

Bakatöö

Vootele Rõtov

4. mai 2014. a.

# Sisukord

<b>1</b>	<b>Sissejuhatus</b>	<b>4</b>
<b>2</b>	<b>Taustinfo ja probleemipüstitus</b>	<b>5</b>
2.1	Taustinfo . . . . .	5
2.1.1	Küsimustik, küsimus ja Likerti skaala . . . . .	5
2.1.2	Likerti skaala tõlgendamine intervallskaalana . . . . .	5
2.1.3	Testi valiidsus . . . . .	6
2.1.4	Testi reliaablus . . . . .	6
2.1.5	Valiidsuse ja reliaabluse suhe . . . . .	6
2.1.6	Sisemine järjepidevus . . . . .	7
2.2	Probleemi püstitus . . . . .	8
<b>3</b>	<b>Reliaablus klassikalises testiteoorias</b>	<b>9</b>
3.1	Reliaabluse definitsioon . . . . .	9
3.2	Reliaabluse hindamine . . . . .	15
<b>4</b>	<b>Alumised tõkked reliaablusele</b>	<b>16</b>
4.0.1	Alumine tõke $\lambda_1$ . . . . .	16
4.0.2	Alumine tõke $\lambda_2$ . . . . .	17
4.0.3	Alumine tõke $\lambda_3$ . . . . .	19
4.0.4	Alumine tõke $\lambda_4$ . . . . .	20
4.0.5	Alumine tõke $glb$ . . . . .	20
4.1	Cronbachi alfa . . . . .	21
<b>5</b>	<b>Ülesande püstitus</b>	<b>22</b>
<b>6</b>	<b>Ülesande matemaatiline püstitus</b>	<b>22</b>
<b>7</b>	<b>Ülesande tüübi keerekuse analüüs</b>	<b>26</b>
7.1	Kahendtäisarv programm . . . . .	27
7.2	NP-Hard probleemid . . . . .	27
<b>8</b>	<b>Ülesande analüüsiks vajalik taust</b>	<b>27</b>
8.1	Kumerus . . . . .	27
<b>9</b>	<b>Lahenduse idee</b>	<b>27</b>
<b>10</b>	<b>Teisendus <math>QCQP</math> tüüpi ülesandelt <math>SDP</math> tüüpi ülesandele</b>	<b>27</b>
<b>11</b>	<b>Teek</b>	<b>29</b>

12 Lisa

30

# 1 Sissejuhatus

Käesoleva bakalaureuse töö on saanud motivatsiooni psühholoogide praktilisest probleemist - kuidas hinnata nende töövaldkonnas tihti kasutatavate valikvastustega testide headust. Tuleb välja, et ühe testide headust kirjeldava karakteristiku - reliaabluse, hindamiseks sobivad vahendid saame klassikalise testiteooria (*Classical Test Theory*) nimelise matemaatilise teooria tulemuste põhjal.

Töö esimeses osas anname vajaliku taustinfo ja probleemipüstituse. Seejärel ehitame üles meile vajamineva osa klassikalisest testiteooriast. Kolmandas peatükis võrdleme erinevaid võimalusie reliaabluse hindamiseks, nii täpsuse kui ka arvutusliku keerukuse suhtes. Seejärel vaatleme põgusalt ühte võimalikku lähenemist järjestikaskaala tõlgendamiseks intervallskaalana, mis kasutab ära eelnevalt uuritud reliaabluse hinnanguid ja sätestab tõlgendamis probleemi optimeerimisprobleemina.

Töö eesmärgiks on anda eesti keelne ülevaade klassikalisest testiteooria alustest, mida autorile teadaolevalt ei ole käsitletud matemaatilisest aspektist vaadelduna - olemasolevad käsitlused on mõeldud praktiliseks abivahendiks psühholoogile ning seetõttu teistsuguse lähenemisega. Peale selle on töö eesmärgiks ka reliaabluse hindamiseks sobivate vahendite tutvustamine tasemel, millest võiks loodetavasti kasu olla ka teste koostavatele praktikutele. Uurimuse viimases osas loodame lugejale tutvustada tavapärasest teistsuguse lähenemist testi tulemuste kvantitatiivsele tõlgendamisele, mis tugineb viimase aja edusammudele optimeerimise valdkonnas.

Lisaks loetavale dokumendile on töö väljundiks ka teek, mis sisaldab funktsioone kõigi töös välja toodud hinnangute leidmiseks testi tulemuste põhjal ning leiab loodetavasti psühholoogide poolt kasutamist.

## 2 Taustinfo ja probleempüstitus

### 2.1 Taustinfo

#### 2.1.1 Küsimustik, küsimus ja Likerti skaala

Käesolev uurimus tegeleb küsimustikega (*Likert scale*), milles soovitakse hinnanguid teatud arvule küsimustele (*Likert item*)  $n$  pallisel Likerti skaalal [5], kus  $n$  jääb enamasi kahe ja kümne vahele. Käsitleme Likerti skaalasid, mis on sümmeetrilised, see tähendab, et positiivsete ja negatiivsete vastuse variantide arv on sama. Näiteks:<sup>①</sup>

Käesoleva bakalaureusetöö ülesehitus on loogiline.				
Ei nõustu	Ei nõustu osaliselt	Nii ja naa	Nõustun osaliselt	Nõustun

Joonis 1: Näide väitest, millele palutakse hinnangut Likerti skaalal

#### 2.1.2 Likerti skaala tõlgendamine intervallskaalana

Likerti skaala tõlgendamisel intervallskaalana on väljakujunenud tava seada valikvastustele vastavusse järjestatud täisarvud, kusjuures mida positiivsem vastusevariant, seda suurem temale vastavusse seatud arv. Reeglina kasutatakse kas arve alates ühest kuni valikvastuste arvuni või valitakse välja täisarvud nii, et neutraalsele vastusevariandile vastab null.

Käesoleva bakalaureusetöö ülesehitus on loogiline.				
-2	-1	0	1	2
↑	↑	↑	↑	↑
Ei nõustu	Ei nõustu osaliselt	Nii ja naa	Nõustun osaliselt	Nõustun
↓	↓	↓	↓	↓
1	2	3	4	5

Joonis 2: Näide kahest levinumast Likerti skaala tõlgendusest intervallskaalana

Lugejal võib tekkida õigustatud küsimus, kuidas põhjendab autor Likerti skaala käsitlemist intervallskaalana, kui Likerti skaala on olemuseslt järjestikaskaala ning selle tõlgendamises intervallskaalana on vastuoluline küsimus, näiteks [10]. Siinkohal tõdeme, et Likerti skaala tõlgendamine intervallskaalana on praktikas piisavalt

<sup>①</sup>Näited terviklikest küsimustikest on lisades, joonisel 9 ja 10

levinud, et selle valdkonna uurimine õigustatud oleks - olenamat selle teoreetilisest põhjendatusest. Siinkohal väärivad autori silmis esile toomist kriitikute üks levinumaid argumente - „hea“ ja „väga hea“ keskmine ei ole loomulikult viisil tõlgendatav kui „hea + pool“ ehk pole mingit põhjust eeldada, et kõikide küsimuste omavahe-line kaugus on mingil põhjusel võrdne. Autor nõustub selle kriitikaga ning loodab töö neljandas osas pakkuda alternatiivse tõlgendusviisi.

### 2.1.3 Testi valiidsus

Testi **valiidsus** on testi karakteristik, mis iseloomustab testi võimet mõõta seda, mida ta disainiti mõõtna. Enamikes käsitlustes vaadeldakse valiidsust kui väärtust intervall skaalal nulli ja ühe vahel.

Näitena, kaal mis näitab 75 kilo kaaluva inimese kaaluks 74,5 kilo omab kõrgemat valiidsust kui kaal, mis sama inimese puhul näitab kaaluks 65 kilo.

Arusaadavatel põhjustel on testi valiidsus äärmiselt oluline ning psühholoogiliste testide valiidsuse hindamine on olnud üks psühhomeetria põhilistest uurimisobjektidest. Sellega seoses on palju tööd tehtud ka valiidsuse definitsiooni täpsemaks muutmiseks, võrreldes selle paragrahvi alguses antud väga intuitiivse definitsiooni-ga. Kuna valiidsus on selle töö raames vajalik vaid taustinfona probleemi mõttestamisel tundub antud lihtne definitsioon aga sobivaim.

### 2.1.4 Testi reliaablus

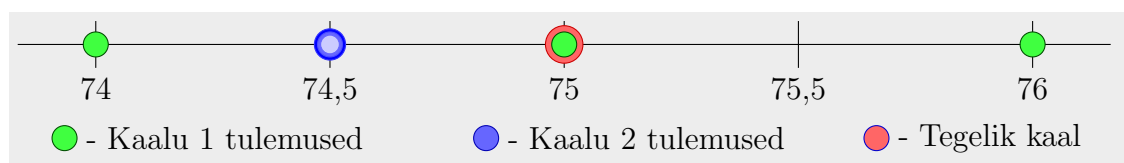
Testi **reliaablus** on testi omadust saada sama subjekti erinevatel mõõtmistel sama testiga sama tulemus ehk testi stabiilsus. Nagu valiidsus, on ka reliaablus reeglina määratud intervall skaalal, nulli ja ühe vahel.

Näitena, kaal mis näitab 75 kilo kaaluva inimese kaaluks 74,5 kilo igal kaalumisel omab kõrgemat reliaablust kui kaal, mis näitab juhuslikult kas 74,5 kilo või 75,5 kilo.

Reliaabluse täpsema, matemaatilise definitsioone anname edaspidi.

