

TARTU ÜLIKOOL  
MATEMAATIKA-INFORMAATIKATEADUSKOND  
Matemaatika instituut  
Matemaatika eriala

Vootele Rõtov  
**Valikvastustega küsimustike  
reliaabluse hindamine**  
Bakalaureusetöö (6 EAP)

Juhendaja: Margus Niitsoo

Autor: ..... “.....” juuni 2014  
Juhendaja: ..... “.....” juuni 2014

TARTU 2014

# Lühikokkuvõte

Käesolev bakalaureusetöö vaatleb erinevaid võimalusi valikvastustega küsimustike reliaabluse hindamiseks ühe küsimustike läbiviimise põhjal. Töö käigus antakse lugejale vajaminevad taustteadmised valikvastustega küsimustikest ning nende karakteristikutest, defineeritakse reliaablus klassikalise testiteooria kontekstis, antakse vajalik matemaatiline baas reliaabluse hinnangute tuletamiseks, tuletatakse viis hinnangut reliaablusele ja tutvustatakse programmi teeki, mis sisaldab programme tuletatud hinnangute leidmiseks testi läbiviimisel saadud andmete põhjal.

VÕTMESÕNAD: Psühhomeetria, klassikaline testiteooria, reliaablus, valikvastustega küsimustik, Cronbachi alfa, Guttmani lambda, glb.

## Abstract

## Sisukord

<b>Sisukord</b>	<b>1</b>
<b>1 Sissejuhatus</b>	<b>3</b>
<b>2 Taustinfo ja probleemipüstitus</b>	<b>4</b>
2.1 Küsimustik, küsimus ja Likerti skaala . . . . .	4
2.2 Likerti skaala tõlgendamine intervallskaalana . . . . .	4
2.3 Testi valiidsus . . . . .	5
2.4 Testi reliaablus . . . . .	5
2.5 Valiidsuse ja reliaabluse suhe . . . . .	6
2.6 Sisemine järjepidevus . . . . .	6
2.7 Probleemi püstitus . . . . .	7
<b>3 Reliaablus klassikalises testiteoorias</b>	<b>8</b>
3.1 Reliaabluse definitsioon . . . . .	8
3.2 Vajalikud taustteadmised reliaabluse hindamiseks . . . . .	15
<b>4 Alumised tõkked reliaablusele</b>	<b>19</b>
4.1 Alumine tõke $\lambda_1$ . . . . .	19
4.2 Alumine tõke $\lambda_2$ . . . . .	20
4.3 Alumine tõke $\lambda_3$ . . . . .	23
4.4 Alumine tõke $\lambda_4$ . . . . .	26

4.5	Alumine tõke <i>glb</i> . . . . .	26
4.6	Hinnangute kasutatavus praktikas . . . . .	27
<b>5</b>	<b>Programmiteek</b>	<b>28</b>
	<b>Viited</b>	<b>34</b>

# 1 Sissejuhatus

Käesolev bakalaureusetöö on motiveeritud psühholoogide probleemist - kuidas hinnata nende töövaldkonnas tihti kasutatavate valikvastustega küsimustike usaldusväärsust.

Sellest lähtuvalt on töö põhieesmärgiks pakkuda valikvastustega küsimustike hindamiseks lihtsasti kasutatavaid kvantitatiivseid meetodeid. Lisaks sellele loodab autor pakkuda eestikeelset ülevaadet ühest valikvastustega testidega seotud matemaatiliselt raamistikust - olemasolevad käsitlused on pigem praktilised abivahendid psühholoogidele.

Töö esimeses osas anname vajaliku taustinfo, definitsioonid ja probleemipüstituse. Seejärel ehitame üles meile vajamineva osa probleemi vaatlemiseks sobivast matemaatilisest teooriast - defineerime testi usaldusväärsuse ning rajame vundamendi selle hindamiseks. Järgnevalt tuletame mõningaid erinevad usaldusväärsuse hinnangud. Töö viimases osas tutvustame autori poolt loodud programmeerimise, mis sisaldab eelnevalt tutvustatud hinnangute implementatsioone.

Autori eesmärgiks on see, et antud tekst oleks lihtsasti järgitav keskmisele bakalaureuseõpe läbinud matemaatikatudengile - valdkonna spetsiifilised matemaatilised definitsioonid ja tulemused on meeldetuletuseks töö käigus jooksvalt ära toodud.

Autor loodab, et loodud programmeerimine leiab psühholoogide poolt kasutamist.

## 2 Taustinfo ja probleemipüstitus

Järgnevalt anname vajalikud taustateadmised probleemi mõtestamiseks ning peatüki lõpetuseks püstitame käesoleva töö keskse probleemi.

### 2.1 Küsimustik, küsimus ja Likerti skaala

Käesolev uurimus tegeleb küsimustikega (*Likert scale*), milles soovitakse hinnanguid teatud arvule küsimustele (*Likert item*)  $n$  pallisel Likerti skaalal [5], kus  $n$  jääb enamasi kahe ja kümne vahele. Käsitleme Likerti skaalasid, mis on sümmeetrilised, see tähendab, et positiivsete ja negatiivsete vastuse variantide arv on sama. Näiteks:<sup>①</sup>

Käesoleva bakalaureusetöö ülesehitus on loogiline.				
Ei nõustu	Ei nõustu osaliselt	Nii ja naa	Nõustun osaliselt	Nõustun

Joonis 1: Näide väitest, millele palutakse hinnangut Likerti skaalal

### 2.2 Likerti skaala tõlgendamine intervallskaalana

Likerti skaala tõlgendamisel intervallskaalana on väljakujunenud tava seada valikvastustele vastavusse järjestatud täisarvud, kusjuures mida positiivsem vastusevariant, seda suurem temale vastavusse seatud arv. Reeglina kasutatakse kas arve alates ühest kuni valikvastuste arvuni või valitakse välja täisarvud nii, et neutraalsele vastusevariandile vastab null.

Käesoleva bakalaureusetöö ülesehitus on loogiline.				
-2	-1	0	1	2
↑	↑	↑	↑	↑
Ei nõustu	Ei nõustu osaliselt	Nii ja naa	Nõustun osaliselt	Nõustun
↓	↓	↓	↓	↓
1	2	3	4	5

Joonis 2: Näide kahest levinumast Likerti skaala tõlgendusest intervallskaalana

<sup>①</sup>Näited terviklikest küsimustikest on lisades, joonisel 6 ja 7

Lugejal võib tekkida õigustatud küsimus, kuidas põhjendab autor Likerti skaala käsitlemist intervallskaalana, kui Likerti skaala on olemuseslt järjestikkskaala ning selle tõlgendamises intervallskaalana on vastuoluline küsimus, näiteks [9]. Siinkohal tõdeme, et Likerti skaala tõlgendamine intervallskaalana on praktikas piisavalt levinud, et selle valdkonna uurimine õigustatud oleks - olenamat selle teoreetilisest põhjendatusest. Siinkohal väärrib autori silmis esile toomist kriitikute üks levinumaid argumente - „hea“ ja „väga hea“ keskmine ei ole loomulikul viisil tõlgendatav kui „hea + pool“ ehk pole mingit põhjust eeldada, et kõikide küsimuste omavahe-line kaugus on mingil põhjusel võrdne.

## 2.3 Küsimustiku valiidsus

Küsimustiku **valiidsus** on küsimustiku karakteristik, mis iseloomustab testi võimet mõõta seda, mida ta disainiti mõõtma. Enamikes käsitlustes vaadeltakse valiidsust kui väärtust intervall skaalal nulli ja ühe vahel.

Näitena, olgu meil küsimustikuks kaal, mille näitu vaatleme kui küsimustiku tulemust kaalutava isiku puhul. Kaal, mis näitab 75 kilo kaaluva inimese kaaluks 74,5 kilo omab kõrgemat valiidsust kui kaal, mis sama inimese puhul näitab kaaluks 65 kilo.

Arusaadavatel põhjustel on testi valiidsus äärmiselt oluline ning psühholoogiliste testide valiidsuse hindamine on olnud üks psühhomeetria põhilistest uurimisobjektidest. Sellega seoses on palju tööd tehtud ka valiidsuse definitsiooni täpsemaks muutmisega, võrreldes selle paragrahvi alguses antud väga intuitiivse definitsiooniga. Kuna valiidsus on selle töö raames vajalik vaid taustinfona probleemi mõttestamisel tundub antud lihtne definitsioon aga sobivaim.

## 2.4 Küsimustiku reliaablus

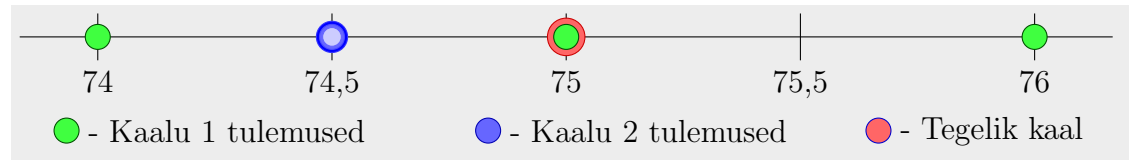
Küsimustiku **reliaablus** on küsimustiku omadus saada sama subjekti erinevatel mõõtmistel sama küsimustikuga sama tulemus ehk küsimustiku stabiilsus. Nagu valiidsus, on ka reliaablus reeglina määratud intervall skaalal, nulli ja ühe vahel.

Näitena, kaal mis näitab 75 kilo kaaluva inimese kaaluks 74,5 kilo igal kaalumisel omab kõrgemat reliaablust kui kaal, mis näitab juhuslikult kas 74,5 kilo või 75,5 kilo.

Reliaabluse täpsema, matemaatilise definitsioone anname edaspidi.

