

Peatükk 1

Üldise algebra põhimõisteid ja põhikonstruktsioonid

Meenutusi varasemast

Olgu A mittetühi hulk ehk $A \neq \emptyset$. Olgu n suvaline naturaalarv, hulga A **n -ndaks otseastmeks** nimetatakse hulga A elementidest koosnevate järjestatud vektorite hulka.

$$A^n = A \times A \times \dots \times A = \{(a_1, \dots, a_n) | a_i \in A\}.$$

Inglise keelses kirjanduses kasutatakse tähist n -tuple. Märgime veel, et $A^0 = \{\emptyset\}$, seega $|A^0| = 1$.

Kujutatutust

$$\omega : A^n \rightarrow A$$

nimetatakse **n -naarseks** ehk **n -kohaliseks** algebraliseks tehteks hulgal A . Levinumad n -aarsete tehete nimetused:

1. $n=2$: binaarne tehe, paneb kahele kindlas järjekorras võetud elemendile vastavusse elemendi samast hulgast.
2. $n=1$: unaarne tehe, paneb hulga elemendile vastavasse mingi selle sama hulga elemendiga.
3. $n=0$: nullarne tehe, tõlgendatav kui ühe kindla elemendi fikseerimine

1.1 Ω -algebra

Definitsioon 1.1.1. Hulka Ω nimetakse **tüübiks** ehk **signatuuriks** kui ta on esitatud mittelõikuvate alamhulkade $\Omega_0, \Omega_1, \Omega_2, \dots$ ühendina.

Definitsioon 1.1.2. Olgu Ω tüüp. Mittetühja hulka A nimetatakse **Ω -algebraks**, kui iga a korral igale $\omega \in \Omega_n$ vastab n -aarne tehe hulgal A , mida tähistatakse sama sümboliga ω .

Ehk, kui A on Ω -algebra, siis iga $\omega \in \Omega_n$ ja suvaliste $a_1, a_2, \dots, a_n \in A$ korral on üheselt määratud element $\omega(a_1, a_2, \dots, a_n) \in A$.

Kui tahetakse rõhutada, mis tüüpi algebraga on tegemist, siis tähistatakse Ω algebrad paarina $(A; \Omega)$.

Meenutusi varasemast

Algebralised põhistruktuurid.

- I Rühmoid - mittetühi hulk, millel defineeritud kahekohaline tehe.
- II Poolrühm - rühmoid, mille tehe on assotsiatiivne.
- III Monoid - poolrühm, milles leidub ühikelement.
- IV Rühm - monoid, mille igal elemendil leidub pöördelement.
- V Abeli rühm - rühm on Abeli rühm, kui tema tehe on kommutatiivne.
- VI Ring - hulka R nimetatakse ringiks, kui tal on defineeritud liitmine ja korrutamine, kusjuures R on liitmiise suhtes Abeli rühm ja liitmine ja korrutamine on distributiivsed. Tihti lisatakse ka nõue ühikelemende olemasoluks.
- VII Korpus - ring, mille nullist erinevad elemendid moodustavad rühma korrutamise suhtes.

Näited

- I Rühmoid - hulk ühe binaarse tehtega, see tähendab $\Omega = \Omega_2 = \{*\}$.
- II Poolrühm - signatuur analoogne rühmoidi signatuuriga.

- III Monoid - ühikelemendiga poolrühm, vaatame seda tihti laiema signatuuriga, $\Omega = \Omega_0 \cup \Omega_2$, kus $\Omega_0 = \{1 \text{ (ühikelemendi fikseerimine)}\}$ ja $\Omega_2 = \{*\}$.
- IV Rühm - saab kirjeldada eelnevate signatuuride kaudu, aga parem kirjeldada järgnevalt: $\Omega = \Omega_0 \cup \Omega_1 \cup \Omega_2$, kus $\Omega_0 = \{1\}$, $\Omega_1 = \{-1 \text{ (pöördelemendi leidmine)}\}$ ja $\Omega_2 = \{*\}$.
- V Ring - algebraline struktuur signatuuriga: $\Omega = \Omega_0 \cup \Omega_1 \cup \Omega_2$, kus $\Omega_2 = \{+, *\}$, $\Omega_1 = \{- \text{ vastandelemendi leidmine}\}$ ja $\Omega_0 = \{0 \text{ (nullelemendi fikseerimine)}, 1\}$.
- VI Vektorruum üle korpuse \mathbb{K} - struktuur signatuuriga: $\Omega = \Omega_0 \cup \Omega_1 \cup \Omega_2$, kus $\Omega_2 = \{+\}$, $\Omega_1 = \{-\} \cup \{\alpha * \mid \alpha \in \mathbb{K}\}$, $\Omega_0 = \{0\}$. Paneme tähele, et kui oleme sisse toonud skalaariga korrutamise ei ole rangelt võttes vaja ei nullelemendi fikseerimist ega vastandelemendi leidmist - need tehted võime defineerida läbi skalaariga korrutamise. Ehk alternatiivne signatuur oleks järgmine: $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$, kus $\Omega_2 = \{+\}$, $\Omega_1 = \{\alpha * \mid \alpha \in \mathbb{K}\}$.

