1 loeng I

1.1 Meenutusi Algebra I-st

$A \neq \emptyset$ $A^n = AxAx...A = \{(a_1, \cdots, a_n)|a_i \in A\}$

n - tuple $|A^0| = 1(A^0 = \{\emptyset\}$ $\omega : A^n \to A$ n-kohaline algebraline tehe hulgal A

n-aarne:

1. n=1 unaarne tehe
2. n=2 binaarne tehe
3. n=0 nullarne tehe

1.2 Ω-algebra

Def. 1.1.1 Hulka Ω nimetakse tüübiks ehk signatuuriks kui ta on esitatud mittelikuvate alamhulkade $\Omega_1 yhend \Omega_2 ...$

Def 1.1.2 Olgu Ω tp. Mittetühja hulka A nimetatakse Ω-algebraks, kui iga a korral igale $\omega \in \Omega_n$ vastab n-aarne tehe hulgal A, mida thistatakse sama sm̈boliga ω.

Kui tahetakse rhutada, mis tüüpi algebraga on tegemist, siis thistatakse Ω algebrad paarina $(A; \Omega)$

Nited:

1. Rühmoid - hulk ḧe binaarse tehtega, st. $\Omega = \Omega_2 = \{*\}$
2. Poolrühm - sama signatuur mis rühmoidil
3. Monoid - ühikelemendiga poolrühm, vaatame seda tihti laiemal signatuuriga, $\Omega = \Omega_0 yhend \Omega_2, \Omega_0 = \{1\}$ - ühikelemendi fikseerimine, $\Omega_2 = \{*\}$
4. Rühm - saab kirjeldada eelnevate signatuuride kaudu, aga parem kirjeldada jrgnevalt: $\Omega = \Omega_0 yhend \Omega_1 yhend \Omega_2$, kus $\Omega_1 = \{^{-1}\}$
5. Ring - algebralinie struktuur signatuuriga(signatuuris): $\Omega = \Omega_0 yhend \Omega_1 yhend \Omega_2$, kus $\Omega_2 = \{+, *\}, \Omega_1 = -(vastandelemendivtmine, \Omega_0 = 0, 1$
6. Vektorruum - struktuur signatuuriga: $\Omega = \Omega_0 yhend \Omega_1 yhend \Omega_2$, kus $\Omega_2 = \{+\}, \Omega_1 = \{-(vastandelement, polevajalikkuiskalaarigakorrutaminesissetoodud)$ $\{0\} - samutiavaldatavskalaarigakorrutimasekaudu$

1.3 Morfismid

Def 1.2.1 Kujutust ϕ Ω-algebrast A Ω-algebrasse B nimetatakse homomorfismideks, kui iga $n, \omega \in \Omega_n$ ja suvaliste $a_1, ..., a_n \in A$ korral kehtib vrdus $\phi(\omega(a_1, ..., a_n)) = \omega(\phi(a_1), \cdots, \phi(a_n))$

$Hom(A, B) - \{\phi|\phi onhomoformism A - st B - sse\}$

Nide:

Olgu A, B sellised $\Omega = \{1\}, \{^{-1}\}, \{*\}$ $\phi : A \to Bhomoformism\phi(1) = 1, \phi(1) = \phi(1 * 1) = \phi(1) * \phi(1) \implies \phi(1) = 1(kolmandaphjal)\phi(x^{-1}) = \phi(x)^{-1}, 1 = \phi(1) = \phi(x^{-1}x) = \phi(x^{-1})\phi(x)(kolmandaphjal)\phi(xy) = \phi(x)\phi(y)$

Taandub kolmanda omanduse kontrollimisele.

Lineaarkujutis on vektorruumide isomorfism.

Olgu meil Ω-algebrad A,B,C ning nende homoformismid $\phi : A \to B$, $\psi : B \to C, (\psi\phi) = \psi(\phi(x)), x \in A$. Siis see kompositsioon on samuti homoformism (kui teda saab nii defineerida).

Testame : Veendume, et $(\psi\phi)(\omega(a_1, \cdots, a_n)) = \omega((\psi\phi)(a_1, \cdots, a_n))$. See on samavrne sellega, te $\psi(\phi(\omega(a_1, \cdots, a_n))) = \psi(w(\phi(a_1), \cdots, \phi(a_n))...$

Endomorfism (End(A) = Hom(A,A)).

Lause 1.2.2 (End(A);*) on monoid.

Testus: Assotatiivsus on selge, tuleneb homoformismide omadustest. Ühikelement ? $id_A : A \to B, id_A(x) = x, x \in A$

Def 1.2.3 Bijektiivne homomorfismi nimetatakse isomorfismiks.

Lause 1.2.3 Isomorfism on ekvivalentsiseos kigi Ω-algebrade klassis, ehk ta on reflektsiivne, sümmeetriline ja transitiivne.

