{aligned}
\rho_{XX'} &\overset{def}{=} \frac{cov(X,X')}{\sqrt{D\left[X\right]D\left[X'\right]}} \overset{(3.7)}{=} \frac{cov(X,X')}{\sqrt{D\left[X\right]D\left[X\right]}} = \frac{cov(T+E,T'+E')}{D\left[X\right]} \overset{\text{Lause 3.8}}{=} \\
&= \frac{cov(T,T')+cov(T,E')+cov(E,T')+cov(E,E')}{D\left[X\right]} \overset{(3.3)}{=} \\
&= \frac{cov(T,T')+cov(E,E')}{D\left[X\right]} \overset{(3.4)}{=} \frac{cov(T,T')}{D\left[X\right]} \overset{(3.6)}{=} \frac{cov(T,T)}{D\left[X\right]} \overset{def}{=} \\
&= \frac{\epsilon\left[(X-\epsilon\left[X\right])(X-\epsilon\left[X\right])\right]}{D\left[X\right]} \overset{def}{=} \frac{D\left[T\right]}{D\left[X\right]}.
\end{aligned} \tag{3.9}$$

Samuti märgime, et kuna $T = X - E$, siis kehtib

$$\rho_{XX'} = \frac{D\left[T\right]}{D\left[X\right]} = \frac{D\left[X-E\right]}{D\left[X\right]} = \frac{D\left[X\right]-D\left[E\right]}{D\left[X\right]} = 1 - \frac{D\left[E\right]}{D\left[X\right]}. \tag{3.10}$$

Paneme tähele, kuna $D[X] = D[T] + D[E]$, siis eelneva põhjal $\rho_{XX'} \in [0, 1]$.

Eelneva põhjal on selge, et väide "küsimustiku reliaablus on suurem" on samaväärne järgmise kolme väitega:

1. küsimustiku korrelatsioon paralleelse küsimustikuga on suurem,
2. küsimustiku tegeliku tulemuse dispersioon on suurem võrreldes küsimustiku vaadeldava tulemuse dispersiooniga,
3. küsimustiku mõõtmisvea dispersioon on väiksem võrreldes küsimustiku vaadeldava tulemuse dispersiooniga.

Märgime, et klassikalise testiteooria raames defineeritud reliaablus sobib kokku eelmises peatükis antud mitteformaalse definitsiooniga, kuna küsimustik on iseendaga paralleelne võib lugeda ka sama testi uuesti läbiviimist sama vastajate kogumi peal. Paneme tähele, et tegemist on suhteliselt nõrku eeldusi vajava teooriaga, kõige raskem on praktikas tagada süstemaatiliste vigade puudumine.

Kuna küsimustiku tegelik tulemus on suurus, mida me praktikas ei tea, ning ka paralleelsete testide läbiviimine ei ole tihti võimalik, on kasutusele on üritatud on võimalus testi reliaablust hinnata meie jaoks oluline. Järgnevalt vaatleme, kuidas seda teha.

## 3.2 Vajalikud taustteadmised reliaabluse hindamiseks

Järgnev käsitlus tugineb Jacksoni ja Anguwamba 1977. aasta artiklile. [8] Olgu meil vastajate populatsioon $I$, üle mille vaatleme küsimustikku, milles on $k$ küsimust. Vaatleme seda küsimustikku klassikalise testiteooria raames ning olgu $X$ küsimustiku vaadeldav tulemus, $T$ küsimustiku tegelik tulemus ning $E$ küsimustiku mõõtmisviga. Vaatleme iga küsimust kui ühest küsimusest koosnevat alamküsimustikku ja tähistame fikseeritud küsimuse $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$ vaadeldava tulemuse kui $X_i$, tegeliku tulemuse kui $T_i$ ning mõõtmisvea $E_i$. Seega $X = \sum_{i=0}^{k} X_i$, $T = \sum_{i=0}^{k} T_i$ ja $E = \sum_{i=0}^{k} E_i$ . Paneme tähele, et kui eelnevas peatükis tähistasime alaindeksiga küsimusele vastajat, siis edaspidi tähistame sellega kindlat küsimust.

Vaatleme testi küsimuste tulemuste ja mõõtmisvea vektoreid: $(X_1, X_2, X_3, \ldots, X_n)$, $(T_1, T_2, T_3, \ldots, T_n)$, $(E_1, E_2, E_3, \ldots, E_n)$. Tähistame nende vektorite kovariatsioonimaatriksid[3] vastavalt $\Sigma_X, \Sigma_T, \Sigma_E$. Seega,

$$\Sigma_X = \begin{pmatrix} cov\,(X_1, X_1) & cov\,(X_1, X_2) & cov\,(X_1, X_3) & \cdots & cov\,(X_1, X_k) \\ cov\,(X_2, X_1) & cov\,(X_2, X_2) & cov\,(X_2, X_3) & \cdots & cov\,(X_2, X_n) \\ cov\,(X_3, X_1) & cov\,(X_3, X_2) & cov\,(X_3, X_3) & \cdots & cov\,(X_n, X_n) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ cov\,(X_n, X_1) & cov\,(X_n, X_2) & cov\,(X_n, X_3) & \cdots & cov\,(X_n, X_n) \end{pmatrix}.$$

Eelnevalt läbiviidud arutelu (vt. (3.9)) põhjal teame, et $cov(X_i, X_j) = cov(T_i, T_j) + cov(E_j, E_j)$. Seega,

$$\Sigma_X = \Sigma_T + \Sigma_E. \tag{3.11}$$

Lisaks kehtib eelduse (3.4) põhjal, et juhul kui $i \neq j$, siis $cov\,(E_i, E_j) = 0$. Sellest tulenevalt kehtib

$$\Sigma_E = \begin{pmatrix} cov\,(E_1, E_1) & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & cov\,(E_2, E_2) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & cov\,(E_3, E_3) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & cov\,(E_n, E_n) \end{pmatrix}. \tag{3.12}$$

Tähistame edaspidi maatriksi $\Sigma_X$ elemente $x_{ij}$, maatriksi $\Sigma_T$ elemente $t_{ij}$ ning maatriksi $\Sigma_E$ peadiagonaali elemente $\theta_i$. Seega, kui $i \neq j$, siis $t_{ij} = x_{ij}$ ning $t_{ii} = x_{ii} - \theta_i$.

Tuletame meelde, et eelmises peatükis veendusime (3.10), et testi reliaablus võrdub avaldisega $1 - \frac{D[E]}{D[X]}$.

Veendume, et juhuslike suuruste summa dispersioon võrdub liidetavate kovariatsioonimaatriksi elementide summaga, ehk kui $X = \sum\limits_{i=1}^{k}$ ja $\Sigma_X$ on vektori $(X_1, X_2, \ldots, X_K)$ kovariatsioonimaatriks, siis

$$D[X] = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k} x_{ij}. \tag{3.13}$$

[3]Praktikas ei ole kovariatsioonimaatriksid meile teada, kuid valimi põhjal on meil võimalik saada hinnang vaadeldavate tulemuste kovariatsioonimaatriksi kohta.

Eelnevas veendumiseks paneme tähele, et

$$D[X] = D[X_1 + X_2 + \ldots + X_k] \overset{\text{Lause 3.5}}{=}$$
$$= D[X_1] + D[X_2 + X_3 + \ldots + X_k] + 2cov(X_1, X_2 + X_3 \ldots + X_k) \overset{\text{Lause 3.8}}{=}$$
$$= D[X_1] + D[X_2 + X_3 + \ldots + X_k] +$$
$$+ 2[cov(X_1, X_2) + cov(X_1, X_3) + \ldots + cov(X_1, X_k)].$$

Näeme, et tegemist on rekurrentse võrrandiga. Arvestades, et $cov(X, X) = D[X]$ (vt.(3.9)), näeme, et igale liidetavale eelnevas summas vastab mingite kovariatsioonimaatriksite elementide summa, kusjuures kõik kovariatsioonimaatriksi elemendid kuuluvad täpselt ühte nendest summadest. Kovariatsiooni maatriksi jagunemist illustreerib järgnev tabel, kus sinisega on tähistatud $D[X_1]$, punasega liidetavad, mille summa on võrdne arvuga $2[cov(X_1, X_2) + cov(X_1, X_3) + \ldots + cov(X_1, X_k)]$ ja rohelisega liikmed, mille summast moodustub $D[X_1 + X_2 + \ldots + X_k]$. Siinkohal meenutame, et kovariatsioon on sümmeetriline ning seega $cov(X_i, X_j) = cov(X_j, X_i)$.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $cov(X_1, X_1)$ | $cov(X_1, X_2)$ | $cov(X_1, X_3)$ | $\ldots$ | $cov(X_1, X_k)$ |
| $cov(X_2, X_1)$ | $cov(X_2, X_2)$ | $cov(X_2, X_3)$ | $\ldots$ | $cov(X_1, X_k)$ |
| $cov(X_3, X_1)$ | $cov(X_3, X_2)$ | $cov(X_3, X_3)$ | $\ldots$ | $cov(X_3, X_k)$ |
| $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\ddots$ | $\vdots$ |
| $cov(X_k, X_1)$ | $cov(X_k, X_2)$ | $cov(X_k, X_3)$ | $\ldots$ | $cov(X_k, X_k)$ |

Lisaks on sellel rekurrentsel võrrandil lihtne baasjuht: selleks on olukord, kus summa koosneb ainult ühest liidetavast.

Arvestades maatriksi 3.12 struktuuri, saame võrduse

$$1 - \frac{D[E]}{D[X]} = 1 - \frac{\sum_i \theta_i}{\sum_i \sum_j x_{ij}}. \tag{3.14}$$

MEELDETULETUSEKS

**Definitsioon.** Maatriks $C \in Mat_k(\mathbb{R})$ on *mittenegatiivselt määratud*, kui iga maatriksi $v \in Mat_{k,1}(\mathbb{R})$ korral $v^T C v \geq 0$.

Veendume järgnevalt, et iga kovariatsioonimaatriks ning järelikult ka $\Sigma_X, \Sigma_T$ ja $\Sigma_E$ on mittenegatiivselt määratud.

