Chapter 1

I loeng

1.1 Meenutusi Algebra I-st

$A \neq \emptyset$ $A^n = AxAx...A = \{(a_1, \cdots, a_n)|a_i \in A\}$

n - tuple $|A^0| = 1(A^0 = \{\emptyset\}$ $\omega : A^n \to A$ n-kohaline algebraline tehe hulgal A

n-aarne:

1. n=1 unaarne tehe
2. n=2 binaarne tehe
3. n=0 nullarne tehe

1.2 Ω-algebra

Def. 1.1.1 Hulka Ω nimetakse tüübiks ehk signatuuriks kui ta on esitatud mittelikuvate alamhulkade $\Omega_1 yhend \Omega_2 ...$

Def 1.1.2 Olgu $\Omega tp.$ Mittetühja hulka A nimetatakse Ω-algebraks, kui iga a korral igale $\omega \in \Omega_n$ vastab n-aarne tehe hulgal A, mida thistatakse sama sm̈boliga ω.

Kui tahetakse rhutada, mis tüüpi algebraga on tegemist, siis thistatakse Ω algebrad paarina $(A; \Omega)$

Nited:

1. Rühmoid - hulk ḧe binaarse tehtega, st. $\Omega = \Omega_2 = \{*\}$

2. Poolrühm - sama signatuur mis rühmoidil
3. Monoid - ühikelemendiga poolrühm, vaatame seda tihti laiemal signatuuriga, $\Omega = \Omega_0 yhend \Omega_2, \Omega_0 = \{1\}$ - ühikelemendi fikseerimine, $\Omega_2 = \{*\}$
4. Rühm - saab kirjeldada eelnevate signatuuride kaudu, aga parem kirjeldada jrgnevalt: $\Omega = \Omega_0 yhend \Omega_1 yhend \Omega_2$, kus $\Omega_1 = \{^{-1}\}$
5. Ring - algebralinie struktuur signatuuriga(signatuuris): $\Omega = \Omega_0 yhend \Omega_1 yhend \Omega_2$, kus $\Omega_2 = \{+, *\}, \Omega_1 = -(vastandelemendivtmine, \Omega_0 = 0, 1$
6. Vektorruum - struktuur signatuuriga: $\Omega = \Omega_0 yhend \Omega_1 yhend \Omega_2$, kus $\Omega_2 = \{+\}, \Omega_1 = \{-(vastandelement, polevajalikkuiskalaarigakorrutaminesissetoo$ $\{0\} - samutiavaldatavskalaarigakorrutimasekaudu$

1.3 Morfismid

Def 1.2.1 Kujutust ϕ Ω-algebrast A Ω-algebrasse B nimetatakse homomorfismideks, kui iga $n, \omega \in \Omega_n$ ja suvaliste $a_1, ..., a_n \in A$ korral kehtib vrdus $\phi(\omega(a_1, ..., a_n)) = \omega(\phi(a_1), \cdots, \phi(a_n))$

$Hom(A, B) - \{\phi | \phi onhomoformism A - st B - sse\}$

Nide:

Olgu A, B sellised $\Omega = \{1\}, \{^{-1}\}, \{*\}$ $\phi : A \to Bhomoformism \phi(1) = 1, \phi(1) = \phi(1 * 1) = \phi(1) * \phi(1) \implies \phi(1) = 1(kolmandaphjal) \phi(x^{-1}) = \phi(x)^{-1}, 1 = \phi(1) = \phi(x^{-1}x) = \phi(x^{-1})\phi(x)(kolmandaphjal)\phi(xy) = \phi(x)\phi(y)$

Taandub kolmanda omanduse kontrollimisele.

Lineaarkujutis on vektorruumide isomorfism.

Olgu meil Ω-algebrad A,B,C ning nende homoformismid $\phi : A \to B, : B \to C, (\phi) = (\phi(x)), x \in A$. Siis see kompositsioon on samuti homoformism (kui teda saab nii defineerida).

Testame : Veendume, et $(\phi)(\omega(a_1, \cdots, a_n)) = \omega((\phi)(a_1, \cdots, a_n))$. See on samavrne sellega, te $ksi(\phi(\omega(a_1, \cdots, a_n))) = (w(\phi(a_1), \cdots, \phi(a_n))...$

Endomorfism (End(A) = Hom(A,A)).

Lause 1.2.2 (End(A);*) on monoid.

Testus: Assotatiivsus on selge, tuleneb homoformismide omadustest. Ühikelement ? $id_A : A \to B, id_A(x) = x, x \in A$

Def 1.2.3 Bijektiivne homomorfismi nimetatakse isomorfismiks.

Lause 1.2.3 Isomorfism on ekvivalentsiseos kigi Ω-algebrade klassis, ehk ta on reflektsiivne, sümmeetriline ja transitiivne.

Testus:

1. Refleksiivsus, st. A *isom* A, $id_A : A \to A$

2. Sümmeetria. Olgu $\phi : A \to B$ isomorfism. Vaja : $B \to A$ mis oleks isomorfism. Valime selleks ϕ^{-1} Vaja nidata, et iga $b_1, \cdots, b_n \in B$ korral $\phi^{-1}(\omega(b_1, \cdots, b_n)) = \omega(\phi^{-1}(b_1), \cdots, \phi^{-1}(b_2))$ Rakendame mlemale poole ϕ. $\phi(\omega(b_1, \cdots, b_n)) = \phi\omega(\phi^{-1}(b_1), \cdots, \phi^{-1}(b_2))$....

3. Transitiivsus - ise!

Isomorfismi thtsus. Kui meid huvitab tehe ja tema omadused, siis need jvad samaks isomorfismi klassi tpsusega.