### 2.1.5 Valiidsuse ja reliaabluse suhe

Valiidsuse ja reliaabluse suhestamisel kerkib kiiresti üles loomulik küsimus - kas test võib olla samaaegselt suure valiidsuse ja väikse reliaablusega? Eelpool antud definitsioonid jättavad selle küsimuse lahtiseks - vaatleme järgmist olukorda:



Joonis 3: Kaalumiste tulemused kahe erineva kaaluga kolmel katsel

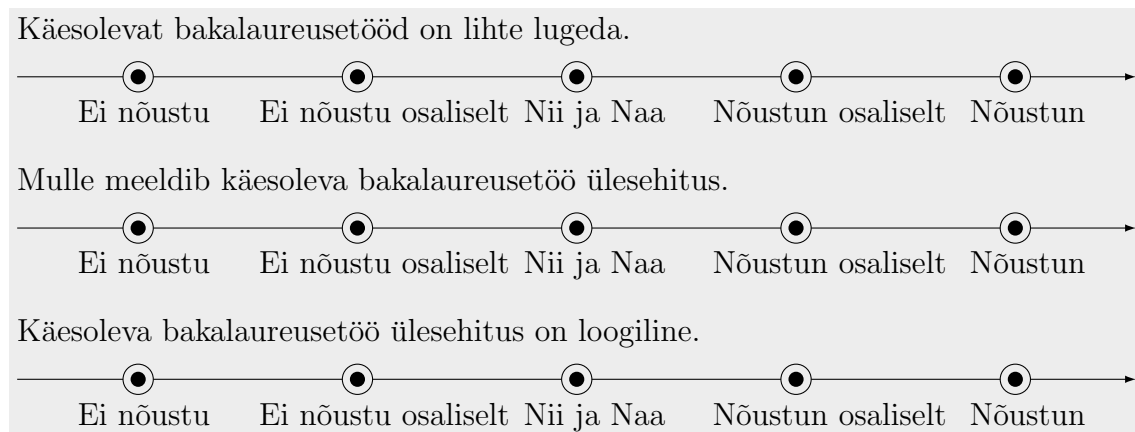
Kui mõista valiidsust kui testi keskmist tulemust, siis võime väita, et esimene kaal on väiksema reliaabluse aga suurema valiidsusega. Selline valiidsuse mõttestamine aga ei ole küsimustike modelleerimise korral otstarbekas - katsete kordamine on enamasti keeruline ning väheste mõõtmistulemuste põhjal ei ole võimalik tegeliku väikese reliaablusega testi tulemust välja selgitada.

Seega, meie vaadeldava olukorra - psühholoogiliste testide - korral on mingi valiidsuse taseme jaoks tarvilik tingimus mingi reliaabluse tase.

### 2.1.6 Sisemine järjepidevus

Reliaabluse kui termini probleemiks on tema mitmetähenduslikus. Toome siinkohal ära ühe mõiste, mida tihti samuti reliaablusena tuntakse.

Sisemine järjepidevus (*internal consistency*) on testi karrakteristik, mis iseloomustab testi erinevate küsimuste vastuste järjepidevust ehk seda, kui hästi on kooskõlas ühist konstruktsiooni hindavad küsimused [8, 177]. Piltlikult väljendudes, olgu meil järgnev küsimustik:



Joonis 4: Küsimustik bakalaureusetöö ülesehituse kohta

Siin on mõõdetavaks konstruktsiooniks käesoleva bakalaureusetöö ülesehitus ning sisemiseks reliaabluseks on vajalik kolmele näites toodud küsimusele antud vastuste kooskõla.

Selle karrakteristiku mõõtmiseks võimalik kasutada sisemise järjepidavuse teste. Segadust suurendab veelgi see, et üks nendest testidest leiab kasutamist ka meie poolt defineeritud reliaabluse hindamisel. Loodame, et nende kahe karakterisitku eristamine aitab lugejal käesolevas töös kergemini orienteeruda.

Märgime, et lisaks toodud kahele definitsioonile on ka teisi reliaabluse definitsioone [1], mis aga selle töö kontekstis ei tohiks segadust tekitada ning mille äratoomist siin ei ole autor pidanud vajalikus.

## **2.2 Probleemi püstitus**

Käesolevo tööga üritame pakkuda lahendusti kahele probleemile. Esimene nendest seisneb testi reliaabluse hindamises - kas on võimalik testi tulemuste põhjal hinnata selle testi reliaablust? Teine probleem lähtub esimesest - kui reliaabluse hindamine on võimalik, kas siis on võimalik kasutada saadud hinnangut Likerti skaala paremaks tõlgendamiseks intervallskaalana? Esimese probleemi rangeks mõtestamiseks vaatleme järgnevalt reliaablust ühe matemaatilise raamisitku - klassikalise testiteooria - kontekstis.



## 3 Reliaablus klassikalises testiteoorias

Järgevas võtame aluseks Melvin Novicki klassikalise testiteooria [13] [12] ja selle tõlgenduse Klaas Sijtsma poolt. [14, 109]

### 3.1 Reliaabluse definitsioon

MEELDETULETUSEKS

**Definitsioon.** *Elementaarsündmuseks* nimetatakse juhusliku katse võimaliku tulemust.

**Definitsioon.** *Tõenäosuseks* nimetatakse funktsiooni  $P$ , mis igale sündmusele  $A \in 2^\Omega$ , kus  $\Omega$  on mingi juhusliku katse kõikvõimalikke elementaarsündmuste hulk, seab vastavusse arvu  $P(A)$ , nii et on täidetud järgmised nõuded:

1.  $P(A) \geq 0, \forall A \in 2^\Omega$ ,
2.  $P(\Omega) = 1, P(\emptyset) = 0$ ,
3. Kui sündmused  $A_1, A_2, \dots$  on teineteist välistavad, siis

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

**Definitsioon.** *Diskreetseks juhuslikus suuruseks* nimetatakse funktsiooni  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , mis võtab kas lõpliku või loenduva arvu erinevaid väärtusi  $x_1, x_2, \dots (x_n)$ .

Olgu meil mingi kogum  $I$  testile vastajaid ning küsimustik, milles on  $k$  küsimust, kus iga küsimus on  $l$ -pallisel Likerti skaalal. On loomulik eeldada, et nii vastajate arv, küsimuste arv kui ka Likerti skaala suurus on lõplikud. Me võime vaadelda testi läbiviimist kui juhusliku katset ning kõike erinevaid võimalikke vastjate poolt küsimustele antud vastuste kombinatsioone kui elementaarsündmusi, tähistame saadud elementaarsündmuste hulga kui  $\Omega$ . Eeldame ka tõenäosuse  $P : 2^\Omega \rightarrow \mathbb{R}$  olemasolu, mida tõlgendame kui testi tulemuste esinemissageduse kirjeldust.

Küsimus \ Vastaja	I	II	II
A	Nõustun osaliselt	Nii ja naa	Nõustun
B	Ei nõustu osaliselt	Nõustun	Nii ja naa
C	Ei nõustu	Nõustun osaliselt	Nii ja naa

Joonis 5: Näide testi läbiviimisest kui elementaarsündmusest

Olgu  $X_i^j$  hulgal  $\Omega$  määratud juhuslik suurus, mille võimalike väärtusi vaatleme kui vastaja  $i$  poolt küsimusele  $j$  antud vastuse arvulist tõlgendust. On selge, et sellise tõlgenduse korral on juhusliku suuruse  $X_i^j$  muutumiskiirkond lõplik - selle hulga võimsus ei ole suurem kui  $l$  ning järelikult on juhuslik suurus  $X_i^j$  diskreetne. Defineerime vastaja  $i$  testi tulemuse  $X_i$  kui

$$X_i = \sum_{j=1}^k X_i^j.$$

Paneme tähele, et  $X_i$  on samuti diskreetne juhuslik suurus - tõepoolest, kuna tegemist on diskreetsete juhuslike suuruste summaga, siis on ta funktsioon hulgast  $\Omega$  hulka  $\mathbb{R}$ . Lisaks, kuna kõikide liidetavate muutumiskiirkond on tõkestatud arvuga  $l$  ning liidetavaid on  $k$ , siis ei saa funktsiooni muutumiskiirkonna võimsus olla suurem kui  $l^k$ .

#### MEELDETULETUSEKS

**Definitsioon.** Diskreetse juhusliku suuruse  $X$  *jaotuseks* nimetatakse paaride komplekti  $(x_i, p_i), i = 1, 2, \dots$ , kus  $x_i$  on juhusliku suuruse võimalik väärtus ning  $p_i = P(\{\omega | X(\omega) = x_i, \omega \in \Omega\})$ .

**Definitsioon.** Diskreetse juhusliku suuruse  $X$ , mille jaotuseks  $K$  on paaride komplekt  $k_i = (x_i, p_i), i = 1, 2, \dots$ , *keskväärtuseks* nimetatakse arvu

$$\epsilon X = \sum_{\{i | k_i \in K\}} x_i p_i$$

eeldusel, et see rida koondub absoluutselt.

**Definitsioon.** Juhusliku suuruse  $X$  *dispersiooniks* nimetatakse arvu  $DX = \epsilon(X - \epsilon X)^2$ .

Triviaalse juhu vältimiseks eeldame edaspidi, et juhuslike suuruste  $X_i$  dispersioonid on nullist erinevad. Defineerime küsimustiku tegeliku tulemuse vastaja  $i$  jaoks kui testi tulemuse keskväärtuse ehk

$$t_i = \epsilon[X_i].^{②}$$

Kuna juhusliku suuruse  $X_i$  võimalike väärtuste arv on lõplik on ka tema keskvärtus  $t_i$  lõplik.

Tõlgendame vastaja  $i$  testi tulemuse ja tegeliku tulemuse vahet mõõtmisveana, tähistame seda  $E_i$ . Seega  $X_i = t_i + E_i$ .