MEELDETULETUSEKS

**Lause 3.15.** Kui $X$ ja $Y$ on juhuslikud suurused ja $\alpha \in \mathbb{R}$, siis

$$cov(X, \alpha Y) = \alpha cov(X, Y)$$

*Tõestus.*

$$cov(X, \alpha Y) = \epsilon\left[(X - \epsilon[X])(\alpha Y - \epsilon[\alpha Y])\right] \overset{\epsilon \text{ lin.}}{=}$$
$$= \epsilon\left[(X - \epsilon[X])(\alpha Y - \alpha\epsilon[Y])\right] = \epsilon\left[\alpha(X - \epsilon[X])(Y - \epsilon[Y])\right] =$$
$$= \alpha\epsilon\left[(X - \epsilon[X])(Y - \epsilon[Y])\right] = \alpha cov(X, Y)$$

□

Olgu meil suvaliste juhuslike suuruste vektor $X_1, X_2, \dots, X_n$, kus $n \in \mathbb{N}$ ja olgu $\Sigma_X$ selle vektori kovariatsioonimaatriks. Olgu meil suvaline $k$-vektor $v = (v_1, v_2, \dots, v_n)$. Konstrueerime uue juhuslike suuruste vektori $(X'_1, X'_2, \dots, X'_n)$, kusjuures $X'_i = v_i X_i$ ning olgu $\Sigma'_X$ selle vektori kovariatsioonimaatriks. Vaatleme juhuslikku suurust $X' = \sum_{i=1}^{n} X'_i$. Kuna eelneva põhjal $D[X'] = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \Sigma'_{Xij}$ ja definitsiooni põhjal $D[X'] \geq 0$, siis $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \Sigma'_{Xij} \geq 0$. Kuna $\Sigma'_X$ on kovariatsioonimaatriks, siis

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \Sigma'_{Xij} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} cov(v_i X_i, v_j X_j) \overset{\text{Lause 3.15}}{=} \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} v_i v_j cov(X_i, X_j). \tag{3.16}$$

Paneme tähele, et

$$v^T \Sigma_X v =$$
$$= \begin{pmatrix} v_1 cov(X_1, X_1) + v_2 cov(X_1, X_2) + \dots v_n cov(X_1, X_n) \\ v_1 cov(X_2, X_1) + v_2 cov(X_2, X_2) + \dots v_n cov(X_2, X_n) \\ \vdots \\ v_1 cov(X_k, X_1) + v_2 cov(X_k, X_2) + \dots v_n cov(X_n, X_n) \end{pmatrix} v =$$
$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} v_i v_j cov(X_i, X_j) \overset{(3.16)}{=} \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \Sigma'_{Xij} = D[X']$$

Seega $v^T \Sigma_X v \geq 0$, ning kuna $v$ oli valitud suvaliselt, siis $\Sigma_X$ on mittenegatiivselt määratud. Kuna $n$ ja $X_1, X_2, \dots X_n$ olid valitud suvaliselt, siis on iga kovariatsioonimaatriks mittenegatiivselt määratud.

Sellega oleme andnud reliaabluse matemaatilise definitsiooni ning mõtestanud lahti vajaminevad taustteadmised reliaabluse hindamiseks. Järgnevalt tuletame mõned reliaabluse alumised tõkked.

# 4 Reliaabluse alumised tõkked

Järgnevalt vaatleme reliaabluse viite alumist tõket ning üritame pakkuda lahenduse töö alguses püstitatud probleemile. Vaadeldavatest alumistest tõketest neli – $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ – pakkus 1945. aastal välja Louis Guttman [6]. Viienda vaadeldava tõkke pakkusid välja Jackson ja Anguwamba oma 1977. aasta artiklis [8]. Kõik tõkked tuletame Jacksoni ja Anguwamba artiklile tuginedes.

Olgu meil vastajate kogum $I$, üle mille vaatleme $k$ küsimusest koosnevat küsimustikku, mille vaadeldav tulemus on $X$, tegelik tulemus on $T$ ja mõõtmisviga on $E$. Nummerdame küsimused arvudega 1 kuni $k$. Vaatleme iga küsimust eraldi alamküsimustikuna, ning olgu $X_i$ küsimuse $i$ vaadeldav tulemus, $T_i$ küsimuse $i$ tegelik tulemus ja $E_i$ küsimuse $i$ mõõtmisviga. Analoogiliselt eelmise peatükiga tähistame vektorite $(X_1, X_2, \dots X_k)$, $(T_1, T_2, \dots, T_k)$ ja $(E_1, E_2, \dots, E_k)$ kovariatsioonimaatrikseid kui $\Sigma_X, \Sigma_T, \Sigma_E \in Mat_k(\mathbb{R})$. Nagu eelmises peatükis, tähistame ka siin maatriksi $\Sigma_X$ elemente kui $x_{ij}$, maatriksi $\Sigma_T$ elemente kui $t_{ij}$ ning maatriksi $\Sigma_E$ peadiagonaali elemente kui $\theta_i$. Edaspidi vaatleme selles peatükis küsimustiku, mille vaadeldav tulemus on $X$, reliaabluse alumisi tõkkeid.

## 4.1 Alumine tõke $\lambda_1$

Vaatleme kovariatsioonimaatriksit $\Sigma_T$. Eeldame vastuväiteliselt, et maatriksi $\Sigma_T$ peadiagonaalil leidub element, mis on negatiivne. Olgu selleks elemendiks $t_{ii}$. Olgu $v$ vektor, millel on $k$ elementi, kusjuures

$$v_j = \begin{cases} 1, j = 1 \\ 0, j \neq 1 \end{cases} .$$

Paneme tähele, et nüüd $v^T \Sigma_T v = t_{ii} < 0$. Tõepoolest,

$$v^T \Sigma_T v = \begin{pmatrix} t_{i1} & t_{i2} & \dots & t_{ik} \end{pmatrix} v = t_{ii}.$$

Seega ei ole maatriks enam positiivselt määratud, mis on eelmises peatükis läbiviidud arutelu põhjal vastuolus sellega, et $\Sigma_T$ on kovariatsioonimaatriks.

Seega iga $i$ korral peab kehtima $t_{ii} \geq 0$ ning kuna eelmise peatüki põhjal $\Sigma_X = \Sigma_T + \Sigma_E$, siis peab kehtima $\theta_i < x_{ii}$ iga $i, 1 \leq i \leq k$ korral.

Seega ka $\sum_{i=1}^{k} \theta_i \leq \sum_{i=1}^{k} x_{ii}$. Võttes arvesse võrdust (3.14), oleme saanud küsimustiku, mille vaadeldav tulemus on $X$, reliaabluse alumise tõkke, mida tähistame kui $\lambda_1$, kus

$$\lambda_1 = 1 - \frac{\sum\limits_{i=1}^{k} x_{ii}}{\sum\limits_{i=1}^{k}\sum\limits_{j=1}^{k} x_{ij}} \leq 1 - \frac{\sum\limits_{i=1}^{k} \theta_i}{\sum\limits_{i=1}^{k}\sum\limits_{j=1}^{k} x_{ij}} = 1 - \frac{D\,[E]}{D\,[X]}. \tag{4.1}$$

## 4.2 Alumine tõke $\lambda_2$

Enne järgmise alumise tõkke tuletamist veendume, et kehtivad kaks abitulemust.

Olgu meil mitte-negatiivselt määratud sümmeetriline maatriks $C, C \in Mat_n(\mathbb{R})$. Näitame, et sellisel juhul kehtib väide, et iga $i, j$ korral

$$c_{ii}c_{jj} \geq c_{ij}^2.$$

Valime suvaliselt $i$ ja $j$, nii et $i \neq j, 1 \leq i, j \leq n$ ning $\alpha \in \mathbb{R}$. Olgu meil $n$-vektor $v$, kus

$$v_k = \begin{cases} 1, k = i \\ \alpha, k = j \\ 0, k \notin \{i, j\} \end{cases}.$$

Kuna eelduste kohaselt on $C$ mitte-negatiivselt määratud, siis peab kehtima

$$0 \leq v^T C v = \begin{pmatrix} \mathbf{0}^T & 1 & \mathbf{0}'^T & \alpha & \mathbf{0}''^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ 1 \\ \mathbf{0}' \\ \alpha \\ \mathbf{0}'' \end{pmatrix}, \tag{4.2}$$

kus $\mathbf{0}, \mathbf{0}', \mathbf{0}''$ on nullvektorid pikkustega vastavalt $i-1, j-i-1, n-j$.

Arvutame avaldise 4.2 väärtuse:

$$v^T C v = \begin{pmatrix}\mathbf{0}^T & 1 & \mathbf{0}'^T & \alpha & \mathbf{0}''^T\end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ 1 \\ \mathbf{0}' \\ \alpha \\ \mathbf{0}'' \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix}\mathbf{0}^T & 1 & \mathbf{0}'^T & \alpha & \mathbf{0}''^T\end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{1i} + \alpha c_{1j} \\ \vdots \\ a_{ni} + \alpha c_{nj} \end{pmatrix} =$$

$$= c_{ii} + \alpha c_{ij} + \alpha c_{ji} + \alpha^2 c_{jj} = c_{ii} + 2\alpha c_{ij} + \alpha^2 c_{jj}.$$

Seega saame, et $0 \leq c_{ii} + 2\alpha c_i j + c_{jj}$. See, et saadud ruutvõrratus kehtib, on samaväärne sellega, et vaadeldava ruutvõrrandi diskriminant ei ole nullist suurem. Seega,

$$c_{ij}^2 - c_i c_j \leq 0,$$

milles me soovisimegi veenduda. Eelneva arutelu idee pärineb Ivar Tammeraidi õpikust. [17].

Olgu meil mingid arvud $y_i, 1 \leq i \leq n$. Paneme tähele, et siis kehtib järgvev võrdus

$$\left( \sum_{i=1}^{n} y_i \right)^2 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} y_i y_j = \sum_{i=1}^{n} y_i^2 + \sum_{i=1}^{n} \left( \sum_{j=1}^{i-1} y_i y_j + \sum_{m=i+1}^{n} y_i y_m \right).$$

Järelikult kehtib ka

$$2\,(n-1) \left( \sum_{i=1}^{n} y_i \right)^2 = 2\,(n-1) \sum_{i=1}^{n} y_i^2 + 2\,(n-1) \sum_{i=1}^{n} \left( \sum_{j=1}^{i-1} y_i y_j + \sum_{m=i+1}^{n} y_i y_m \right).$$

Liidetavad teistmoodi grupeerides saame, et

$$2\,(n-1)\sum_{i=1}^{n}y_i^2+2\,(n-1)\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{i-1}y_iy_j+\sum_{m=i+1}^{n}y_iy_m\right)=$$
$$=\left(y_1^2-2y_1y_2+y_2^2\right)+\left(y_1^2-2y_1y_3+y_3^2\right)+\cdots+\left(y_1^2-2y_1y_n+y_n^2\right)+$$
$$+\left(y_2^2-2y_2y_1+y_1^2\right)++\left(y_2^2-2y_2y_3+y_3^2\right)+\cdots+\left(y_2^2-2y_2y_{nn}+y_n^2\right)+$$
$$+\cdots+$$
$$+\left(y_n^2-2y_ny_1+y_1^2\right)+\left(y_n^2-2y_ny_1+y_{11}^2\right)+\cdots+\left(y_n^2-2y_ny_{n-1}+y_{n-1}^2\right)+$$
$$+2n\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{i-1}y_iy_j+\sum_{m=i+1}^{n}y_iy_m\right)=$$
$$=\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{i-1}(y_i-y_j)^2+\sum_{m=i+1}^{n}(y_i-y_m)^2\right)+2n\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{i-1}y_iy_j+\sum_{m=i+1}^{n}y_iy_m\right)$$

Vaatleme jällegi kovariatsiooni maatriksit $\Sigma_E$. Märkame, et kuna $x_{ii}=\theta_i+t_{ii}$ iga $1\le i\le k$ korral, siis kehtib järgnev:

$$\sum_{i=1}^{k}\theta_i=\sum_{i=1}^{k}x_{ii}-\sum_{i=1}^{k}t_{ii}$$

.