Testus:

1. Refleksiivsus, st. A *isom* A, $id_A : A \to A$

2. Sümmeetria. Olgu $\phi : A \to B$ isomorfism. Vaja $\psi : B \to A$ mis oleks isomorfism. Valime selleks ϕ^{-1} Vaja nidata, et iga $b_1, \cdots, b_n \in B$ korral $\phi^{-1}(\omega(b_1, \cdots, b_n)) = \omega(\phi^{-1}(b_1), \cdots, \phi^{-1}(b_2))$ Rakendame mlemale poole ϕ. $\phi(\omega(b_1, \cdots, b_n)) = \phi\omega(\phi^{-1}(b_1), \cdots, \phi^{-1}(b_2))....$

3. Transitiivsus - ise!

Isomorfismi thtsus. Kui meid huvitab tehe ja tema omadused, siis need jvad samaks isomorfismi klassi tpsusega.

$Aut(A)$

Lause 1.2.4 Aut(A) on rhm.

Testus: $\phi, \psi \in AutA$,

$\psi\phi \in End(A)$,
$\phi\psi \in AutA$
$id_a \in AutA$
$\phi inAutA \implies \phi^{-1} \in AutA$
Nited:
C kompleksarue korpus $\phi : C \to C, \phi(\alpha) = \overline{\alpha}$
G suvaline rühm
$g \in G$
$\phi : G \to ...$
$\phi(x) = g^{-1}xg$

1.4 Alamalgebra

def 1.3.1. Mte : $B \subset A, b_1, \cdots, b_n : \omega^B(b_1, \cdots, b_n) = \omega^A(b_1, \cdots, b_n)(\in B)$. Algebra alamhulk, mis on kinnine tehete suhtes on alamalgebra.

Nide: $(A; *)$ poolrühm. $B \subset A, x, y \in B \implies xy \in B$, kui $B = \emptyset$, siis ei ole alamalgebra aga rahuldab definitsiooni. Tiendame: Algebra **mittet$\ddot{h}$i** alamhulk, mis on kinnine tehete suhtes on alamalgebra.

$B \leq A \iff BonAalamalgebra$
$B \leq A, \tau : B \to A$
$\tau(x) = x, x \in B$
$\tau \in Hom(B, A)$, τ üksühene.
1.3.1 testus:
$\phi \in Hom(B, A)$ ϕ üksühene. $\phi(B) \subset A$ $B \to \phi(B) = \{\phi(x)|x \in B\}$
$phi \in Hom(A, B)$ $C \leq A, D \leq B$
$\phi(C) \leq B, \phi^{-1}(B) \leq A$
Esimese ise. Teine:
$\phi^{-1}(B) \leq A$
$a_1, \cdots, a_n \in \phi^{-1}(D), \omega \in \Omega_N$
$\omega(a_1, \cdots, a_t ...)$

2 loeng II

Lause 1.3.3 Olgu antud ω-algebra A alamalgebrate s$\ddot{s}$teem B_i, $i \in I$, kujsuures $B = yhisosa_{i\in I} B_i \neq \emptyset$ Siis $B \leq A$.

Testus ...

Vaatleme alamhulka X: $\emptyset \neq X \subset A$ Vaatleme hulka $yhisosa\{B|X \leq B \leq A\} \neq \emptyset$. Vastavalt lausele 1.3.3 on tegemist alamalgebraga. Sellist alamalgebrad thistatakse $< X >$ Kui $< X >= A$ ehk X on A moodustajate süsteem.

2.1 Faktoralgebra

Eesmrgiks on tükeldada ω-algebra mittelikuvateks osadeks, nii et nende osade hulgal saaks loomulikul viisil defineerida ω-algebra struktuuri.

$\rho \in Eqv(A), \rho \subset AxA$, vastab kolmele tingimusele:

1. refleksiivne
2. transitiivne
3. sümmeetriline

$a \in A$, $\{x \in A|a\rho x\} = a\rho$, $a \in a\rho$ Faktorhulgaks $A\rho = \{a\rho|a \in A\}$

$a_1\rho = a_2\rho \iff a_1\rho a_2$

Vtame $\omega \in \Omega_n$, $a_1/\rho, \cdots, a_n/\rho \in A/\rho$.

$\omega(a_1/\rho, \cdots, a_n/\rho) = \omega(a_1, \cdots, a_n)/\rho$

Lisame ω-le lisatingimiuse : $(x_1, y_i), \cdots, (x_n, y_n) \in \rho \iff (\omega(x_1, \cdots, x_n), \omega(y_1, \cdots, y_n)) \in \rho$

Olgu $\rho \in Eqv(a)$. Eksisteerib kujutis $\pi : A \to A/\rho$, $\pi(a) = a/\rho$ - loomulik kujutus faktorhulgale, projektsioon.