## 2.5 Valiidsuse ja reliaabluse suhe

Valiidsuse ja reliaabluse suhestamisel kerkib kiiresti üles loomulik küsimus - kas test võib olla samaaegselt suure valiidsuse ja väikse reliaablusega? Eelpool antud definitsioonid jättavad selle küsimuse lahtiseks - vaatleme järgmist olukorda:



Joonis 3: Kaalumiste tulemused kahe erineva kaaluga kolmel katsel

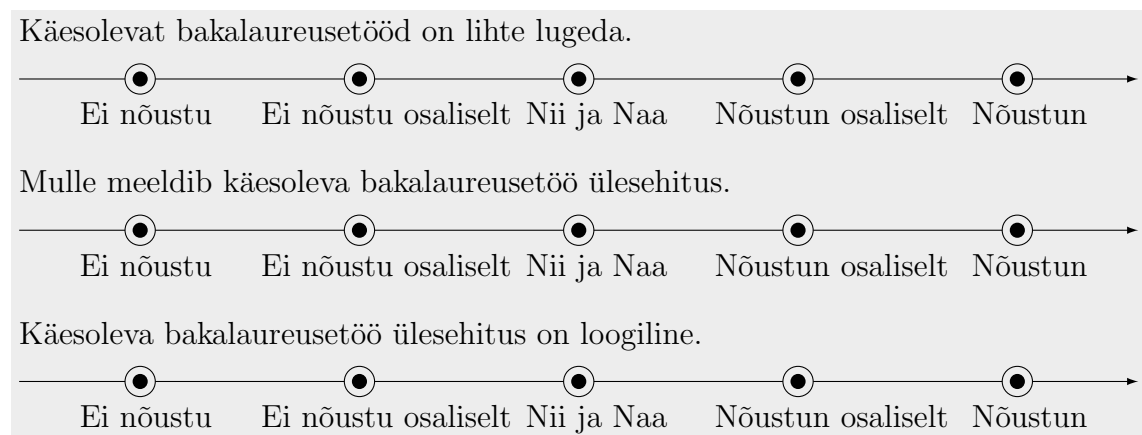
Kui mõista valiidsust kui küsimusitku keskmist tulemust, siis võime väita, et esimene kaal on väiksema reliaabluse aga suurema valiidsusega. Selline valiidsuse mõttestamine aga ei ole küsimustike modelleerimise korral otstarbekas - katsete kordamine on enamasti keeruline ning väheste mõõtmistulemuste põhjal ei ole võimalik tegeliku väikese reliaablusega testi tulemust välja selgitada.

Seega, meie vaadeldava olukorra - psühholoogiliste testide - korral on mingi valiidsuse taseme jaoks tarvilik tingimus mingi reliaabluse tase.

## 2.6 Sisemine järjepidevus

Reliaabluse kui termini probleemiks on tema mitmetähenduslikus. Toome siinkohal ära ühe mõiste, mida tihti samuti reliaablusena tuntakse.

Sisemine järjepidevus (*internal consistency*) on küsimustiku karrakteristik, mis iseloomustab testi erinevate küsimuste vastuste järjepidevust ehk seda, kui hästi on kooskõlas ühist konstruktsiooni hindavad küsimused [7, 177]. Piltlikult väljendudes, olgu meil järgnev küsimustik:



Joonis 4: Küsimustik bakalaureusetöö ülesehituse kohta

Siin on mõõdetavaks konstruktsiooniks käesoleva bakalaureusetöö ülesehitus ning sisemiseks reliaabluseks on vajalik kolmele näites toodud küsimusele antud vastuste kooskõla.

Selle karrakteristiku mõõtmiseks võimalik kasutada sisemise järjepidavuse teste. Segadust suurendab veelgi see, et üks nendest testidest leiab kasutamist ka meie poolt defineeritud reliaabluse hindamisel. Loodame, et nende kahe karakterisitku eristamine aitab lugejal käesolevas töös kergemini orienteeruda.

Märgime, et lisaks toodud kahele definitsioonile on ka teisi reliaabluse definitsioone [1], mis aga selle töö kontekstis ei tohiks segadust tekitada ning mille äratoomist siin ei ole autor pidanud vajalikus.

## 2.7 Probleemi püstitus

Käesoleva tööga üritame pakkuda lahendust järgnevale praktilisele probleemile - kas on võimalik leida paremat hinnangut küsimustiku reliaablusele kui seda on tihti kasutatav Guttmani  $\lambda_3$  (rohkem tuntud kui Cronbachi  $\alpha$ )?

Küsimusele vastamiseks on meil vaja rangemat lähenemist reliaablusele ning selleks vaatleme reliaablust ühe matemaatilise raamistiku - klassikalise testiteooria - kontekstis.



### 3 Reliaablus klassikalises testiteoorias

Järgevas võtame aluseks Melvin Novicki klassikalise testiteooria [12] [11] ja selle tõlgenduse Klaas Sijtsma poolt. [14, 109]

#### 3.1 Reliaabluse definitsioon

MEELDETULETUSEKS

**Definitsioon.** *Elementaarsündmuseks* nimetatakse juhusliku katse võimaliku tulemust.

**Definitsioon.** *Tõenäosuseks* nimetatakse funktsiooni  $P$ , mis igale sündmusele  $A \in 2^\Omega$ , kus  $\Omega$  on mingi juhusliku katse kõikvõimalikke elementaarsündmuste hulk, seab vastavusse arvu  $P(A)$ , nii et on täidetud järgmised nõuded:

1.  $P(A) \geq 0, \forall A \in 2^\Omega$ ,
2.  $P(\Omega) = 1, P(\emptyset) = 0$ ,
3. Kui sündmused  $A_1, A_2, \dots$  on teineteist välistavad, siis

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

**Definitsioon.** *Diskreetseks juhuslikus suuruseks* nimetatakse funktsiooni  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , mis võtab kas lõpliku või loenduva arvu erinevaid väärtusi  $x_1, x_2, \dots (x_n)$ .

Olgu meil mingi kogum  $I$  testile vastajaid ning küsimustik, milles on  $k$  küsimust, kus iga küsimus on  $l$ -pallisel Likerti skaalal. Nummerdame küsimused naturaalarvudega 1 kuni  $k$ . On loomulik eeldada, et nii vastajate arv, küsimuste arv kui ka Likerti skaala suurus on lõplikud. Me võime vaadelda testi läbiviimist kui juhusliku katset ning kõiki erinevaid võimalikke vastuste kombinatsioone küsimustikule kui elementaarsündmusi, tähistame saadud elementaarsündmuste hulga kui  $\Omega$  ning elementaarsündmusi kui  $\omega$ . Eeldame ka tõenäosuste  $P_i : 2^\Omega \rightarrow \mathbb{R}$  olemasolu, mida tõlgendame kui testi tulemuste esinemissagededust vastaja  $i$  korral.

$\omega \backslash$ Küsimus	I	II	II
A	Nõustun osaliselt	Nii ja naa	Nõustun
B	Ei nõustu osaliselt	Nõustun	Nii ja naa
C	Ei nõustu	Nõustun osaliselt	Nii ja naa

Joonis 5: Näited elementaarsündmustest

Olgu  $X_i^j$  hulgal  $\Omega$  määratud juhuslik suurus, mille võimalike väärtusi vaatleme kui vastaja  $i$  poolt küsimusele  $j$  antud vastuse arvulist tõlgendust. On selge, et sellise tõlgenduse korral on juhusliku suuruse  $X_i^j$  muutumispirkond lõplik - selle hulga võimsus ei ole suurem kui  $l$  ning järelikult on juhuslik suurus  $X_i^j$  diskreetne. Defineerime vastaja  $i$  testi tulemuse  $X_i$  kui

$$X_i = \sum_{j=1}^k X_i^j.$$

Paneme tähele, et  $X_i$  on samuti diskreetne juhuslik suurus - tõepoolest, kuna tegemist on diskreetsete juhuslike suuruste summaga, siis on ta funktsioon hulgast  $\Omega$  hulka  $\mathbb{R}$ . Lisaks, kuna kõikide liidetavate muutumispirkond on tõkkestatud arvuga  $l$  ning liidetavaid on  $k$ , siis ei saa funktsiooni muutumispirkonna võimsus olla suurem kui  $l^k$ .

#### MEELDETULETUSEKS

**Definitsioon.** Diskreetse juhusliku suuruse  $X$  *jaotuseks* nimetatakse paaride komplekti  $(x_i, p_i), i = 1, 2, \dots$ , kus  $x_i$  on juhusliku suuruse võimalik väärtus ning  $p_i = P(\{\omega | X(\omega) = x_i, \omega \in \Omega\})$ .

**Definitsioon.** Diskreetse juhusliku suuruse  $X$ , mille jaotuseks  $K$  on paaride komplekt  $k_i = (x_i, p_i), i = 1, 2, \dots$ , *keskväärtuseks* nimetatakse arvu

$$\epsilon X = \sum_{\{i | k_i \in K\}} x_i p_i$$

eeldusel, et see rida koondub absoluutselt.

**Definitsioon.** Juhusliku suuruse  $X$  *dispersiooniks* nimetatakse arvu  $DX = \epsilon[(X - \epsilon X)^2]$ .

Triviaalse juhu vältimiseks eeldame edaspidi, et juhuslike suuruste  $X_i$  dispersioonid

on nullist erinevad. Defineerime küsimustiku tegeliku tulemuse vastaja  $i$  jaoks kui testi tulemuse keskväärtuse ehk

$$t_i = \epsilon[X_i].^{②}$$

Kuna juhusliku suuruse  $X_i$  võimalike väärtuste arv on lõplik on ka tema keskväärtus  $t_i$  lõplik.

Tõlgendame vastaja  $i$  testi tulemuse ja tegeliku tulemuse vahet mõõtmisveana, tähistame seda  $E_i$ . Seega  $X_i = t_i + E_i$ .

MEELDETULETUSEKS

**Lause 3.1.** Kui  $X$  on diskreetne juhuslik suurus, jaotusega  $K$ , kus  $K$  on paaride komplekt  $k_i = (x_i, p_i), i = 1, 2, \dots$  ning  $c$  on mingi konstant siis  $\epsilon(X + c) = \epsilon(X) + c$

*Tõestus.*

$$\begin{aligned} \epsilon(X + c) &= \sum_{\{i|k_i \in K\}} (x_i + c)p_i = \sum_{\{i|k_i \in K\}} x_i p_i + \sum_{\{i|k_i \in K\}} c p_i = \\ &= \sum_{\{i|k_i \in K\}} x_i p_i + c \sum_{\{i|k_i \in K\}} p_i = \sum_{\{i|k_i \in K\}} x_i p_i + c = \epsilon(X) + c \end{aligned}$$

□

**Lause 3.2.** Juhuslikule suurusele konstandi liitmine ei muuda dispersiooni :  $D(X + c) = DX$

*Tõestus.*

$$D(X + c) = \epsilon[X + c - \epsilon(X + c)] \stackrel{\text{Lause 3.1}}{=} \epsilon[X + c - \epsilon(X) + c] = \epsilon[X - \epsilon(X)] = DX$$

□

Paneme tähele, et eelneva põhjal on vastaja  $i$  mõõtmisvea keskväärtus võrdne nulliga. Tõepoolest, kuna tegeliku tulemuse definitsiooni põhjal  $\epsilon[X_i] = t_i$ , siis saame mõõtmisvea definitsiooni arvesse võttes

$$t_i = \epsilon[X_i] = \epsilon[t_i + E_i] \stackrel{\text{Lause 3.1}}{=} t_i + \epsilon[E_i] \implies \epsilon[E_i] = 0.$$

<sup>②</sup>Tähistame keskväärtuse tähega  $\epsilon$  kuna tavapärase tähistus  $E$  leiab antud käsitluses teistsuguse rolli.