1.2 Morfismid

Definitsioon 1.2.1. Olgu meil Ω -algebra A ja Ω -algebra B . Kujutust ϕ nimetatakse **homomorfismiks**, kui iga n , iga $\omega \in \Omega_n$ ja suvaliste $a_1, \dots, a_n \in A$ korral kehtib võrdus

$$\phi(\omega(a_1, \dots, a_n)) = \omega(\phi(a_1), \dots, \phi(a_n)).$$

Defineerime kõikide A ja B vaheliste homomorfismide hulga järgnevalt - $\{\phi \mid \phi \text{ on homomorfism algebrast } A \text{ algebrasse } B\}$, sellist hulka tähistatakse sümboliga $\text{Hom}(A, B)$.

Näited

- I Olgu A ja B rühmad. Meenutame, et rühma saab kirjeldada järgneva signatuuri abil: $\Omega = \{1\} \cup \{-1\} \cup \{*\}$. Olgu meil järgnev kujutus:

$$\phi : A \rightarrow B$$

Veendumaks, et ϕ on homomorfism tuleb veenduda selles, et ϕ säilitab kõik tehted. Teisisõnu:

$$\phi \text{ on homomorfism} \iff \begin{cases} \phi(1) = 1 \\ \phi(x^{-1}) = \phi(x)^{-1} \\ \phi(xy) = \phi(x)\phi(y) \end{cases}$$

Tõestame, et rühmade A ja B vaheline kujutus on homomorfism siis ja ainult siis kui kehtib kolmas tingimus ($\phi(xy) = \phi(x)\phi(y)$).

Tõestus. Kehtigu kolmas tingimus, see tähendab $\phi(xy) = \phi(x)\phi(y)$. Veendume, et sellest järeldeb esimese kahe tingimuse kehtivus.

$$\phi(1) = \phi(1*1) = \phi(1)\phi(1) \implies \phi(1)\phi(1)^{-1} = \phi(1)\phi(1)\phi(1)^{-1} \implies 1 = \phi(1)*1 = \phi(1)$$

$$\phi(x^{-1}x) = \phi(x^{-1})\phi(x) = \phi(1) = 1 \implies \phi(x)^{-1} = \phi(x^{-1})$$

□

Niisiis taandub kujutuse homomorfismiks olemise kontroll kolmanda omanduse kehtimise kontrollimisele.

II Lineaarkujutus on vektorruumide isomorfism.

III Olgu meil Ω -algebrad A, B ja C ning nende homomorfismid $\phi : A \rightarrow B$, $\psi : B \rightarrow C$. Defineerime kujutuse $v : A \rightarrow C$ järgnevalt: $v = (\psi\phi) = \psi(\phi(x)), x \in A$. Siis see kompositsioon on samuti homomorfism (kui teda saab nii defineerida). Sõnastame eelneva lausena ja veendume, et see nii on.

Lause 1.2.2. *Kui Ω -algebrate homomorfismide korrutis on defineeritud, siis on see isa ka Ω -algebrate homomorfism.*

Tõestus. Peame veenduma sellest, et $(\psi\phi)(\omega(a_1, \dots, a_n)) = \omega((\psi\phi)(a_1, \dots, a_n))$. See on samaväärne sellega, te $\psi(\phi(\omega(a_1, \dots, a_n))) = \omega(\psi(\phi(a_1)), \dots, \psi(\phi(a_n)))$. Kuna ϕ on homomorfism, siis kehtib $\psi(\phi(\omega(a_1, \dots, a_n))) = \psi(\omega(\phi(a_1), \dots, \phi(a_n)))$. Kuna ka ψ on homomorfism, siis saame kirjutada: $\omega(\psi(\phi(a_1)), \dots, \psi(\phi(a_n)))$.

□

Definitsioon 1.2.3. Homomorfismis mingist Ω -algebrast iseendasse nimetatakse selle algebra **endomorfismiks**. Kõikide endomorfismide hulka $\text{Hom}(A, A)$ tähistame sümboliga $\text{End}(A)$.

Lause 1.2.4. Iga Ω -algebra A korral on hulk $\text{End}(A)$ monoid kujutuste korutamise (järjest rakendamise) suhtes.

Tõestus. Tõestuseks piisab veenduda, et leidub ühikelement ja kujutuste järjest rakendamine on assotsiatiivne. Veendume ühikelemendi olemasolus, selleks sobib kujutus $\text{id}_A : A \rightarrow A, \text{id}_A(x) = x, x \in A$. On selge, et selline kujutus on ka homomorfism, mistõttu ta kuulub hulka $\text{End}(A)$. Assotatiivsuses veendumiseks piisab tähele panna, et $(\phi\psi)x$ on defineeritud kui $\phi(\psi(x))$. Seega $(\phi\psi)v(x) = \phi(\psi(v(x))) = \phi(\psi v)(x)$. \square

Definitsioon 1.2.5. Bijektiivne homomorfismi nimetatakse **isomorfismiks**.

Definitsioon 1.2.6. Ω -algebraid A ja B nimetatakse **isomorfseteks**, kui leidub isomorfism $\phi : A \rightarrow B$.

Seda, et Ω -algebrad A ja B on isomorfised, tähistatakse sümboliga $A \simeq B$.