Märgime, et kuna kovariatsioon on definitsioon põhjal sümmeetriline, siis on ka vektori $(Y_1,Y_2,\ldots,Y_n)$ kovariatsioonimaatriks $\Sigma_Y$ sümmeetriline. Tõepoolest, iga $1\le i,j\le n$ korral

$$\Sigma_{Y\,ij}=cov(Y_i,Y_j)=cov(Y_j,Y_i)=\Sigma_{Y\,ji}.$$

Eelnevalt käsitletud algebralise samasuse ning kovariatsioonimaatriksite mittenegatiivselt määratuse ja sümmeetrilisuse põhjal kehtib

$$\sum_{i=1}^{k}t_{ii}=\sqrt{\frac{\sum\limits_{i=1}^{k}\left(\sum\limits_{j=1}^{i-1}(t_{ii}-t_{jj})^2+\sum\limits_{m=i+1}^{k}(t_{ii}-t_{mm})^2\right)+2k\sum\limits_{i=1}^{k}\left(\sum\limits_{j=1}^{i-1}t_{ii}t_{jj}+\sum\limits_{m=i+1}^{k}t_{ii}t_{mm}\right)}{2\,(k-1)}}\ge$$
$$\ge\sqrt{\frac{k\sum\limits_{i=1}^{k}\left(\sum\limits_{j=1}^{i-1}t_{ii}t_{jj}+\sum\limits_{m=i+1}^{k}t_{ii}t_{mm}\right)}{(k-1)}}$$

Arvestades, et kovariatsioonimaatriks on mitte-negatiivselt määratud ning seda, et kui $i \neq j$, siis $t_{ij} = x_{ij}$, saame eelnevalt tõestatud abitulemuse põhjal väita, et

$$\sum_{i=1}^{k} t_{ii} \geq \sqrt{\frac{k \sum_{i=1}^{k} \left( \sum_{j=1}^{i-1} t_{ii}t_{jj} + \sum_{m=i+1}^{k} t_{ii}t_{mm} \right)}{(k-1)}} \geq \sqrt{\frac{k \sum_{i=1}^{k} \left( \sum_{j=1}^{i-1} x_{ij}^2 + \sum_{m=i+1}^{k} x_{im}^2 \right)}{(k-1)}}$$

Selle taustal saame defineerida reliaabluse alumise tõkke, mida tähistame $\lambda_2$:

$$\lambda_2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^{k} x_{ii} - \sqrt{\frac{k \sum_{i=1}^{k} \left( \sum_{j=1}^{i-1} x_{ij}^2 + \sum_{m=i+1}^{k} x_{im}^2 \right)}{(k-1)}}}{\sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{k} x_{ij}} \leq 1 - \frac{\sum_{i=1}^{k} x_{ii} - \sum_{i=1}^{k} t_{ii}}{\sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{k} x_{ij}} = 1 - \frac{\sum_{i=1}^{k} \theta_i}{\sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{k} x_{ij}} = 1 - \frac{D[E]}{D[X]}.$$

Paneme tähele, et

$$\lambda_2 = \lambda_1 + \frac{\sqrt{\frac{k \sum_{i=1}^{k} \left( \sum_{j=1}^{i-1} x_{ij}^2 + \sum_{m=i+1}^{k} x_{im}^2 \right)}{(k-1)}}}{\sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{k} x_{ij}}$$

ning seega $\lambda_1 \leq \lambda_2$.

## 4.3 Alumine tõke $\lambda_3$

Vaatleme jällegi kovariatsioonimaatriksit $\Sigma_T$. Olgu meil arvud $i, j$, nii et $1 \leq i, j \leq k, j \neq i$ ning olgu meil $k$-vektor $v$, mille element kohal $i$ on 1 ja element kohal $j$ on $-1$. Kuna kovariatsioonimaatriks peab olema mitte-negatiivselt määratud, siis peab kehtima

$$0 \leq v^T \Sigma_T v = v^T \begin{pmatrix} t_{1i} - t_{1j} \\ t_{2i} - t_{2j} \\ \vdots \\ t_{ki} - tkj \end{pmatrix} = t_{ii} + t_{jj} - 2t_{ij}.$$

Võttes arvesse, et kui $i \neq j$, siis $x_{ij} = t_{ij}$, saame, et $t_{ii} + t_{jj} \geq 2x_{ij}$.

Teame, et võimalusi valida $i$ ja $j$ nii, et $i \neq j$ on $k\,(k-1)$ tükki. Summeerides kõikide võimalike $i$ ja $j$ valikul saadud võrratused saame, et

$$2\,(k-1)\sum_{i=1}^{k} t_{ii} \geq 2\sum_{i=1}^{k}\left(\sum_{j=1}^{i-1} x_{ij} + \sum_{m=i+1}^{k} x_{im}\right),$$

mis on samaväärne sellega, et

$$\sum_{i=1}^{k} t_{ii} \geq \frac{1}{k-1}\sum_{i=1}^{k}\left(\sum_{j=1}^{i-1} x_{ij} + \sum_{m=i+1}^{k} x_{im}\right).$$

Eelneva põhjal oleme saanud järgmise reliaabluse alumise tõkke:

$$\lambda_3 = 1 - \frac{\sum\limits_{i=1}^{k} x_{ii} - \frac{1}{k-1}\sum\limits_{i=1}^{k}\left(\sum\limits_{j=1}^{i-1} x_{ij} + \sum\limits_{m=i+1}^{k} x_{im}\right)}{\sum\limits_{i=1}^{k}\sum\limits_{j=1}^{k} x_{ij}} \leq$$

$$\leq 1 - \frac{\sum\limits_{i=1}^{k} x_{ii} - \sum\limits_{i=1}^{k} t_{ii}}{\sum\limits_{i=1}^{k}\sum\limits_{j=1}^{k} x_{ij}} = 1 - \frac{\sum\limits_{i=1}^{k} \theta_i}{\sum\limits_{i=1}^{k}\sum\limits_{j=1}^{k} x_{ij}} = 1 - \frac{D\,[E]}{D\,[X]}.$$

Tõkke teisendamisel saame, et

$$\lambda_3 = 1 - \frac{\sum\limits_{i=1}^{k} x_{ii} - \frac{1}{k-1}\sum\limits_{i=1}^{k}\left(\sum\limits_{j=1}^{i-1} x_{ij} + \sum\limits_{m=i+1}^{k} x_{im}\right)}{\sum\limits_{i=1}^{k}\sum\limits_{j=1}^{k} x_{ij}} =$$

$$= \frac{\sum\limits_{i=1}^{k}\sum\limits_{j=1}^{k} x_{ij} - \sum\limits_{i=1}^{k} x_{ii} + \frac{1}{k-1}\sum\limits_{i=1}^{k}\left(\sum\limits_{j=1}^{i-1} x_{ij} + \sum\limits_{m=i+1}^{k} x_{im}\right)}{\sum\limits_{i=1}^{k}\sum\limits_{j=1}^{k} x_{ij}} =$$

$$= \frac{\sum\limits_{i=1}^{k}\left(\sum\limits_{j=1}^{i-1} x_{ij} + \sum\limits_{m=i+1}^{k} x_{im}\right) + \frac{1}{k-1}\sum\limits_{i=1}^{k}\left(\sum\limits_{j=1}^{i-1} x_{ij} + \sum\limits_{m=i+1}^{k} x_{im}\right)}{\sum\limits_{i=1}^{k}\sum\limits_{j=1}^{k} x_{ij}} =$$

$$= \frac{k}{k-1}\left(\frac{\sum\limits_{i=1}^{k}\left(\sum\limits_{j=1}^{i-1} x_{ij} + \sum\limits_{m=i+1}^{k} x_{im}\right)}{\sum\limits_{i=1}^{k}\sum\limits_{j=1}^{k} x_{ij}}\right) = \frac{k}{k-1}\left(1 - \frac{\sum\limits_{i=1}^{k} x_{ii}}{\sum\limits_{i=1}^{k}\sum\limits_{j=1}^{k} x_{ij}}\right).$$

Tuletades meelde tõkke $\lambda_1$ definitsiooni (4.1) on ilmne, et

$$\lambda_3 = \frac{n\ \lambda_1}{n-1}. \tag{4.3}$$

ja seega $\lambda_1 \leq \lambda_3$. Lisaks on võimalik näidata, et $\lambda_3 \leq \lambda_2$, näiteks [13, 148-149].

Reliaabluse alumine tõke $\lambda_3$ on enam tuntud kui Cronbachi $\alpha$, mis on nimetatud Lee Cronbachi järgi, kes kasutas seda oma 1951. aasta artiklis [2], ning see on ilmselt enim kasutatud reliaabluse hinnang. Käesolevas töös jääme selle alumise tõkke nimetamisel siiski $\lambda_3$ juurde – nii nimetas tuletatud tõket Louis Guttman oma kuus aastat varem ilmunud artiklis [6].

Siinkohal märgime ka ära, et $\lambda_3$ kasutatakse tihti ka testi sisemise järjepidavuse hinnanguna ning sellega kokku puutudes tuleb kindlasti välja selgitada, mida autor reliaabluse all mõistab.

## 4.4 Alumine tõke $\lambda_4$

Vaatleme kovariatsioonimaatriksit $\Sigma_T$. Vaatleme $k$ vektorite hulka $V = \{v : |v_i| = 1\ \forall i, 1 \leq i \leq k\}$. Olgu meil suvaline vektor $v \in V$. Kuna $\Sigma_T$ on mitte-negatiivselt määratud, siis teame, et kehtib

$$0 \leq v^T \Sigma_T v.$$

Arvestades kovariatsioonimaatriksi $\Sigma_E$ omadusi, saame võrduse (3.11) põhjal

$$\sum_{i=1}^{k} \theta_i = \sum_{i=1} v_i^2 \theta_i = v^T \Sigma_E v \leq v^T \Sigma_X v.$$

Seega, iga $v \in V$ korral saame reliaabluse alumise tõkke. Tõepoolest, (3.14) põhjal iga vektori $v \in V$ korral

$$1 - \frac{v^T \Sigma_X v}{\sum\limits_{i=1}^{k} \sum\limits_{j=1}^{k} x_{ij}} \leq 1 - \frac{\sum\limits_{i=1}^{k} \theta_i}{\sum\limits_{i=1}^{k} \sum\limits_{j=1}^{k} x_{ij}} = 1 - \frac{D[E]}{D[X]}.$$

Defineerime alumise tõkke $\lambda_4$ kui maksimumi kõikidest sellistest tõketest, seega

$$\lambda_4 = \max_{v \in V} \left( 1 - \frac{v^T \Sigma_X v}{\sum\limits_{i=1}^{k} \sum\limits_{j=1}^{k} x_{ij}} \right).$$

## 4.5 Alumine tõke glb

Paneme tähele, et $\Sigma_E$ struktuuri ( 3.12 ) tõttu on tema mitte-negatiivselt määratus samaväärne sellega, et $0 \leq \theta_i$ iga $1 \leq i \leq k$ korral.