Lisaks on lihtne märgata, et  $D[X_i] = D[E_i]$ , sest

$$D[X_i] = D[E_i + t_i] \stackrel{\text{Lause 3.2}}{=} D[E_i].$$

Eelnevates definitsioonides keskendusime testi tulemuste mõtestamisele fikseeritud vastaja korral. Kuna reeglina mõtestatakse teste praktikas mingi vastajate kogumi raames, siis keskendume ka meie edaspidi sellele.

Vaatleme elementaarsündmustena hulga  $I \times \Omega$  elemente ning eeldame, et eksisteerib tõenäosus

$$P_p : 2^{I \times \Omega} \rightarrow \mathbb{R},$$

kus funktsiooni  $P_p$  tõlgendame kui isiku  $i \in I$  ja testi tulemuse  $\omega \in \Omega$  koos esinemis sagedust.

Paneme tähele, et sellel elemntaarsündmuste hulgal võime määrata diskreetse juhusliku suuruse  $T$ , nii et

$$T((i, \omega)) = t_i, i \in I.$$

Seda juhuliku suurust tõlgendame kui küsimustiku tegelikku tulemust. Defineerime testi vaadeldava tulemuse kui diskreetse juhusliku suuruse  $X$ , nii et

$$X(i, \omega) = X_i(\omega)$$

ja testi vea kui diskreetse juhusliku suuruse  $E$ , nii et

$$E((i, \omega)) = E_i(\omega).$$

Paneme tähele, et kehtib  $X = E + T$ , tõepoolest olgu meil suvaline paar  $(i, \omega) \in I \times \Omega$ , siis

$$X((i, \omega)) = X_i(\omega) \stackrel{\text{def}}{=} t_i + E_i(\omega) = T((i, \omega)) + E((i, \omega)).$$

Eeldame edaspidises, et  $X$  ei ole konstante juhuslik suurus - kui  $X$  on konstante, siis .

**Definitsioon.** Juhusliku suuruste  $X$  ja  $Y$  *kovariatsiooniks* nimetatakse suurust

$$\text{cov}(X, Y) = \epsilon [(X - \epsilon X)(Y - \epsilon Y)].$$

**Definitsioon.** Juhusliku suuruste  $X$  ja  $Y$  *korrelatsioonikordajaks* nimetatakse suurust

$$\rho(X, Y) = \frac{\text{cov}(X, Y)}{\sqrt{DX}\sqrt{DY}}$$

Esitame nüüd meie poolt üles ehitatud mudeli omaduse, mis osutub väga kasulikus. Olgu meil kaks suvalist küsimustiku, mille vaadeldavad tulemused on vastavalt  $X = T + E$  ja  $X' = T' + E'$ , siis kehtib

$$\text{cov}(T, E') = 0, \quad (3.3)$$

ehk mingi küsimustiku tegeliku tulemuse ja mingi küsimustiku mõõtmisvea vahel ei ole korrelatsiooni. See omadus muudab mudeli rakendamise palju lihtsamaks, kuna me ei pea eeldame, et meie poolt koostatud küsimustikul on selline omadus. Tõestus sellele omadusele kahjuks käesoleva töö raamidesse ei mahu, rangest tõestusest huvitatutele soovitame tutvuda Donald Zimmermani mudeli ülesehitusega [19].

Paneme tähele, et kuna me ei seadunud mingeid kitsendusi testide  $X$  ja  $X'$  jaoks, siis ka  $\text{cov}(T, E) = 0$ .

Küll aga peame me tegema järgneva eelduse - olgu meil kaks erinevat küsimustiku, mille mõõtmisvead on vastavalt  $E$  ja  $E'$  siis

$$\text{cov}(E, E') = 0. \quad (3.4)$$

Tehtud eeldus tähendab seda, et mõõtmisvead ei tohi olla süstemaatilised. Näiteks, jagades küsimustiku pooleks ning vaadeldes mõlemat osa kui eraldi küsimustiku, siis teades esimese mõõtmisviga ei tohiks see meile midagi öelda teise osa mõõtmisvea kohta. Paneme tähele, et see eeldus on siimaani tehtutest praktikas kõige raskemini tagatav ning on potentsiaalne ohukoht testiteooria kasutamisel mingi küsimustiku mõtestamisel.

**Lause 3.5.** Juhuslikke suuruste  $X$  ja  $Y$  puhul kehtib

$$D(X + Y) = D(X) + D(Y) + 2cov(X, Y)$$

*Tõestus.*

$$\begin{aligned} D(X + Y) &\stackrel{\text{def}}{=} \epsilon[X + Y - \epsilon(X + Y)]^2 \stackrel{\epsilon \text{ lin.}}{=} \epsilon[X - \epsilon X + Y + \epsilon Y]^2 = \\ &= \epsilon(X - \epsilon X)^2 + 2\epsilon(X - \epsilon X)(Y - \epsilon Y) + \epsilon(Y - \epsilon Y)^2 \stackrel{\text{cov def}}{=} \\ &= D(X) + D(Y) + 2cov(X, Y) \end{aligned}$$

□

Järgnevalt tutvume paralleelse küsimustiku mõistega. Kaks küsimustiku, mille vaadeldavad tulemused üle kõigi vastajate kogumi  $I$  on  $X = T + E$  ja  $X' = T' + E'$  ning mille vaadeldavad tulemused vastaja  $i \in I$  jaoks on  $X_i = t_i + E_i$  ja  $X'_i = t'_i + E'_i$ , on paralleelsed parajasti siis, kui kehtivad järgmised väited :

1.  $t_i = t'_i \forall i \in I$ ,
2.  $D[E] = D[E']$ .

Eelnevast järeldub lihtsalt, et

$$T = T'. \quad (3.6)$$

Tõepoolest, olgu  $(i, \omega)$  suvaline paar hulgast  $I \times \Omega$ , siis kehtib

$$T((i, \omega)) \stackrel{\text{def}}{=} t_i = t'_i = T'((i, \omega)).$$

Paneme tähele, et kahe paralleelse küsimustiku  $X$  ja  $X'$  korral kehtib

$$D[X] = D[X'], \quad (3.7)$$

kuna

$$\begin{aligned} D[X] &= D[T + E] \stackrel{\text{Lause 3.5}}{=} D[T] + D[E] + 2cov(T, E) \stackrel{(3.3)}{=} D[T] + D[E] = \\ &= D[T'] + D[E'] = D[T'] + D[E'] + 2cov(T', E') = D[T' + E'] = D[X']. \end{aligned}$$

**Lause 3.8.** Olgu meil juhuslikud suurused  $X$ ,  $Y$  ja  $Z$ . Siis

$$\text{cov}(X + Y, Z) = \text{cov}(X, Z) + \text{cov}(Y, Z).$$

*Tõestus.*

$$\begin{aligned} \text{cov}(X + Y, Z) &\stackrel{\text{def}}{=} \epsilon[(X + Y - \epsilon[X + Y])(Z - \epsilon[Z])] \stackrel{\epsilon \text{ lin.}}{=} \\ &= \epsilon[(X + Y - \epsilon[X] + \epsilon[Y])(Z - \epsilon[Z])] = \\ &= \epsilon[((X - \epsilon[X]) + (Y - \epsilon[Y]))(Z - \epsilon[Z])] = \\ &= \epsilon[(X - \epsilon[X])(Z - \epsilon[Z]) + (Y - \epsilon[Y])(Z - \epsilon[Z])] = \\ &= \epsilon[(X - \epsilon[X])(Z - \epsilon[Z])] + \epsilon[(Y - \epsilon[Y])(Z - \epsilon[Z])] + \\ &= \text{cov}(X, Z) + \text{cov}(Y, Z) \end{aligned}$$

□

Paralleelse küsimustiku abil saame klassikalise testiteooria raames defineerida reliaabluse. Olgu meil kaks paralleelset küsimustiku, mille vaadeldavad tulemused üle vastajate kogumi  $I$  on vastavalt  $X = T + E$  ja  $X' = T' + E'$ . Testi, mille vaadeldav tulemus on  $X$ , reliaablus üle vastajate kogumi  $I$  on võrdne  $X$  ja  $X'$  korrelatsioonikordajaga, mida tähistame  $\rho_{XX'}$ , formaalselt

$$\rho_{XX'} = \text{corr}(X, X').$$

Eelneva põhjal saame näidata, et kehtib

$$\begin{aligned} \rho_{XX'} &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{\text{cov}(X, X')}{\sqrt{D[X] D[X']}} \stackrel{(3.7)}{=} \frac{\text{cov}(X, X')}{\sqrt{D[X] D[X]}} = \frac{\text{cov}(T + E, T' + E')}{D[X]} \stackrel{\text{Lause 3.8}}{=} \\ &= \frac{\text{cov}(T, T') + \text{cov}(T, E') + \text{cov}(E, T') + \text{cov}(E, E')}{D[X]} \stackrel{(3.3)}{=} \\ &= \frac{\text{cov}(T, T') + \text{cov}(E, E')}{D[X]} \stackrel{(3.4)}{=} \frac{\text{cov}(T, T')}{D[X]} \stackrel{(3.6)}{=} \frac{\text{cov}(T, T)}{D[X]} \stackrel{\text{def}}{=} \\ &= \frac{\epsilon[(X - \epsilon[X])(X - \epsilon[X])]}{D[X]} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{D[T]}{D[X]}. \end{aligned} \tag{3.9}$$

Samuti märgime, et kuna  $T = X - E$ , siis kehtib

$$\rho_{XX'} = \frac{D[T]}{D[X]} = \frac{D[X - E]}{D[X]} = \frac{D[X] - D[E]}{D[X]} = 1 - \frac{D[E]}{D[X]}. \tag{3.10}$$

Paneme tähele, kuna  $D[X] = D[T] + D[E]$ , siis eelneva põhjal  $\rho_{XX'} \in [0, 1]$ .