MEELDETULETUSEKS

**Lause 3.1.** Kui  $X$  on diskreetne juhuslik suurus, jaotusega  $K$ , kus  $K$  on paaride komplekt  $k_i = (x_i, p_i), i = 1, 2, \dots$  ning  $c$  on mingi konstant siis  $\epsilon(X + c) = \epsilon(X) + c$

*Tõestus.*

$$\begin{aligned} \epsilon(X + c) &= \sum_{\{i|k_i \in K\}} (x_i + c)p_i = \sum_{\{i|k_i \in K\}} x_i p_i + \sum_{\{i|k_i \in K\}} c p_i = \\ &= \sum_{\{i|k_i \in K\}} x_i p_i + c \sum_{\{i|k_i \in K\}} p_i = \sum_{\{i|k_i \in K\}} x_i p_i + c = \epsilon(X) + c \end{aligned}$$

□

**Lause 3.2.** Juhuslikule suurusele konstandi liitmine ei muuda dispersiooni :  $D(X + c) = DX$

*Tõestus.*

$$D(X + c) = \epsilon[X + c - \epsilon(X + c)] \stackrel{\text{Lause 3.1}}{=} \epsilon[X + c - \epsilon(X) + c] = \epsilon[X - \epsilon(X)] = DX$$

□

Paneme tähele, et eelneva põhjal on vastaja  $i$  mõõtmisvea keskvärtus võrdne nulliga. Tõepoolest, kuna tegeliku tulemuse definitsiooni põhjal  $\epsilon[X_i] = t_i$ , siis saame mõõtmisvea definitsiooni arvesse võttes

$$t_i = \epsilon[X_i] = \epsilon[t_i + E_i] \stackrel{\text{Lause 3.1}}{=} t_i + \epsilon[E_i] \implies \epsilon[E_i] = 0.$$

Lisaks on lihtne märgata, et  $D[X_i] = D[E_i]$ , sest

$$D[X_i] = D[E_i + t_i] \stackrel{\text{Lause 3.2}}{=} D[E_i].$$

<sup>②</sup>Tähistame keskvärtuse tähega  $\epsilon$  kuna tavapärase tähistus  $E$  leiab antud käsitluses teistsuguse rolli.

Eelnevates definitsioonides keskendusime testi tulemuste mõtestamisele fikseeritud vastaja korral. Kuna reeglina mõtestatakse teste praktikas mingi vastajate kogumi raames, siis keskendume ka meie edaspidi sellele.

Vaatleme elementaarsündmustena hulga  $I \times \Omega$  elemente ning tõenäosusena funktsiooni

$$P_p : 2^{I \times \Omega} \rightarrow \mathbb{R},$$

$$P_p(A) = \frac{\sum_{(i,\omega) \in A} P(\{\omega\})}{|I|}.$$

Paneme tähele, et sellel elemntaarsündmuste hulgal võime määrata diskreetse juhusliku suuruse  $T$ , nii et

$$T((i, \omega)) = t_i, i \in I.$$

Seda juhuliku suurust tõlgendame kui küsimustiku tegelikku tulemust. Defineerime testi vaadeldava tulemuse kui diskreetse juhusliku suuruse  $X$ , nii et

$$X(i, \omega) = X_i(\omega)$$

ja testi vea kui diskreetse juhusliku suuruse  $E$ , nii et

$$E((i, \omega)) = E_i(\omega).$$

Paneme tähele, et kehtib  $X = E + T$ , tõepoolest olgu meil suvaline paar  $(i, \omega) \in I \times \Omega$ , siis

$$X((i, \omega)) = X_i(\omega) \stackrel{def}{=} t_i + E_i(\omega) = T((i, \omega)) + E((i, \omega)).$$

Eeldame edaspidises, et  $X$  ei ole konstante juhuslik suurus - vastupidisel juhul on olukord triviaalne ja seetõttu ebahuvitav.

Defineerisime testi iseloomustavad juhuslikud suurused kasutades vastaja tulemusi iseloomustavaid juhuslike suurusi - analoogiliselt võime jõuda nende juhuslike suurusteni ka läbi kindlat küsimust iseloomustava juhusliku suuruse. Selles veendumiseks defineerime juhusliku suuruse  $X'$  üle elementaarsündmuste hulga  $I \times \Omega$ , nii et

$$X'((i, \omega)) = \sum_{j=1}^k X^j(i, \omega),$$

kus  $X^j$  on diskreetne juhuslik suurus, mida tõlgendame kui  $j$  küsimuse vaadeldava tulemuse ja mis on määratud kui

$$X^j((i, \omega)) = X_i^j(\omega).$$

Veendume, et juhuslikud suurused  $X'$  ja  $X$  on võrdsed. Tõepoolest, olgu  $(i, \omega) \in I \times \Omega$  suvaline paar, siis

$$X(i, \omega) = X_i(\omega) = \sum_{i=1}^k X_i^j(\omega) = \sum_{i=1}^k X^j((i, \omega)) = X'((i, \omega)).$$

Analoogiliset võime üles ehitada ka ka juhusliku suurustega  $T$  ja  $E$  võrdsed juhuslikud suurused.

MEELDETULETUSEKS

**Definitsioon.** Juhusliku suuruste  $X$  ja  $Y$  *kovariatsiooniks* nimetatakse suurust

$$\text{cov}(X, Y) = \epsilon(X - \epsilon X)(Y - \epsilon Y).$$

**Definitsioon.** Juhusliku suuruste  $X$  ja  $Y$  *korrelatsioonikordajaks* nimetatakse suurust

$$\rho(X, Y) = \frac{\text{cov}(X, Y)}{\sqrt{DX}\sqrt{DY}}$$

**Lause 3.3.** Juhuslike suuruste  $X$  ja  $Y$  puhul kehtib

$$D(X + Y) = D(X) + D(Y) + \text{cov}(X, Y)$$

*Tõestus.*

$$\begin{aligned} D(X + Y) &\stackrel{\text{def}}{=} \epsilon[X + Y - \epsilon(X + Y)]^2 \stackrel{\epsilon \text{ lin.}}{=} \epsilon[X - \epsilon X + Y - \epsilon Y]^2 = \\ &= \epsilon(X - \epsilon X)^2 + 2\epsilon(X - \epsilon X)(Y - \epsilon Y) + \epsilon(Y - \epsilon Y)^2 \stackrel{\text{cov}}{=} \stackrel{\text{def}}{=} \\ &= D(X) + D(Y) + 2\text{cov}(X, Y) \end{aligned}$$

□

Järgnevalt toome sisse paralleelse küsimustiku mõiste. Kaks küsimustiku, mille vaadeldavad tulemused üle kõigi vastajate kogumi  $I$  on  $X = T + E$  ja  $X' = T' + E'$ , on paralleelsed parajasti siis, kui kehtivad järgmised väited :

1.  $t_i = t'_i \forall i \in I$ ,
2.  $D[E] = D[E']$ .

Järgnevalt eeldame, et mõõtevead ei korreleeru ühegi teise juhusliku suurusega. Paneme tähele, et kahe paralleelse küsimustiku  $X$  ja  $X'$  korral kehtib:

$$D[X] = D[T] + D[E] + 2\text{cov}(T, E) = D[T] + D[E] =$$

$$= D[T'] + D[E'] = D[T'] + D[E'] + 2\text{cov}(T', E') = D[X']$$

Paralleelse testi abil saame klassikalise testiteooria raames defineerida reliaabluse. Olgu meil kaks paralleelselt testi, mille tulemused üle vastajate kogumi  $I$  on vastavalt  $X, X'$  kus kumbgi ei ole konstante juhuslik suurus. Testi, mille tulemus on  $X$ , reliaablus üle vastajate kogumi  $I$  on võrdne  $X$  ja  $X'$  korrelatsioonikordajaga, mida tähistame  $\rho_{XX'}$ , formaalselt

$$\rho_{XX'} = \text{corr}(X, X').$$

Paralleelse testi definitsiooni ja tehtud eelduste põhjal kehtib

$$\begin{aligned} \rho_{XX'} &= \frac{\text{cov}(XX')}{\sqrt{D[X] D[X']}} = \frac{\epsilon[XX'] - \epsilon[X] \epsilon[X']}{D[X]} = \\ &= \frac{\epsilon[(T+E)(T'+E')] - \epsilon[T+E] \epsilon[T'+E']}{D[X]} = \\ &= \frac{\epsilon[(T+E)(T+E')] - (\epsilon[T] - \epsilon[E])(\epsilon[T] - \epsilon[E'])}{D[X]} = \\ &= \frac{\epsilon[T^2 + TE + TE' + EE'] - \epsilon[T] \epsilon[T]}{D[X]} = \\ &= \frac{\epsilon[T^2] + \epsilon[TE] + \epsilon[TE'] + \epsilon[EE'] - \epsilon[T]^2}{D[X]} = \frac{\epsilon[T^2] - \epsilon[T]^2}{D[X]} = \\ &= \frac{\text{cov}(T, T)}{D[X]} = \frac{D[T]}{D[X]}. \end{aligned}$$

Paneme tähele, et eelneva põhjal  $\rho_{XX'} \in [0, 1]$ . Samuti märgime, et kuna  $T = X - E$ , siis kehtib

$$\rho_{XX'} = \frac{D[T]}{D[X]} = \frac{D[X - E]}{D[X]} = \frac{D[X] - D[E]}{D[X]} = 1 - \frac{D[E]}{D[X]}. \quad (3.4)$$

Eelneva põhjal on selge, et väide “testi reliaablus on suurem” on samaväärne järgmise kolme väitega [14, 110]:

1. testi korrelatsioon paralleelse testiga on suurem,
2. testi tegeliku tulemuse dispersioon on suurem võrreldes testi tulemuse dispersiooniga,
3. testi mõõtmisvea dispersioon on väiksem võrreldes testi tulemuse dispersiooniga.

