Bakatöö

Vootele Rõtov

5. juuli 2013. a.

Sisukord

Spikker

Helesinine- komentaarid
Tumesinine - asjad, mille õigsust peaks kontrollima

Miks ma käesolevat asja teen?

Panen kirja mõned põhjused, miks ma tegelen selle asjaga:

I Sellest on kellegile kasu - loodan realselt, et saan hakkama mingi toreda asjaga, millest keegi(näiteks Marguse psühholoogidest sõbrad) kasu saab.

II Saab kätte selle paberi, mis teeb minust parema inimese.

III Midagi uut, olen juba päris pikalt tarkust ühes formaadis kuula õppejõudu, tööta läbi tema poolt valitud materjalid, esita see õppejõule, äkki selline formaat, kus tuleb ise otsida ja ise mõelda meeldib.

IV Väljakutse, kuigi viimaste aastatega on enesemotivatsioon kõvasti paranenud, ei ole see veel seal, kus ta olla võiks. Loodetavasti ”treenin”seda aspekti.

1 Töö ülesehitus

Esiteks tutvustame lugejale vajalikku taustinfot, seejärel kirjeldame probleemipüstitust. Sellele järgneb töö eesmärgi matemaatiline püstitus.

2 Taustinfo

2.1 Likerti skaala

Käesolev uurimus tegeleb küsimustikega (*Likert scale*), milles soovitakse hinnanguid teatud arvule väidetele (*Likert item*) viie pallisel Likerti skaalal [2]. Näiteks: [1]

Käesoleva bakalaureusetöö ülesehitus on loogiline.

☐ Ei nõustu ☐ Ei nõustu osaliselt ☐ Nii ja naa ☐ Nõustun osaliselt ☐ Nõustun

Joonis 1: Näide väitest, millele palutakse hinnangut Likerti skaalal

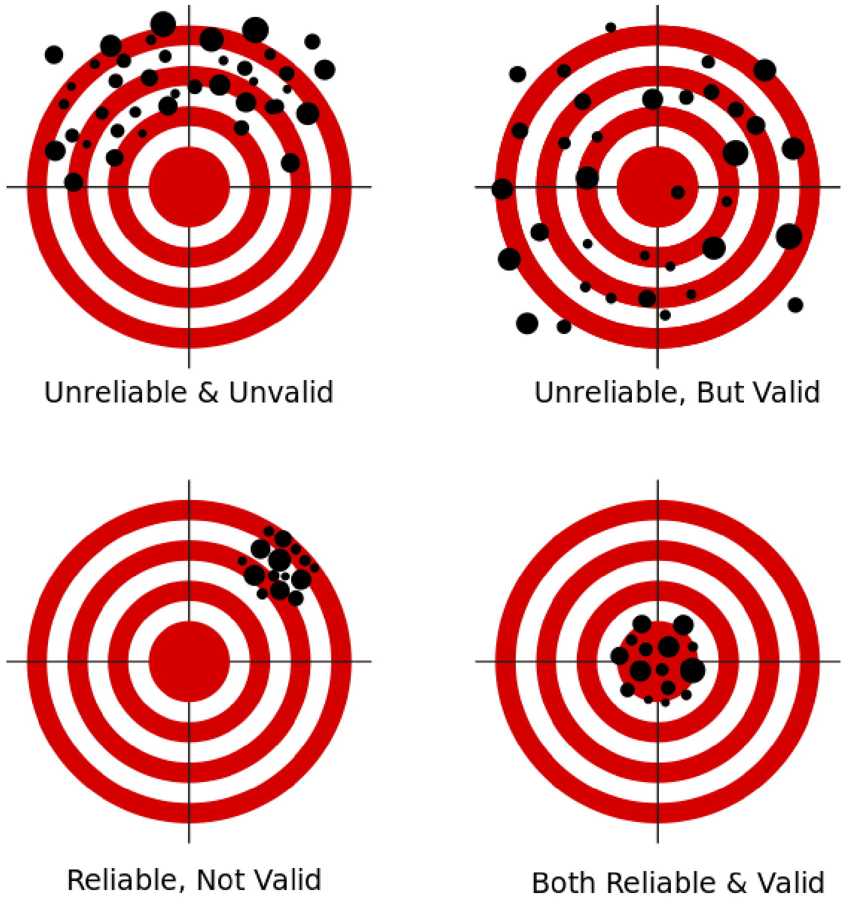
Likerti skaala - järjestikskaala või intervallskaala?

Lugejal võib tekkida õigustatud küsimus, kuidas põhjendab autor Likerti skaala käsitlemist intervallskaalana, kui Likerti skaala oli algselt mõeldud järjestikskaalana ning selle kasutamise osas intervallskaalana on autorid pigem skeptilised [4]. Sellest hoolimata on intervallksaala tõlgendus praktikas piisavalt levinud, et selle valdkonna uurimine õigustatud oleks. Siinkohal vajab esile toomist, et kriitikute üks levinumaid argumente on see, et „hea“ ja „väga hea“ keskmine ei ole loomulikul viisil tõlgendatav kui „hea + pool“, millega autor ka nõustub ning loodab pakkuda sellele alternatiivset tõlgendust.

[1]Näited terviklikest küsimustikest on lisades, joonisel 7 ja 8

2.2 Valiidsus ja reliaablus

Testi **valiidsus** on testi karakteristik, mis iseloomustab testi võimet mõõta seda, mida ta disainiti mõõtma. Testi **reliaablus** on testi omadust saada sama subjekti erinevatel mõõtmistel sama testiga sama tulemus. Järgnev joonis illustreerib reliaabluse ja valiidsuse mõisteid.



Joonis 2: Reliaabluse (*reliability*) ja valiidsuse (*validity*) omavahelist suhestumine. [?]