Eelneva põhjal on selge, et väide “testi reliaablus on suurem” on samaväärne järgmise kolme väitega:

1. testi korrelatsioon paralleelse testiga on suurem,
2. testi tegeliku tulemuse dispersioon on suurem võrreldes testi vaadeldava tulemuse dispersiooniga,
3. testi mõõtmisvea dispersioon on väiksem võrreldes testi vaadeldava tulemuse dispersiooniga.

Märgime, et klassikalise testiteooria raames defineeritud reliaablus sobib kokku eelmises peatükis antud mitteformaalse definitsiooniga, kuna küsimustik on iseendaga paralleelne testiks võib lugeda ka sama testi uuesti läbiviimise sama vastajate kogumi peal. Paneme tähele, et tegemist on suhteliselt nõrku eeldusi vajava teooriaga, kõigi raskem on praktikas süstemaatiliste vigade puudumist.

Kuna testi tegelik tulemus on suurus, mida me prakikas ei tea ning ka paralleelsete testide läbiviimine ei ole tihti võimalik on kasutusele on üritatud on võimalus testi reliaablust hinnata meie jaoks oluline. Järgnevalt vaatleme, kuidas seda teha.

## 3.2 Vajalikud taustteadmised reliaabluse hindamiseks

Järgnev käsitus tugineb Jacksoni ja Anguwamba 1977. aasta artiklile. [8] Olgu meil vastajate populatsioon  $I$ , üle mille me vaatleme küsimustiku, milles on  $k$  küsimust. Vaatleme seda küsimustiku klassikalise testiteooria raames ning olgu  $X$  küsimustiku vaadeldav tulemus,  $T$  küsimustiku tegelik tulemus ning  $E$  küsimustiku mõõtmisviga. Vaatleme iga küsimust kui ühest küsimusest koosnevat alamküsimustiku ja tähistama fikseeritud küsimuse  $i \in \{1, 2, \dots, k\}$  vaadeldavat tulemust kui  $X_i$ , tegeliku tulemust kui  $T_i$  ning mõõtmisviga  $E_i$ . Seega  $X = \sum_{i=0}^k X_i$ ,  $T = \sum_{i=0}^k T_i$  ja  $E = \sum_{i=0}^k E_i$ . Paneme tähele, et kui eelnevas peatükis tähistasime alaindeksiga küsimusele vastajat siis edaspidi tähistama sellega kindlat küsimust.

Vaatleme testi küsimuste tulemuste ja mõõtmisvea vektoreid:  $(X_1, X_2, X_3, \dots, X_n)$ ,  $(T_1, T_2, T_3, \dots, T_n)$ ,  $(E_1, E_2, E_3, \dots, E_n)$ . Tähistame nende vektorite kovariatsioo-



nimaatriksid<sup>③</sup>, vastavalt  $\Sigma_X, \Sigma_T, \Sigma_E$ . Seega,

$$\Sigma_X = \begin{pmatrix} \text{cov}(X_1, X_1) & \text{cov}(X_1, X_2) & \text{cov}(X_1, X_3) & \cdots & \text{cov}(X_1, X_k) \\ \text{cov}(X_2, X_1) & \text{cov}(X_2, X_2) & \text{cov}(X_2, X_3) & \cdots & \text{cov}(X_2, X_n) \\ \text{cov}(X_3, X_1) & \text{cov}(X_3, X_2) & \text{cov}(X_3, X_3) & \cdots & \text{cov}(X_n, X_n) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \text{cov}(X_n, X_1) & \text{cov}(X_n, X_2) & \text{cov}(X_n, X_3) & \cdots & \text{cov}(X_n, X_n) \end{pmatrix}.$$

Eelnevalt läbiviidud arutelu (vt. (3.9)) põhjal teame, et  $\text{cov}(X_i, X_j) = \text{cov}(T_i, T_j) + \text{cov}(E_j, E_j)$ . Seega,

$$\Sigma_X = \Sigma_T + \Sigma_E. \quad (3.11)$$

Lisaks kehtib eelduse (3.4) põhjal saame, et et juhul kui  $i \neq j$ , siis  $\text{cov}(E_i, E_j) = 0$ . Sellest tulenevalt kehtib

$$\Sigma_E = \begin{pmatrix} \text{cov}(E_1, E_1) & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \text{cov}(E_2, E_2) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \text{cov}(E_3, E_3) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \text{cov}(E_n, E_n) \end{pmatrix}. \quad (3.12)$$

Tähistame edaspidi maatriksi  $\Sigma_X$  elemente  $x_{ij}$ , maatriksi  $\Sigma_T$  elemente  $t_{ij}$  ning maatriksi  $\Sigma_E$  peadiagonaali elemente  $\theta_i$ . Seega, kui  $i \neq j$ , siis  $t_{ij} = x_{ij}$  ning  $t_{ii} = x_{ii} - \theta_i$ .

Tuletame meelde, et eelmises peatükis veendusime (3.10), et testi reliaablus võrdub avaldisega  $1 - \frac{D[E]}{D[X]}$ .

Veendume, et juhuslike suuruste summa summa dispersioon võrdub liidetavate kovariatsioonimaatriksi elementide summaga ehk kui  $X = \sum_{i=1}^k$  ja  $\Sigma_X$  on vektori  $(X_1, X_2, \dots, X_K)$  kovariatsioonimaatriks siis

$$D[X] = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k x_{ij}. \quad (3.13)$$

---

<sup>③</sup>Praktikas ei ole kovariatsioonimaatriksid meil teada, kuid meil on võimalik valimi põhjal saada hinnang vaadeldavate tulemuste kovariatsioonimaatriksile

Eelnevas veendumiseks paneme tähele, et

$$\begin{aligned}
D[X] &= D[X_1 + X_2 + \dots + X_k] \stackrel{\text{Lause 3.5}}{=} \\
&= D[X_1] + D[X_2 + X_3 + \dots + X_k] + 2\text{cov}(X_1, X_2 + X_3 + \dots + X_k) \stackrel{\text{Lause 3.8}}{=} \\
&= D[X_1] + D[X_2 + X_3 + \dots + X_k] + \\
&\quad + 2[\text{cov}(X_1, X_2) + \text{cov}(X_1, X_3) + \dots + \text{cov}(X_1, X_k)].
\end{aligned}$$

Näeme, et tegemist on rekkurentse võrrandiga. Arvestades, et  $\text{cov}(X, X) = D[X]$  (vt.(3.9)), näeme, et igale liidetavale eelnevas summas vastab mingite kovariatsioonimaatriksite elementide summa, kusjuures kõik kovariatsioonimaatriksi elemendid kuuluvad täpselt ühte nendest summadest. Kovariatsiooni maatriksi jagunemist illustreerib järgnev tabel, kus sinisega on tähistatud  $D[X_1]$ , punasega liidetavad, mille summa on võrdne arvuga  $2[\text{cov}(X_1, X_2) + \text{cov}(X_1, X_3) + \dots + \text{cov}(X_1, X_k)]$  ja rohelisega liikmed, mille summast moodustub  $D[X_1 + X_2 + \dots + X_k]$ . Siinkohal meenutame, et kovariatsioon on sümmeetriline ning seega  $\text{cov}(X_i, X_j) = \text{cov}(X_j, X_i)$ .

$\text{cov}(X_1, X_1)$	$\text{cov}(X_1, X_2)$	$\text{cov}(X_1, X_3)$	$\dots$	$\text{cov}(X_1, X_k)$
$\text{cov}(X_2, X_1)$	$\text{cov}(X_2, X_2)$	$\text{cov}(X_2, X_3)$	$\dots$	$\text{cov}(X_2, X_k)$
$\text{cov}(X_3, X_1)$	$\text{cov}(X_3, X_2)$	$\text{cov}(X_3, X_3)$	$\dots$	$\text{cov}(X_3, X_k)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
$\text{cov}(X_k, X_1)$	$\text{cov}(X_k, X_2)$	$\text{cov}(X_k, X_3)$	$\dots$	$\text{cov}(X_k, X_k)$

Lisaks on sellel rekurentses võrandil on lihtne baasjuht, selleks on olukord, kus summa koosneb ainult ühest liidetavast.

Arvestades maatriksi 3.12 ehitust, saame võrduse

$$1 - \frac{D[E]}{D[X]} = 1 - \frac{\sum_i \theta_i}{\sum_i \sum_j x_{ij}}. \quad (3.14)$$

MEELDETULETUSEKS

**Definitsioon.** Maatriks  $C \in \text{Mat}_k(\mathbb{R})$  on *mittenegatiivselt määratud* kui iga maatriksi  $v \in \text{Mat}_{k,1}(\mathbb{R})$  korral  $v^T C v \geq 0$ .

Veendume järgnevalt, et iga kovariatsioonimaatriks ning järelikult ka  $\Sigma_X, \Sigma_T$  ja  $\Sigma_E$  on mittenegatiivselt määratud.