Märgime, et klassikalise testiteooria raames defineeritud reliaablus sobib kokku eelmises peatükis antud mitteformaalse definitsiooniga, kuna paralleelseks testiks võib lugeda ka sama testi uuesti läbiviimise sama vastajate kogumi peal. Lisaks on klassikalise testiteooria eeldused nõrgad ning suhteliselt lihtsasti tagatavad. Kuna testi tegelik tulemus on suurus, mida me prakikas ei tea ning ka paralleelsete testide läbiviimine ei ole tihti võimalik on kasutusele on üritatud on võimalus testi reliaablust hinnata meie jaoks oluline. Järgnevalt vaatleme, kuidas seda teha.

### 3.2 Reliaabluse hindamine

Järgnev käsitlus tugineb Jacksoni ja Anguwamba 1977. aasta artiklile. [9]

Olgu meil küsimustik, milles on  $k$  küsimust. Vaatleme seda klassikalise testi teooria raames ning olgu  $X$  küsimustiku vaadeldav tulemus,  $T$  küsimustiku tegelik tulemus ning  $E$  küsimustiku mõõtmisviga. Tähistama fikseeritud küsimuse  $i, i \in \{1, 2, \dots, k\}$  vaadeldavat tulemust kui  $X_i$ , tegeliku tulemust kui  $T_i$  ning mõõtmisviga  $E_i$ . Paneme tähele, et kui eelnevas peatükis tähistasime alaindeksiga küsimusele vastajat siis edaspidi tähistame sellega kindlat küsimust.

Vaatleme testi küsimuste tulemuste ja mõõtmisvea vektoreid:  $(X_1, X_2, X_3, \dots, X_n)$ ,  $(T_1, T_2, T_3, \dots, T_n)$ ,  $(E_1, E_2, E_3, \dots, E_n)$ . Eeldame, et meil on olemas nihketa hinnangud nende vektorite kovaratsioonimaatriksitele, mida tähistame vastavalt  $\Sigma_X, \Sigma_T, \Sigma_E$ . Seega,

$$\Sigma_X = \begin{pmatrix} \text{cov}(X_1, X_1) & \text{cov}(X_1, X_2) & \text{cov}(X_1, X_3) & \cdots & \text{cov}(X_1, X_n) \\ \text{cov}(X_2, X_1) & \text{cov}(X_2, X_2) & \text{cov}(X_2, X_3) & \cdots & \text{cov}(X_2, X_n) \\ \text{cov}(X_3, X_1) & \text{cov}(X_3, X_2) & \text{cov}(X_3, X_3) & \cdots & \text{cov}(X_3, X_n) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \text{cov}(X_n, X_1) & \text{cov}(X_n, X_2) & \text{cov}(X_n, X_3) & \cdots & \text{cov}(X_n, X_n) \end{pmatrix}.$$

Klassikalise testiteooria kohaselt on kehtib  $\text{corr}(E_i, T_j) = 0$ , millest järeldub et ka  $\text{cov}(E_i, T_j) = 0$ . Seega,  $\text{cov}(X_i, X_j) = \text{cov}(T_i + E_i, T_j + E_j) = \text{cov}(T_i, T_j) + \text{cov}(T_i, E_j) + \text{cov}(E_i, T_j) + \text{cov}(E_i, E_j) = \text{cov}(T_i, T_j) + \text{cov}(E_i, E_j)$ . Siit saame, et

$$\Sigma_X = \Sigma_T + \Sigma_E \quad (3.5)$$

Lisaks saame klassikalisele testiteooria tuginedes, et juhul kui  $i \neq j$ , siis  $\text{corr}(E_i, E_j) = 0$  ning ka  $\text{cov}(E_i, E_j) = 0$ . Sellest tulenevalt kehtib

$$\Sigma_E = \begin{pmatrix} \text{cov}(E_1, E_1) & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \text{cov}(E_2, E_2) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \text{cov}(E_3, E_3) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \text{cov}(E_n, E_n) \end{pmatrix}. \quad (3.6)$$

Tähistame edaspidi maatriksi  $\Sigma_X$  elemente  $x_{ij}$ , maatriksi  $\Sigma_T$  elemente  $x_{ij}$  ning maatriksi  $\Sigma_E$  peadiagonaali elemente  $\theta_i$ . Seega, kui  $i \neq j$ , siis  $t_{ij} = x_{ij}$  ning  $t_{ii} = x_{ii} - \theta_i$ .

Tuletame meelde, et kehtib (3.4) ning seega on testi reliaablus võrdub avaldisega  $1 - \frac{D[E]}{D[X]}$ .

Järgnevalt kasutame ära seda, et summa dispersioon võrdub liidetavate kovariatsioonimaatriksi elementide summana [Tõestust vaja ?](#) ning arvestades mõõtmisvea kovariatsioonimaatriksi eripärasid, saame võrduse

$$1 - \frac{D[E]}{D[X]} = 1 - \frac{\sum_i \theta_i}{\sum_i \sum_j x_{ij}}. \quad (3.7)$$

Edaspidises peame meeles, et kuna  $\Sigma_X, \Sigma_T$  ja  $\Sigma_E$  on kovariatsioonimaatriksid ning seega ka mittenegatiivselt määratud [Tõestus vaja ?](#). Tuletame meelde, et see, et maatrix  $C \in \text{mat}(n)$  on mittenegatiivselt määratud on samaväärne sellega, et  $\forall v \in \text{Mat}(n, 1) \ v^T C v \geq 0$ .

## 4 Alumised tõkked reliaablusele

Järgnevalt vaatleme viite alumist tõket reliaablusele, millest neli -  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$  - pakkus aastal 1945 välja Louis Guttman [7]. Viienda vaadeldava tõkke pakkusid välja Jackson ja Anguwamba oma 1977 aasta artiklis [9]. Kõik tõkked tuletame tuginedes Jacksoni ja Anguwamba artiklile.

### 4.0.1 Alumine tõke $\lambda_1$

Vaatleme kovariatsioonimaatriksit  $\Sigma_T \in \text{Mat}(k)$ . Leidugu maatriksi peadiagonaalil element, mis on negatiivne. Olgu selle elemendi indeks  $i$ . Olgu  $v$  vektor, millel on  $k$  elementi, kusjuures

$$v_j = \begin{cases} 1, & j = i \\ 0, & j \neq i \end{cases} \quad (4.1)$$

Paneme tähele, et nüüd  $v^T \Sigma_T v = t_{ii} < 0$ . Seega ei ole maatriks enam positiivselt määratud ja ei saa olla kovariatsioonimaatriks.

Seega iga  $i$  peab kehtima  $t_{ii} \geq 0$  ning seega  $\theta_i < x_{ii}$  [Kas on okay peadiagonaalile viidata ühe indeksiga? Peaks kuhugi kirjutama või minema üle kahe indeksi peale ?](#).

Seega ka  $\sum_i \theta_i \leq \sum_i x_{ii}$ . Seega saame 3.7 põhjal kirja panna reliaabluse alumise tõkku, mida tähistame kui  $\lambda_1$ ,

$$\lambda_1 = 1 - \frac{\sum_i \theta_i}{\sum_i \sum_j x_{ij}} \leq 1 - \frac{\sum_i \theta_i}{\sum_i \sum_j x_{ij}} = 1 - \frac{D[E]}{D[X]}. \quad (4.2)$$



#### 4.0.2 Alumine tõke $\lambda_2$

Enne järgmise alumise tõke tuletamist, veendume et kehtivad kaks abitulemust. Olgu meil mitte-negatiivselt määratud sümmeetriline maatriks  $C, C \in Mat(n)$ . Näitame, et sellisel juhul kehtib väide, et iga  $i, j$  korral

$$c_i c_j \geq c_{ij}^2$$

Valime suvaliselt  $i$  ja  $j$ , nii et  $i \neq j, i, j \leq n$  ning  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Olgu meil  $n$ -vektor  $v$ , kus

$$v_k = \begin{cases} 1, k = i \\ \alpha, k = j \\ 0, k \notin \{i, j\} \end{cases}$$

Kuna  $C$  on eelduste kohaselt mitte-negatiivset määratud, siis peab kehtima

$$0 \leq v^T C v = \begin{pmatrix} \mathbf{0}^T & 1 & \mathbf{0}'^T & \alpha & \mathbf{0}''^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{0}^T & 1 & \mathbf{0}'^T & \alpha & \mathbf{0}''^T \end{pmatrix}, \quad (4.3)$$

kus  $\mathbf{0}, \mathbf{0}', \mathbf{0}''$  on null vektorit pikkustega vastavalt  $i-1, j-i-1, n-j$ . Arvutame avaldise 4.3 väärtuse:

$$\begin{aligned} v^T C v &= \begin{pmatrix} \mathbf{0}^T & 1 & \mathbf{0}'^T & \alpha & \mathbf{0}''^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{0}^T & 1 & \mathbf{0}'^T & \alpha & \mathbf{0}''^T \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \mathbf{0}^T & 1 & \mathbf{0}'^T & \alpha & \mathbf{0}''^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{1i} + \alpha c_{1j} \\ \vdots \\ a_{ni} + \alpha c_{nj} \end{pmatrix} = c_i + \alpha c_{ij} + \alpha c_{ji} + \alpha^2 c_j = c_i + 2\alpha c_{ij} + \alpha^2 c_j. \end{aligned}$$

See, et saadud ruutvõrratus on rahuldatud on samaväärne sellega, et

$$c_{ij}^2 - c_i c_j \leq 0,$$

milles me soovisimegi veenduda. Eelneva arutelu pärineb Ivar Tammeraidi raamatust [17].