On selge, et testi kõrge valiidsus on vajalik tingimus selleks, et test oleks kasutatav hüpoteesi kontrolliks või mingite järelduste tegemiseks. Teoreetiliselt on võimalik psühhomeetriline test, mille valiidsus on suur ja reliaablus väike, kui eeldada et mõõtmisviga on sõltumatu juhuslik suurus, eeldus mida ka tavaliselt tehakse. Intuitiivselt on selge, et selline test ei praktikas kasutatav, kuna me ei oska väheste mõõtmiste raames hinnata mõõtmisvigade suurust ning piisavalt suure arvu mõõtmiste teostamine ei ole reaalselt võimalik, seega on praktikas testi kõrge reliaablus vajalik tingimus testi kõrgeks valiidsuseks.

2.3 Reliaabluse formaalne definitsioon

Definitsioon andmisel võtame aluseks Melvin Novicki klassikalisest testiteooria [?] [?] tõlgendusest [?, 109].

Olgu meil mingi kogum I testile vastajaid ning mingisugune test, milles on k küsimust ning olgu X_i^j juhuslik suurus, mille jaotusfunktsioon sõltub vastajast, mille võimalike väärtusi vaatleme kui küsimuse j vastuse arvulist tõlgendust mingi vastaja i jaotusele vastavalt. Defineerime vastaja i testi tulemuse X_{+i} kui

$$X_{+i} = \sum_{j=1}^{k} X_i^j.$$

Kuna juhusliku suuruste summa on samuti juhuslik suurus Okey lugeda juhuslik suurus selliseks mõisteks, mida ei ole vaja defineerida? siis on X_{+j} juhuslik suurus, mille jaotusfunktsioon on vastajast sõltuv. Analoogiliselt võime vaadelda ka testi tulemusi üle kõigi vastajate - sellisel juhul olgu X^j juhuslik suurus mida iseloomustav jaotusfunktsioon kirjeldab kuidas vastajate populatsioon vastab küsimusele j ning testi tulemus X on defineeritav kui

$$X = \sum_{j=1}^{k} X^j.$$

Defineerime küsimuse tegeliku tulemuse vastaja i jaoks kui testi tulemuse keskväärtuse Vajalik def ? ehk

$$t_i = \epsilon\left[X_{+i}\right].$$ [2]

Paneme tähele, et vaadeldes tegeliku tulemust üle kõigi vastajate võime rääkide tegelikust tulemusest kui juhuslikust suurusest, mida tähistame T ja mille võimalike väärtuste hulk on $\{t_i \mid i \in I\}$.
Tõlgendame vastaja i testi tulemuse ja tegeliku tulemuse vahet mõõtmisveana, tähistame seda E_i. Seega $X_{+i} = t_i + E_i$. Analoogiliselt saame tõlgendada viga üle kõigi vastajate kui juhusliku suurust E, kusjuures $X = T + E$.
Paneme tähele, et eelneva põhjal on vastaja i mõõtmisvea keskväärtus 0. Tõepoolest, kuna tegeliku tulemuse definitsiooni põhjal $\epsilon\left[X_{+i}\right] = t_i$, siis saame mõõtmisvea definitsiooni arvesse võttes

$$t_i = \epsilon\left[X_{+i}\right] = \epsilon\left[t_i + E_i\right] = \epsilon\left[t_i\right] + \epsilon\left[E_i\right] = t_i + \epsilon\left[E_i\right] \implies \epsilon\left[E_i\right] = 0.$$

Lisaks on lihtne märgata, et $D\left[X_i\right] = D\left[E_i\right]$, sest

$$D\left[X_i\right] = D\left[E_i + t_i\right] = D\left[E_i\right].$$

Eelnevates definitsioonides keskendusime testi tulemuste mõtestamisele fikseeritud vastaja korral, tuues paralleelselt sisse analoogilised mõisted üle mingi vastajate kogumi. Kuna reeglina mõtestatakse teste praktikas mingi vastajate kogumi raames, siis keskendume ka meie edaspidi sellele.
Niisiis, olgu meil meli mingi vastajate kogum I ja eespool kirjeldatud juhuslikud suurused X, T, E, kusjuures $X = T + E$.
Järgevalt esitame neli keskset klassikalise testi teooria eeldust [**?**, 10]:

I mõõtmisvea keskväärtus üle vastajate populatsiooni on 0 ehk

$$\epsilon\left[E\right] = 0,$$

[2] Tähistame keskväärtuse tähega ϵ kuna tavapärane tähistus E leiab antud käsitluses teistsuguse rolli.

II korrelatsioon Def vajalik? mõõtmisvea ja tegeliku tulemuse vahel üle vastajate kogumi on 0 ehk

$$corr\,(T, E) = 0.$$

III Olgu meil sama testi kaks erinevat mõõtmist üle vastajate kogumi I, mille tulemused on X ja $X`$, kusjuures $X = T + E$ ja $X` = T` + E`$. Siis ühe mõõtmise tegelik tulemus ei korreleeru teise mõõtmisveaga ehk

$$corr\,(T, E') = 0,$$

IV lisaks sellele ei korreleeru ka erinevate mõõtmiste mõõtmisvead ehk

$$corr\,(E, E') = 0.$$

Järgnevalt toome sisse paralleelse testi mõiste. Kaks testi, mille tulemused üle kõigi vastajate kogumi I on X ja X' on paralleelsed parajasti siis, kui kehtivad järgmised väited :

1. $t_i = t'_i\ \forall i \in I$
2. $D\,[X] = D\,[X']$ Dispersiooni definitsioon vajalik ?