**Lause 3.15.** Kui  $X$  ja  $Y$  on juhuslikud suurused ja  $\alpha \in \mathbb{R}$ , siis

$$\text{cov}(X, \alpha Y) = \alpha \text{cov}(X, Y)$$

*Tõestus.*

$$\begin{aligned} \text{cov}(X, \alpha Y) &= \epsilon[(X - \epsilon[X])(\alpha Y - \epsilon[\alpha Y])] \stackrel{\epsilon \text{ lin.}}{=} \\ &= \epsilon[(X - \epsilon[X])(\alpha Y - \alpha \epsilon[Y])] = \epsilon[\alpha(X - \epsilon[X])(Y - \epsilon[Y])] = \\ &= \alpha \epsilon[(X - \epsilon[X])(Y - \epsilon[Y])] = \alpha \text{cov}(X, Y) \end{aligned}$$

□

Olgu meil suvaliste juhuslike suuruste vektor  $X_1, X_2, \dots, X_n$ , kun  $n \in \mathbb{N}$  ja olgu  $\Sigma_X$  selle vektori kovariatsioonimaatriks. Olgu meil suvaline  $k$ -vektor  $v = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ . Konstrueerime uue juhuslike suuruste vektori  $(X'_1, X'_2, \dots, X'_n)$ , kusjuures  $X'_i = v_i X_i$  ning olgu  $\Sigma'_X$  selle vektori kovariatsioonimaatriks. Vaatleme juhusliku suurust  $X' = \sum_{i=1}^n X'_i$ . Kuna eelneva põhjal  $D[X'] = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \Sigma'_{Xij}$  ja definitsiooni põhjal  $D[X'] \geq 0$ , siis  $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \Sigma'_{Xij} \geq 0$ . Kuna  $\Sigma'_X$  on kovariatsioonimaatriks siis,

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \Sigma'_{Xij} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \text{cov}(v_i X_i, v_j X_j) \stackrel{\text{Lause 3.15}}{=} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n v_i v_j \text{cov}(X_i, X_j). \quad (3.16)$$

Paneme tähele, et

$$\begin{aligned} v^T \Sigma_X v &= \\ &= \begin{pmatrix} v_1 \text{cov}(X_1, X_1) + v_2 \text{cov}(X_1, X_2) + \dots v_n \text{cov}(X_1, X_n) \\ v_1 \text{cov}(X_2, X_1) + v_2 \text{cov}(X_2, X_2) + \dots v_n \text{cov}(X_2, X_n) \\ \vdots \\ v_1 \text{cov}(X_n, X_1) + v_2 \text{cov}(X_n, X_2) + \dots v_n \text{cov}(X_n, X_n) \end{pmatrix} v = \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n v_i v_j \text{cov}(X_i, X_j) \stackrel{(3.16)}{=} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \Sigma'_{Xij} = D[X'] \end{aligned}$$

Seega  $v^T \Sigma_X v \geq 0$  ning kuna  $v$  oli valitud suvaliselt siis on  $\Sigma_X$  mittenegatiivselt määratud. Kuna  $n$  ja  $X_1, X_2, \dots, X_n$  olid valitud suvaliselt, siis on iga kovariatsioonimatriks mittenegatiivselt määratud.

Sellega oleme andnud reliaablusele matemaatilise definitsiooni ning mõtestanud lahti vajaminevad taustteadmised reliaabluse hindamiseks. Järgnevalt tuletame mõned alumised tõkked reliaablusele.

## 4 Alumised tõkked reliaablusele

Järgnevalt vaatleme viite alumist tõket reliaablusele ning üritame pakkuda lahendust töö alguses püstitatud probleemile. Vaadeltavatest alumistest tõketest neli -  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ ; pakkus aastal 1945 välja Louis Guttman [6]. Viienda vaadeldava tõkke pakkusid välja Jackson ja Anguwamba oma 1977 aasta artiklis [8]. Kõik tõkked tuletame tuginedes Jacksoni ja Anguwamba artiklile.

Olgu meil vastajate kogum  $I$ , üle mille me vaatleme  $k$  küsimusest koosnev küsimustik, mille vaadeldav tulemus on  $X$ , tegelik tulemus on  $T$  ja mõõtmisviga üle on  $E$ . Numerdame küsimused arvudega 1 kuni  $k$ . Vaatleme igat küsimust eraldi alamküsimustikuna, ning olgu  $X_i$  küsimuse  $i$  vaadeldav tulemus,  $T_i$  küsimuse  $i$  tegelik tulemus ja  $E_i$  küsimuse  $i$  mõõtmisviga. Analooiliselt eelmise peatükiga tähistame vektore  $(X_1, X_2, \dots, X_k)$ ,  $(T_1, T_2, \dots, T_k)$  ja  $(E_1, E_2, \dots, E_k)$  kovariatsioonimatrikseid kui  $\Sigma_X, \Sigma_T, \Sigma_E \in Mat_k(\mathbb{R})$ . Nagu eelmises peatükis, tähistame ka siin matriksi  $\Sigma_X$  elemente kui  $x_{ij}$ , matriksi  $\Sigma_T$  elemente kui  $t_{ij}$  ning matriksi  $\Sigma_E$  peadiagonaali elemente  $\theta_i$ . Edaspidi vaatleme selles peatükis küsimustiku, mille vaadeldav tulemus on  $X$ , reliaabluse alumisi tõkkeid.

### 4.1 Alumine tõke $\lambda_1$

Vaatleme kovariatsioonimatriksit  $\Sigma_T$ . Eeldame vastuväiteliselt, et matriksi  $\Sigma_T$  peadiagonaalil leidub element, mis on negatiivne. Olgu selleks elemendiiks  $t_{ii}$ . Olgu  $v$  vektor, millel on  $k$  elementi, kusjuures

$$v_j = \begin{cases} 1, j = 1 \\ 0, j \neq 1 \end{cases}.$$

Paneme tähele, et nüüd  $v^T \Sigma_T v = t_{ii} < 0$ . Tõepoolest,

$$v^T \Sigma_T v = \begin{pmatrix} t_{i1} & t_{i2} & \dots & t_{ik} \end{pmatrix} v = t_{ii}.$$

Seega ei ole maatriks enam positiivselt määratud, mis on eelmises peatükis läbiviidud arutelu põhjal vastuolus sellega, et  $\Sigma_T$  on kovariatsioonimaatriks .

Seega iga  $i$  peab kehtima  $t_{ii} \geq 0$  ning kuna eelmise peatüki põhjal  $\Sigma_X = \Sigma_T + \Sigma_E$ , siis peab kehtima  $\theta_i < x_{ii}$  iga  $i, 1 \leq i \leq k$  korral.

Seega ka  $\sum_{i=1}^k \theta_i \leq \sum_{i=1}^k x_{ii}$ . Võttes arvesse võrdust (3.14), oleme saanud küsimustiku, mille vaadeldav tulemus on  $X$ , reliaablusele alumise tõkke, mida tähistame kui  $\lambda_1$ , kus

$$\lambda_1 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^k x_{ii}}{\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k x_{ij}} \leq 1 - \frac{\sum_{i=1}^k \theta_i}{\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k x_{ij}} = 1 - \frac{D[E]}{D[X]}. \quad (4.1)$$

## 4.2 Alumine tõke $\lambda_2$

Enne järgmise alumise tõke tuletamist, veendume et kehtivad kaks abitulemust.

Olgu meil mitte-negatiivselt määratud sümmeetriline maatriks  $C, C \in Mat_n(\mathbb{R})$ . Näitame, et sellisel juhul kehtib väide, et iga  $i, j$  korral

$$c_{ii}c_{jj} \geq c_{ij}^2.$$

Valime suvaliselt  $i$  ja  $j$ , nii et  $i \neq j, 1 \leq i, j \leq n$  ning  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Olgu meil  $n$ -vektor  $v$ , kus

$$v_k = \begin{cases} 1, k = i \\ \alpha, k = j \\ 0, k \notin \{i, j\} \end{cases}.$$

Kuna eelduste kohaselt on  $C$  mitte-negatiivset määratud, siis peab kehtima

$$0 \leq v^T C v = \begin{pmatrix} \mathbf{0}^T & 1 & \mathbf{0}'^T & \alpha & \mathbf{0}''^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ 1 \\ \mathbf{0}' \\ \alpha \\ \mathbf{0}'' \end{pmatrix}, \quad (4.2)$$

kus  $\mathbf{0}, \mathbf{0}', \mathbf{0}''$  on null vektorid pikkustega vastavalt  $i-1, j-i-1, n-j$ .

Arvutame avaldise 4.2 väärtuse:

$$\begin{aligned}
v^T C v &= \begin{pmatrix} \mathbf{0}^T & 1 & \mathbf{0}'^T & \alpha & \mathbf{0}''^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ 1 \\ \mathbf{0}' \\ \alpha \\ \mathbf{0}'' \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} \mathbf{0}^T & 1 & \mathbf{0}'^T & \alpha & \mathbf{0}''^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{1i} + \alpha c_{1j} \\ \vdots \\ a_{ni} + \alpha c_{nj} \end{pmatrix} = \\
&= c_{ii} + \alpha c_{ij} + \alpha c_{ji} + \alpha^2 c_{jj} = c_{ii} + 2\alpha c_{ij} + \alpha^2 c_{jj}.
\end{aligned}$$

Seega saame, et  $0 \leq c_{ii} + 2\alpha c_{ij} + c_{jj}$ . See, et saadud ruutvõrratus on kehtib on samaväärne sellega, et selle ruutvõrrandi diskriminant ei ole nullist suurem. Seega,

$$c_{ij}^2 - c_i c_j \leq 0,$$

milles me soovisimegi veenduda. Eelneva arutelu idee pärineb Ivar Tammeraidi õppikust. [17].