Paneme nüüd tähele, et kehtib järgnev algebraline samasus:

$$\left( \sum_i x_i \right)^2 = \sum_i x_i^2 + \sum_i \sum_{\substack{j \\ i \neq j}} x_i x_j$$

Kuna eelnev kehtib, siis kehtib ka

$$2(n-1) \left( \sum_i x_i \right)^2 = 2(n-1) \sum_i x_i^2 + 2(n-1) \sum_i \sum_{\substack{j \\ i \neq j}} x_i x_j$$

Liidetavad teistmoodi grupeerides saame, et

$$\begin{aligned} & 2(n-1) \sum_i x_i^2 + 2(n-1) \sum_i \sum_{\substack{j \\ i \neq j}} x_i x_j = \\ &= (x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2) + (x_1^2 - 2x_1x_3 + x_3^2) + \dots + (x_2^2 - 2x_1x_2 + x_1^2) + \dots + 2n \sum_i \sum_{\substack{j \\ i \neq j}} x_i x_j = \\ &= \sum_i \sum_{\substack{j \\ i \neq j}} (x_i - x_j)^2 + 2n \sum_i \sum_{\substack{j \\ i \neq j}} x_i x_j \end{aligned}$$

Vaatleme jällegi kovariatsiooni maatriksit  $\Sigma_E$ . Märkame, et kehtib järgnev:

$$\text{tr}(\Sigma_E) = \sum_i \theta_i = \sum_i x_i - \sum_i t_i$$

Eelnevalt käsitletud algebralise samasuse põhjal on lihtne veenduda, et kehtib

$$\sum_i t_i = \sqrt{\frac{\sum_i \sum_{\substack{j \\ i \neq j}} (t_i - t_j)^2 + 2n \left( \sum_i \sum_{\substack{j \\ i \neq j}} t_i t_j \right)}{2(n-1)}} \geq \sqrt{\frac{n \left( \sum_i \sum_{\substack{j \\ i \neq j}} t_i t_j \right)}{(n-1)}}$$

Arvestades, et kovariatsioonimaatriks on mitte-negatiivselt määratud ning seda, et kui  $i \neq j$  siis  $t_{ij} = x_{ij}$ , saame eelnevalt tõestatud abitulemusel põhjal väita, et

$$\sum_i t_i \geq \sqrt{\frac{n \left( \sum_i \sum_{\substack{j \\ i \neq j}} t_i t_j \right)}{(n-1)}} \geq \sqrt{\frac{n \left( \sum_i \sum_{\substack{j \\ i \neq j}} x_{ij}^2 \right)}{(n-1)}}$$

Selle taustal saame defineerida alumise tõkke reliaablusele, mida tähistame  $\lambda_2$ :

$$\lambda_2 = 1 - \frac{\sum_i x_i - \sqrt{\frac{n \left( \sum_i \sum_{\substack{j \\ i \neq j}} x_{ij}^2 \right)}{(n-1)}}}{\sum_i \sum_j x_{ij}} \leq 1 - \frac{\sum_i x_i - \sum_i t_i}{\sum_i \sum_j x_{ij}} = 1 - \frac{\sum_i \theta_i}{\sum_i \sum_j x_{ij}} = 1 - \frac{D[E]}{D[X]}.$$

### 4.0.3 Alumine tõke $\lambda_3$

Vaatleme jällegi kovariatsioonimaatriksit  $\Sigma_T$ . Olgu meil  $n$ -vektor  $v$ , mille element kohal  $i$  on 1 ja element kohal  $j$  on  $-1$ . Kuna kovariatsioonimaatriks peab olema mittenegatiivselt määratud siis peab kehtima

$$0 \leq v^T \Sigma_T v = v^T \begin{pmatrix} t_{1i} - t_{1j} \\ t_{2i} - t_{2j} \\ \vdots \\ t_{ni} - t_{nj} \end{pmatrix} = t_i + t_j - 2t_{ij},$$

võttes arvesse seda, et kui  $i \neq j$ , siis  $x_{ij} = t_{ij}$  saame, et  $t_i + t_j \geq 2x_{ij}$ . Teame, et võimalusi valida  $i$  ja  $j$  nii, et  $i \neq j$  on  $n(n-1)$ . Summeerides kõik võimalikud võrratused saame, et

$$2(n-1) \sum_i t_i \geq 2 \sum_i \sum_{\substack{j \\ i \neq j}} x_{ij},$$

mis on samaväärne sellega, et

$$\sum_i t_i \geq \frac{1}{n-1} \sum_i \sum_{\substack{j \\ i \neq j}} x_{ij}.$$

Niisiis, oleme saanud järgmise alumise tõkke reliaablusele,

$$\lambda_3 = 1 - \frac{\sum_i x_i - \frac{1}{n-1} \sum_i \sum_{\substack{j \\ i \neq j}} x_{ij}}{\sum_i \sum_j x_{ij}} \leq 1 - \frac{\sum_i x_i - \sum_i t_i}{\sum_i \sum_j x_{ij}} = 1 - \frac{\sum_i \theta_i}{\sum_i \sum_j x_{ij}} = 1 - \frac{D[E]}{D[X]}.$$

Tõkke lihtsustamisel algebraliste samaväärsustega saame, et

$$\begin{aligned} \lambda_3 &= 1 - \frac{\sum_i x_i - \frac{1}{n-1} \sum_i \sum_{\substack{j \\ i \neq j}} x_{ij}}{\sum_i \sum_j x_{ij}} = \frac{\sum_i \sum_j x_{ij} - \sum_i x_i + \frac{1}{n-1} \sum_i \sum_{\substack{j \\ i \neq j}} x_{ij}}{\sum_i \sum_j x_{ij}} = \\ &= \frac{\sum_{\substack{i \neq j}} \sum_j x_{ij} + \frac{1}{n-1} \sum_i \sum_{\substack{j \\ i \neq j}} x_{ij}}{\sum_i \sum_j x_{ij}} = \frac{n}{n-1} \left( \frac{\sum_{\substack{i \neq j}} \sum_j x_{ij}}{\sum_i \sum_j x_{ij}} \right) = \frac{n}{n-1} \left( 1 - \frac{\sum_i x_i}{\sum_i \sum_j x_{ij}} \right). \end{aligned}$$

Tuletades meelde tõkke  $\lambda_1$  definitsiooni on ilmne, et

$$\lambda_3 = \frac{n \lambda_1}{n-1}. \quad (4.4)$$

#### 4.0.4 Alumine tõke $\lambda_4$

Nagu eelmise kahe tõkku puhul, vaatleme kovariatsioonimaatriksit  $\Sigma_T$ . Olgu meil vektor  $v$  selline, et  $|v_i| = 1$  iga  $i \leq n, i \in \mathbb{N}$  korral. Teame, et kehtib

$$0 \leq v^T \Sigma_T v,$$

seega arvestades kovariatsioonimaatriksi  $\Sigma_E$  omadusi saame võrduse (3.5) põhjal

$$\sum_i \theta_i = \sum_i v_i^2 \theta_i = v^T \Sigma_E v \leq v^T \Sigma_X v.$$

Seega, iga võimaliku  $v$  korral saame alumise tõkke reliaablusele. Tõepoolest, (3.7) põhjal iga  $v$  korral,

$$1 - \frac{v^T \Sigma_X v}{\sum_i \sum_j x_{ij}} \leq 1 - \frac{\sum_i \theta_i}{\sum_i \sum_j x_{ij}} = 1 - \frac{D[E]}{D[X]}$$

Defineerime alumise tõkke  $\lambda_4$  kui maksimumi kõikidest sellistest tõketest, seega

$$\lambda_4 = \max_v \left( 1 - \frac{v^T \Sigma_X v}{\sum_i \sum_j x_{ij}} \right).$$

#### 4.0.5 Alumine tõke $glb$

Me teame, et kehtib (3.5) ning teame, et  $\Sigma_X, \Sigma_T$  ja  $\Sigma_E$  on kovariatsioonimaatriksid, seega ka mitte-negatiivselt määratud.

Paneme tähele, et tänu  $\Sigma_E$  struktuurile on tema mittenegatiivsus samaväärne sellega, et  $0 \leq \theta_i$  iga  $i$  korral [Tõestus? Iseenesest väga lihtne](#).

Üritame nüüd leida vea suurimat võimaliku dispersiooni, mis on (3.4) põhjal samaväärne summaga  $\sum_i \theta_i$ , arvestades eelnevalt kirjeldatud piiranguid. Saame selle panna kirja järgneva optimeerimisülesandena:

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_i \theta_i \\ & \theta_i \geq 0 \\ & \Sigma_X = \Sigma_T + \Sigma_E \\ & \Sigma_T \succeq 0, \end{aligned} \tag{4.5}$$

kus kirjalpilt  $\Sigma_T \succeq 0$  tähistab tingimust " $\Sigma_T$  on mittenegatiivselt määratud".

Olgu  $z$  eelneva optimeerimisülesande lahend mingi fikseeritud vaadelud tulemuste kovariatsioonimaatrikis  $\Sigma_X$  korral. Tähistame tähekombinatsiooniga  $glb$ , mis

tuleneb fraasist *greatest lower bound*,  $z$  abil saadud alumise tõkku reliaablusele ehk

$$glb = 1 - \frac{z}{\sum_i \sum_j x_{ij}}.$$

Panemet tähele, et kuna  $z$  on maksimaalne vea dispersioon fikseeritud  $\Sigma_X$  korral, siis on alumine tõke  $glb$  minimaalne võimalik reliaablus. Siit aga saame, et iga teine reliaabluse alumine tõke peab olema väiksem võrdne tõkega  $glb$ . Seega on  $glb$  suurim võimalik alumine tõke.