Paralleelse testi abil saame klassikalise testiteooria raames defineerida reliaabluse. Olgu meil kaks paralleelselt testi, mille tulemused üle vastajate kogumi I on vastavalt X,X' kus kumbgi ei ole konstante juhuslik suurus. Testi, mille tulemus on X, reliaablus üle vastajate kogumi I on võrdne X ja X' korrelatsiooniga (Pearsoni mõttes), mida tähistame $\rho_{XX'}$, formaalselt
korrelatsiooni (ja kovariatsiooni definistioonid vajalikud?

$$\rho_{XX'} = corr\,(X, X')\,.$$

Paralleelse testi definitsiooni ja klassikalise testiteooria eelduste põhjal kehtib

$$\begin{aligned}
\rho_{XX'} = \frac{cov(XX')}{\sqrt{D\,[X]\,D\,[X']}} &= \frac{\epsilon\,[XX'] - \epsilon\,[X]\,\epsilon\,[X']}{D\,[X]} = \\
&= \frac{\epsilon\,[(T+E)\,(T'+E')] - \epsilon\,[T+E]\,\epsilon\,[T'+E']}{D\,[X]} = \\
&= \frac{\epsilon\,[(T+E)\,(T+E')] - (\epsilon\,[T] - \epsilon\,[E])\,(\epsilon\,[T] - \epsilon\,[E'])}{D\,[X]} = \\
&= \frac{\epsilon\left[T^2 + TE + TE' + EE'\right] - \epsilon\,[T]\,\epsilon\,[T]}{D\,[X]} = \\
&= \frac{\epsilon\left[T^2\right] + \epsilon\,[TE] + \epsilon\,[TE'] + \epsilon\,[EE'] - \epsilon\,[T]^2}{D\,[X]} = \frac{\epsilon\left[T^2\right] - \epsilon\,[T]^2}{D\,[X]} = \\
&= \frac{cov(T,T)}{D\,[X]} = \frac{D\,[T]}{D\,[X]}.
\end{aligned}$$

Paneme tähele, et eelneva põhjal $\rho_{XX'} \in [0, 1]$. Samuti märgime, et kuna $T = X - E$, siis kehtib

$$\rho_{XX'} = \frac{D\,[T]}{D\,[X]} = \frac{D\,[X-E]}{D\,[X]} = \frac{D\,[X] - D\,[E]}{D\,[X]} = 1 - \frac{D\,[E]}{D\,[X]}.$$

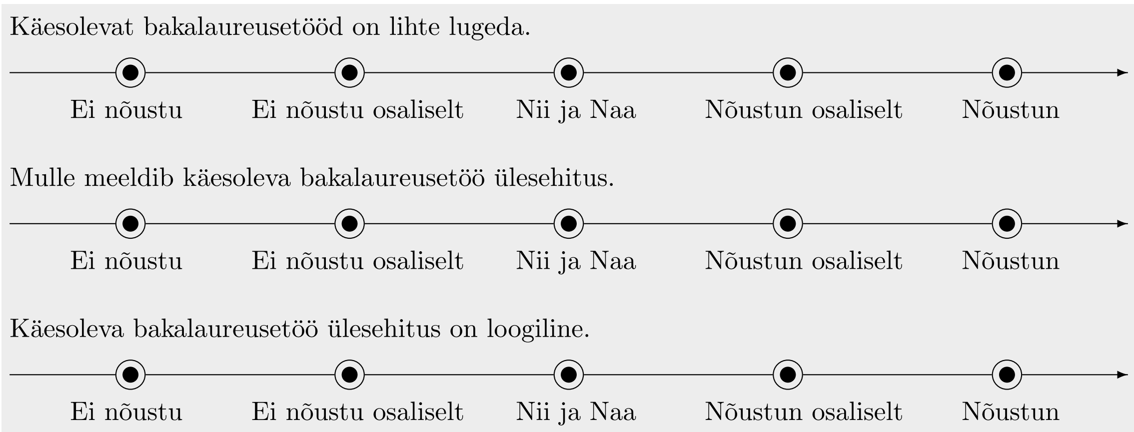
Eelneva põhjal on selge, et väide "testi reliaablus on suuremön samaväärne järgmise kolme väitega [**?**, 110]:

1. testi korrellatsioon paralleelse testiga on suurem,
2. testi tegeliku tulemuse dispersioon on suurem võrreldes testi tulemuse dispersiooniga,
3. testi mõõtmisvea dispersioon on väiksem võrreldes testi tulemuse dispersiooniga.

Märgime, et klassikalise testiteooria raames defineeritud reliaablus sobib kokku paragraafi alguses antud mitteformaalse definitsiooniga, kuna paralleelseks testiks võib lugeda ka sama testi uuesti läbiviimise sama vastajate kogumi peal, kusjuures klassikalise testiteooia eeldused ei ole väga kitsendavad, kui suudame tagada selle, et testis ei esine süsteematilisi mõõtmisvigu.
Kuna testi tegelik tulemus on suurus, mida me prakikas ei tea ning ka paralleelsete testide läbiviimine ei ole tihti võimalik on kasutusele võetud mitmeid praktikas kasututavaid hinnanguid, mis on reliaabluse alumisteks tõketeks. Järgnevalt vaatleme mõningaid neist.
Reliaabluse mõõtmise viisidest on osutunud popularseimaks sisemise reliaabluse leidmine, näiteks kolm neljandikku Ameerika Ühendriikide teadusajakirjas „*Directory of Unpublished Experimental Mental Measures*“ ilmunud uurimustest kasutas testi reliaabluse hindamiseks justnimelt sisemist reliaablust [3, 177]. Järgnevalt vaatleme seda reliaabluse mõõtmise viisi lähemalt.

2.4 Sisemine reliaablus

Küsimustiku sisemine reliaablus (*internal consistency*) hindab testi erinevate küsimuste vastuste järjepidevust ehk seda, kui hästi on kooskõlas ühist konstruktsiooni hindavad küsimused [3, 177]. Piltlikult väljendudes, olgu meil järgnev küsimustik:



Joonis 3: Küsimustik bakalaureusetöö ülesehituse kohta

Siin on mõõdetavaks konstruktsiooniks käesoleva bakalaureusetöö ülesehitus ning sisemiseks reliaabluseks on vajalik kolmele näites toodud küsimusele antud vastuste kooskõla.