Lause 1.2.7. Isomorfism on ekvivalentsiseos kõigi Ω -algebrade klassil, ehk ta on refleksiivne, sümmeetriline ja transitiivne.

Tõestus. Veendume, et isomorfism on refleksiivne, sümmeetriline ja transitiivne. Olgu A, B, C Ω -algebrad.

I Refleksiivsus, ehk $A \simeq A$. Lihte on nähe, et sobivaks isomorfismiks osutub $\text{id}_A : A \rightarrow A$.

II Sümmeetria. Peame veenduma, et kui eksisteerib isomorfism $\phi : A \rightarrow B$ isomorfism, siis sellest järeldub, et eksisteerib ka isomorfism $\psi : B \rightarrow A$. Valime selleks ϕ^{-1} ja näitame, et tegemist on tõepoolest isomorfismiga. Bijektiivsus on ilme, näidata tuleb, et ϕ^{-1} säilitab tehted. See tähendab, et peab kehtima järgnev : $\forall(b_1, \dots, b_n) \in B$ korral $\phi^{-1}(\omega(b_1, \dots, b_n)) = \omega(\phi^{-1}(b_1), \dots, \phi^{-1}(b_n))$. Rakendame mõlemale poole kujutust ϕ . Saame $\phi(\phi^{-1}(\omega(b_1, \dots, b_n))) = \phi(\omega(\phi^{-1}(b_1), \dots, \phi^{-1}(b_n)))$. Arvestades seda, et ϕ on homomorfism saame kirjutada: $\phi(\phi^{-1}(\omega(b_1, \dots, b_n))) = (\omega((\phi\phi^{-1})(b_1), \dots, (\phi\phi^{-1})(b_n)))$. Kuna kujutuse ja tema pöördkujutuse järjest rakendamine on võrdne ühik teisendusega, siis on lihte näha, et võrdus kehtib. Siis aga ϕ injektiivsuse põhjal $\phi^{-1}(\omega(b_1, \dots, b_n)) = \omega(\phi^{-1}(b_1), \dots, \phi^{-1}(b_n))$, mida oligi tarvis näidata.

III Transitiivsus. Veendume, et kui leiduvad isomorfismid $\phi : A \rightarrow B$ ja $\psi : B \rightarrow C$, siis leidub ka isomorfism $v : A \rightarrow C$. Valime kujutuseks v

kujutuste ϕ ja ψ järjest rakenduse $(\phi\psi) : A \rightarrow C$. Veendume, et nii defineeritud v on isomorfism. On lihtne näha, et tegemist on bijektsiooniga. Lause 1.2.2 põhjal on v ka homomorfism, seega oleme näidanud, et v on isomorfism.

□

Kui meid huvitab tehe ja tema omadused, siis need jäävad samaks isomorfismi klassi täpsusega. Seeläbi võime laiendada tehte kohta tehtud tähelepanekuid ühelt Ω -algebralt algebrade isomorfismiklassile.

Definitsioon 1.2.8. Bijektiivset endomorfismi nimetatakse automorfismiks.

Ω -algebra A kõigi automorfismide hulka tähistatakse sümboliga $\text{Aut}A$

Lause 1.2.9. Iga Ω -algebra A korral on hulk $\text{Aut}A$ rühm kujutuste korrutamise (järjest rakendamise) suhtes.

Tõestus. Olgu A suvaline Ω -algebra. Esiteks, tuletame meelde, et Lause 1.2.4 põhjal on kõikide A endomorfismide hulk monoid kujutuste korrutamise suhtes. Kuna Ω -algebra A kõikide automorfismide hulk $\text{Aut}A$ on endomorfismide hulga kinnine alamhulk, siis on tegemist samuti monoidiga. Hulga kinnisus tuleneb faktist, et bijektiivsete kujutuste korrutamise tulemus on bijektiivne kujutus. Tuletame meelde, et rühm on selline monoid, mille igal elemendil leidub pöördement. Jääb veenduda, et iga hulga $\text{Aut}A$ elemendil leidub pöördement. Selleks sobib aga elemendi pöördfunktsioon, nagu me Lause 1.2.7 tõestuse teises osas veendusime. Seega on lause tõestatud. □

Näited automorfismidest

I Vaatleme kompleksarvude korpuse \mathbb{C} peal defineeritud funktsiooni $\phi : C \rightarrow C, \phi(\alpha) = \bar{\alpha}$. On lihtne veenduda, et see funktsioon on automorfism.

II Olgu G suvaline rühm, fikseerime elemendi $g \in G$. Defineerime nüüd kujutuse $\phi : G \rightarrow G, \phi(x) = g^{-1}xg$. Nii defineeritud kujutis on automorfism.

1.3 Alamalgebra

Definitsioon 1.3.1. Ω -algebrat B nimetatakse Ω -algebra A alamalgebraks, kui $B \subseteq A$ ja iga $\omega \in \Omega$ korral tehe ω algebral B saadakse kui algebra A sama tehte ahend.