## 4.1 Cronbachi alfa

Cronbachi alfa on levinud sisemist reliaablust iseloomustav näitaja, mis on defineeritud järgnevalt:

$$\left(\frac{k}{k-1}\right)\left(1 - \frac{\sum \sigma_i^2}{\sigma_t^2}\right) \quad (4.6)$$

kus  $k$  tähistab küsimuste arvu,  $\sigma_i$  on standardviga ühe küsimuse piires ja  $\sigma_t$  on standardviga üle testi kogutulemuste. [2, 396]

[Siia selgitav näidis tabel/joonis vajalik?](#)

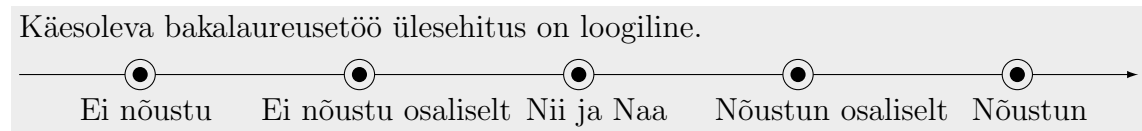
### Miks ma taandan selles töös sisemise järjekindluse mõõtmise Cronbachi alfale?

Kuna Cronbach'i alfa on mitmeid puuduseid, millest mõningad on toodud ära David Streineri artiklis [16, 101-102], ning isegi mõõdiku autor Lee Cronbach soovitas oma 1951. aastal välja töötatud mõõdiku asemel kasutatada alternatiivseid mõõdikuid [2], on oluline vastata alapealkirjas püstitatud küsimusele. Kaks peamist põhjust on järgnevad:

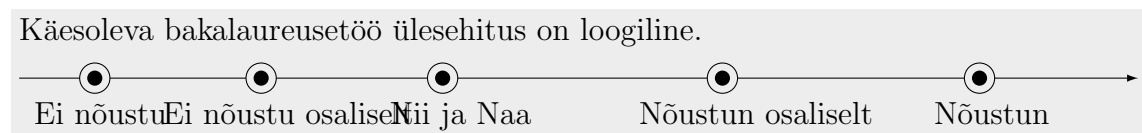
- I Cronbachi alfa on hetkel kõige kasutatavam mõõdik sisemise reliaabluse mõõtmiseks psühho-meetriliste testide juures. Seetõttu on väljapakutud meetod testide tulemuste analüüsijatele tuttav ning seega loodetavasti lihtsamini kasutatav.
- II Cronbachi alfa leidmine on arvutuslikult küllaltki lihtne. Kuna käesoleva töö peamine eesmärk on selgitada, kas väljapakutud lähenemine on mõistlik, siis ei ole parematest mõõdikutest potentsiaalselt saadav kasu piisavalt suur, et tasa teha ülesande lahendamise raskemaks muutumist. Juhul, kui töö tulemus on aga positiivne, tuleks uurida ka teiste mõõdikute võimalikku kasutamist.

## 5 Ülesande püstitus

Selle töö raames loodame välja pakkuda viisi, kuidas paigutada intervallskaalal erinevaid vastuseid Likerti skaalalt. Eesmärk on leida parem paigutus kui vaikimisi meetod, kus eeldatakse, et erinevate hinnagute vahekaugused on samad. Vaatleme kahte näidet:



Joonis 6: Näide, kuidas hinnangud skaalal hetkel vaikimisi meetodit kasutades paigutuvad



Joonis 7: Näide hinnangute alternatiivsest paiknemisest skaalal

Kui me tahame välja pakkuda alternatiive vaikimisi hinnangule, peab meil olema põhjendus, miks välja pakutud lahendus kirjeldab reaalsust täpsemalt. Pakume välja järgmise lahenduse: üritame leida hinnangute paiknemist skaalal nii, et küsitluse sisemine reliaablus oleks võimalikult suur. Piirame ennast sellega, et hinnangute esialgne järjestus ei tohi muutuda. Sisemise järjekindluse maksimeerimise taandame antud töö käigus Cronbachi alfa maksimeerimisele.<sup>③</sup>

## 6 Ülesande matemaatiline püstitus

Olgu meil küsimustik  $n$ -väitega, kus iga näite kohta palutakse hinnangut 5-palli Likerti skaalal. Hinnanguid võime vaadelda kui juhuslikke suurusi  $K_1, K_2, \dots, K_n, K_i$  mille muutumiskiirdeks on hulk  $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ . Toome sisse ka tähistused  $p_{i\alpha}, i \in \{1, 2, \dots, n\}, \alpha \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ , kus  $p_{i\alpha}$  tähistab olemasolevate andmete põhjal antud hinnangut tõenäosusele, et küsimusele  $K_i$  anti hinnang  $\alpha$ .

Tuletame meelde Cronbachi alfa definitsiooni:

$$\left(\frac{k}{k-1}\right)\left(1 - \frac{\sum \sigma_i^2}{\sigma_t^2}\right)$$

<sup>③</sup>Põhjendus, miks selline taandamine on tehtud, on ära toodud peatükis ??.

Paneme tähele, et toodud eelduste põhjal avalduks vaadeldava küsimustiku korral alfa järgnevalt:

$$\left(\frac{k}{k-1}\right)\left(1 - \frac{\sum \sigma_i^2}{\sigma_t^2}\right) = \frac{n}{n-1} \left(1 - \frac{\sum_{i=0}^n D(K_i)}{D\left(\sum_{i=0}^n K_i\right)}\right)$$

Võttes arvesse, et  $D\left(\sum_{i=0}^n K_i\right) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n COV(K_i, K_j)$  saame eelneva kirjutada järgnevalt:

$$\left(\frac{k}{k-1}\right)\left(1 - \frac{\sum \sigma_i^2}{\sigma_t^2}\right) = \frac{n}{n-1} \left(1 - \frac{\sum_{i=0}^n D(K_i)}{\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n COV(K_i, K_j)}\right)$$

Vastavalt ülesande püstituses toodud idee soovime leida sellise viisi hinnangute tõlgendamiseks, et Cronbachi alfa oleks maksimaalne. Kujutame juhuslikud suurused  $K_1, K_2, \dots, K_n$  juhuslikeks suurusteks  $L_1, L_2, L_2, \dots, L_n$ , kusjuures juhusliku suuruse  $L_i$  määramispiirkond ühtib suuruse  $K_i$  määramispiirkonnaga ning  $L_i$  saab väärtusi hulgast  $\Lambda_i = \{\lambda_{1i}, \lambda_{2i}, \lambda_{3i}, \lambda_{4i}, \lambda_{5i}\}$   $i \in 1, 2, \dots, n$ . Lisaks kehtigu järgnevad kitsendused:

$$\lambda_{i1} < \lambda_{i2} < \lambda_{i3} < \lambda_{i4} < \lambda_{i5}$$

Siin peavad ikka ranged võrratused olema  $(0,0,0,0,1)$  ei kõlba.

$$K_i = 1 \implies L_i = \lambda_{i1}, K_i = 2 \implies L_i = \lambda_{i2}, \dots, K_i = 5 \implies L_i = \lambda_{i5}$$

Paneme tähele, et Cronbachi alfa arvutamine, seega ka maksimeerimine, on endiselt keeruline. Siinkohal märgime, et hinnangute tõlgenduste juures ei huvita meid mitte absoluutne, vaid suhteline paigutus. Niisiis võime juhuslikke suurusi piirata järgnevate kitsendustega:

$$E(L_i) = p_{i1} * \lambda_{i1} + p_{i2} * \lambda_{i2} + p_{i3} * \lambda_{i3} + p_{i4} * \lambda_{i4} + p_{i5} * \lambda_{i5} = 0 \quad (6.1)$$

$$D(L_i) = p_{i1} * (\lambda_{i1})^2 + p_{i2} * (\lambda_{i2})^2 + p_{i3} * (\lambda_{i3})^2 + p_{i4} * (\lambda_{i4})^2 + p_{i5} * (\lambda_{i5})^2 = 1 \quad (6.2)$$

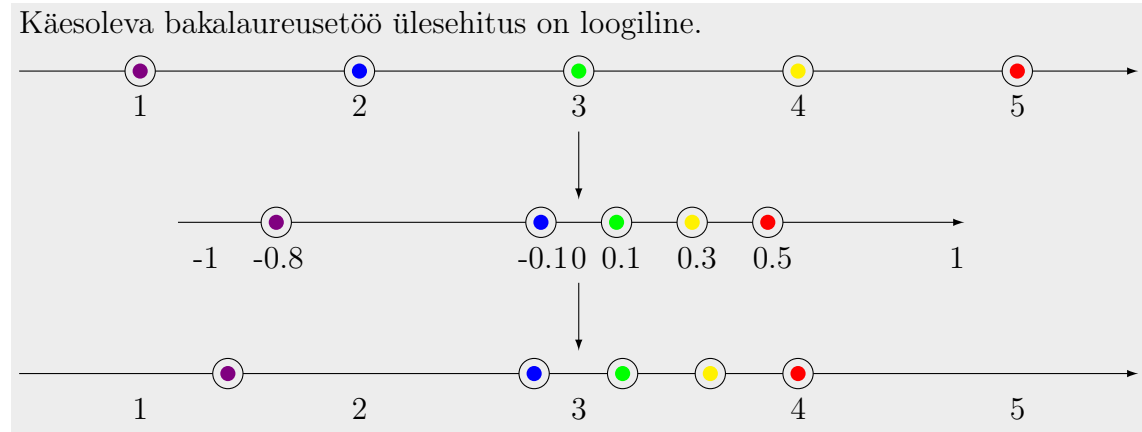
Paneme tähele, et sellisel skaalal olevaid küsimusi sisaldava testi Cronbachi alfa esitub lihtsamal kujul:

$$\alpha = \frac{n}{n-1} \left( 1 - \frac{n}{\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n COV(L_i, L_j)} \right) \quad (6.3)$$

Siit näeme, et sellisel juhul taandub Cronbachi alfa maksimeerimine avaldise  $\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n COV(L_i, L_j)$

maksimeerimisele. Järgev on täiesti trivaalne mapping  $Y = (X+1)*2 + 1$  vms. Põhjus miks ta siia sisse tõin oli soov rõhutada absoluutse skaala ebaolulisust. Võib välja jääda. Kuna uuritavaid teste vaadeldakse tavaliselt 5-palli skaalal, siis pärast sobivate kordajate leidmist võime teha veel ühe teisenduse, mis viib vahemikust  $(-1, 1)$  vahemikku  $(0, 5)$ , säilitades hinnangute (mida oleme tähistanud  $\lambda$ -dega) omavaheliste kauguste suhte. [normeerime](#)

Kogu eelnevalt tehtud illustreerib järgmine joonis, kus autor on püüdnud selgitada ühe juhusliku suuruse määramispiirkonna muutuse läbi eelnevalt kirjeldatud protsesside.