2.5 Cronbachi alfa

Cronbachi alfa on levinud sisemist reliaablust iseloomustav näitaja, mis on defineeritud järgnevalt:

$$(\frac{k}{k-1})(1-\frac{\sum \sigma_i^2}{\sigma_t^2}) \tag{2.1}$$

kus k tähistab küsimuste arvu, σ_i on standardviga ühe küsimuse piires ja σ_t on standardviga üle testi kogutulemuste. [1, 396]
Siia selgitav näidis tabel/joonis vajalik?

Miks ma taandan selles töös sisemise järjekindluse mõõtmise Cronbachi alfale?

Kuna Cronbach'i alfal on mitmeid puuduseid, millest mõningad on toodud ära David Streineri artiklis [6, 101-102], ning isegi mõõdiku autor Lee Cronbach soovitab oma 1951. aastal välja töötatud mõõdiku asemel kasutatada alternatiivseid mõõdikuid [1], on oluline vastata alapealkirjas püstitatud küsimusele. Kaks peamist põhjust on järgnevad:

I Cronbachi alfa on hetkel kõige kasutatavam mõõdik sisemise reliaabluse mõõtmiseks psühhomeetriliste testide juures. Seetõttu on väljapakutud meetod testide tulemuste analüüsijatele tuttav ning seega loodetavasti lihtsamini kasutatav.

II Cronbachi alfa leidmine on arvutuslikult küllaltki lihtne. Kuna käesoleva töö peamine eesmärk on selgitada, kas väljapakutud lähenemine on mõistlik, siis ei ole paremates mõõdikutest potentsiaalselt saadav kasu piisavalt suur, et tasa teha ülesande lahendamise raskemaks muutumist. Juhul, kui töö tulemus on aga positiivne, tuleks uurida ka teiste mõõdikute võimalikku kasutamist.

Milliseid piiranguid seab Cronbachi alfa kasutamine?

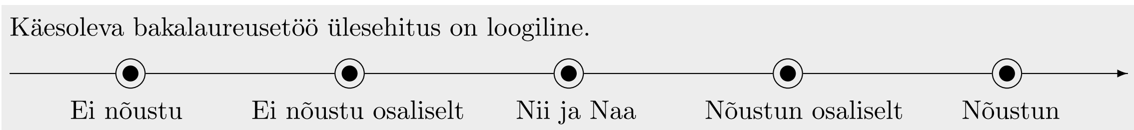
Tooksin esile kaks tähtsamat piirangut:

I Uuritavate küsimustike puhul peaks sama konstruktsiooniga tegelema võimalikult palju küsimusi, vältima peaks küsimustikke, kus ühe konstruktsiooni kohta on alla kolme küsimuse.

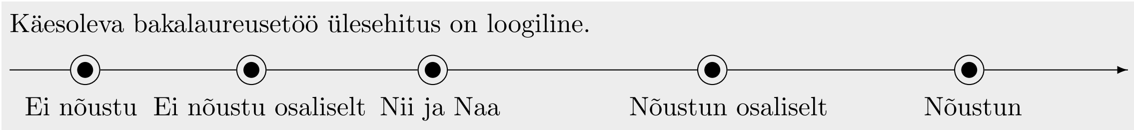
II Küsimustikud ei tohi olla liiga pikad, Cronbachi alfa peegeldab lisaks sisemisele järjekindlusele ka küsimustiku pikkust. [6, 101] Liiga pika küsimustiku puhul on oht, et pikkusest saab domineerv osa Cronbachi alfast.

3 Ülesande püstitus

Selle töö raames loodame välja pakkuda viisi, kuidas paigutada intervallskaalal erinevaid vastuseid Likerti skaalalt. Eesmärk on leida parem paigutus kui vaikimisi meetod, kus eeldatakse, et erinevate hinnagute vahekaugused on samad. Vaatleme kahte näidet:



Joonis 4: Näide, kuidas hinnangud skaalal hetkel vaikimisi meetodit kasutades paigutuvad



Joonis 5: Näide hinnangute alternatiivsest paiknemisest skaalal

Kui me tahame välja pakkuda alternatiive vaikimisi hinnangule, peab meil olema põhjendus, miks välja pakutud lahendus kirjeldab reaalsust täpsemalt. Pakume välja järgmise lahenduse: üritame leida hinnangute paiknemist skaalal nii, et küsitluse sisemine reliaablus oleks võimalikult suur. Piirame ennast sellega, et hinnangute esialgne järjestus ei tohi muutuda. Sisemise järjekindluse maksimeerimise taandame antud töö käigus Cronbachi alfa maksimeerimisele.[3]

Altervatiivid

Ilmselt siit edasi ei lähe, lendab praeguses lahenduses välja (kui just mingi vahva idee peale ei tule). Võib-olla pakkuda siin välja alternatiive Cronbach'i alfa abil sobivate vahekauguste leidmisele)

1. Kõige triviaalsem viis: kujutame kõikide küsimuste vastused hulgale $\{1, 2, 3, 4, 5\}$, leiame mudeli, mille võime kirjeldada valitud küsimust on suurim. Tegemist on ilmselt vaikimisi variandiga ehk loodud mudelit peab võrdlema
2. Selle asemel, et kujutada hulgale $\{1, 2, 3, 4, 5\}$, leiame sobivad vasted nii, et mudeli kirjeldav jõud oleks suurim. Sellise lähenemise oht seisneb selles, et meie mudel kirjeldab väga hästi olemasolevat valimit, kuid ei ütle suurt midagi üldkogumi kohta. Huvitav oleks, kas lihsalt nii midagi teha ei annaks ? Overfittimise vastu saaks, aga vaja oleks valimit, mis oleks piisavalt suur, et seda kaheks jagada(midagi, mille pealt mudelit ehitada ja midagi, mille pealt seda validifitseerida.
3. Midagi veel? Peab uurima.