Eelnevat võib mõtestada järgnevalt : $B \subset A, b_1, \dots, b_n : \omega^B(b_1, \dots, b_n) = \omega^A(b_1, \dots, b_n) (\in B)$. Ehk, sõnadesse panduna, siis tehte ω väärtus ei sõltu sellest, kas me vaatame teda algebras A või algebras B . Definitsioonist järgeldub, et algebra mittetühialamhulk, mis on kinnine tehete suhtes on alamalgebra. Paneme tähele, et kui me jätaksime ära nõude, et alamhulk peab olema mittetühi, siis kehtiks järgnev väide: olgu $(A; *)$ on poolrühm ja $B = \emptyset \subset A$, siis B rahuldab tingimust $x, y \in B \implies xy \in B$ ehk B on kinnine korrutamise suhtes. Samas B ei ole alamalgebra, seega on mittetühja alamhulga nõue oluline.

Seda, et Ω -algebra B on Ω -algebra A alamalgebra tähistame $B \leq A$.

Kui $B \leq A$, siis saab vaadelda sisestuskujutust $\tau : B \rightarrow A, \tau(x) = x, x \in B$. On selge, et $\tau \in \text{Hom}(B, A)$, samuti on lihte veenduda, et τ on injektiivne. Teatud mõttes kehtib ka vastupidine seos, seda näeme järgmises lauses.

Lause 1.3.2. *Kui A ja B on Ω -algebrad ning leidub üksühene homomorfism $\phi : B \rightarrow A$, siis kujutis $\phi(B)$ on A alamalgebra, mis on isomorfne algebraga B .*

Tõestus. Vaatleme hulka $\phi(B)$. Eelneva põhjal piisab selleks, et veenduda et $\phi(B)$ on A alamalgebra veenduda, et $\phi(B)$ on kinnine. On selge, et B on kinnine kõigi oma tehete suhtes, Ω -algebra definitsiooni põhjal. Kuna ϕ on homomorfism, siis ta säilitab teheted, kuna ta on ka injektiivne, siis on hulk $\phi(B)$ kinnine tehete suhtes, seega on hulk $\phi(B)$ algebra A alamalgebra. Kuna $\phi(B) = \{\phi(x) | x \in B\}$, siis on kujutus ϕ selle hulga suhtes pealekujutus. Seega on ϕ bijektsioon hulkade B ja $\phi(B)$ vahel ehk $B \simeq \phi(B)$. □

Lause 1.3.3. *Olgu antud Ω -algebrate homomorfism $\phi : A \rightarrow B$ ning olgu antud alamalgebrad $C \leq A$ ja $D \leq B$. Siis $\phi(C) \leq B$ ja $\phi^{-1}(D) \leq A$.*

Tõestus. Veendume esiteks, et algebra B alamhulk $\phi(C)$ on kinnine. Valime suvaliselt mingi tehte $\omega \in \Omega_n$. Alamhulga kinnisuses on samaväärne sellege, et suvaliste $e_1, \dots, e_n \in \phi(C)$ korral $\omega(e_1, \dots, e_n) \in \phi(C)$. Märgime, et leiduvad $c_i \in C$, nii et $\phi(c_i) = e_i$. Kusjuures, leidub $c \in C$ niiviisi, et kehtib

$\omega(c_1, \dots, c_n) = c$. Seega, $\omega(e_1, \dots, e_n) = \omega(\phi(c_1), \dots, \phi(c_n)) = \phi(\omega(c_1, \dots, c_n)) = \phi(c) \in \phi(C)$. Seega algebra B alamhulk $\phi(C)$ on kinnine ja seega algebra B alamalgebra.

Veendume nüüd, et algebra A alamhulk $\phi^{-1}(D)$ on kinnine. Valime taaskord suvaliselt mingi $\omega \in \Omega_n$. Piisab näidata, et $a_1, \dots, a_n \in \phi^{-1}(D) \implies \omega(a_1, \dots, a_n) \in \phi^{-1}(D) \iff \phi(\omega(a_1, \dots, a_n)) \in D$. Leiduvad d_1, \dots, d_n , nii et kehtib $\phi(a_i) = d_i$. Jällegi, kuna D on alamalgebra, siis kehtib järgnev: $d = \omega(d_1, \dots, d_n) = \omega(\phi(a_1), \dots, \phi(a_n)) \in D$.

□

1.4 loeng II

Lause 1.3.3 Olgu antud ω -algebra A alamalgebrate süsteem $B_i, i \in I$, kuj-
suures $B = \text{yhiso} a_{i \in I} B_i \neq \emptyset$ Siis $B \leq A$.

Tõestus ...

Vaatleme alamhulka $X: \emptyset \neq X \subset A$ Vaatleme hulka $\text{yhiso} \{B | X \leq B \leq A\} \neq \emptyset$. Vastavalt lausele 1.3.3 on tegemist alamalgebraga. Sellist alamalgebrad tähistatakse $\langle X \rangle$ Kui $\langle X \rangle = A$ ehk X on A moodustajate süsteem.

1.4.1 Faktoralgebra

Eesmärgiks on tükeldada ω -algebra mittelõikuvateks osadeks, nii et nende osade hulgal saaks loomulikul viisil defineerida ω -algebra struktuuri.