Olgu meil mingid arvud  $y_i, 1 \leq i \leq n$ . Paneme tähele, et siis kehtib järgnev võrdus

$$\left( \sum_{i=1}^n y_i \right)^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n y_i y_j = \sum_{i=1}^n y_i^2 + \sum_{i=1}^n \left( \sum_{j=1}^{i-1} y_i y_j + \sum_{m=i+1}^n y_i y_m \right).$$

Järelikult kehtib ka

$$2(n-1) \left( \sum_{i=1}^n y_i \right)^2 = 2(n-1) \sum_{i=1}^n y_i^2 + 2(n-1) \sum_{i=1}^n \left( \sum_{j=1}^{i-1} y_i y_j + \sum_{m=i+1}^n y_i y_m \right).$$

Liidetavad teistmoodi grupeerides saame, et

$$\begin{aligned}
& 2(n-1) \sum_{i=1}^n y_i^2 + 2(n-1) \sum_{i=1}^n \left( \sum_{j=1}^{i-1} y_i y_j + \sum_{m=i+1}^n y_i y_m \right) = \\
& = (y_1^2 - 2y_1 y_2 + y_2^2) + (y_1^2 - 2y_1 y_3 + y_3^2) + \cdots + (y_1^2 - 2y_1 y_n + y_n^2) + \\
& + (y_2^2 - 2y_2 y_1 + y_1^2) + (y_2^2 - 2y_2 y_3 + y_3^2) + \cdots + (y_2^2 - 2y_2 y_n + y_n^2) + \\
& + \cdots + \\
& + (y_n^2 - 2y_n y_1 + y_1^2) + (y_n^2 - 2y_n y_{n-1} + y_{n-1}^2) + \cdots + \\
& + 2n \sum_{i=1}^n \left( \sum_{j=1}^{i-1} y_i y_j + \sum_{m=i+1}^n y_i y_m \right) = \\
& = \sum_{i=1}^n \left( \sum_{j=1}^{i-1} (y_i - y_j)^2 + \sum_{m=i+1}^n (y_i - y_m)^2 \right) + 2n \sum_{i=1}^n \left( \sum_{j=1}^{i-1} y_i y_j + \sum_{m=i+1}^n y_i y_m \right)
\end{aligned}$$

Vaatleme jällegi kovariatsiooni maatriksit  $\Sigma_E$ . Märkame, et kuna  $x_{ii} = \theta_i + t_{ii}$  iga  $1 \leq i \leq k$ , siis kehtib järgnev:

$$\sum_{i=1}^k \theta_i = \sum_{i=1}^k x_{ii} - \sum_{i=1}^k t_{ii}$$

Märgime, et kuna kovariatsioon on definitsioon põhjal sümmeetriline siis on ka vektori  $(Y_1, Y_2, \dots, Y_n)$  kovariatsioonimaatriks  $\Sigma_Y$  sümmeetriline. Tõepoolest, iga  $1 \leq i, j \leq n$  korral,

$$\Sigma_{Y_{ij}} = \text{cov}(Y_i, Y_j) = \text{cov}(Y_j, Y_i) = \Sigma_{Y_{ji}}.$$

Eelnevalt käsitletud algebralise samasuse ning kovariatsioonimaatriksite mitte-negatiivselt määratuse ja sümmeetrilisuse põhjal kehtib

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^k t_{ii} &= \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^k \left( \sum_{j=1}^{i-1} (t_{ii} - t_{jj})^2 + \sum_{m=i+1}^k (t_{ii} - t_{mm})^2 \right) + 2k \sum_{i=1}^k \left( \sum_{j=1}^{i-1} t_{ii} t_{jj} + \sum_{m=i+1}^k t_{ii} t_{mm} \right)}{2(k-1)}} \geq \\
&\geq \sqrt{\frac{k \sum_{i=1}^k \left( \sum_{j=1}^{i-1} t_{ii} t_{jj} + \sum_{m=i+1}^k t_{ii} t_{mm} \right)}{(k-1)}}
\end{aligned}$$

Arvestades, et kovariatsioonimaatriks on mitte-negatiivselt määratud ning seda, et kui  $i \neq j$  siis  $t_{ij} = x_{ij}$ , saame eelnevalt tõestatud abitulemuse põhjal väita, et

$$\sum_{i=1}^k t_{ii} \geq \sqrt{\frac{k \sum_{i=1}^k \left( \sum_{j=1}^{i-1} t_{ii} t_{jj} + \sum_{m=i+1}^k t_{ii} t_{mm} \right)}{(k-1)}} \geq \sqrt{\frac{k \sum_{i=1}^k \left( \sum_{j=1}^{i-1} x_{ij}^2 + \sum_{m=i+1}^k x_{im}^2 \right)}{(k-1)}}$$

Selle taustal saame defineerida alumise tõkke reliaablusele, mida tähistame  $\lambda_2$ :

$$\lambda_2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^k x_{ii} - \sqrt{\frac{k \sum_{i=1}^k \left( \sum_{j=1}^{i-1} x_{ij}^2 + \sum_{m=i+1}^k x_{im}^2 \right)}{(k-1)}}}{\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k x_{ij}} \leq 1 - \frac{\sum_{i=1}^k x_{ii} - \sum_{i=1}^k t_{ii}}{\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k x_{ij}} = 1 - \frac{\sum_{i=1}^k \theta_i}{\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k x_{ij}} = 1 - \frac{D[E]}{D[X]}.$$

Paneme tähele, et

$$\lambda_2 = \lambda_1 + \frac{\sqrt{\frac{k \sum_{i=1}^k \left( \sum_{j=1}^{i-1} x_{ij}^2 + \sum_{m=i+1}^k x_{im}^2 \right)}{(k-1)}}}{\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k x_{ij}}$$

ning seega  $\lambda_1 \leq \lambda_2$ .

### 4.3 Alumine tõke $\lambda_3$

Vaatleme jällegi kovariatsioonimaatriksit  $\Sigma_T$ . Olgu meil arvud  $i, j$ , nii et  $1 \leq i, j \leq k$  ning olgu meil  $k$ -vektor  $v$ , mille element kohal  $i$  on 1 ja element kohal  $1 \leq j \leq k, j \neq i$  on  $-1$ . Kuna kovariatsioonimaatriks peab olema mittenegatiivselt määratud siis peab kehtima

$$0 \leq v^T \Sigma_T v = v^T \begin{pmatrix} t_{1i} - t_{1j} \\ t_{2i} - t_{2j} \\ \vdots \\ t_{ki} - t_{kj} \end{pmatrix} = t_{ii} + t_{jj} - 2t_{ij},$$



võttes arvesse seda, et kui  $i \neq j$ , siis  $x_{ij} = t_{ij}$  saame, et  $t_{ii} + t_{jj} \geq 2x_{ij}$ .

Teame, et võimalusi valida  $i$  ja  $j$  nii, et  $i \neq j$  on  $k(k-1)$ . Summeerides kõikide võimalike  $i$  ja  $j$  valikul saadud võrratused saame, et

$$2(k-1) \sum_{i=1}^k t_{ii} \geq 2 \sum_{i=1}^k \left( \sum_{j=1}^{i-1} x_{ij} + \sum_{m=i+1}^k x_{im} \right),$$

mis on samaväärne sellega, et

$$\sum_{i=1}^k t_{ii} \geq \frac{1}{k-1} \sum_{i=1}^k \left( \sum_{j=1}^{i-1} x_{ij} + \sum_{m=i+1}^k x_{im} \right).$$

Eelneva põhjal olema oleme saanud järgmise alumise tõkke reliaablusele -

$$\begin{aligned} \lambda_3 &= 1 - \frac{\sum_{i=1}^k x_{ii} - \frac{1}{k-1} \sum_{i=1}^k \left( \sum_{j=1}^{i-1} x_{ij} + \sum_{m=i+1}^k x_{im} \right)}{\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k x_{ij}} \leq \\ &\leq 1 - \frac{\sum_{i=1}^k x_{ii} - \sum_{i=1}^k t_{ii}}{\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k x_{ij}} = 1 - \frac{\sum_{i=1}^k \theta_i}{\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k x_{ij}} = 1 - \frac{D[E]}{D[X]}. \end{aligned}$$

Tõkke teisendamisel saame, et

$$\begin{aligned}
\lambda_3 &= 1 - \frac{\sum_{i=1}^k x_{ii} - \frac{1}{k-1} \sum_{i=1}^k \left( \sum_{j=1}^{i-1} x_{ij} + \sum_{m=i+1}^k x_{im} \right)}{\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k x_{ij}} = \\
&= \frac{\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k x_{ij} - \sum_{i=1}^k x_{ii} + \frac{1}{k-1} \sum_{i=1}^k \left( \sum_{j=1}^{i-1} x_{ij} + \sum_{m=i+1}^k x_{im} \right)}{\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k x_{ij}} = \\
&= \frac{\sum_{i=1}^k \left( \sum_{j=1}^{i-1} x_{ij} + \sum_{m=i+1}^k x_{im} \right) + \frac{1}{k-1} \sum_{i=1}^k \left( \sum_{j=1}^{i-1} x_{ij} + \sum_{m=i+1}^k x_{im} \right)}{\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k x_{ij}} = \\
&= \frac{k}{k-1} \left( \frac{\sum_{i=1}^k \left( \sum_{j=1}^{i-1} x_{ij} + \sum_{m=i+1}^k x_{im} \right)}{\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k x_{ij}} \right) = \frac{k}{k-1} \left( 1 - \frac{\sum_{i=1}^k x_{ii}}{\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k x_{ij}} \right).
\end{aligned}$$

Tuletades meelde tõkke  $\lambda_1$  definitsiooni (4.1) on ilmne, et

$$\lambda_3 = \frac{n \lambda_1}{n-1}. \quad (4.3)$$

ja seega  $\lambda_1 \leq \lambda_3$ . Lisaks on võimalik näidata, et  $\lambda_3 \leq \lambda_2$ .

Reliaabluse alumine tõke  $\lambda_3$  on enam tuntud kui Cronbachi  $\alpha$ , nimetatud Lee Cronbachi järgi, kes seda oma 1951 aasta artiklis [2] kasutas ning on ilmselt enim kasutatud hinnang reliaablusele. Käesolevas töös jääme siiski selle alumise tõkku nimetamisel  $\lambda_3$  juurde - nii nimetates tuletatud tõket Louis Guttman oma kuus aastat varem ilmunud artiklis [6].

Siinkohal märgima ka ära, et  $\lambda_3$  kasutatakse tihti ka hinnangu testis sisemisele järjepidavusele ning sellega kokku puutudes tuleb kindlasti välja selgitada, mida autor reliaabluse all mõistab.

#### 4.4 Alumine tõke $\lambda_4$

Vaatleme kovariatsioonimaatriksit  $\Sigma_T$ . Vaatleme  $k$  vektorite hulka  $V = \{v : |v_i| = 1 \ \forall i, 1 \leq i \leq k\}$ . Olgu meil suvaline vektor  $v \in V$ , kuna  $\Sigma_T$  on mittenegatiivselt määratud, siis teame, et kehtib

$$0 \leq v^T \Sigma_T v,$$

arvestades kovariatsioonimaatriksi  $\Sigma_E$  omadusi saame võrduse (3.11) põhjal

$$\sum_{i=1}^k \theta_i = \sum_{i=1}^k v_i^2 \theta_i = v^T \Sigma_E v \leq v^T \Sigma_X v.$$

Seega, iga  $v \in V$  korral saame alumise tõkke reliaablusele. Tõepoolest, (3.14) põhjal iga vektori  $v \in V$  korral,

$$1 - \frac{v^T \Sigma_X v}{\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k x_{ij}} \leq 1 - \frac{\sum_{i=1}^k \theta_i}{\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k x_{ij}} = 1 - \frac{D[E]}{D[X]}.$$

Defineerime alumise tõkke  $\lambda_4$  kui maksimumi kõikidest sellistest tõketest, seega

$$\lambda_4 = \max_{v \in V} \left( 1 - \frac{v^T \Sigma_X v}{\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k x_{ij}} \right).$$

#### 4.5 Alumine tõke $glb$

Paneme tähele, et tänu  $\Sigma_E$  struktuurile (3.12) on tema mittenegatiivselt määratus samaväärne sellega, et  $0 \leq \theta_i$  iga  $1 \leq i \leq k$  korral.