4 Ülesande matemaatiline püstitus

Olgu meil küsimustik n-väitega, kus iga näite kohta palutakse hinnangut 5-palli Likerti skaalal. Hinnanguid võime vaadelda kui juhuslikke suurusi $K_1, K_2, ..., K_n, K_i w$ mille muutumispiirkonnaks on hulk $\{1, 2, 3, 4, 5\}$. Toome sisse ka tähistused $p_{i\alpha}, i \in \{1, 2, ..., n\}, \alpha \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$, kus $p_{i\alpha}$ tähistab olemasolevate andmete põhjal antud hinnangut tõenäosusele, et küsimusele K_i anti hinnang α.
Tuletame meelde Cronbachi alfa definitsiooni:

$$(\frac{k}{k-1})(1 - \frac{\sum \sigma_i^2}{\sigma_t^2})$$

Paneme tähele, et toodud eelduste põhjal avalduks vaadeldava küsimustiku korral alfa järgnevalt:

$$(\frac{k}{k-1})(1 - \frac{\sum \sigma_i^2}{\sigma_t^2}) = \frac{n}{n-1} \left(1 - \frac{\sum\limits_{i=0}^{n} D(K_i)}{D(\sum\limits_{i=0}^{n} K_i)} \right)$$

[3]Põhjendus, miks selline taandamine on tehtud, on ära toodud peatükis 2.5.

Võttes arvesse, et $D(\sum_{i=0}^{n} K_i) = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} COV(K_i, K_j)$ saame eelneva kirjutada järgnevalt:

$$(\frac{k}{k-1})(1 - \frac{\sum \sigma_i^2}{\sigma_t^2}) = \frac{n}{n-1}\left(1 - \frac{\sum_{i=0}^{n} D(K_i)}{\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} COV(K_i, K_j)}\right)$$

Vastavalt ülesande püstituses toodud ideele soovime leida sellise viisi hinnangute tõlgendamiseks, et Cronbachi alfa oleks maksimaalne. Kujutame juhuslikud suurused $K_1, K_2, ..., K_n$ juhuslikeks suurusteks $L_1, L_2, L_2, ..., L_n$, kusjuures juhusliku suuruse L_i määramispiirkond ühtib suuruse K_i määramispiirkonnaga ning L_i saab väärtusi hulgast $\Lambda_i = \{\lambda_{1i}, \lambda_{2i}, \lambda_{3i}, \lambda_{4i}, \lambda_{5i}\}$ $i \in 1, 2, ...n$. Lisaks kehtigu järgnevad kitsendused:

$$\lambda_{i1} < \lambda_{i2} < \lambda_{i3} < \lambda_{i4} < \lambda_{i5}$$

Siin peavad ikka ranged võrratused olema ,(0,0,0,0,1) ei kõlba.

$$K_i = 1 \implies L_i = \lambda_{i1}, K_i = 2 \implies L_i = \lambda_{i2}, \cdots, K_i = 5 \implies L_i = \lambda_{i5}$$

Paneme tähele, et Cronbachi alfa arvutamine, seega ka maksimeerimine, on endiselt keeruline. Siinkohal märgime, et hinnangute tõlgenduste juures ei huvita meid mitte absoluutne, vaid suhteline paigutus. Niisiis võime juhuslikke suurusi piirata järgnevate kitsendustega:

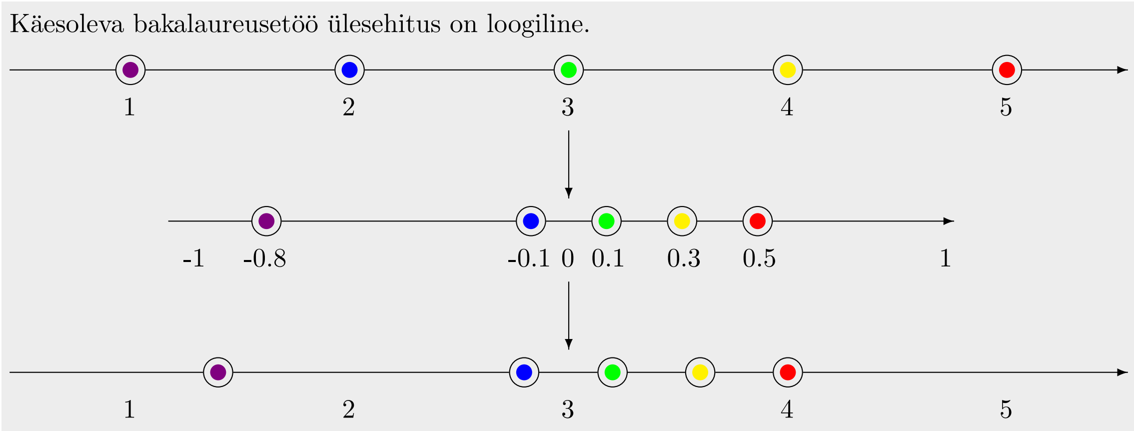
$$E(L_i) = p_{i1} * \lambda_{i1} + p_{i2} * \lambda_{i2} + p_{i3} * \lambda_{i3} + p_{i4} * \lambda_{i4} + p_{i5} * \lambda_{i5} = 0 \tag{4.1}$$

$$D(L_i) = p_{i1} * (\lambda_{i1})^2 + p_{i2} * (\lambda_{i2})^2 + p_{i3} * (\lambda_{i3})^2 + p_{i4} * (\lambda_{i4})^2 + p_{i5} * (\lambda_{i5})^2 = 1 \tag{4.2}$$

Paneme tähele, et sellisel skaalal olevaid küsimusi sisaldava testi Cronbachi alfa esitub lihtsamal kujul:

$$\alpha = \frac{n}{n-1}\left(1 - \frac{n}{\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} COV(L_i, L_j)}\right) \tag{4.3}$$