Tõepoolest, olgu $\Sigma_E$ mitte-negatiivselt määratud, ning oletame vastuväiteliselt, et leidub $i, 1 \leq i \leq k$ nii, et $0 > \theta_i$. Olgu $v$ $k$-vektor, nii et

$$v_j = \begin{cases} 1, j = i \\ 0, j \neq i \end{cases}.$$

Siis $v^T\Sigma_E v = \theta_i < 0$, mis on aga vastuolu sellega, et $\Sigma_E$ on mitte-negatiivselt määratud. Teistpidi, kehtigu $0 \leq \theta_i$ iga $1 \leq i \leq k$ korral. Olgu $v$ suvaline $k$-vektor. Siis $v^T\Sigma_E v = \sum_{i=1}^{k} v_i^2\theta_i \geq 0$. Kuna $v$ oli suvaline, siis on $\Sigma_E$ vastavalt definitsioonile mitte-negatiivselt määratud.

Üritame nüüd leida vea suurimat võimalikku dispersiooni, mis on (3.10) põhjal samaväärne summaga $\sum_{i=1}^{k}\theta_i$. Arvestades eelnevalt kirjeldatud piiranguid, saame selle kirja panna järgneva optimiseerimisülesandena:

$$\begin{gathered} max\sum_i \theta_i \\ \theta_i > 0 \\ \Sigma_X = \Sigma_T + \Sigma_E \\ \Sigma_T \succeq 0, \end{gathered} \tag{4.4}$$

kus kirjapilt $\Sigma_T \succeq 0$ tähistab tingimust "$\Sigma_T$ on mitte-negatiivselt määratud".

Olgu $z$ eelneva optimiseerimisülesande lahend $\Sigma_X$ korral. Tähistame tähekombinatsiooniga *glb*, mis tuleb fraasist *greatest lower bound*, lahendi $z$ abil saadud reliaabluse alumise tõkke, kus

$$glb = 1 - \frac{z}{\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k} x_{ij}}.$$

Paneme tähele, et kuna $z$ on maksimaalne vea dispersioon fikseeritud $\Sigma_X$ korral, siis on alumine tõke *glb* minimaalne võimalik reliaablus. Siit aga saame, et iga teine reliaabluse alumine tõke peab olema tõkkest *glb* väiksem või sellega võrdne. Seega on *glb* suurim võimalik alumine tõke.

## 4.6 Hinnangute kasutatavus praktikas

Püstitasime töö alguses küsimuse, kas on võimalik leida paremat reliaabluse hinnangut kui $\lambda_3$. Käsitletud hinnangutest on nii *glb* kui $\lambda_2$ reliaabluse alumised tõkked ning samas vähemalt sama suured kui $\lambda_3$, seega on need ka paremad reliaabluse hinnangud kui $\lambda_3$. Samuti on raske leida empiirilist näidet, kus $\lambda_4$ ei ole tingimata suurem oleks väiksem kui $\lambda_3$.

Paneme tähele, et $\lambda_3$ leidmine on väga lihtne, ning eelmise sajandi keskel, mil arvutuslik võimsus oli tagashoidlik, oli tegemist olulise eelisega. Tänapäeval on $\lambda_3$ lihtsus peaaegu olematu eelis, arvestades, et ka väga suurte küsimustike puhul ei valmista paremate hinnangute leidmine optimiseeritud programmi korral probleeme. Lisas B ära toodud näidete põhjal näeme, et praktikas võivad hinnangud olla väga erinevad, näiteks joonisel 16 kujutatud kovariatsoonimaatriksi korral erineb on *glb* võrreldes hinnanguga $\lambda_3$ oluliselt suurem, vastavalt $0,77$ ja $0,43$. Joonisel 16 on aga näha, et isegi juhul, kui $\lambda_3$ on suur, annavad nii *glb*, $\lambda_4$ kui ka $\lambda_3$ suuremaid hinnanguid. Seega, kui küsimustikku mõtestada klassikalise testiteooria raamistikus, siis ei näe autor põhjust, miks peaks kasutama reliaabluse hindamiseks $\lambda_3$ ning soovitab eelistada teisi, kõrgemaid hinnaguid. Autor märgib siinkohal, et tegemist tundub olevat valdkonna ekspertide seas levinud arvamusega. [13] [15] [3]

Mainime siinkohal ära, et hinnangud *glb* ja $\lambda_4$ võivad teatud tingimustel olla nihkega, probleem mis esineb praktikas, kui me kasutame kovariatsiooni maatriksi asemel tema valimi põhjal saadud hinnangut. Tõkke *glb* korral vaata näiteks [**?**], $\lambda_4$ puhul [**?**].

# 5 Programmiteek

Järgnevalt põhjendan lühidalt Pythoni eeliseid teegi realiseerimisel võrreldes selliste alternatiividega nagu Java või MATLAB:

1. Python on keel, millega programeerimisalased õpingud tavaliselt algavad. Näiteks Tartu Ülikoolis õpetatakse programeerimist keeles Python nii matemaatika-informaatika teaduskonna tudengitele suunatud aines kui ka teistele huvilistele suunatud aines "Programeerimise alused", mida 2013/2014 aasta kevadel kuulas 150 inimest. Autor loodab, et nende seas on ka mõned psühholoogia tudengid.
2. Pythonil on NumPy ja SciPy teekide näol väga hea arvutuslik tugi soovitud hinnangute implementeerimiseks.
3. Pythoni teeki on väga lihte integreerida mõne veebiraamistikuga, mis võiks olla loodava teegi üks rakenduskohti.
4. Python on vabavaraline ning tasuta kasutatav.

Meetodid, mis leiavad $\lambda_1$, $\lambda_2$, $\lambda_3$ ja $\lambda_4$, on implementeeritud nii programeerimiskeeles Python 2 kui ka programeerimiskeeles Python 3. Klass, mille abil saab leida *glb*, on implementeeritud sõltuvate teekide piirangute tõttu ainult programeerimiskeeles Python 2. Programmiteegi loomisel on kasutatud teeke SciPy [10] ja

CVXPY [4]. Progarammiteek on kättesaadav aadressil SIIA AADRESS

Järgnevalt esitame hinnangute implementatsioonid programmeerimiskeeles Python 2.

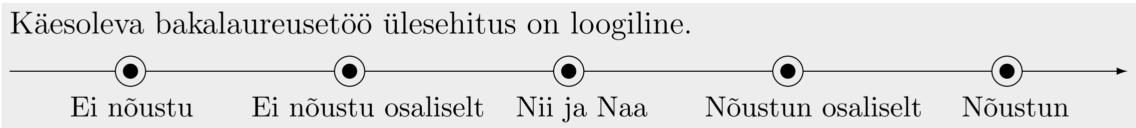
# 6 Intervallskaal alternatiivne tõlgendamine

Läheneme nüüd reliaabluse hinnangu parandamisele teisest suunast ning vaatleme, millist mõju avaldab hinnangule $\lambda_3$ vastuste teistsugune tõlgendamine intervallskaalal.

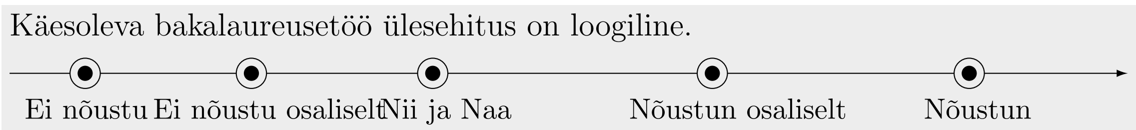
## 6.1 Vastuste tõlgendamine intervallskaalal

Käesoleva töö sissejuhatuses kirjeldasime viisi, kuidas vaikimisi teisendatakse vastused Likerti skaalalt intervallskaalale. Märgime, et selline tõlgendus ei ole põhjendatud – meil ei ole mingit teoreetilist põhjust eeldada, et kõik vastused on üksteisest sama "kaugel".

Sellest tähelepanekust lähtub järgmine küsimus – kas on võimalik leida paremat vastuste paigutust intervallskaalal kui vaikimisi meetod? Vaatleme kahte näidet:




Joonis 9: Näide sellest, kuidas paigutuvad hinnangud skaalal vaikimisi meetodit kasutades




Joonis 10: Näide hinnangute alternatiivsest paiknemisest skaalal

Vaikimisi tõlgendusele alternatiive välja pakkudes peab meil olema mingi karakteristik, mille alusel tõlgendust hinnata. Esitame järgmise idee: üritame leida hinnangute paiknemist skaalal nii, et küsimustiku reliaablus oleks võimalikult suur. Seame endale loomuliku piirangu: vastuste esialgne järjestus ei tohi muutuda.

## 6.2 Reliaabluse hindamine

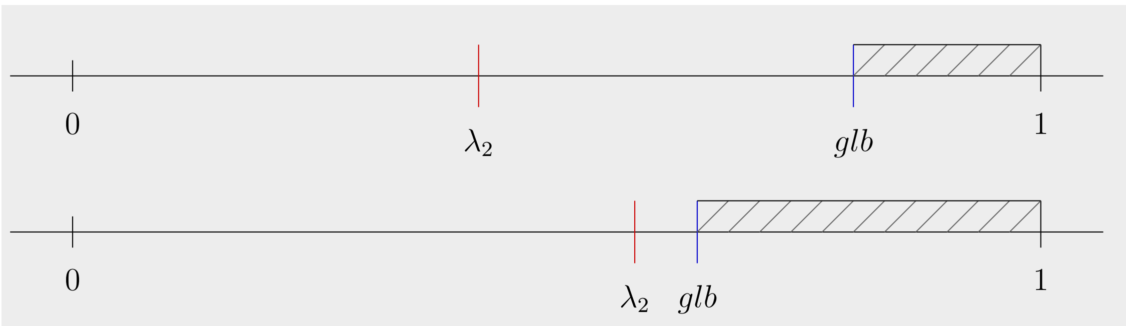
Kuna küsimustiku reliaabluse leidmine ei ole praktiliselt võimalik, siis kasutame selle lähendusena eelmises peatükis käsitletud alumisi tõkkeid. On selge, et parima tulemuse annab võimalikult täpse alumise tõkke kasutamine. Kuna sobiva tõlgenduse leidmine taandub optimiseerimisülesandele, siis kasutame siinkohal konservatiivsemat alumist tõket $\lambda_3$: selle arvutamise lihtsus, mis ei omanud fikseeritud tõlgenduse korral tänapäevase aruvutusvõimuse juures erilist tähtsust, osutub siin oluliseks eeliseks.