Vtame $\omega \in \Omega_n, a_1, \cdots, a_n \in A$

$\pi(\omega(a1, \cdots, a_n)) = \omega(a_1, \cdots, a_n)/\rho = \omega(a_1/\rho, \cdots, a_n/\rho) = ...$

2.2 Def - tuum

2.3 Lause 1.4.3

Testus

Olgu $\phi : A \to B$ homoformism. ρ - ϕ tuum . Valime $\omega \in \Omega_n$, $a_1, \cdots, a_n, a_1^{'}, \cdots, a_n^{'}$.
Kas $\omega(a_1, \cdots, a_n)\rho\omega(a_1^{'}, \cdots, a_n^{'})$ kehtib ? ...

Homomorfismiteoreem

Testus Olgu $\psi : A/\rho \to B, \psi(a/\rho) := \phi(a)$. Kas on üheselt mratud ? Ehk kas $a_1/\rho = a_2/\rho \iff \phi(a_1) = \phi(a_2)$. Siit saaksime ktte ka injektiivsuse. Piisab arvesse vtta, et eelnev thendab, et $a_1 \rho a_2$, nin kun ρ on ϕ tuum. siis on tulemus selge. Srjektiuuvses tuleb sellest, et ϕ srjektiivne. Kas ψ on homoformism ? Olgu $\omega \in \Omega_n, a_1, \cdots, a_n \in A$. Siis $\psi(\omega(a_1/\rho, \cdots, a_n/\rho) = \psi(\omega(a_1, \cdots, a_n)/\rho) = \phi(w(a_1, \cdots, a_n)) = \omega(\phi(a_1), \cdots, \phi(a_n)) = \omega(\psi(a_1/\rho, \cdots, a_s/\rho))$.

Lause 1.4.4 Olgu ρ Ω-algebra A kongruents, $D \leq A/\rho$ ning π kongurgentsi ρ tuum. Siis $DisomeetrilineC/\rho|_C, kusC = \pi^{-1}(D)$.

Testus Olgu $\pi^{-1}(D) = C \leq A$. Olgu α π ahend C-le ($\alpha = \pi|_C$). Siis $\alpha : C \to D$, α on homomorfism. Vidame, et α on sürjektiinve. Kuna π oli sürjektiinve, siis $\forall x \in A\pi(x) = y$. Seega $\alpha(x) = y$.

Küsimus : kui kaks korda faktoriseerime, mis siis juhtub, kas me saame midagi uut ? Vimalik asendada isomorfismi tpsuseni ks kord faktoriseerimisega.

Olgu antud ρ ja σ Ω-algebra A kongurentsid, kusjuures $\rho \leq \sigma, (x, y) \in \rho \implies (x, y) \in \sigma$. Defineerime faktoralgebral A/ρ binaarse seos:

$\sigma/\rho = \{(x/\rho, y/\rho|(x, y) \in a\sigma\}$

Vime veenduda, et nii defineertus seos σ/ρ on faktoralgebra A/ρ kongurents.

Teoreem 1.4.2 Olgu $\rho \in Con(A), \tau \in Con(A/\rho)$. $\pi : A \to A/\rho$. Olgu $x, y \in A$. Defineerime σ: $(x, y) \in \sigma \iff \pi(x)\tau\pi(x)$

Vide: $\sigma \in Con(A)$. Veendume, et $\sigma \in Eqv(A)$. Olgu $x, y, z \in A, (x, y), (y, z) \in \tau$, st. $(\pi(x), \pi(y)), (\pi(y), \pi(z)), (\pi(x), \pi(z)) \in \tau$.

3 loeng III

3.1 Lagrange'i teoreem

Lpliku rhma jrk(elementide arv) jagub tema iga alamhulga jrguga.

3.2 Ω-algebrate otsekorrutis

Viis kuidas saada mitmest algebrast uus algebra.

Vime defineerida funktsioonid, mis kirjeldavad jadasid. $\phi : \mathbb{N} \to \cup_{i \in \mathbb{N}} A_i$, mis rahuldab tingimust $\phi(i) \in A_i$, iga $i \in \mathbb{N}$ korral.

Projektsioonid - seavad jadale vastavuse mingi kindla elemendi. Thistame π_i.

1.6.1

Testus $\omega \in \Omega_n, a^1 = (a_i^1)_{i \in I}, ..., a^n = (a_i^n)_{i \in I}...$

3.3 Vred

(Osaliselt) Jrjestatud hulk Binaarne seas, mis on reflektsiivne, transitiivne ja antism̈eetriline. Lineaarselt jrjestatud hulk on selline, kus iga element on mingis seoses iga teisega.

Teoreem 2.2.1

Testus 4) Neeldevus (absorbtion)
Tarvilikkus:
$x \leq y \iff x = xaluminerajay$

4 Loeng 4

$[a, b] = \{x \in L | a \leq x \leq b\}$
$Con(A/\rho) \longleftrightarrow \{\sigma \in Con(A) | \rho \leq \sigma\}$

Teoreem 2.2.2 Distributiivsed vred.

Lause 2.3.1 Ahelad on distributiivsed vred.

Lause 2.3.2 Thtis distributiivne vre $(P(A); \ intersection; union)$