$\rho \in Eqv(A), \rho \subset Ax A$, vastab kolmele tingimusele:

1. refleksiivne
2. transitiivne
3. sümmeetriline

$a \in A, \{x \in A | a\rho x\} = a\rho, a \in a\rho$ Faktorhulgaks $A\rho = \{a\rho | a \in A\}$

$a_1\rho = a_2\rho \iff a_1\rho a_2$

Võtame $\omega \in \Omega_n, a_1/\rho, \dots, a_n/\rho \in A/\rho$.

$\omega(a_1/\rho, \dots, a_n/\rho) = \omega(a_1, \dots, a_n)/\rho$

Lisame ω -le lisatingimise: $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n) \in \rho \iff (\omega(x_1, \dots, x_n), \omega(y_1, \dots, y_n)) \in \rho$

Olgu $\rho \in Eqv(a)$. Eksisteerib kujutis $\pi : A \rightarrow A/\rho$, $\pi(a) = a/\rho$ - loomulik kujutus faktorhulgale, projektsioon.

Võtame $\omega \in \Omega_n, a_1, \dots, a_n \in A$

$$\pi(\omega(a_1, \dots, a_n)) = \omega(a_1/\rho, \dots, a_n/\rho) = \dots$$

1.4.2 Def - tuum

1.4.3 Lause 1.4.3

Tõestus

Olgu $\phi : A \rightarrow B$ homoformism. ρ - ϕ tuum. Valime $\omega \in \Omega_n, a_1, \dots, a_n, a'_1, \dots, a'_n$. Kas $\omega(a_1, \dots, a_n)\rho\omega(a'_1, \dots, a'_n)$ kehtib ? ...

Homomorfismiteoreem

Tõestus Olgu $\psi : A/\rho \rightarrow B, \psi(a/\rho) := \phi(a)$. Kas on üheselt määratud ? Ehk kas $a_1/\rho = a_2/\rho \iff \phi(a_1) = \phi(a_2)$. Siit saaksime kätte ka injektiivsuse. Piisab arvesse võtta, et eelnev tähendab, et $a_1\rho a_2$, nin kun ρ on ϕ tuum. siis on tulemus selge. Sürjektiiuvses tuleb sellest, et ϕ sürjektiiвне. Kas ψ on homoformism ? Olgu $\omega \in \Omega_n, a_1, \dots, a_n \in A$. Siis $\psi(\omega(a_1/\rho, \dots, a_n/\rho)) = \psi(\omega(a_1, \dots, a_n)/\rho) = \phi(\omega(a_1, \dots, a_n)) = \omega(\phi(a_1), \dots, \phi(a_n)) = \omega(\psi(a_1/\rho, \dots, a_n/\rho))$.

Lause 1.4.4 Olgu ρ Ω -algebra A kongruents, $D \leq A/\rho$ ning π kongurgentsi ρ tuum. Siis $Disomeetiline C/\rho|_C, kus C = \pi^{-1}(D)$.

Tõestus Olgu $\pi^{-1}(D) = C \leq A$. Olgu α π ahend C -le ($\alpha = \pi|_C$). Siis $\alpha : C \rightarrow D$, α on homomorfism. Väidame, et α on sürjektiiвне. Kuna π oli sürjektiiвне, siis $\forall x \in A \pi(x) = y$. Seega $\alpha(x) = y$.

Küsimus : kui kaks korda faktoriseerime, mis siis juhtub, kas me saame midagi uut ? Võimalik asendada isomorfismi täpsuseni üks kord faktoriseerimisega.

Olgu antud ρ ja σ Ω -algebra A kongurents, kusjuures $\rho \leq \sigma, (x, y) \in \rho \implies (x, y) \in \sigma$. Defineerime faktoralgebral A/ρ binaarse seos:

$$\sigma/\rho = \{(x/\rho, y/\rho) | (x, y) \in \sigma\}$$

Võime veenduda, et nii defineertus seos σ/ρ on faktoralgebra A/ρ kongurents.

Teoreem 1.4.2 Olgu $\rho \in \text{Con}(A), \tau \in \text{Con}(A/\rho)$. $\pi : A \rightarrow A/\rho$. Olgu $x, y \in A$. Defineerime $\sigma: (x, y) \in \sigma \iff \pi(x)\tau\pi(y)$
Väide: $\sigma \in \text{Con}(A)$. Veendume, et $\sigma \in \text{Eqv}(A)$. Olgu $x, y, z \in A, (x, y), (y, z) \in \sigma$, st. $(\pi(x), \pi(y)), (\pi(y), \pi(z)), (\pi(x), \pi(z)) \in \tau$.

1.5 loeng IV

1.5.1 Lagrange'i teoreem

Lõpliku rühma järk(elementide arv) jagub tema iga alamhulga järguga.

1.5.2 Ω -algebrate otsekorrutis

Viis kuidas saada mitmest algebrast uus algebra.

Võime defineerida funktsioonid, mis kirjeldavad jadasid. $\phi : \mathbb{N} \rightarrow \cup_{i \in \mathbb{N}} A_i$, mis rahuldab tingimust $\phi(i) \in A_i$, iga $i \in \mathbb{N}$ korral.

Projektsioonid - seavad jadale vastavuse mingi kindla elemendi. Tähistame π_i .