## 6.3 Lähenemise korrektsus

Lugejal võib siinkohal tekkida kaks küsimust lähenemise korrektuse kohta.

Esiteks, kas selline lähenemine tagab meile küsimustiku kõrgema reliaabluse? Vastus sellele küsimusele on kahjuks eitav – tõepoolest, on võimalik, et me saame teistsuguse tõlgendusega küsimustiku, mille reliaabluse alumine tõke on suurem kui vaikimisi tõlgendusega küsimustiku puhul, kuid mille reliaablus on samal ajal madalam. Kuna meil aga ei ole võimalik reliaablust täpselt mõõta, siis ei ole meil ka otsest põhjust uskuda, et ühe tõlgendusega saadud reliaablus on parem kui teisega.

Küll aga kerkib siinkohal esile praktilisem probleem seoses $\lambda_3$ kasutamisega reliaabluse hindamiseks. Nimelt võib leida aset olukord, kus meie pakutava tõlgenduse korral on $\lambda_3$ kõrgem kui vaikimisi tõlgenduse korral, kuid mõni tihedam alumine tõke on madalam. Illustreerime seda olukorda näitega.




Joonis 11: Olukord, kus alternatiivne tõlgendus suurendab alumist tõket $\lambda_3$ ja vähendab alumist tõket *glb*.

Joonisel kujutatud olukord on kindlasti ebasoovitav. Lihtsam võimalik lahendus on uue tõlgenduse korral leida teised alumised tõkked ning juhul, kui kõige tihedam alumine tõke on vaikimisi tõlgenduse korral suurem kui leitud tõlgenduse korral, siis jääda vaikimisi tõlgenduse juurde. Keerukam lahendus oleks kasutada optimiseerimisel mõnda tihedamat alumist tõket – selle lähenemise puuduseks on aga vajadus lahendada keerukam optimiseerimisülesanne.

Teiseks, kuidas mõjutab vastuste tavapärasest erinev tõlgendus küsimustiku valiidsust? Selle küsimuse korral märgime ära, et kuigi vaikimisi definitsioon on laialdaselt levinud, on ta siiski täiesti arbitraarne ning seega samaväärne meie poolt pakutud tõlgendusega – meil ei ole mingit kindlat põhjust uskuda, et ühe tõlgenduse korral on valiidsus parem kui teise korral. Ühelt poolt on selline vastus mitterahuldav – meie pakutud lahendus ei pruugi olla parem kui olemasolev. Teisalt ei pruugi vaikimisi kasutatav tõlgendus olla parem kui meie poolt pakutav.

Meie pakutava tõlgenduse väikese eelisena võib siiski ära tuua järgneva. Kuna enamiku valiidsuse definitsioonide korral on valiidsus ülevalt tõkestatud mingi reliaablusest sõltuva funktsiooniga (kõige levinuma definitsiooni korral on tõkkeks reliaabluse positiivne ruutjuur), siis reliaabluse alumise tõkke abil saame midagi öelda valiidsuse kõige väiksema võimaliku ülemise tõkke kohta. Paneme tähele, et kuna teame ainult reliaabluse alumist tõket ja mitte reliaablust ennast, siis ei ole meil mingit põhjust väita, et vähim võimalik ülemine tõke on ka küsimustiku valiidsuse ülemiseks tõkkeks.

## 6.4 Alternatiivse tõlgenduse matemaatiline sõnastus

Olgu meil populatsioon $I$ ning $k$ küsimusega küsimustik, kus iga küsimuse kohta palutakse hinnangut $l$-palli Likerti skaalal. Nummerdama küsimused naturaalarvudega 1 kuna $k$ Olgu meil juhuslikud suurused $K_1, K_2, ..., K_k$, mille määramispiirkonnaks on kõik erinevad võimalikud vastuste kombinatsioonid küsimustikule ning muutumispiirkonnaks on hulk $\{1, 2, \ldots, l\}$ ning tõlgendame juhusliku suurust kui küsimusele $k$ antud vastuse tõlgendust vaikimisi kasutataval intervallskaalal. Toome sisse ka tähistused $p_{i\alpha}, i \in \{1, 2, ..., n\}, \alpha \in \{1, 2, \ldots, l\}$, kus $p_{i\alpha}$ tähistab põhjal tõenäosusust, et juhusliku suuruse $K_i$ väärtus on $\alpha$.

Tuletame meelde $\lambda_3$ definitsiooni üle vektori $(K_1, K_2, \ldots, K_k)$ kovariatsioonimaatriksi $\Sigma_K$:

$$\lambda_3 = (\frac{k}{k-1})(1 - \frac{\sum\limits_{i=1}^{k} \Sigma_{Kii}}{\sum\limits_{i=1}^{k}\sum\limits_{j=1}^{k} \Sigma_{Kij}})$$

Võttes arvesse, et $\Sigma_{Kij} = cov(K_i, K_j)$, ning definitsiooni järgi $cov(X, X) = \epsilon\left[(X - \epsilon\left[X\right])(X - \epsilon\left[X\right])\right]$ saame, et

$$\lambda_3 = (\frac{k}{k-1})(1 - \frac{\sum_{i=1}^{k} \Sigma_{Kii}}{\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k} \Sigma_{Kij}}) = \frac{k}{k-1}\left(1 - \frac{\sum_{1=0}^{k} D(K_i)}{\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k} cov(K_i, K_j)}\right)$$

Soovime leida sellise viisi vastuste tõlgendamiseks, et $\lambda_3$ oleks maksimaalne. Kujutame juhuslikud suurused $K_1, K_2, \ldots, K_n$ juhuslikeks suurusteks $M_1, M_2, M_2, \ldots, M_n$, kusjuures juhusliku suuruse $M_i$ määramispiirkond ühtib suuruse $K_i$ määramispiirkonnaga ning $M_i$ saab väärtusi hulgast $M_i = \{\mu_{1i}, \mu_{2i}, \ldots, \mu_{li}\}$ $i \in 1, 2, ...n$. Lisaks kehtigu järgnevad kitsendused:

$$\mu_{i1} < \mu_{i2} < \ldots < \mu_{il},$$

$$K_i(\omega) = j \implies M_i(\omega) = \mu_{ij}, \forall j, 1 \leq j \leq l.$$

Siinkohal märgime, et hinnangute tõlgenduste juures ei huvita meid absoluutne, vaid suhteline paigutus. Seda arvesse võttes lisame järgnevad normaliseerivad kitsendused:

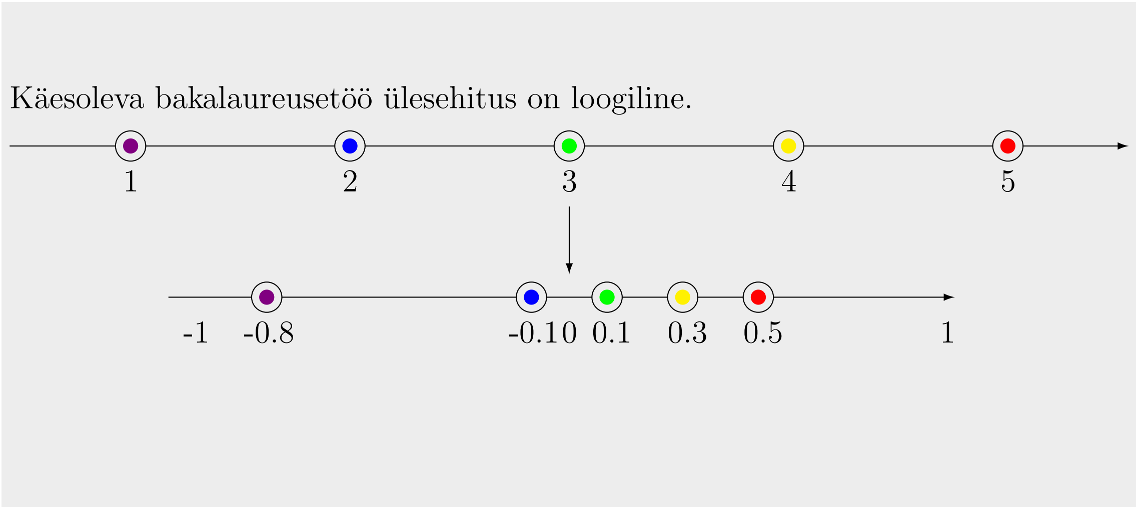
$$E(L_i) = \sum_{j=1}^{l} p_{ij}\mu_{ij} = 0, \tag{6.1}$$

$$D(L_i) = \sum_{j=1}^{l} p_{ij}(\mu_{ij} - E(L_i))^2 = \sum_{j=1}^{l} p_{ij}\mu_{ij}^2 = 1. \tag{6.2}$$

Paneme tähele, et selliste piirangute korral esitub $\lambda_3$ lihtsamal kujul. Tõepoolest,

$$\lambda_3 = \frac{k}{k-1}\left(1 - \frac{\sum_{1=0}^{k} D(M_i)}{\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k} cov(M_i, M_j)}\right) = \frac{k}{k-1}\left(1 - \frac{k}{\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k} cov(M_i, M_j)}\right).$$

Siit näeme, et sellisel juhul taandub $\lambda_3$ maksimeerimine avaldise $\sum\limits_{i=0}^{n}\sum\limits_{j=0}^{n} COV(M_i, M_j)$ maksimeerimisele.




Joonis 12: Näide hulkade $ran(K_i)$ ja $ran(M_i)$ suhestumisest

Olgu meil tõenäosuste maatriks $P$, kusjuures

$$P = \begin{pmatrix} p_{(11)(11)} & p_{(11)(12)} & \cdots & p_{(11)(1l)} & p_{(11)(21)} & p_{(11)(22)} & \cdots & p_{(11)(kl)} \\ p_{(12)(11)} & p_{(12)(12)} & \cdots & p_{(12)(1l)} & p_{(12)(21)} & p_{(12)(22)} & \cdots & p_{(12)(kl)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{(kl)(11)} & p_{(kl)(12)} & \cdots & p_{(kl)(1l)} & p_{(kl)(21)} & p_{(kl)(22)} & \cdots & p_{(kl)(kl)} \end{pmatrix},$$

kus $p_{(i\alpha)(j\beta)}, i, j \in \{1, 2, ..., k\}, \alpha, \beta \in \{1, 2, \ldots, l\}$ tähistab tõenäosust, et juhuslik suurus $K_i$ saab väärtuse $\alpha$ ja juhuslik suurus $K_j$ saab väärtuse $\beta$.