Siit näeme, et sellisel juhul taandub Cronbachi alfa maksimeerimine avaldise $\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} COV(L_i, L_j)$ maksimeerimisele. Järgev on täiesti trivaalne mapping Y = (X+1)*2 +1 vms. Põhjus miks ta siia sisse tõin oli soov rõhutada absoluutse skaala ebaolulisust. Võib välja jääda.Kuna uuritavaid teste vaadeldakse tavaliselt 5-palli skaalal, siis pärast sobivate kordajate leidmist võime teha veel ühe teisenduse, mis viib vahemikkust $(-1, 1)$ vahemikku $(0, 5)$, säilitades hinnangute (mida oleme tähistanud λ-dega) omavaheliste kauguste suhte. normeerime
Kogu eelnevalt tehtud illustreerib järgmine joonis, kus autor on püüdnud selgitada ühe juhusliku suuruse määramispiirkonna muutuse läbi eelnevalt kirjeldatud protsesside.



Joonis 6: Illustratsioon sellest, kuidas suhestub hulk $ran(K_i)$ hulka $ran(L_i)$ ning see omakorda hulka, mis tekib peale teisendust hulgast $ran(L_i)$ 5-palli skaalale, säilitades hinnagute vahelised kaugused

Olgu meil tõenäosuste maatriks P:

$$P = \begin{pmatrix} p_{(11)(11)} & p_{(11)(12)} & p_{(11)(13)} & p_{(11)(14)} & p_{(11)(15)} & p_{(11)(21)} & \cdots & p_{(11)(n5)} \\ p_{(12)(11)} & p_{(12)(12)} & p_{(12)(13)} & p_{(12)(14)} & p_{(12)(15)} & p_{(12)(21)} & \cdots & p_{(12)(n5)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{(n5)(11)} & p_{(n5)(12)} & p_{(n5)(13)} & p_{(n5)(14)} & p_{(n5)(15)} & p_{(n5)(21)} & \cdots & p_{(n5)(n5)} \end{pmatrix}$$

kus $p_{(i\alpha)(j\beta)}, i, j \in \{1, 2, ..., n\}, \alpha, \beta \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ tähistab tõenäosust, et küsimusele K_i anti vastus α ja küsimusele K_j anti vastus β.
Paneme tähele, et kuna $p_{(i\alpha)(i\alpha)} = p_{i\alpha}$, siis avaldub eelnev maatriks ka järgnevalt:

$$P = \begin{pmatrix} p_{i\alpha} & p_{(11)(12)} & p_{(11)(13)} & p_{(11)(14)} & p_{(11)(15)} & p_{(11)(21)} & \cdots & p_{(11)(n5)} \\ p_{(12)(11)} & p_{i\alpha} & p_{(12)(13)} & p_{(12)(14)} & p_{(12)(15)} & p_{(12)(21)} & \cdots & p_{(12)(n5)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{(n5)(11)} & p_{(n5)(12)} & p_{(n5)(13)} & p_{(n5)(14)} & p_{(n5)(15)} & p_{(n5)(21)} & \cdots & p_{i\alpha} \end{pmatrix}$$

Defineerime vektori x:

$$x = (\lambda_{11}, \lambda_{12}, \lambda_{13}, \lambda_{14}, \lambda_{15}, \lambda_{21}, \lambda_{22}, \lambda_{23}, \lambda_{24}, \lambda_{25}, \cdots, \lambda_{n1}, \lambda_{n2}, \lambda_{n3}, \lambda_{n4}, \lambda_{n5})$$

Siis $xPx^T = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} COV(L_i, L_j)$. Veendume selles:

$$xPx^T = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \cdots & \lambda_{n5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{(11)(11)} & p_{(11)(12)} & \cdots & p_{(11)(n5)} \\ p_{(12)(11)} & p_{(12)(12)} & \cdots & p_{(12)(n5)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{(n5)(11)} & p_{(n5)(12)} & \cdots & p_{(n5)(n5)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_{11} \\ \lambda_{12} \\ \vdots \\ \lambda_{n5} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{n}\sum_{l=1}^{5} \lambda_{jl} p_{(jl)(11)} & \sum_{j=1}^{n}\sum_{l=1}^{5} \lambda_{jl} p_{(jl)(12)} & \cdots & \sum_{j=1}^{n}\sum_{l=1}^{5} \lambda_{jl} p_{(jl)(n5)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_{11} \\ \lambda_{12} \\ \vdots \\ \lambda_{n5} \end{pmatrix} =$$

$$= \sum_{j=1}^{n}\sum_{l=1}^{5} \lambda_{jl} p_{(jl)(11)} + \sum_{j=1}^{n}\sum_{l=1}^{5} \lambda_{jl} p_{(jl)(12)} + \cdots + \sum_{j=1}^{n}\sum_{l=1}^{5} \lambda_{jl} p_{(jl)(n5)} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{5}\sum_{j=1}^{n}\sum_{l=1}^{5} \lambda_{jl} p_{(jl)(ik)} \lambda_{ik} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{5}\sum_{l=1}^{5} \lambda_{jl} p_{(jl)(ik)} \lambda_{ik} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} E(L_i L_j) =$$

$$\underset{(1)}{=} \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} E(L_i L_j) - E(L_i)E(L_j) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} COV(L_i, L_j)$$