1.6.1

Tõestus $\omega \in \Omega_n, a^1 = (a_i^1)_{i \in I}, \dots, a^n = (a_i^n)_{i \in I} \dots$

1.5.3 Võred

(Osaliselt) Järjestatud hulk Binaarne seas, mis on refleksiivne, transitiivne ja antisümeetiline. Lineaarselt järjestatud hulk on selline, kus iga element on mingis seoses iga teisega.

Teoreem 2.2.1

Tõestus 4) Neeldevus (absorbition)

Tarvilikkus:

$$x \leq y \iff x = x \vee y$$

1.6 Loeng V

$$[a, b] = \{x \in L \mid a \leq x \leq b\}$$
$$\text{Con}(A/\rho) \longleftrightarrow \{\sigma \in \text{Con}(A) \mid \rho \leq \sigma\}$$

Teoreem 2.2.2 Distributiivsed võred.

Lause 2.3.1 Ahelad on distributiivsed võred.

Lause 2.3.2 Tähtis distributiivne võre ($P(A)$; *intersection; union*)
Isendega duaalsus.

Lause 2.3.3

Järeldus 2.3.1

Teoreem 2.3.1 Võre on modulaarne parajasti siis, kui ta ei oma võrega N_5 isomorfset alamvõret. Modulaarne võre on distributiivne parajasti siis, kui ta ei oma võrega M_3 isomorfset alamvõret.

Tõestus Riina esitab seminaris.

Teorem 2.4.1 Võre on distributiivne parajasti siis, kui ta on isomorfne mingi hulga kõigi alamhulkade võre mingi alamvõrega.

Definitsioon 2.4.1 Võre mittetühja alamhulka F nimetatakse filtriiks, kui ta on kinnine alumise raja võtmise suhtes ja koos iga elemendiga a sisaldab ka võre L kõik elemendist a suuremad elemendid.

Märkus Filtri ja algfiltri duaalsed mõisted on vastavalt ideaal ja algideal.

Definitsioon 2.4.2 Võre L filtrit F nimetatakse algfiltriiks, kui sellest, et $aVb \in F$, kus $a, b \in L$, järgeldub $a \in F$ või $b \in F$. Algfilter $F \neq L$.

Zorni lemma Olgu meil järjestatud hulk A . Eeldame, et iga hulga A alamhulk omab ülemist tõket hulgas A . Siis sellest jäeldub, et A omab vähemalt ühte maksimaalset elementi. $C \subset A$ alamhulk : $x, y \in C \implies x \leq y \vee y \leq x$.

Lause 2.4.1 Distributiivse võre iga kahe erivena elemendi jaoks leidub algfilter, mis sisaldab täpselt ühte neist kahest.

Tõestus

Teoreem 2.4.1 Võre on distributiivne parajasti siis, kui ta on isomorfe mingi hulga kõigi alamhulkade võre mingi alamvõrega

Selgitus Olgu L distributiivne võre. Vaja leida hulk A ja üksühene homomorfism $\Phi : L \rightarrow P(A)$, $\Phi(L) \leq P(A)$, $\text{Isomm} \Phi(L)$.

Tõestus

1.7 Rühmad

1.7.1 Faktorrühma faktoriseerimine

Isomorfismiteoreem Olgu H rühma G normaalne alamrühm, B rühma G alamrühm ning A rühma B normaalne alamrühm. Siis $BH/AH \cong B/(A(B \cap H))$.

Jäeldus 3.2.1. Olgu H rühma G normaalne alamrühm ja A rühma G alamrühm. Siis $BH/H \cong B/(B \cap H)$.

Teoreem 3.2.2. (Zassenhausi lemma) Kui H, H', K ja K' on rühma G alamrühmad, kusjuures H' on normaalne alamrühm rühmas H ja K' on normaalne alamrühm rühmas K , siis $(HyhisK)H'/(HyhisK')H' \cong (KyhisH)K'/(KyhisH')K'$.

Tõestus Idee: näitame, et mõlemad on isomorfsed $HyhisK/(H'yhisK)(HyhisK')$. $H'(HyhisK)/H'(HyhisK') \cong HyhisK/(H'yhisK)(HyhisK')$. Kasutame isomorfismiteoreemi. Võtame B rolli $HyhisK$, H rolli sobib H' , A rolli võtame $HyhisK'$. Lisaks vaatama G rollis H -d. Kas $hyhisK'$ normaalne alamrühm $HyhisK$?

1.7.2 Normaali- ja kompositsioonijadad

Schreieri teoreem Antud rühmas suvalised kaks normaaljada omavad ekvivalentseid tihedusi.

Tõestus $\{1\} = H_0 < dH_1 < dH_2 \dots H_m = G$

$\{1\} K_0 < dK_1 < dK_2 \dots < dH_n = G$

Defineerime $H_{ij} = H_i(H_{i+1} \text{yhisososa } K_j)$ ja $K_{ji} = K_j(K_{j+1} \text{yhisososa } H_i)$.

Miks $H_{ij} < dH_{i,j+1}$?

Miks $H_i(H_{i+1} \text{yhisososa } K_j) < dH_i(H_{i+1} \text{yhisososa } K_{j+1})$?