Defineerime vektori $x$, nii et

$$x = (\mu_{11}, \mu_{12}, \ldots, \mu_{1l}, \mu_{21}, \mu_{22}, \ldots, \mu_{nl})$$

- - - SIIA MAANI REFAKTOREERITUD! EDASI OMAL VASTUTUSEL! - - - -

Siis $xPx^T = \sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n} cov(M_i, M_j)$. Veendume selles:

$$xPx^T = \begin{pmatrix}\mu_{11} & \mu_{12} & \cdots & \mu_{kl}\end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{(11)(11)} & p_{(11)(12)} & \cdots & p_{(11)(kl)} \\ p_{(12)(11)} & p_{(12)(12)} & \cdots & p_{(12)(kl)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{(kl)(11)} & p_{(kl)(12)} & \cdots & p_{(kl)(kl)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix}\mu_{11} \\ \mu_{12} \\ \vdots \\ \mu_{kl}\end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{n}\sum_{r=1}^{l}\lambda_{jr}p_{(jr)(11)} & \sum_{j=1}^{n}\sum_{r=1}^{l}\lambda_{jr}p_{(jr)(12)} & \cdots & \sum_{j=1}^{n}\sum_{r=1}^{l}\lambda_{jr}p_{(jr)(nl)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix}\mu_{11} \\ \mu_{12} \\ \vdots \\ \mu_{nl}\end{pmatrix} =$$

$$= \sum_{j=1}^{n}\sum_{r=1}^{l}\lambda_{jr}p_{(jr)(11)} + \sum_{j=1}^{n}\sum_{r=1}^{l}\lambda_{jr}p_{(jr)(12)} + \cdots + \sum_{j=1}^{n}\sum_{r=1}^{l}\lambda_{jr}p_{(jr)(nl)} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{l}\sum_{j=1}^{n}\sum_{r=1}^{l}\lambda_{jr}p_{(jr)(ik)}\lambda_{ik} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{l}\sum_{r=1}^{l}\lambda_{jr}p_{(jr)(ik)}\lambda_{ik} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}E(M_iM_j) =$$

$$\underset{(6.1)}{=} \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}E(M_iM_j) - E(M_i)E(M_j) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}cov(M_i, M_j)$$

Eelneva põhjal piisab meile,arvestades eelnevalt äratoodud piiranguid $L_i$ keskväärtusele ja dispersioonile, suurima võimaliku $\lambda_3$ leidmiseks ruutvõrrandi $xPx^T$ maksimiseerimisest. Seega saame püstitada järgneva optimiseerimisprobleemi, mille lahendus annab meile otsitavad tõlgendused.

$$\begin{gathered} min\ x^T(-P)x \\ R_i^T x = 0, i \in 1, 2, \ldots, k \\ R_i = (\underbrace{0, 0, \ldots 0, 0}_{(i-1)*l} p_{i1}, p_{i2}, p_{i3}, p_{i4}, \ldots, p_{il}, \underbrace{0, 0, \ldots, 0, 0}_{(n-i)*l}) \\ x^TQ_ix = 1, i \in \{1, 2, ..., k\},\ Q_i = \begin{pmatrix} q_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & q_{12} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & q_{kl} \end{pmatrix} \\ q_{jk} = \begin{cases} 0 & j \neq i \\ p_{ik} & i = j \end{cases} \end{gathered} \tag{6.3}$$

# 7 Lahenduse idee

Kas probleem on SDP tüüpi või SDP? Miidlale kirjutan vast nendes küsimustes. Mingi sissejuhatav jutt QCQP ja SDP kohta, kas algusessse taust peatükki või pigem teksti sisse ? Püstitatud optimeerimis probleemi lahendamiseks teisendame probleemi *semidefinite programming(SDP)* tüüpi optimeerimisülesandeks ning seejärel lahendame saadud ülesande.

# 8 Teisendus *QCQP* tüüpi ülesandelt *SDP* tüüpi ülesandele

Esiteks teisendame saadud $QCQP$ standartkujule. Siia vaja selgitusi, mis ja kuidas

$$\begin{gathered}
min \ \ -\theta \\
x^T P x - \theta \leq 0 \\
R_i^T x \leq 0, i \in 1, 2, ..., n \\
-R_i^T x \leq 0, i \in 1, 2, ..., n \\
R_i = (\underbrace{0, 0, ...0, 0}_{(i-1)*5} p_i a, p_i b, p_i c, p_i d, p_i e, \underbrace{0, 0, ..., 0, 0}_{(n-i)*5}) \\
x^T P_i x - 1 \leq 0, i \in \{1, 2, ..., n\} \\
-(x^T P_i x - 1) \leq 0, i \in \{1, 2, ..., n\} \\
P_i = \begin{pmatrix} p_{ja} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & p_{jb} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & p_{je} \end{pmatrix} \\
p_j \alpha = \begin{cases} 0 & j \neq i \\ p_i \alpha & i = j \end{cases}, \alpha \in \{a, b, c, d, e\}
\end{gathered} \tag{8.1}$$

[?, 116]

Paneme tähele, et kuna maatriksid $P, R_i, P_i$ on sümmeetrilised ja mittenegatiivselt määratud, siis leiduvad maatrikisd $Q, S_i, Q_i$ nii, et $P = QQ^T, R_i = S_i S_i^T, P_i = Q_i Q_i^T$. Nende maatriksite leidmiseks saab kasutada Cholesky lahutust. [17, 151]

raamatus juhj positiivselt määratud maatriksi korral, mittenegatiivselt määratud maatriksi korral sellied maatriksid leiduvad, kuid ei ole alati üheselt määratud.

Olgu A mittenegatiivselt määratud maatriks, olgu $A = LL^T$.Märkame, et kehtib järgnev:

$$x^T Ax \leq b^T x + c \iff \begin{pmatrix} I_k & L^T x \\ x^T L & b^T x + c \end{pmatrix} \succeq 0 \tag{8.2}$$

[**?**, 31]

Seega saame anda oma optimeerimisprobleemile järgneva kuju:

$$\begin{gathered} min \;\; -\theta \\ \begin{pmatrix} I_k & Q^T x \\ x^T Q & \theta \end{pmatrix} \succeq 0 \\ R_i^T x \leq 0, i \in 1, 2, ..., n \\ -R_i^T x \leq 0, i \in 1, 2, ..., n \\ R_i = (\underbrace{0, 0, ...0, 0}_{(i-1)*5} p_i a, p_i b, p_i c, p_i d, p_i e, \underbrace{0, 0, ..., 0, 0}_{(n-i)*5}) \\ \begin{pmatrix} I_k & Q_i^T x \\ t^T & 1 \end{pmatrix} \succeq 0 \\ \begin{pmatrix} I_k & Q_i^T x \\ -x^T Q_i & -1 \end{pmatrix} \succeq 0 \end{gathered} \tag{8.3}$$

# Viited


[1] Lee J. Cronbach. Test "Reliability": Its Meaning and Determination. *Psychometrika*, 12(1):1–16, 1947.

[2] Lee J. Cronbach. Coefficient Alpha and the Internal Structure of Tests. 16(3):297–330, 1951.

[3] Lee J. Cronbach and Richard J. Shavelson. My Current Thoughts on Coefficient Alpha and Successor Procedures. *Educational and Psychological Measurement*, 64(3):391–418, June 2004.

[4] S. Diamond, S; Chu, E; Boyd. CVXPY: A Python-Embedded Modeling Language for Convex Optimization, 2014.

[5] Diane R. Edmondson. Likert Scales: A History. In *Conference on Historical Analysis & Research in Marketing Proceedings*, 2005.

[6] Louis Guttman. A Basis for Analyzing Test-Retest Reliability. *Psychometrika*, 10(4):255–282, 1945.

[7] Robin K. Henson. Understanding Internal Consistency Reliability Estimates: A Conceptual Primer on Coefficient Alpha. *Measurement & Evaluation in Counseling & Development*, 34(3):177, 2001.

[8] Paul H Jackson and Christian C. Agunwamba. Lower Bounds for the Reliability of the Total Score on a Test Composed of Non-Homogeneous Items: I: Algebraic Lower Bounds. *Psychometrika*, 42(2):567–578, 1977.

[9] Susan Jamieson. Likert scales: how to (ab)use them. *Medical education*, 38(12):1217–8, December 2004.

[10] Eric Jones, Travis Oliphant, and Pearu Peterson. SciPy: Open Source Scientific Tools for Python.

[11] F.M. Lord and M.R Novick. *Statistical theories of mental test scores.* 1968.

[12] Melvin R. Novick. The axioms and principal results of classical test theory. *Journal of Mathematical Psychology*, 3(1):1–18, February 1966.

[13] William Revelle and Richard E. Zinbarg. Coefficients Alpha, Beta, Omega, and the glb: Comments on Sijtsma. *Psychometrika*, 74(1):145–154, December 2008.

[14] Klaas Sijtsma. On the use, the misuse, and the very limited usefulness of cronbach's alpha. *Psychometrika*, 74(1):107–120, 2009.

[15] Klaas Sijtsma. Reliability Beyond Theory and Into Practice. *Psychometrika*, 74(1):169–173, 2009.

[16] Nicholas Smith. Example of Likert Scale. http://en.wikipedia.org/wiki/File:Example_Likert_Scale.svg.

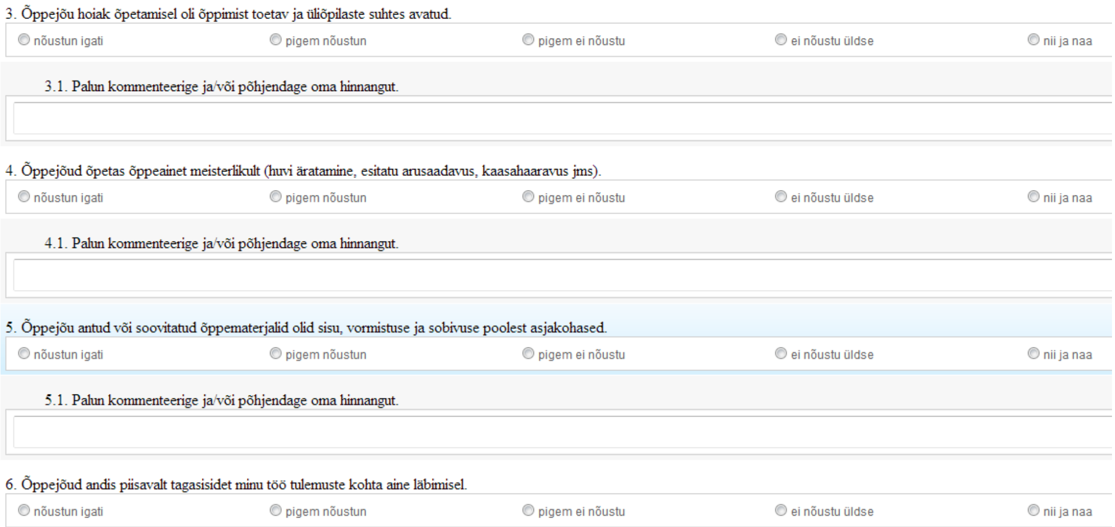
[17] Ivar Tammeraid. *Lineaaralgebra rakendused*. TTÜ Kirjastus, Tallinn, 1999.

[18] UT. Õisi tagasiside. http://is.ut.ee.