Joonis 8: Illustratsioon sellest, kuidas suhestub hulk  $ran(K_i)$  hulka  $ran(L_i)$  ning see omakorda hulka, mis tekib peale teisendust hulgast  $ran(L_i)$  5-palli skaalale, säilitades hinnangute vahelised kaugused

Olgu meil tõenäosuste maatriks  $P$ :

$$P = \begin{pmatrix} p_{(11)(11)} & p_{(11)(12)} & p_{(11)(13)} & p_{(11)(14)} & p_{(11)(15)} & p_{(11)(21)} & \cdots & p_{(11)(n5)} \\ p_{(12)(11)} & p_{(12)(12)} & p_{(12)(13)} & p_{(12)(14)} & p_{(12)(15)} & p_{(12)(21)} & \cdots & p_{(12)(n5)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{(n5)(11)} & p_{(n5)(12)} & p_{(n5)(13)} & p_{(n5)(14)} & p_{(n5)(15)} & p_{(n5)(21)} & \cdots & p_{(n5)(n5)} \end{pmatrix}$$



kus  $p_{(i\alpha)(j\beta)}$ ,  $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ ,  $\alpha, \beta \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$  tähistab tõenäosust, et küsimusele  $K_i$  anti vastus  $\alpha$  ja küsimusele  $K_j$  anti vastus  $\beta$ .

Paneme tähele, et kuna  $p_{(i\alpha)(i\alpha)} = p_{i\alpha}$ , siis avaldub eelnev maatriks ka järgnevalt:

$$P = \begin{pmatrix} p_{i\alpha} & p_{(11)(12)} & p_{(11)(13)} & p_{(11)(14)} & p_{(11)(15)} & p_{(11)(21)} & \cdots & p_{(11)(n5)} \\ p_{(12)(11)} & p_{i\alpha} & p_{(12)(13)} & p_{(12)(14)} & p_{(12)(15)} & p_{(12)(21)} & \cdots & p_{(12)(n5)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{(n5)(11)} & p_{(n5)(12)} & p_{(n5)(13)} & p_{(n5)(14)} & p_{(n5)(15)} & p_{(n5)(21)} & \cdots & p_{i\alpha} \end{pmatrix}$$

Defineerime vektori  $x$ :

$$x = (\lambda_{11}, \lambda_{12}, \lambda_{13}, \lambda_{14}, \lambda_{15}, \lambda_{21}, \lambda_{22}, \lambda_{23}, \lambda_{24}, \lambda_{25}, \dots, \lambda_{n1}, \lambda_{n2}, \lambda_{n3}, \lambda_{n4}, \lambda_{n5})$$

Siis  $xPx^T = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n COV(L_i, L_j)$ . Veendume selles:

$$\begin{aligned} xPx^T &= (\lambda_{11} \quad \lambda_{12} \quad \cdots \quad \lambda_{n5}) \begin{pmatrix} p_{(11)(11)} & p_{(11)(12)} & \cdots & p_{(11)(n5)} \\ p_{(12)(11)} & p_{(12)(12)} & \cdots & p_{(12)(n5)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{(n5)(11)} & p_{(n5)(12)} & \cdots & p_{(n5)(n5)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_{11} \\ \lambda_{12} \\ \vdots \\ \lambda_{n5} \end{pmatrix} = \\ &= \left( \sum_{j=1}^n \sum_{l=1}^5 \lambda_{jl} p_{(jl)(11)} \quad \sum_{j=1}^n \sum_{l=1}^5 \lambda_{jl} p_{(jl)(12)} \quad \cdots \quad \sum_{j=1}^n \sum_{l=1}^5 \lambda_{jl} p_{(jl)(n5)} \right) \begin{pmatrix} \lambda_{11} \\ \lambda_{12} \\ \vdots \\ \lambda_{n5} \end{pmatrix} = \\ &= \sum_{j=1}^n \sum_{l=1}^5 \lambda_{jl} p_{(jl)(11)} + \sum_{j=1}^n \sum_{l=1}^5 \lambda_{jl} p_{(jl)(12)} + \cdots + \sum_{j=1}^n \sum_{l=1}^5 \lambda_{jl} p_{(jl)(n5)} = \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^5 \sum_{j=1}^n \sum_{l=1}^5 \lambda_{jl} p_{(jl)(ik)} \lambda_{ik} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^5 \sum_{l=1}^5 \lambda_{jl} p_{(jl)(ik)} \lambda_{ik} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n E(L_i L_j) = \\ &= \sum_{(1)}^n \sum_{j=1}^n E(L_i L_j) - E(L_i) E(L_j) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n COV(L_i, L_j) \end{aligned}$$

Eelneva põhjal piisab meile Cronbachi alfa leidmiseks ruutvõrrandi  $xPx^T$  maksimeerimisest, arvestades eelnevalt äratoodud piiranguid  $L_i$  keskväärtusele ja dispersioonile.. Selle põhjal saame püstitada *Quadratically constrained quadratic programming (QCQP)*'i [Mingi pädev eestikeelne termin selle kohta ?](#) tüüpi optimeerimisprobleemi, mille lahendus annab meile otsitavad tõlgendused. Teeme seda:

$$\begin{aligned}
& \min x^T(-P)x \\
& R_i^T x = 0, i \in 1, 2, \dots, n \\
& R_i = (\underbrace{0, 0, \dots, 0}_{(i-1)*5}, \underbrace{p_{ia}, p_{ib}, p_{ic}, p_{id}, p_{ie}}_{(n-i)*5}, 0, 0, \dots, 0, 0) \\
& x^T P_i x = 1, i \in \{1, 2, \dots, n\}, \quad P_i = \begin{pmatrix} p_{ja} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & p_{jb} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & p_{je} \end{pmatrix} \\
& p_{j\alpha} = \begin{cases} 0 & j \neq i \\ p_{i\alpha} & i = j \end{cases}, \alpha \in \{a, b, c, d, e\}
\end{aligned} \tag{6.4}$$

## 7 Ülesande tüübi keerekuse analüüs

Järgnevas analüüsimise ruutkitsendustega ruuplaneerimisülesannete keerukust üldisemalt. Kõigepealt defineerime üldkuju, selleks on,

$$\begin{aligned}
& \min \frac{1}{2} x^T P_0 x + q_0^T x \\
& \frac{1}{2} x^T P_i x + q_i^T x + r_i \leq 0, i \in \{1, \dots, m\}, \\
& Ax = b, P_0, P_i \in R^{n \times n}, x, q_0, q_i \in R^n, \text{ kus } x \text{ on optimeeritav muutuja.}
\end{aligned} \tag{7.1}$$

Paneme tähele, et kitsendused  $x_i(x_i - 1) \leq 0$ ,  $x_i(1 - x_i) \leq 0$  rahuldavad probleemi (7.1) kitsendustele pandud tingimusi. Tõepoolest, toodud kitsendused saab viia kujule

$$\begin{aligned}
& x^T P_i x + (-q_i^T) x \leq 0, \\
& x^T (-P_i) x + q_i^T x \leq 0, P_i = \begin{cases} p_{ii} = 1 \\ p_{jk} = 0, j, k \neq i \end{cases}, q_i = \begin{cases} q_i = 1 \\ q_j = 0, j \neq i \end{cases}.
\end{aligned}$$

Eelnevad kitsendused on samaväärsed kitsendusega  $x_i(x_i - 1) = 0$ , mis on samaväärne kitsendusega  $x_i \in \{0, 1\}$ . Niisiis saab kahendtäisarv-programmi (binary integer program, 0-1 integer program) esitada eelnevalt kirjeldatud kujul.

## 7.1 Kahendtäisarv programm

Kahendtäisarv-programm on optimeerimisprobleem, kus kõik muutujad peavad saama väärtusi hulgast  $\{0, 1\}$ . Kahendtäisarv-programmi kanooniline kuju on

$$\begin{aligned} \max \quad & c^T x \\ \text{s.t.} \quad & Ax \leq b, \\ & x_i \in \{0, 1\}, \\ & a \in A, b_0 \in b, c_0 \in c \implies a, b_0, c_0 \in \mathbb{Z} \end{aligned} \tag{7.2}$$

## 7.2 NP-Hard probleemid

# 8 Ülesande analüüsiks vajalik taust

## 8.1 Kumerus

Definitsioon 8.1. Olgu

## 9 Lahenduse idee

Kas probleem on SDP tüüpi või SDP? Miidlale kirjutan vast nendes küsimustes. Mingi sissejuhatav jutt QCQP ja SDP kohta, kas algusesse taust peatükki või pigem teksti sisse? Püstitatud optimeerimis probleemi lahendamiseks teisendame probleemi *semidefinite programming* (SDP) tüüpi optimeerimisülesandeks ning seejärel lahendame saadud ülesande.