Näide Olgu $m = 2, n = 3$. Siis peavad eelneva põhjal ekvivalentseid olema $H_0 = H_{00} \leq H_{01} \leq H_{02} \leq H_{03} = H_1 = H_{10} \leq H_{11} \leq H_{12} \leq H_{13} = H_2 = G$ ja $K_0 = K_{00} \leq K_{01} \leq K_{02} = K_1 = K_{10} \leq K_{11} \leq K_{12} = K_2 = K_{20} \leq K_{21} \leq K_{22} = K_3 = G$.

Veenduda Sachenhausei lemma põhjal.

$H_{01}/H_{00} \text{isomorfneg} K_{01}/K_{00}$

$H_{02}/H_{01} \text{isomorfneg} K_{11}/K_{10}$

$H_{03}/H_{02} \text{isomorfneg} K_{21}/K_{20}$

$H_{11}/H_{10} \text{isomorfneg} K_{02}/K_{01}$

$H_{12}/H_{11} \text{isomorfneg} K_{12}/K_{11}$

$H_{13}/H_{12} \text{isomorfneg} K_{22}/K_{12}$

1.8 Lihtsad rühmad

Lause 3.4.1 Abeli rühm on lihtne siis ja ainult siis, kui tema järk on algarv

Tõestus Kuna alamrühma järk jagab rühma järke, siis algarvulise järguga rühmal saab olla ainult 2 alamrühma - kogu rühm ja 1 elemendiline rühm.

Teistpidi, olgu A lihtne Abeli rühm. $(A, +), 0 \neq a \in A, \{na | n \in \mathbb{Z}\}$. Kusjuures, kui $n > 0$ siis $na = a + a + \dots + a$, kui $n = 0$ siis $0a = 0$. Ja kui $n < 0$ siis $(-n) * a = -(na)$. Elemendi A poolt tekitatdu tsükliline alamrühm. Abeli rühma alamrühm on lihte, seega $A = \langle a \rangle$.

Teoreem 3.4.1 Kui $n = 3$ või $n \geq 5$, siis rühm A_n on lihtne

Teoreem 3.4.2 Kui $n > 2$ või $n = 2$ ja $|K| > 3$, siis projektiivne spetsiaalne lineaarrühm $\text{PSL}(n, K)$ on lihtne.

1.9 Lahenduvad rühmad

Definitsioon 3.5.1. Rühma, mis omab normaalkjaja, mille kõik faktorid on Abeli rühmad, nimetatakse lahenduvaks.

Teoreem 3.5.1 Lahenduva rühma alamrühmad ja faktorrühmad on lahenduvad.

Tõestus Olgu meil lahenduv rühm G . Kehtigu $\{1\} = H_0 < dH_1 < dH_2 < d\ldots < dH_m = G$. H_{i+1}/H_i on Abeli rühm $i = 0, \dots, m-1$.
 $A \leq G$, $A_i = \text{Ayhiososa}H_i$, $A_0 = \text{Ayhisosa}\{1\} = \{1\}$, $A_m = \text{Ayhisosa}G = A$,
 $i \leq j \implies A_i \leq A_j$.

Teoreem X Iga paaritu arvulise järguga rühm on lahenduv

Tõestus Olgu $|G|$ paaritu. $\{1\} = H_0 < dH_1 < dH_2 < d\ldots < dH_n = G$. Kõik jada faktorit lihtsad lõplikud rühmad. Alamrühma järk jagab rühma järku \implies alamrühmade järgud on paaritud.

1.10 Faktoringi faktoriseerimine

Lause 4.1.1 Kõik korpused on lihtsad ringid. Iga lihtne kommutatiivne ring on korpus.

Tõestus $\{0\} \neq I < dK$. I - ideaal. ...

Lause 4.1.2 Täielik maatriksring $\text{Mat}_n(K)$ on lihtne iga naturaalarve n ja korpuse K korral.

All - iga vektorruum omab baasi lõplikul juhul lõpmatu mõõtmelise baasi lin sõltumatus - kõik lõplikud alamhulgad sõltumatud. T.4.4.2 $S = \{X | X \subset V, X \text{ on lin. sõltumatu}\}$ Zorni lemma eeldute kontroll. $\{X_i | i \in I\}$, $X_i \in S$ Otsime suurimat elementi $X = \sup_{i \in I} X_i$. Kas X kuulub hulka S ? ... Zorni lemma eeldus täidetud. S omab maksimaalset elementi, olgu selleks Z . Z on

V baas ? Valime $v \in V$, kas $v \in L(Z)$. Oletame, et $v \notin V$, siis $Z \sup \{v\}$ on lin sõltumatu, see on aga vastuolu.

V vektorruum üle K ei, $i \in I$ - V baas. $\text{Visomringpluss} \sum_{i \in I} K_i \text{ ringpluss} \sum_{i \in I} K_i =$

$\{(k_i)_{i \in I} | k_i \in K, |\{j \in I | k_j = 0\}| < \infty\}$

defineerime $\phi : V \rightarrow \text{ringpluss} \sum_{i \in I} K_i$ nii, et $\phi(v) = (l_i)_{i \in I}$, $l_i = \begin{cases} k_i, & \text{kui } i \in \{i_1, i_2, \dots, i_n\} \\ 0, & \text{kui } i \notin \{i_1, i_2, \dots, i_n\} \end{cases}$

1.11 Ringide esitused ja moodulid

D 4.5.1

A Abeli rühm, $\text{End}(A)$ on rühm. Liitmine defineeritud kui $(\phi + \psi)(a) = \phi(a) + \psi(a)$.