[19] D. W. Zimmerman. Probability spaces, hilbert spaces, and the axioms of test theory. 40(3):395–412, 1975.

# Lisa

## A Näited küsimustikust Likerti skaalal


3. Õppejõu hoiak õpetamisel oli õppimist toetav ja üliõpilaste suhtes avatud.
nõustun igati | pigem nõustun | pigem ei nõustu | ei nõustu üldse | nii ja naa

3.1. Palun kommenteerige ja/või põhjendage oma hinnangut.

4. Õppejõud õpetas õppeainet meisterlikult (huvi äratamine, esitatu arusaadavus, kaasahaaravus jms).
nõustun igati | pigem nõustun | pigem ei nõustu | ei nõustu üldse | nii ja naa

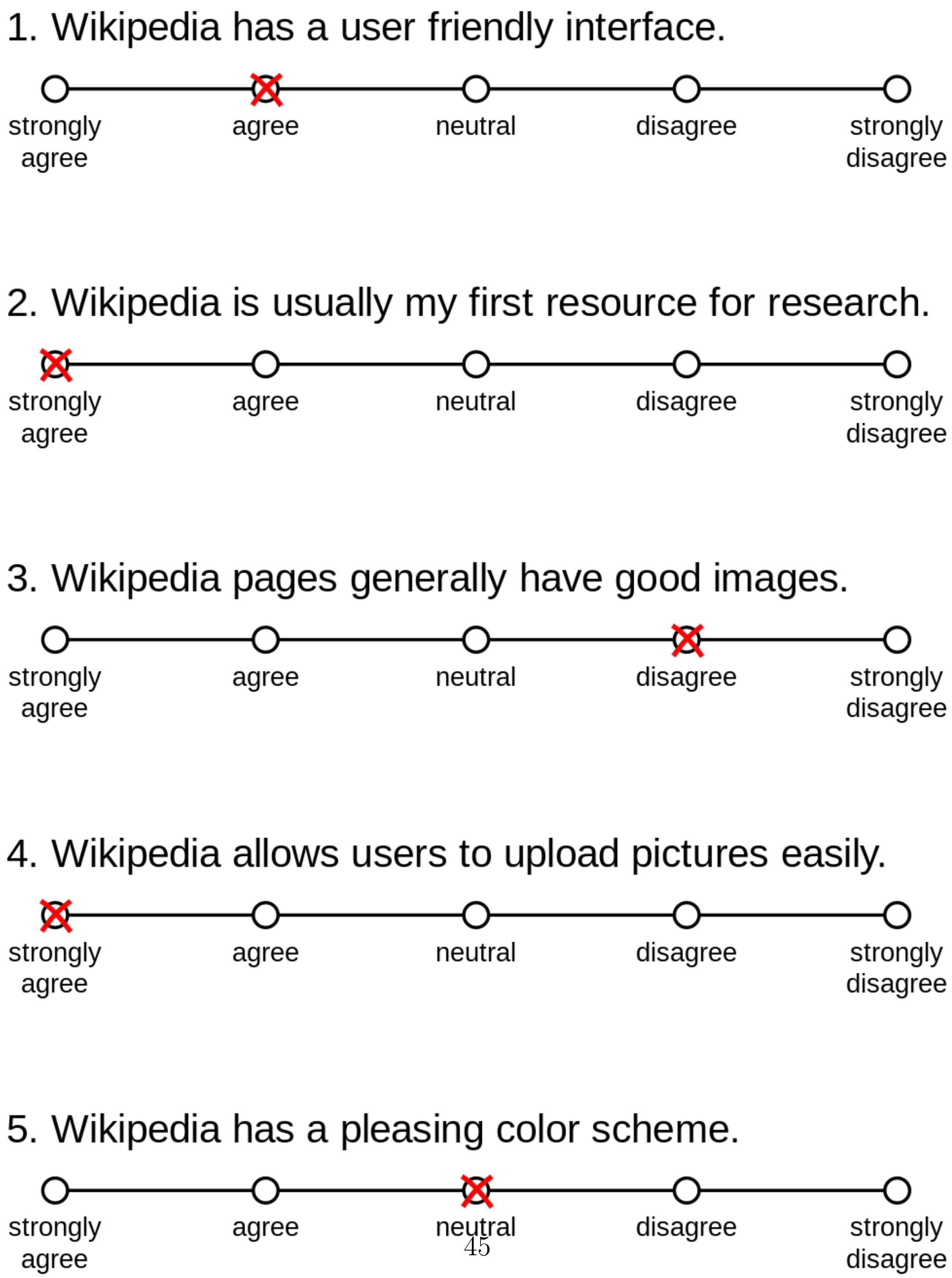
4.1. Palun kommenteerige ja/või põhjendage oma hinnangut.

5. Õppejõu antud või soovitatud õppematerjalid olid sisu, vormistuse ja sobivuse poolest asjakohased.
nõustun igati | pigem nõustun | pigem ei nõustu | ei nõustu üldse | nii ja naa

5.1. Palun kommenteerige ja/või põhjendage oma hinnangut.

6. Õppejõud andis piisavalt tagasisidet minu töö tulemuste kohta aine läbimisel.
nõustun igati | pigem nõustun | pigem ei nõustu | ei nõustu üldse | nii ja naa

Joonis 13: Näide Tartu Ülikooli õppeinfo süsteemi tagasiside ankeedist, kus rakendatakse Likerti skaalat [18]




Joonis 14: Näide küsimustikust, kus on rakendatud Likerti skaalat; küsimused on paigutatud nende järjestikulisuse rõhutamiseks teljele [16]

# B Empiirilised näited

Järgnevad kovariatsioonimaatriksid on leitud ühe psühholoogilise küsimustiku andmete põhjal, jagadas küsimustiku alamküsimustikeks.

Kovariatsioonimaatriks

| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 3.00 | 1.52 | 1.73 | 1.21 | 0.69 | 1.40 | -0.53 | -0.64 | -0.75 | -0.56 | -0.57 | -0.83 |
| 1.52 | 3.25 | 1.37 | 0.70 | 0.78 | 1.01 | -0.31 | -0.21 | -0.17 | -0.39 | -0.29 | -0.65 |
| 1.73 | 1.37 | 3.25 | 1.43 | 0.85 | 1.62 | -0.71 | -0.77 | -0.94 | -0.98 | -0.65 | -1.20 |
| 1.21 | 0.70 | 1.43 | 2.79 | 0.16 | 1.00 | -1.03 | -1.23 | -0.98 | -0.87 | -0.82 | -0.85 |
| 0.69 | 0.78 | 0.85 | 0.16 | 2.67 | 0.82 | -0.11 | 0.20 | -0.10 | 0.10 | 0.40 | -0.09 |
| 1.40 | 1.01 | 1.62 | 1.00 | 0.82 | 2.37 | -0.52 | -0.48 | -0.84 | -0.55 | -0.37 | -0.73 |
| -0.53 | -0.31 | -0.71 | -1.03 | -0.11 | -0.52 | 1.59 | 1.25 | 0.52 | 0.87 | 0.65 | 0.93 |
| -0.64 | -0.21 | -0.77 | -1.23 | 0.20 | -0.48 | 1.25 | 2.38 | 0.77 | 1.12 | 0.92 | 1.02 |
| -0.75 | -0.17 | -0.94 | -0.98 | -0.10 | -0.84 | 0.52 | 0.77 | 2.30 | 0.81 | 0.75 | 0.68 |
| -0.56 | -0.39 | -0.98 | -0.87 | 0.10 | -0.55 | 0.87 | 1.12 | 0.81 | 2.14 | 1.00 | 1.25 |
| -0.57 | -0.29 | -0.65 | -0.82 | 0.40 | -0.37 | 0.65 | 0.92 | 0.75 | 1.00 | 2.09 | 0.69 |
| -0.83 | -0.65 | -1.20 | -0.85 | -0.09 | -0.73 | 0.93 | 1.02 | 0.68 | 1.25 | 0.69 | 2.03 |

| Hinnang | $\lambda_1$ | $\lambda_2$ | $\lambda_3$ | $\lambda_4$ | $glb$ |
|---|---|---|---|---|---|
| Väärtus | 0.39 | 0.60 | 0.43 | 0.73 | 0.77 |

Joonis 15: Valimi kovariatsioonimaatriks koos reliaabluse hinnangutega

Kovariatsioonimaatriks

| Variable | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 3.00 | 1.52 | 1.73 | 1.21 | 0.69 | 1.40 | 1.39 | 0.90 | 1.27 | 1.15 | 0.58 | 0.83 |
| | 1.52 | 3.25 | 1.37 | 0.70 | 0.78 | 1.01 | 1.10 | 1.73 | 0.94 | 0.85 | 0.56 | 0.70 |
| | 1.73 | 1.37 | 3.25 | 1.43 | 0.85 | 1.62 | 1.19 | 0.61 | 1.85 | 1.28 | 0.61 | 0.85 |
| | 1.21 | 0.70 | 1.43 | 2.79 | 0.16 | 1.00 | 0.64 | 0.26 | 0.93 | 1.49 | 0.14 | 0.53 |
| | 0.69 | 0.78 | 0.85 | 0.16 | 2.67 | 0.82 | 0.77 | 0.99 | 0.64 | 0.10 | 1.61 | 0.56 |
| | 1.40 | 1.01 | 1.62 | 1.00 | 0.82 | 2.37 | 0.98 | 0.74 | 1.17 | 1.02 | 0.74 | 0.90 |
| | 1.39 | 1.10 | 1.19 | 0.64 | 0.77 | 0.98 | 2.39 | 1.26 | 1.12 | 0.66 | 0.61 | 0.72 |
| | 0.90 | 1.73 | 0.61 | 0.26 | 0.99 | 0.74 | 1.26 | 2.91 | 0.55 | 0.43 | 0.82 | 0.77 |
| | 1.27 | 0.94 | 1.85 | 0.93 | 0.64 | 1.17 | 1.12 | 0.55 | 2.52 | 0.81 | 0.45 | 0.80 |
| | 1.15 | 0.85 | 1.28 | 1.49 | 0.10 | 1.02 | 0.66 | 0.43 | 0.81 | 2.19 | 0.25 | 0.55 |
| | 0.58 | 0.56 | 0.61 | 0.14 | 1.61 | 0.74 | 0.61 | 0.82 | 0.45 | 0.25 | 2.43 | 0.54 |
| | 0.83 | 0.70 | 0.85 | 0.53 | 0.56 | 0.90 | 0.72 | 0.77 | 0.80 | 0.55 | 0.54 | 1.35 |

| Hinnang | $\lambda_1$ | $\lambda_2$ | $\lambda_3$ | $\lambda_4$ | $glb$ |
|---|---|---|---|---|---|
| Väärtus | 0.79 | 0.87 | 0.86 | 0.93 | 0.93 |