Tõepoolest, olgu  $\Sigma_E$  mittenegatiivselt määratud ning oletame vastuväiteliselt, et leidub  $i, 1 \leq i \leq k$  nii, et  $0 > \theta_i$ . Olgu  $v$   $k$ -vektor, nii et

$$v_j = \begin{cases} 1, & j = i \\ 0, & j \neq i \end{cases}.$$

Siis  $v^T \Sigma_E v = \theta_i < 0$ , mis on aga vastuolu sellega, et  $\Sigma_E$  on mittenegatiivselt määratud. Teistpidi, kehtigu  $0 \leq \theta_i$  iga  $1 \leq i \leq k$  korral. Olgu  $v$  suvaline  $k$ -vektor. Siis  $v^T \Sigma_E v = \sum_{i=1}^k v_i^2 \theta_i \geq 0$ . Kuna  $v$  oli suvaline, siis on  $\Sigma_E$  vastavalt definitsioonile mittenegatiivselt määratud.

Üritame nüüd leida vea suurimat võimaliku dispersiooni, mis on (3.10) põhjal samaväärne summaga  $\sum_{i=1}^k \theta_i$ , arvestades eelnevalt kirjeldatud piiranguid. Saame selle panna kirja järgneva optimeerimisülesandena:

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_i \theta_i \\ & \theta_i > 0 \\ \Sigma_X = \Sigma_T + \Sigma_E \\ & \Sigma_T \succeq 0, \end{aligned} \tag{4.4}$$

kus kirja pilt  $\Sigma_T \succeq 0$  tähistab tingimust "  $\Sigma_T$  on mittenegatiivselt määratud".

Olgu  $z$  eelneva optimeerimisülesande lahend  $\Sigma_X$  korral. Tähistame tähekombinatsiooniga  $glb$ , mis tuleneb fraasist *greatest lower bound*, lahendi  $z$  abil saadud alumise tõkke reliaablusele, kus

$$glb = 1 - \frac{z}{\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k x_{ij}}.$$

Panemet tähele, et kuna  $z$  on maksimaalne vea dispersioon fikseeritud  $\Sigma_X$  korral, siis on alumine tõke  $glb$  minimaalne võimalik reliaablus. Siit aga saame, et iga teine reliaabluse alumine tõke peab olema väiksem võrdne tõkega  $glb$ . Seega on  $glb$  suurim võimalik alumine tõke.

## 4.6 Hinnangute kasutatavus praktikas

Püstitasime töö alguses probleemi - kas võimalik leida reliaablusele parem hinnang kui seda on  $\lambda_3$ ? Käsitletud hinnangutest on nii  $glb$  kui  $\lambda_2$  reliaabluse alumised tõkked ning samas vähemalt sama suured kui  $\lambda_3$ , seega ka paremad hinnangud reliaablusele kui seda on  $\lambda_3$ . Kuigi  $\lambda_4$  ei ole tingimata suurem, kui  $\lambda_3$ , on raske leida empiirilist näidet, kus  $\lambda_4$  oleks väiksem kui  $\lambda_3$ .

Paneme tähele, et  $\lambda_3$  leidmine on väga lihtne ning eelmise sajandi keskel, olukorras kus arvutuslik võimsus oli tagashoidlik, oli tegemist olulise eelisega. Tänapäeval on  $\lambda_3$  lihtsus pea olematu eelis, arvestades, et ka väga suurte küsimustike puhul ei valmista paremate hinnangute leidmine probleeme.

Seega, kui küsimustiku analüüsia mõtestab küsimustiku klassikalise testiteooria raamistikus, siis ei näe autor mingit põhjust, miks peaks kasutama reliaabluse hindamiseks  $\lambda_3$  ning soovitab eelistada teisi, kõrgemaid, hinnaguid. Autor märgib siinkohal, et tegemist tundub olevat valdkonna ekspertide seas levinud arvamusega. [13] [15] [3]

## 5 Programmiteek

Põhjendan siin ka lühidalt Pythoni eeliseid teegi realiseerimisel, alternatiividega (näiteks Java või MATLAB) võrreldes:

1. Python on hetkel keel, millega programmeerimisalased õppingud tavaliselt algavad. Näiteks Tartu Ülikoolis õpetatakse programmeerimist keeles Python nii matemaatika-informaatika teaduskonnale suunatud aines kui ka teistele huvilistele suunatud aines "Programmeerimise alused", mida 2013/2014 aasta kevadel kuulas 150 inimest. Autor loodab, et nende seas on ka mõned psühholoogia tudengid.
2. Pythonil on läbi NumPy ja SciPy teekide väga hea arvutuslik tugi soovitud hinnangute implementeerimiseks.
3. Pythoni teek on väga lihte integreerida mõne veebiraamistikuga, mis võiks olla loodava teegi üks rakenduskohti.
4. Python on vabavara ning kõigile tasuta kasutatav.

Meetoditest, mis leiavad  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$ ,  $\lambda_3$  ja  $\lambda_4$  on implementeeritud versioonid nii Python 2 kui ka Python 3 jaoks. Kasutatud on teek SciPy [10] ja CVXPY [4].

Järgnevalt on ära toodud hinnagutu implementatsioonid Python 2 jaoks.

```

1 def calculate_lambda_1(cov_matrix):
2     u"""
3     Based on Guttman,1945, for calculations using Jackson,
4     Agurwamba,1977,[569].
5     """
6     n = check_that_matrix_is_square_and_fix_n(cov_matrix)
7     def sum_of_main_diagonal():
8         summ = 0
9         for i in xrange(n):
10             summ += cov_matrix[i,i]
11         return summ
12
13     return 1 - (sum_of_main_diagonal()/
14                 calculate_sum_of_covariance_matrix_elements(cov_matrix, n))

```

Programm 1: Funktsioon hinnangu  $\lambda_1$  leidmiseks

```

1 def calculate_lambda_2(cov_matrix):
2     u"""
3     Using Guttman,1945,[259] definition.
4     """
5     def sum_of_squares_of_non_diagonal_matrix_elements():
6         summ = 0
7         for i in xrange(n):
8             for j in xrange(i):
9                 summ += cov_matrix[i,j]**2
10        return 2*summ
11
12    n = len(cov_matrix)
13    l1 = calculate_lambda_1(cov_matrix)
14    sum_of_squares = sum_of_squares_of_non_diagonal_matrix_elements()
15    under_square_root = ((n)/(n-1)* sum_of_squares)**(1/2)
16    return l1 + (under_square_root/
17                calculate_sum_of_covariance_matrix_elements(cov_matrix))

```

Programm 2: Funktsioon hinnangu  $\lambda_2$  leidmiseks

```

1 def calculate_lambda_3(cov_matrix):
2     number_of_items = len(cov_matrix)
3     return (number_of_items/(number_of_items-1))*calculate_lambda_1(cov_matrix)

```

Programm 3: Funktsioon hinnangu  $\lambda_3$  leidmiseks

```

1 import numpy as np

2 def calculate_lambda_4(cov_matrix):
3     u"""
4     Lambda 4, based on Guttman, 1945, using the implementation of Jackson,
5     Agunwamba, 1977.
6     Based on idea that we try to best possible split (u is a vector,
7     with elements either 1 or -1, ones will be in one split,
8     minus ones in another) .
9     NAIVE IMPLEMENTATION, works with relatively low N,
10    better approaches available, see Benton, 2013.
11    """

12    def objective_function(u):
13        return u.T.dot(cov_matrix.dot(u))

14    def try_vectors():
15        u"""
16        Idea : generate half of all possible vectors of length n,
17        such that if vector v is in, vector -v is not.
18        Using binary representation as string,
19        from 2**(n-1) to 2**n, coding "0" to "-1"
20        """
21        smallest = np.Infinity
22        result_vector = []
23        l = []
24        for i in xrange(2**(n-1), 2**n):
25            binary_of_i = np.binary_repr(i, width=n)
26            binary_of_i_int = [ 1 if x == "1" else -1 for x in binary_of_i]
27            u = np.array(binary_of_i_int)
28            result = objective_function(u)
29            if result < smallest:
30                smallest = result
31                result_vector = u
32        return smallest

33    def calc_lambda(smallest):
34        return 1 - (smallest/
35                    util.calculate_sum_of_covariance_matrix_elements(cov_matrix, n))

36    n = util.check_that_matrix_is_square_and_fix_n(cov_matrix)
37    return calc_lambda(try_vectors())

```

Programm 4: Funktsioon hinnangu  $\lambda_4$  leidmiseks

```

1 import cvxpy as cv
2 import numpy as np

3 u"""
4 Idea: Observed covariance matrix is of observed scores.
5 That matrix is sum of true score covariance matrix and error covariance matrix.
6 As errors don't correlate with anything else than themselves,
7 the last is diagonal matrix. So,  $C_{obs} = C_{true} + C_{error}$ 
8 We look to maximize error (to find the worst possible case),
9 that is the same as minimizing the trace of  $C_{true}$ .
10 More can be found in Jackson, Agunwamba, 1977 and Woodhouse, Jackson, 1977.
11 """

12 class Glb(object):
13     def __init__(self, cov_matrix):
14         self._cov_matrix = cov_matrix
15         self._constraints = []
16         self._n = util.check_that_matrix_is_square_and_fix_n(cov_matrix)
17         self._cov_matrix = np.matrix(cov_matrix)
18         self._generate_matrix_variables()
19         self._divide_covariance_matrix_of_into_error_and_true_score()
20         self._fix_error_cov_matrix_diagonal_fields_constraints()
21         self._error_cov_matrix_non_diagonal_fields_are_0()
22         self._prepare_program()
23         self._solve_program()
24         self._answer = self._calculate_Glb()

25     def _generate_matrix_variables(self):
26         self._true_cov_matrix = cv.semidefinite(self._n,
27             name=u"true_cov_matrix")
28         self._error_cov_matrix = cv.Variable(self._n, self._n,
29             name=u"error_cov_matrix")

30     def _divide_covariance_matrix_of_into_error_and_true_score(self):
31         u"""
32         Constraint that  $C_{obs} = C_{true} + C_{error}$ 
33         """
34         self._constraints.append(self._error_cov_matrix+
35             self._true_cov_matrix == self._cov_matrix)

36     def _fix_error_cov_matrix_diagonal_fields_constraints(self):
37         u"""
38         Error covariance matrix must be semidefinite,
39         meaning that all elements on the diagonal must be positive.
40         """
41         for i in xrange(self._n):
42             self._constraints.append(self._error_cov_matrix[i,i] >= 0)

