1 loeng I

1.1 Meenutusi Algebra I-st

$A \neq \emptyset$ $A^n = AxAx...A = \{(a_1, \cdots, a_n)|a_i \in A\}$

n - tuple $|A^0| = 1(A^0 = \{\emptyset\}$ $\omega : A^n \to A$ n-kohaline algebraline tehe hulgal A

n-aarne:

1. n=1 unaarne tehe
2. n=2 binaarne tehe
3. n=0 nullarne tehe

1.2 Ω-algebra

Def. 1.1.1 Hulka Ω nimetakse tüübiks ehk signatuuriks kui ta on esitatud mittelikuvate alamhulkade $\Omega_1 yhend \Omega_2 ...$

Def 1.1.2 Olgu $\Omega tp.$ Mittetühja hulka A nimetatakse Ω-algebraks, kui iga a korral igale $\omega \in \Omega_n$ vastab n-aarne tehe hulgal A, mida thistatakse sama sm̈boliga ω.

Kui tahetakse rhutada, mis tüüpi algebraga on tegemist, siis thistatakse Ω algebrad paarina $(A; \Omega)$

Nited:

1. Rühmoid - hulk ḧe binaarse tehtega, st. $\Omega = \Omega_2 = \{*\}$
2. Poolrühm - sama signatuur mis rühmoidil
3. Monoid - ühikelemendiga poolrühm, vaatame seda tihti laiemal signatuuriga, $\Omega = \Omega_0 yhend \Omega_2, \Omega_0 = \{1\}$ - ühikelemendi fikseerimine, $\Omega_2 = \{*\}$
4. Rühm - saab kirjeldada eelnevate signatuuride kaudu, aga parem kirjeldada jrgnevalt: $\Omega = \Omega_0 yhend \Omega_1 yhend \Omega_2$, kus $\Omega_1 = \{^{-1}\}$
5. Ring - algebralinie struktuur signatuuriga(signatuuris): $\Omega = \Omega_0 yhend \Omega_1 yhend \Omega_2$, kus $\Omega_2 = \{+, *\}, \Omega_1 = -(vastandelemendivtmine, \Omega_0 = 0, 1$
6. Vektorruum - struktuur signatuuriga: $\Omega = \Omega_0 yhend \Omega_1 yhend \Omega_2$, kus $\Omega_2 = \{+\}, \Omega_1 = \{-(vastandelement, polevajalikkuiskalaarigakorrutaminesissetoodud)$ $\{0\} - samutiavaldatavskalaarigakorrutimasekaudu$

1.3 Morfismid

Def 1.2.1 Kujutust ϕ Ω-algebrast A Ω-algebrasse B nimetatakse homomorfismideks, kui iga $n, \omega \in \Omega_n$ ja suvaliste $a_1, ..., a_n \in A$ korral kehtib vrdus $\phi(\omega(a_1, ..., a_n)) = \omega(\phi(a_1), \cdots, \phi(a_n))$

$Hom(A, B) - \{\phi | \phi onhomoformismA - stB - sse\}$

Nide:

Olgu A, B sellised $\Omega = \{1\}, \{^{-1}\}, \{*\}$ $\phi : A \to Bhomoformism \phi(1) = 1, \phi(1) = \phi(1 * 1) = \phi(1) * \phi(1) \implies \phi(1) = 1(kolmandaphjal) \phi(x^{-1}) = \phi(x)^{-1}, 1 = \phi(1) = \phi(x^{-1}x) = \phi(x^{-1})\phi(x)(kolmandaphjal)\phi(xy) = \phi(x)\phi(y)$

Taandub kolmanda omanduse kontrollimisele.

Lineaarkujutis on vektorruumide isomorfism.

Olgu meil Ω-algebrad A,B,C ning nende homoformismid $\phi : A \to B$, $\psi : B \to C, (\psi\phi) = \psi(\phi(x)), x \in A$. Siis see kompositsioon on samuti homoformism (kui teda saab nii defineerida).

Testame : Veendume, et $(\psi\phi)(\omega(a_1, \cdots, a_n)) = \omega((\psi\phi)(a_1, \cdots, a_n))$. See on samavrne sellega, te $\psi(\phi(\omega(a_1, \cdots, a_n))) = \psi(w(\phi(a_1), \cdots, \phi(a_n))...$

Endomorfism (End(A) = Hom(A,A)).

Lause 1.2.2 (End(A);*) on monoid.