Joonis 16: Valimi kovariatsioonimaatriks koos reliaabluse hinnangutega

Kovariatsioonimaatriks

| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1.99 | 0.39 | 0.37 | 0.98 | 0.85 | 0.70 | -0.48 | -0.49 | -0.39 | -0.43 | -0.25 | -0.27 |
| 0.39 | 2.15 | 0.38 | 0.79 | 0.50 | 0.28 | -0.60 | -0.39 | -0.27 | -0.05 | -0.19 | -0.05 |
| 0.37 | 0.38 | 2.12 | 0.45 | 0.74 | 0.70 | -0.41 | -0.10 | -0.06 | 0.06 | -0.02 | 0.07 |
| 0.98 | 0.79 | 0.45 | 3.06 | 0.95 | 0.34 | -0.59 | -0.64 | -0.36 | -0.14 | -0.04 | 0.05 |
| 0.85 | 0.50 | 0.74 | 0.95 | 2.90 | 0.77 | -0.32 | -0.58 | -0.05 | 0.05 | 0.22 | 0.32 |
| 0.70 | 0.28 | 0.70 | 0.34 | 0.77 | 2.65 | -0.47 | -0.45 | -0.45 | -0.37 | -0.39 | -0.38 |
| -0.48 | -0.60 | -0.41 | -0.59 | -0.32 | -0.47 | 1.99 | 0.58 | 0.51 | 0.38 | 0.31 | 0.47 |
| -0.49 | -0.39 | -0.10 | -0.64 | -0.58 | -0.45 | 0.58 | 1.86 | 0.59 | 0.30 | 0.03 | 0.31 |
| -0.39 | -0.27 | -0.06 | -0.36 | -0.05 | -0.45 | 0.51 | 0.59 | 1.63 | 0.63 | 0.45 | 0.81 |
| -0.43 | -0.05 | 0.06 | -0.14 | 0.05 | -0.37 | 0.38 | 0.30 | 0.63 | 1.41 | 0.63 | 1.01 |
| -0.25 | -0.19 | -0.02 | -0.04 | 0.22 | -0.39 | 0.31 | 0.03 | 0.45 | 0.63 | 1.79 | 1.11 |
| -0.27 | -0.05 | 0.07 | 0.05 | 0.32 | -0.38 | 0.47 | 0.31 | 0.81 | 1.01 | 1.11 | 2.33 |

| Hinnang | $\lambda_1$ | $\lambda_2$ | $\lambda_3$ | $\lambda_4$ | $glb$ |
|---|---|---|---|---|---|
| Väärtus | 0.39 | 0.53 | 0.43 | 0.68 | 0.70 |

Joonis 17: Valimi kovariatsioonimaatriks koos reliaabluse hinnangutega

# C Programmiteegi implementatsioon

```
def calculate_lambda_1(cov_matrix):
    u"""
    Based on Guttman,1945, for calculations using Jackson,
    Aguvwamba,1977,[569].
    """
    n = check_that_matrix_is_square_and_fix_n(cov_matrix)
    def sum_of_main_diagonal():
        summ = 0
        for i in xrange(n):
            summ += cov_matrix[i,i]
        return summ

    return 1 - (sum_of_main_diagonal()/
      calculate_sum_of_covariance_matrix_elements(cov_matrix, n))
```

Programm 1: Funktsioon hinnangu $\lambda_1$ leidmiseks

```
def calculate_lambda_2(cov_matrix):
    u"""
    Using Guttman,1945,[259] definition.
    """
    def sum_of_squares_of_non_diagonal_matrix_elements():
        summ = 0
        for i in xrange(n):
            for j in xrange(i):
                    summ += cov_matrix[i,j]**2
        return 2*summ

    n = len(cov_matrix)
    l1 = calculate_lambda_1(cov_matrix)
    sum_of_squares = sum_of_squares_of_non_diagonal_matrix_elements()
    under_square_root =((n)/(n-1)* sum_of_squares)**(1/2)
    return l1 + (under_square_root/
        calculate_sum_of_covariance_matrix_elements(cov_matrix))
```

Programm 2: Funktsioon hinnangu $\lambda_2$ leidmiseks

```
def calculate_lambda_3(cov_matrix):
    number_of_items = len(cov_matrix)
    return (number_of_items/(number_of_items-1))*calculate_lambda_1(cov_matrix)
```

Programm 3: Funktsioon hinnangu $\lambda_3$ leidmiseks

```python
import numpy as np

def calculate_lambda_4(cov_matrix):
    u"""
    Lambda 4, based on Guttman, 1945, using the implementation of Jackson,
    Agunwamba, 1977.
    Based on idea that we try to best possible split (u is a vector,
     with elements either 1 or -1, ones will be in one split,
     minus ones in another) .
    NAIVE IMPLEMENTATION, works with relativiely low N,
    better approches available,  see Benton, 2013.
    """

    def objective_function(u):
        return u.T.dot(cov_matrix.dot(u))


    def try_vectors():
        u"""
        Idea : generate half of all possible vectors of length n,
         such that if vector v is in, vector -v is not.
        Using binary representation as string,
         from 2**(n-1) to 2**n, coding "0" to "-1"
        """
        smallest = np.Infinity
        result_vector = []
        l = []
        for i in xrange(2**(n-1),2**n):
            binary_of_i = np.binary_repr(i,width=n)
            binary_of_i_int = [ 1 if x == u"1" else -1 for x in binary_of_i]
            u = np.array(binary_of_i_int)
            result = objective_function(u)
            if result < smallest:
                smallest = result
                result_vector = u
        return smallest

    def calc_lambda(smallest):
        return 1 - (smallest/
            util.calculate_sum_of_covariance_matrix_elements(cov_matrix, n))

    n = util.check_that_matrix_is_square_and_fix_n(cov_matrix)
    return calc_lambda(try_vectors())
```

Programm 4: Funktsioon hinnangu $\lambda_4$ leidmiseks

```python
import cvxpy as cv
import numpy as np

u""""
Idea: Observed covariance matrix  is of observed scores.
That matrix is sum of true score coviarance matrix and error covariance matrix.
As errors don't correlate with anything else than themselves,
 the last is diagonal matrix. So, C_obs = C_true + C_error
We look to maximize error (to find the worst possible case),
that is the same as minimizing the trace of C_true.
More can be found in Jackson,Agunwamba,1977 and Woodhouse,Jakson, 1977.
"""

class Glb(object):
    def __init__(self,cov_matrix):
        self._cov_matrix = cov_matrix
        self._constraints = []
        self._n = util.check_that_matrix_is_square_and_fix_n(cov_matrix)
        self._cov_matrix = np.matrix(cov_matrix)
        self._generate_matrix_variables()
        self._divide_covariance_matrix_of_into_error_and_true_score()
        self._fix_error_cov_matrix_diagonal_fields_constraints()
        self._error_cov_matrix_non_diagonal_fields_are_0()
        self._prepare_program()
        self._solve_program()
        self._answer = self._calculate_Glb()

    def _generate_matrix_variables(self):
        self._true_cov_matrix = cv.semidefinite(self._n,
             name=u"true_cov_matrix")
        self._error_cov_matrix = cv.Variable(self._n, self._n,
            name=u"error_cov_matrix")


    def _divide_covariance_matrix_of_into_error_and_true_score(self):
        u"""
        Constraint that C_obs = C_true + C_error
        """
        self._constraints.append(self._error_cov_matrix+
            self._true_cov_matrix == self._cov_matrix)

    def _fix_error_cov_matrix_diagonal_fields_constraints(self):
        u"""
        Error covariance matrix must be semidefinite,
         meaning that all elements on the diagonal must be positive.
        """
        for i in xrange(self._n):
            self._constraints.append(self._error_cov_matrix[i,i] >= 0)
```

```
    def _error_cov_matrix_non_diagonal_fields_are_0(self):
        u"""
        Covariance between different errors is 0
        """
        for i in xrange(self._n):
            for j in xrange(self._n):
                if (i != j):
                    self._constraints.append(
                        self._error_cov_matrix[i,j] == 0)


    def _prepare_program(self):
        u"""
        Minimize trace of true score coviance matrix
        """
        self._p = cv.Problem(cv.Minimize(
            sum([self._true_cov_matrix[i,i] for i in xrange(self._n)])),
            self._constraints)
        if not self._p.is_dcp():
            raise Exception(u"Non-DCP glb, something went terrible wrong")


    def _solve_program(self):

        try:
            self._p.solve()
        except:
            raise Exception(u"Program was unable to find glb")


    def _calculate_Glb(self):
        return 1 - (sum(
          [self._error_cov_matrix.value[i,i] for i in xrange(self._n)])/
            util.calculate_sum_of_covariance_matrix_elements(
                self._cov_matrix,self._n)


    def get_answer(self):
        return self._answer
```

Programm 5: Klass hinnangu *glb* leidmiseks

```
def check_that_matrix_is_square_and_fix_n(input_matrix):
    def check_that_matrix_is_square():
        for row in input_matrix:
            if len(row) != n:
```

```
                raise Exception(u"Matrix not square or missing data")
    n = len(input_matrix)
    check_that_matrix_is_square()
    return n

def fix_number_of_rows(input_matrix):
    def check_that_matrix_is_complete():
        for row in input_matrix:
            if len(row) != n:
                raise Exception(u"Matrix not square or missing data")
    n = len(input_matrix[0])
    check_that_matrix_is_complete()
    return n


def calculate_sum_of_covariance_matrix_elements(cov_matrix,n = None):
    if n == None:
        n = check_that_matrix_is_square_and_fix_n(cov_matrix)
    summ = 0
    for i in xrange(n):
        for j in xrange(n):
            summ += cov_matrix[i,j]
    return summ
```

Programm 6: Eelnevates programmides kasutatud abifunktsioonid

# D Litsents

**Lihtlitsents lõputöö reprodutseerimiseks ja lõputöö üldsusele kättesaadavaks tegemiseks.**

Mina, Vootele Rõtov (sünnikuupäev: 11.11.1988)

1. annan Tartu Ülikoolile tasuta loa (lihtlitsentsi) enda loodud teose

   Valikvastustega küsimustike reliaabluse hindamine,

   mille juhendaja on Margus Niitsoo,

   (a) reprodutseerimiseks säilitamise ja üldsusele kättesaadavaks tegemise eesmärgil, sealhulgas digitaalarhiivi DSpace'i lisamise eesmärgil kuni autoriõiguse kehtivuse tähtaja lõppemiseni;

   (b) üldsusele kättesaadavaks tegemiseks Tartu Ülikooli veebikeskkonna kaudu, sealhulgas digitaalarhiivi DSpace'i kaudu kuni autoriõiguse kehtivuse tähtaja lõppemiseni.

2. olen teadlik, et punktis 1 nimetatud õigused jäävad alles ka autorile.

3. kinnitan, et lihtlitsentsi andmisega ei rikuta teiste isikute intellektuaalomandi ega isikuandmete kaitse seadusest tulenevaid õigusi.

Tartu, 1. juuni 2014. a.