Eelneva põhjal piisab meile Cronbachi alfa leidmiseks ruutvõrrandi xPx^T maksimeerimisest, arvestades eelnevalt äratoodud piiranguid L_i keskväärtusele ja dispersioonile.. Selle põhjal saame püstitada *Quadratically constrained quadratic programm(QCQP)*'i Mingi pädev eestikeelne termin selle kohta ? tüüpi optimeerimisprobleemi, mille lahendus annab meile otsitavad tõlgendused. Teeme seda:

$$\begin{gathered} min\ x^T(-P)x \\ R_i^T x = 0, i \in 1, 2, ..., n \\ R_i = (\underbrace{0, 0, ...0, 0}_{(i-1)*5} p_i a, p_i b, p_i c, p_i d, p_i e, \underbrace{0, 0, ..., 0, 0}_{(n-i)*5}) \\ x^T P_i x = 1, i \in \{1, 2, ..., n\},\ P_i = \begin{pmatrix} p_{ja} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & p_{jb} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & p_{je} \end{pmatrix} \\ p_j\alpha = \begin{cases} 0 & j \neq i \\ p_i\alpha & i = j \end{cases}, \alpha \in \{a, b, c, d, e\} \end{gathered} \tag{4.4}$$

5 Ülesande tüübi keerekuse analüüs

Järgnevas analüüsime ruutkitsendustega ruuplaneerimisülesannete keerukust üldisemalt. Kõigepealt defineerime üldkuju, selleks on,

$$\begin{gathered} min\ \frac{1}{2}x^T P_0 x + q_0^T x \\ \frac{1}{2}x^T P_i x + q_i^T x + r_i \leq 0, i \in \{1, ..., m\}, \\ Ax = b, P_0, P_i \in R^{n \times n}, x, q_0, q_i \in R^n, \text{kus x on optimeeritav muutuja.} \end{gathered} \tag{5.1}$$

Paneme tähele, et kitsendused $x_i(x_i - 1) \leq 0$, $x_i(1 - x_i) \leq 0$ rahuldavad probleemi (5.1) kitsendustele pandud tingimusi. Tõepoolest, toodud kitsendused saab viia kujule

$$\begin{gathered} x^T P_i x + (-q_i^T)x \leq 0, \\ x^T(-P_i)x + q_i^T x \leq 0, P_i = \begin{cases} p_i i = 1 \\ p_j k = 0, j, k \neq i \end{cases}, q_i = \begin{cases} q_i = 1 \\ q_j = 0, j \neq i \end{cases}. \end{gathered}$$

Eelnevad kitsendused on samaväärsed kitsendusega $x_i(x_i - 1) = 0$, mis on samaväärne kitsendusega $x_i \in \{0, 1\}$. Niisiis saab kahendtäisarv-programmi (binary integer program, 0-1 integer program) esitada eelnevalt kirjeldatud kujul.

5.1 Kahendtäisarv programm

Kahendtäisarv-programm on optimeerimisprobleem, kus kõik muutujad peavad saama väärtusi hulgast $\{0, 1\}$. Kahendtäisarv-programmi kanooniline kuju on

$$\begin{gathered} max\ c^T x \\ Ax \leq b, \\ x_i \in \{0, 1\}, \\ a \in A, b_0 \in b, c_0 \in c \implies a, b_0, c_0 \in \mathbb{Z} \end{gathered} \tag{5.2}$$

5.2 NP-Hard probleemid

6 Ülesande analüüsiks vajalik taust

6.1 Kumerus

Definitsioon 6.1. Olgu

7 Lahenduse idee

Kas probleem on SDP tüüpi või SDP? Miidlale kirjutan vast nendes küsimustes. Mingi sissejuhatav jutt QCQP ja SDP kohta, kas algusessse taust peatükki või pigem teksti sisse ? Püstitatud optimeerimis probleemi lahendamiseks teisendame probleemi *semidefinite programming(SDP)* tüüpi optimeerimisülesandeks ning seejärel lahendame saadud ülesande.

8 Teisendus $QCQP$ tüüpi ülesandelt SDP tüüpi ülesandele

Esiteks teisendame saadud $QCQP$ standartkujule. Siia vaja selgitusi, mis ja kuidas

$$
\begin{gathered}
min \ -\theta \\
x^T P x - \theta \leq 0 \\
R_i^T x \leq 0, i \in 1,2,...,n \\
-R_i^T x \leq 0, i \in 1,2,...,n \\
R_i = (\underbrace{0,0,...0,0}_{(i-1)*5} p_i a, p_i b, p_i c, p_i d, p_i e, \underbrace{0,0,...,0,0}_{(n-i)*5}) \\
x^T P_i x - 1 \leq 0, i \in \{1,2,...,n\} \\
-(x^T P_i x - 1) \leq 0, i \in \{1,2,...,n\} \\
P_i = \begin{pmatrix} p_{ja} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & p_{jb} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & p_{je} \end{pmatrix} \\
p_j \alpha = \begin{cases} 0 & j \neq i \\ p_i \alpha & i = j \end{cases}, \alpha \in \{a,b,c,d,e\}
\end{gathered} \tag{8.1}
$$

[?, 116]
Paneme tähele, et kuna maatriksid P, R_i, P_i on sümmeetrilised ja mittenegatiivselt määratud, siis leiduvad maatrikisd Q, S_i, Q_i nii, et $P = QQ^T, R_i = S_i S_i^T, P_i = Q_i Q_i^T$. Nende maatriksite leidmiseks saab kasutada Cholesky lahutust. [?, 151] raamatus juhj positiivselt määratud maatriksi korral, mittenegatiivselt määratud maatriksi korral sellied maatriksid leiduvad, kuid ei ole alati üheselt määratud.
Olgu A mittenegatiivselt määratud maatriks, olgu $A = LL^T$.Märkame, et kehtib järgnev:

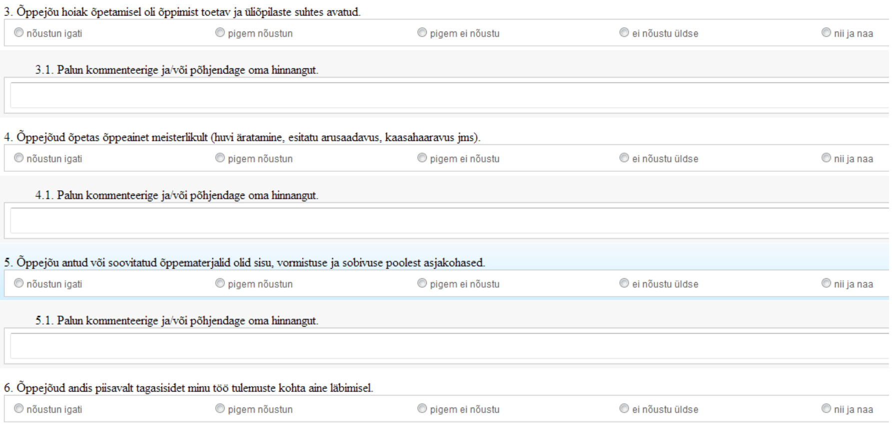
$$
x^T A x \leq b^T x + c \iff \begin{pmatrix} I_k & L^T x \\ x^T L & b^T x + c \end{pmatrix} \succeq 0 \tag{8.2}
$$

[?, 31]
Seega saame anda oma optimeerimisprobleemile järgneva kuju:

$$
\begin{gathered}
min \ -\theta \\
\begin{pmatrix} I_k & Q^T x \\ x^T Q & \theta \end{pmatrix} \succeq 0 \\
R_i^T x \leq 0, i \in 1,2,...,n \\
-R_i^T x \leq 0, i \in 1,2,...,n \\
R_i = (\underbrace{0,0,...0,0}_{(i-1)*5} p_i a, p_i b, p_i c, p_i d, p_i e, \underbrace{0,0,...,0,0}_{(n-i)*5}) \\
\begin{pmatrix} I_k & Q_i^T x \\ t^T & 1 \end{pmatrix} \succeq 0
\end{gathered} \tag{8.3}
$$

$$\begin{pmatrix} I_k & Q_i^T x \\ -x^T Q_i & -1 \end{pmatrix} \succeq 0$$

9 Lisa



3. Õppejõu hoiak õpetamisel oli õppimist toetav ja üliõpilaste suhtes avatud.

nõustun igati | pigem nõustun | pigem ei nõustu | ei nõustu üldse | nii ja naa

3.1. Palun kommenteerige ja/või põhjendage oma hinnangut.

4. Õppejõud õpetas õppeainet meisterlikult (huvi äratamine, esitatu arusaadavus, kaasahaaravus jms).

nõustun igati | pigem nõustun | pigem ei nõustu | ei nõustu üldse | nii ja naa

4.1. Palun kommenteerige ja/või põhjendage oma hinnangut.

5. Õppejõu antud või soovitatud õppematerjalid olid sisu, vormistuse ja sobivuse poolest asjakohased.

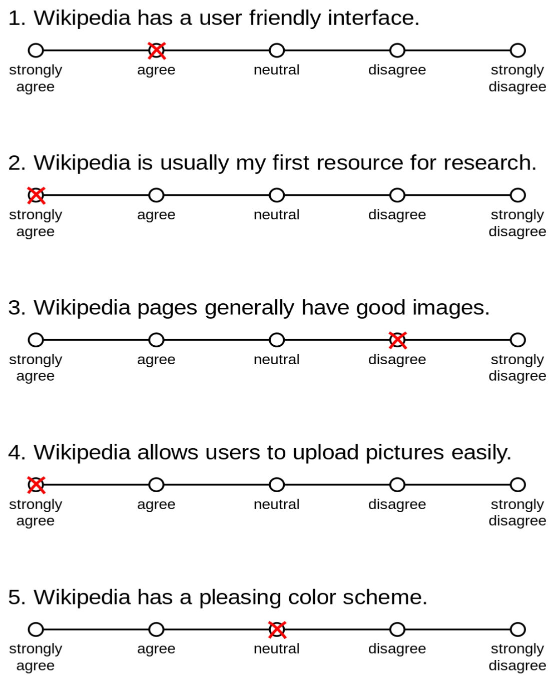
nõustun igati | pigem nõustun | pigem ei nõustu | ei nõustu üldse | nii ja naa

5.1. Palun kommenteerige ja/või põhjendage oma hinnangut.

6. Õppejõud andis piisavalt tagasisidet minu töö tulemuste kohta aine läbimisel.

nõustun igati | pigem nõustun | pigem ei nõustu | ei nõustu üldse | nii ja naa

Joonis 7: Näide Tartu Ülikooli õppeinfo süsteemi tagasiside ankeedist, kus rakendatakse Likerti skaalat [7]



Joonis 8: Näide küsimustikust, kus on rakendatud Likerti skaalat; küsimused on paigutatud nende järjestikulisuse rõhutamiseks teljele [5]

Viited

[1] Lee J. Cronbach and Richard J. Shavelson. My Current Thoughts on Coefficient Alpha and Successor Procedures. *Educational and Psychological Measurement*, 64(3):391–418, June 2004.

[2] Diane R. Edmondson. Likert Scales: A Hitory. http://faculty.quinnipiac.edu/charm/CHARM%20proceedings/CH

[3] Robin K. Henson. Understanding Internal Consistency Reliability Estimates: A Conceptual Primer on Coefficient Alpha. *Measurement & Evaluation in Counseling & Development*, 34(3):177, 2001.

[4] Susan Jamieson. Likert scales: how to (ab)use them. *Medical education*, 38(12):1217–8, December 2004.

[5] Nicholas Smith. Example of Likert Scale. http://en.wikipedia.org/wiki/File:Example_Likert_Scale.svg.

[6] David L Streiner. Starting at the Beginning : An Introduction to Coefficient Alpha and Internal Consistency Starting at the Beginning : An Introduction to Coefficient Alpha and Internal Consistency. (February 2013):37–41, 2010.

[7] UT. Õisi tagasiside. http://is.ut.ee.