Testus: Assotatiivsus on selge, tuleneb homoformismide omadustest. Ühikelement ? $id_A : A \to B, id_A(x) = x, x \in A$

Def 1.2.3 Bijektiivne homomorfismi nimetatakse isomorfismiks.

Lause 1.2.3 Isomorfism on ekvivalentsiseos kigi Ω-algebrade klassis, ehk ta on reflektsiivne, sümmeetriline ja transitiivne.

Testus:

1. Refleksiivsus, st. A *isom* A, $id_A : A \to A$

2. Sümmeetria. Olgu $\phi : A \to B$ isomorfism. Vaja $\psi : B \to A$ mis oleks isomorfism. Valime selleks ϕ^{-1} Vaja nidata, et iga $b_1, \cdots, b_n \in B$ korral $\phi^{-1}(\omega(b_1, \cdots, b_n)) = \omega(\phi^{-1}(b_1), \cdots, \phi^{-1}(b_2))$ Rakendame mlemale poole ϕ. $\phi(\omega(b_1, \cdots, b_n)) = \phi\omega(\phi^{-1}(b_1), \cdots, \phi^{-1}(b_2))....$

3. Transitiivsus - ise!

Isomorfismi thtsus. Kui meid huvitab tehe ja tema omadused, siis need jvad samaks isomorfismi klassi tpsusega.

$Aut(A)$

Lause 1.2.4 Aut(A) on rhm.

Testus: $\phi, \psi \in AutA$,

$\psi\phi \in End(A)$,
$\phi\psi \in AutA$
$id_a \in AutA$
$\phi inAutA \implies \phi^{-1} \in AutA$
Nited:
C kompleksarue korpus $\phi : C \to C, \phi(\alpha) = \overline{\alpha}$
G suvaline rühm
$g \in G$
$\phi : G \to ...$
$\phi(x) = g^{-1}xg$

1.4 Alamalgebra

def 1.3.1. Mte : $B \subset A, b_1, \cdots, b_n : \omega^B(b_1, \cdots, b_n) = \omega^A(b_1, \cdots, b_n)(\in B)$. Algebra alamhulk, mis on kinnine tehete suhtes on alamalgebra.

Nide: $(A; *)$ poolrühm. $B \subset A, x, y \in B \implies xy \in B$, kui $B = \emptyset$, siis ei ole alamalgebra aga rahuldab definitsiooni. Tiendame: Algebra **mittetḧi** alamhulk, mis on kinnine tehete suhtes on alamalgebra.

$B \leq A \iff BonAalamalgebra$
$B \leq A, \tau : B \to A$
$\tau(x) = x, x \in B$
$\tau \in Hom(B, A)$, τ üksühene.
1.3.1 testus:
$\phi \in Hom(B, A)$ ϕ üksühene. $\phi(B) \subset A$ $B \to \phi(B) = \{\phi(x) | x \in B\}$
$phi \in Hom(A, B)$ $C \leq A, D \leq B$
$\phi(C) \leq B, \phi^{-1}(B) \leq A$
Esimese ise. Teine:
$\phi^{-1}(B) \leq A$
$a_1, \cdots, a_n \in \phi^{-1}(D), \omega \in \Omega_N$
$\omega(a_1, \cdots, a_t ...)$

2 loeng II

Lause 1.3.3 Olgu antud ω-algebra A alamalgebrate ss̈teem B_i, $i \in I$, kujsuures $B = yhisosa_{i \in I} B_i \neq \emptyset$ Siis $B \leq A$.

Testus ...

Vaatleme alamhulka X: $\emptyset \neq X \subset A$ Vaatleme hulka $yhisosa\{B|X \leq B \leq A\} \neq \emptyset$. Vastavalt lausele 1.3.3 on tegemist alamalgebraga. Sellist alamalgebrad thistatakse $< X >$ Kui $< X >= A$ ehk X on A moodustajate süsteem.

2.1 Faktoralgebra

Eesmrgiks on tükeldada ω-algebra mittelikuvateks osadeks, nii et nende osade hulgal saaks loomulikul viisil defineerida ω-algebra struktuuri.

$\rho \in Eqv(A), \rho \subset AxA$, vastab kolmele tingimusele:

1. refleksiivne
2. transitiivne
3. sümmeetriline

$a \in A$, $\{x \in A|a\rho x\} = a\rho$, $a \in a\rho$ Faktorhulgaks $A\rho = \{a\rho|a \in A\}$

$a_1\rho = a_2\rho \iff a_1\rho a_2$

Vtame $\omega \in \Omega_n$, $a_1/\rho, \cdots, a_n/\rho \in A/\rho$.