T 4.5.1 $\phi : R \rightarrow \text{End}(M; +)$, iga $r \in R$ kollab tekib loomulik kujutus $l_2 : M \rightarrow M, x \rightarrow rx$. Sellest võime mõelda kui vasaknihkest. $\phi(r) = l_r$. Veendume, kas definitsioon on korrektne. Esiteks, kas $l_r \in \text{End}(M; +)$? $l_2(x + y) = r(x + y) = rx + ry = l_r(x) + l_r(y)$. Veel, $\phi(rs) = \phi(r) * \phi(s)$, $\phi(1) = 1_M$, $l_{r+s} = l_r + l_s$.

D 4.5.2

$\phi : R \rightarrow \text{End}(A)$. Oletame, et ϕ on üksühene, oletame, et r kuulub $\text{Ker}(\phi)$, $\phi(r) = 0 = \phi(0) \implies r = 0$, seega $\text{Ker}(\phi) = \{0\}$.

R -moodul M on täpne \implies vastav esitus on täpne. $\phi : R \rightarrow \text{End}(M; +)$, $\phi(r) = l_r$, $\text{Ker}(\phi) = \{0\}$, $l_r(x) = 0 \forall x \in M \iff r = 0$

T 4.5.2 $\text{Risom} \phi(R) \leq \text{End}(M; +)$.

Ainult null element anuleerib kõik mooduli elemendid.

1.12 Abeli rühmad

POLE SLAIDIL! Idee: näidata, et mooduli ehitus võib olla keerulisem.

Tsükliline R -moodul

Def. R -moodulit nimetatakse tsükliliseks, kui ta on tekitatud ühe elemendi poolt.

Olgu M tsükliline R -moodul, see tähendab $\exists a \in M, M = \langle a \rangle$. $M = Ra = \{ar | r \in R\}$. $RA \subset \langle a \rangle$. $ra + sa = (r + s)a$, $s(ra) = (sr)a$. $a = 1 * a \in Ra$.

L. Iga tsükliline R -moodul on isomorfne R -mooduli R faktormooduliga.

Tõestus. $M = Ra$. $\phi : R \rightarrow Ra$. $\phi(r) = ra$. Kontrollida homomorfismi. Sürjektiivne, homomorfismi teoreemi põhjal M isomorfne $R/\text{Ker}(\phi)$. □

L 4.5.1

$$A \simeq \mathbb{Z}_{k_1} + \text{ring} \dots + \text{ring} \mathbb{Z}_{k_n}$$

$$k, l \in \mathbb{N}, \text{SÜT}(k, l) = 1 \quad \mathbb{Z}_{kl} \simeq \mathbb{Z}_k + \text{ring} \mathbb{Z}_l \quad \phi(\overbrace{x_k l}) = (\overbrace{x_k}, \overbrace{x_l}) \dots \text{phibijektsioon}$$

$$|\mathbb{Z}_k l| = kl = |\mathbb{Z}_k + \text{ring} \mathbb{Z}_l|$$

Lemma 4.6.1

Tõestus: M -[täpne] taandamatu (=lihtne) R -moodul $K = \text{End}_R M$, $(K, +, *)$, $\phi, \psi \in K$, liitmine punktikaupa, korrutamine järjest rakendamine. Fikseerime $0 \neq \phi \in K$, $\phi(M) = \{\phi(m) | m \in M\}$, $0 \neq \phi(M) \leq M / \text{implies}(\text{eeldus, lihtne}) \phi(M) = M$. Uurime ϕ tuuma. $\text{Ker} \phi = \{x \in M | \phi(x) = 0\}$. $\text{Ker} \phi \neq M \implies \text{Ker} \phi = \{0\} \iff \phi$ on bijektsioon.

L 4.7.1

T 4.7.1

Tõestus : M täpne taandumatu R -moodul. $K = \text{End}_R M$, k^M ruut... , $f \in \text{End}_k M$, $S \subset M$ - lõplik, $\exists a \in R \forall s \in S f(s) = rs$. S võib kästleda kui lõpliku mõõtmelise moodustjaga alamruumi. Tõestuse idee: induktsiooni alamruumi mõõtmelise järgi. Baas : $S = \{0\}$. $X \subset M$, $\{a \in R | \forall x \in X ax = 0\} = \text{Anh}(X) = X^{\text{tagurpidi}T} Y \subset R$. $\{m \in M | \forall y \in Y my = 0\} = \text{Anh}(Y) = Y^{\text{tagurpidi}T} S$ lõplik alamruum , $f \in \text{End}_k M \implies r \in R, \forall s \in S, f(s) = rs, (f - r) - = 0$. $(f - r)S = 0$.

Tehniline abvahend induktsiooni jaoks: $(S^{\text{tagurpidi}T})^{\text{tagurpidi}T} = S$ Olgu väide tõestatud S jaoks, $a \in M^\S$, $T = S + Ka = \{s + ka | s \in S, k \in K\}$.