```



```

43     def _error_cov_matrix_non_diagonal_fields_are_0(self):
44         u"""
45         Covariance between different errors is 0
46         """
47         for i in xrange(self._n):
48             for j in xrange(self._n):
49                 if (i != j):
50                     self._constraints.append(
51                         self._error_cov_matrix[i,j] == 0)

52     def _prepare_program(self):
53         u"""
54         Minimize trace of true score covariance matrix
55         """
56         self._p = cv.Problem(cv.Minimize(sum(
57             [self._true_cov_matrix[i,i] for i in xrange(self._n)])),
58             self._constraints)
59         if self._p.is_dcp():
60             logging.debug(u"Problem is DCP")
61         else:
62             raise Exception(u"Non-DCP glb, something went terrible wrong")

63     def _solve_program(self):
64         try:
65             self._p.solve()
66         except:
67             logging.critical(u"Runnig CVXOPT went wrong")

68     def _calculate_Glb(self):
69         return 1 - (sum(
70             [self._error_cov_matrix.value[i,i] for i in xrange(self._n)])/
71             util.calculate_sum_of_covariance_matrix_elements(
72                 self._cov_matrix,self._n)

73     def get_answer(self):
74         return self._answer

```

Programm 5: Klass hinnangu *glb* leidmiseks

```

def check_that_matrix_is_square_and_fix_n(input_matrix):
    def check_that_matrix_is_square():
        for row in input_matrix:
            if len(row) != n:
                raise Exception(u"Matrix not square or missing data")
    n = len(input_matrix)
    check_that_matrix_is_square()
    return n

def fix_number_of_rows(input_matrix):
    def check_that_matrix_is_complete():
        for row in input_matrix:
            if len(row) != n:
                raise Exception(u"Matrix not square or missing data")
    n = len(input_matrix[0])
    check_that_matrix_is_complete()
    return n

def calculate_sum_of_covariance_matrix_elements(cov_matrix, n = None):
    if n == None:
        n = check_that_matrix_is_square_and_fix_n(cov_matrix)
    summ = 0
    for i in xrange(n):
        for j in xrange(n):
            summ += cov_matrix[i,j]
    return summ

```

Programm 6: Eelnevates programmides kasutatutd abifunktsioonid

## Viited

- [1] Lee J. Cronbach. Test "Reliability": Its Meaning and Determination. *Psychometrika*, 12(1):1–16, 1947.
- [2] Lee J. Cronbach. Coefficient Alpha and the Internal Structure of Tests. 16(3):297–330, 1951.
- [3] Lee J. Cronbach and Richard J. Shavelson. My Current Thoughts on Coefficient Alpha and Successor Procedures. *Educational and Psychological Measurement*, 64(3):391–418, June 2004.
- [4] S. Diamond, S; Chu, E; Boyd. CVXPY: A Python-Embedded Modeling Language for Convex Optimization, 2014.
- [5] Diane R. Edmondson. Likert Scales: A History. In *Conference on Historical Analysis & Research in Marketing Proceedings*, 2005.
- [6] Louis Guttman. A Basis for Analyzing Test-Retest Reliability. *Psychometrika*, 10(4):255–282, 1945.
- [7] Robin K. Henson. Understanding Internal Consistency Reliability Estimates: A Conceptual Primer on Coefficient Alpha. *Measurement & Evaluation in Counseling & Development*, 34(3):177, 2001.
- [8] Paul H Jackson and Christian C. Agunwamba. Lower Bounds for the Reliability of the Total Score on a Test Composed of Non-Homogeneous Items: I: Algebraic Lower Bounds. *Psychometrika*, 42(2):567–578, 1977.
- [9] Susan Jamieson. Likert scales: how to (ab)use them. *Medical education*, 38(12):1217–8, December 2004.
- [10] Eric Jones, Travis Oliphant, and Pearu Peterson. SciPy: Open Source Scientific Tools for Python.
- [11] F.M. Lord and M.R Novick. *Statistical theories of mental test scores*. 1968.
- [12] Melvin R. Novick. The axioms and principal results of classical test theory. *Journal of Mathematical Psychology*, 3(1):1–18, February 1966.
- [13] William Revelle and Richard E. Zinbarg. Coefficients Alpha, Beta, Omega, and the glb: Comments on Sijtsma. *Psychometrika*, 74(1):145–154, December 2008.
- [14] Klaas Sijtsma. On the use, the misuse, and the very limited usefulness of cronbach's alpha. *Psychometrika*, 74(1):107–120, 2009.

- [15] Klaas Sijtsma. Reliability Beyond Theory and Into Practice. *Psychometrika*, 74(1):169–173, 2009.
- [16] Nicholas Smith. Example of Likert Scale. [http://en.wikipedia.org/wiki/File:Example\\_Likert\\_Scale.svg](http://en.wikipedia.org/wiki/File:Example_Likert_Scale.svg).
- [17] Ivar Tammeraid. *Lineaaralgebra rakendused*. TTÜ Kirjastus, Tallinn, 1999.
- [18] UT. Õisi tagasiside. <http://is.ut.ee>.
- [19] D. W. Zimmerman. Probability spaces, hilbert spaces, and the axioms of test theory. 40(3):395–412, 1975.

## Lisa

3. Õppejõu hoiak õpetamisel oli õppimist toetav ja üliõpilaste suhtes avatud.

☐ nõustun igati    ☐ pigem nõustun    ☐ pigem ei nõustu    ☐ ei nõustu üldse    ☐ nii ja naa

3.1. Pahu kommenteerige ja/või põhjendage oma hinnangut.

---

4. Õppejõud õpetas õppeainet meisterlikult (huvi äratamine, esitatu arusaadavus, kaasahaaravus jms).

☐ nõustun igati    ☐ pigem nõustun    ☐ pigem ei nõustu    ☐ ei nõustu üldse    ☐ nii ja naa

4.1. Pahu kommenteerige ja/või põhjendage oma hinnangut.

---

5. Õppejõud antud või soovitatud õppematerjalid olid sisu, vormistuse ja sobivuse poolest asjakohased.

☐ nõustun igati    ☐ pigem nõustun    ☐ pigem ei nõustu    ☐ ei nõustu üldse    ☐ nii ja naa

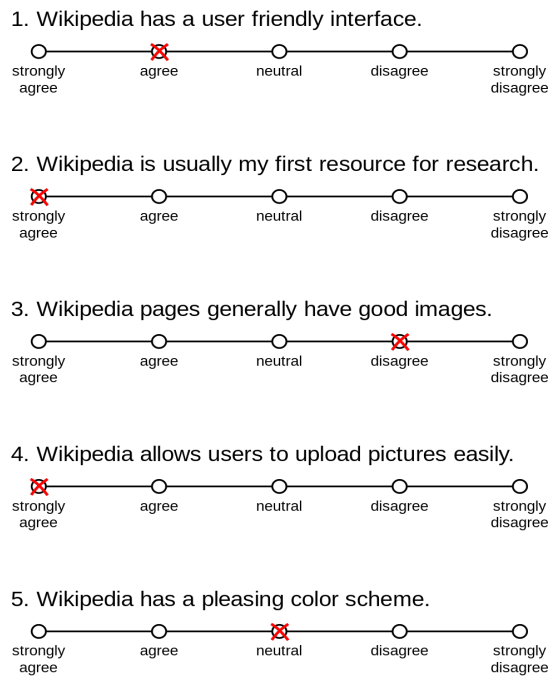
5.1. Pahu kommenteerige ja/või põhjendage oma hinnangut.

---

6. Õppejõud andis piisavalt tagasisidet minu töö tulemuste kohta aine läbimisel.

☐ nõustun igati    ☐ pigem nõustun    ☐ pigem ei nõustu    ☐ ei nõustu üldse    ☐ nii ja naa

Joonis 6: Näide Tartu Ülikooli õppeinfo süsteemi tagasiside ankeedist, kus rakendatakse Likerti skaalat [18]



Joonis 7: Näide küsimustikust, kus on rakendatud Likerti skaalat; küsimused on paigutatud nende järjestikulisuse rõhutamiseks teljele [16]

# Litsents

## **Lihtlitsents lõputöö reprodutseerimiseks ja lõputöö üldsusele kättesaadavaks tegemiseks.**

Mina, Vootele Rõtov (sünnikuupäev: 11.11.1988)

1. annan Tartu Ülikoolile tasuta loa (lihtlitsentsi) enda loodud teose

Valikvastustega küsimustike reliaabluse hindamine,

mille juhendaja on Margus Niitsoo,

- (a) reprodutseerimiseks säilitamise ja üldsusele kättesaadavaks tegemise eesmärgil, sealhulgas digitaalarhiivi DSpace'i lisamise eesmärgil kuni autoriõiguse kehtivuse tähtaja lõppemiseni;
  - (b) üldsusele kättesaadavaks tegemiseks Tartu Ülikooli veebikeskkonna kaudu, sealhulgas digitaalarhiivi DSpace'i kaudu kuni autoriõiguse kehtivuse tähtaja lõppemiseni.
2. olen teadlik, et punktis 1 nimetatud õigused jäävad alles ka autorile.
  3. kinnitan, et lihtlitsentsi andmisega ei rikuta teiste isikute intellektuaalomandi ega isikuandmete kaitse seadusest tulenevaid õigusi.

Tartu, 30. mai 2014. a.