$\omega(a_1/\rho, \cdots, a_n/\rho) = \omega(a_1, \cdots, a_n)/\rho$

Lisame ω-le lisatingimiuse : $(x_1, y_i), \cdots, (x_n, y_n) \in \rho \iff (\omega(x_1, \cdots, x_n), \omega(y_1, \cdots, y_n)) \in \rho$

Olgu $\rho \in Eqv(a)$. Eksisteerib kujutis $\pi : A \to A/\rho$, $\pi(a) = a/\rho$ - loomulik kujutus faktorhulgale, projektsioon.

Vtame $\omega \in \Omega_n, a_1, \cdots, a_n \in A$

$\pi(\omega(a1, \cdots, a_n)) = \omega(a_1, \cdots, a_n)/\rho = \omega(a_1/\rho, \cdots, a_n/\rho) = ...$

2.2 Def - tuum

2.3 Lause 1.4.3

Testus

Olgu $\phi : A \to B$ homoformism. ρ - ϕ tuum . Valime $\omega \in \Omega_n$, $a_1, \cdots, a_n, a_1^{`}, \cdots, a_n^{`}$.
Kas $\omega(a_1, \cdots, a_n)\rho\omega(a_1^{`}, \cdots, a_n^{`})$ kehtib ? ...

Homomorfismiteoreem

Testus Olgu $\psi : A/\rho \to B, \psi(a/\rho) := \phi(a)$. Kas on üheselt mratud ? Ehk kas $a_1/\rho = a_2/\rho \iff \phi(a_1) = \phi(a_2)$. Siit saaksime ktte ka injektiivsuse. Piisab arvesse vtta, et eelnev thendab, et $a_1 \rho a_2$, nin kun ρ on ϕ tuum. siis on tulemus selge. Srjektiuuvses tuleb sellest, et ϕ srjektiivne. Kas ψ on homoformism ? Olgu $\omega \in \Omega_n, a_1, \cdots, a_n \in A$. Siis $\psi(\omega(a_1/\rho, \cdots, a_n/\rho) = \psi(\omega(a_1, \cdots, a_n)/\rho) = \phi(w(a_1, \cdots, a_n)) = \omega(\phi(a_1), \cdots, \phi(a_n)) = \omega(\psi(a_1/\rho, \cdots, a_s/\rho))$.

Lause 1.4.4 Olgu ρ Ω-algebra A kongruents, $D \leq A/\rho$ ning π kongurgentsi ρ tuum. Siis $DisomeetrilineC/\rho|_C, kusC = \pi^{-1}(D)$.

Testus Olgu $\pi^{-1}(D) = C \leq A$. Olgu α π ahend C-le ($\alpha = \pi|_C$). Siis $\alpha : C \to D$, α on homomorfism. Vidame, et α on sürjektiinve. Kuna π oli sürjektiinve, siis $\forall x \in A \pi(x) = y$. Seega $\alpha(x) = y$.

Küsimus : kui kaks korda faktoriseerime, mis siis juhtub, kas me saame midagi uut ? Vimalik asendada isomorfismi tpsuseni ks kord faktoriseerimisega.

Olgu antud ρ ja σ Ω-algebra A kongurentsid, kusjuures $\rho \leq \sigma, (x, y) \in \rho \implies (x, y) \in \sigma$. Defineerime faktoralgebral A/ρ binaarse seos:

$\sigma/\rho = \{(x/\rho, y/\rho|(x, y) \in a\sigma\}$

Vime veenduda, et nii defineertus seos σ/ρ on faktoralgebra A/ρ kongurents.

Teoreem 1.4.2 Olgu $\rho \in Con(A), \tau \in Con(A/\rho)$. $\pi : A \to A/\rho$. Olgu $x, y \in A$. Defineerime σ: $(x, y) \in \sigma \iff \pi(x)\tau\pi(x)$

Vide: $\sigma \in Con(A)$. Veendume, et $\sigma \in Eqv(A)$. Olgu $x, y, z \in A, (x, y), (y, z) \in \tau$, st. $(\pi(x), \pi(y)), (\pi(y), \pi(z)), (\pi(x), \pi(z)) \in \tau$.