## 10 Teisendus QCQP tüüpi ülesandelt SDP tüüpi ülesandele

Esiteks teisendame saadud QCQP standartkujule. Siia vaja selgitusi, mis ja kuidas

$$\begin{aligned} \min \quad & -\theta \\ \text{s.t.} \quad & x^T P x - \theta \leq 0 \\ & R_i^T x \leq 0, i \in 1, 2, \dots, n \\ & -R_i^T x \leq 0, i \in 1, 2, \dots, n \\ & R_i = (\underbrace{0, 0, \dots, 0}_{(i-1)*5}, \underbrace{p_i a, p_i b, p_i c, p_i d, p_i e}_{(n-i)*5}, 0, 0, \dots, 0, 0) \end{aligned} \tag{10.1}$$

$$\begin{aligned}
x^T P_i x - 1 &\leq 0, i \in \{1, 2, \dots, n\} \\
-(x^T P_i x - 1) &\leq 0, i \in \{1, 2, \dots, n\} \\
P_i &= \begin{pmatrix} p_{ja} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & p_{jb} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & p_{je} \end{pmatrix} \\
p_{j\alpha} &= \begin{cases} 0 & j \neq i \\ p_{i\alpha} & i = j \end{cases}, \alpha \in \{a, b, c, d, e\}
\end{aligned}$$

[6, 116]

Paneme tähele, et kuna maatriksid  $P, R_i, P_i$  on sümmeetrilised ja mittenegatiivselt määratud, siis leiduvad maatriksid  $Q, S_i, Q_i$  nii, et  $P = QQ^T, R_i = S_i S_i^T, P_i = Q_i Q_i^T$ . Nende maatriksite leidmiseks saab kasutada Cholesky lahutust. [17, 151] raamatus juhj positiivselt määratud maatriksi korral, mittenegatiivselt määratud maatriksi korral sellied maatriksid leiduvad, kuid ei ole alati üheselt määratud.

Olgu  $A$  mittenegatiivselt määratud maatriks, olgu  $A = LL^T$ . Märkame, et kehtib järgnev:

$$x^T A x \leq b^T x + c \iff \begin{pmatrix} I_k & L^T x \\ x^T L & b^T x + c \end{pmatrix} \succeq 0 \quad (10.2)$$

[11, 31]

Seega saame anda oma optimeerimisprobleemile järgneva kuju:

$$\begin{aligned}
\min \quad & -\theta \\
& \begin{pmatrix} I_k & Q^T x \\ x^T Q & \theta \end{pmatrix} \succeq 0 \\
& R_i^T x \leq 0, i \in 1, 2, \dots, n \\
& -R_i^T x \leq 0, i \in 1, 2, \dots, n \\
R_i = & (\underbrace{0, 0, \dots, 0, 0}_{(i-1)*5} p_{ia}, p_{ib}, p_{ic}, p_{id}, p_{ie}, \underbrace{0, 0, \dots, 0, 0}_{(n-i)*5}) \\
& \begin{pmatrix} I_k & Q_i^T x \\ t^T & 1 \end{pmatrix} \succeq 0 \\
& \begin{pmatrix} I_k & Q_i^T x \\ -x^T Q_i & -1 \end{pmatrix} \succeq 0
\end{aligned} \quad (10.3)$$

## 11 Teek

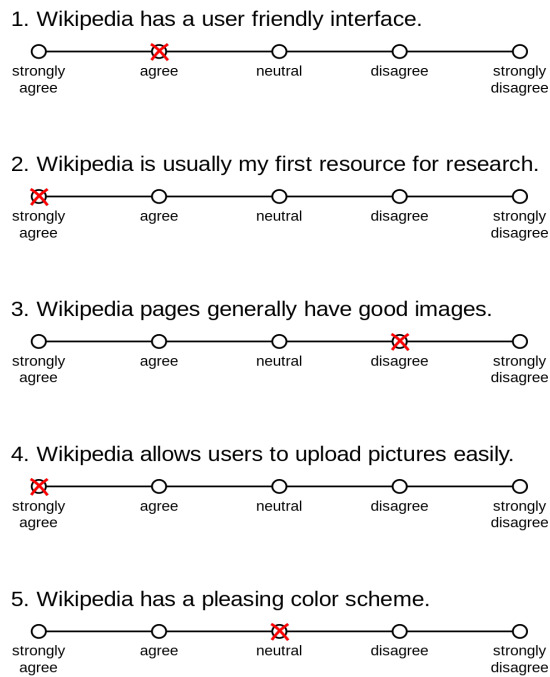
Põhjendan siin ka lühidalt Pythoni eeliseid teegi realiseerimisel, alternatiividega (näiteks Java või MATLAB) võrreldes:

1. Python on hetkel keel, millega programmeerimisalased õppingud tavaliselt algavad. Näiteks Tartu Ülikoolis õpetatakse programmeerimist keeles Python nii matemaatika-informaatika teaduskonnale suunatud aines kui ka teistele huvilistele suunatud aines "Programmeerimise alused", mida 2013/2014 aasta kevadel kuulas 150 inimest. Autor loodab, et nende seas on ka mõned psühholoogia tudengid.
2. Pythonil on läbi NumPy ja SciPy teekide väga hea arvutuslik tugi soovitud hinnangute implementeerimiseks.
3. Pythoni teek on väga lihte integreerida mõne veebiraamistikuga, mis võiks olla loodava teegi üks rakenduskohti.
4. Python on vabavara ning kõigile tasuta kasutatav.

## 12 Lisa

3. Õppejõu hoiak õpetamisel oli õppimist toetav ja üliõpilaste suhtes avatud.
<input type="radio"/> nõustun igali <input type="radio"/> pigem nõustun <input type="radio"/> pigem ei nõustu <input type="radio"/> ei nõustu üldse <input type="radio"/> nii ja naa
3.1. Palun kommenteerige ja/või põhjendage oma hinnangut.
<div></div>
4. Õppejõud õpetas õppeainet meisterlikult (Innvi äratamine, esitatu arusaadavus, kaasahaaravus jms).
<input type="radio"/> nõustun igali <input type="radio"/> pigem nõustun <input type="radio"/> pigem ei nõustu <input type="radio"/> ei nõustu üldse <input type="radio"/> nii ja naa
4.1. Palun kommenteerige ja/või põhjendage oma hinnangut.
<div></div>
5. Õppejõud antud või soovitatud õppematerjalid olid sisu, vormistuse ja sobivuse poolest asjakohased.
<input type="radio"/> nõustun igali <input type="radio"/> pigem nõustun <input type="radio"/> pigem ei nõustu <input type="radio"/> ei nõustu üldse <input type="radio"/> nii ja naa
5.1. Palun kommenteerige ja/või põhjendage oma hinnangut.
<div></div>
6. Õppejõud andis piisavalt tagasisidet minu töö tulemuste kohta aine läbimisel.
<input type="radio"/> nõustun igali <input type="radio"/> pigem nõustun <input type="radio"/> pigem ei nõustu <input type="radio"/> ei nõustu üldse <input type="radio"/> nii ja naa

Joonis 9: Näide Tartu Ülikooli õppeinfo süsteemi tagasiside ankeedist, kus rakendatakse Likerti skaalat [18]



Joonis 10: Näide küsimustikust, kus on rakendatud Likerti skaalat; küsimused on paigutatud nende järjestikulisuse rõhutamiseks teljele [15]

## Viited

- [1] Lee J. Cronbach. Test "Reliability": Its Meaning and Determination. *Psychometrika*, 12(1):1–16, 1947.
- [2] Lee J. Cronbach and Richard J. Shavelson. My Current Thoughts on Coefficient Alpha and Successor Procedures. *Educational and Psychological Measurement*, 64(3):391–418, June 2004.
- [3] Dato N. M. de Gruijter and Leo J. Th. van der Kamp. *Statistical Test Theory For Education And Psychology*. Number October. Taylor & Francis, 2007.
- [4] N. Dilmen. Reliability and Validity, 2008.
- [5] Diane R. Edmondson. Likert Scales: A History. <http://faculty.quinnipiac.edu/charm/CHARM%20proceedings/CHARM%20article%20archive/2005>.
- [6] M. A. Epelman. Introduction to Semidefinite Programming (SDP). <http://www-personal.umich.edu/~mepelman/teaching/IOE511/Handouts/511notes07-16.pdf>, 2007.
- [7] Louis Guttman. A Basis for Analyzing Test-Retest Reliability. *PSYCHOMETRIKA*, 1(4):255–282, 1945.
- [8] Robin K. Henson. Understanding Internal Consistency Reliability Estimates: A Conceptual Primer on Coefficient Alpha. *Measurement & Evaluation in Counseling & Development*, 34(3):177, 2001.
- [9] Paul H Jackson and Christian C. Agunwamba. Lower Bounds for the Reliability of the Total Score on a Test Composed of Non-Homogeneous Items: I: Algebraic Lower Bounds. *PSYCHOMETRIKA*, 42(2):567–578, 1977.
- [10] Susan Jamieson. Likert scales: how to (ab)use them. *Medical education*, 38(12):1217–8, December 2004.
- [11] Monique Laurent and Frank Vallentin. Semidefinite Optimization. <http://page.mi.fu-berlin.de/fmario/sdp/laurentv.pdf>, 2012.
- [12] F.M. Lord and M.R Novick. *Statistical theories of mental test scores*. 1968.
- [13] Melvin R. Novick. The axioms and principal results of classical test theory. *Journal of Mathematical Psychology*, 3(1):1–18, February 1966.



- [14] Klaas Sijtsma. On the use, the misuse, and the very limited usefulness of cronbach's alpha. *PSYCHOMETRIKA*, 74(1):107–120, 2009.
- [15] Nicholas Smith. Example of Likert Scale. [http://en.wikipedia.org/wiki/File:Example\\_Likert\\_Scale.svg](http://en.wikipedia.org/wiki/File:Example_Likert_Scale.svg).
- [16] David L Streiner. Starting at the Beginning : An Introduction to Coefficient Alpha and Internal Consistency Starting at the Beginning : An Introduction to Coefficient Alpha and Internal Consistency. (February 2013):37–41, 2010.
- [17] Ivar Tammeraid. *Lineaaralgebra rakendused*. TTÜ Kirjastus, Tallinn, 1999.
- [18] UT. Õisi tagasiside. <http://is.ut.ee>.