BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TRƯỜNG ĐẠI HỌC BÁCH KHOA TP.HCM -
ĐH QUỐC GIA TP HỒ CHÍ MINH

BÁO CÁO
BÀI TẬP LỚN GIẢI TÍCH 2

ĐỀ TÀI 20

Giảng viên hướng dẫn: ĐÀO HUY CƯỜNG
Nhóm: GT2-L29-20
Ngày 04 tháng 06 năm 2024

Danh sách thành viên & Phân chia công việc

No.	Họ và tên	MSSV	Công việc được phân công trong nhóm	%
1	Phạm Tuấn Vũ	2214006	PPt, Video và Bài tập	100%
2	Nguyễn Tường Vy	2214044	PPt, Video và Bài tập	100%
3	Nguyễn Quốc Triệu Vy	2214041	Viết báo cáo và Bài tập	100%
4	Phạm Công Võ	2313946	Viết báo cáo và Bài tập	100%
5	Phan Ngọc Thảo Vy	2112689	Code Matlab và Bài tập	100%
6	Lê Văn Quang Vinh	2213965	Code Matlab và Bài tập	100%

Mục lục

PHẦN MỞ ĐẦU

Giải tích hàm nhiều biến là một môn học quan trọng đối với sinh viên các ngành khoa học tự nhiên và kỹ thuật. Trong đó tích phân kép là một trong những nội dung tiền đề quan trọng của bô môn Giải Tích 2, cho phép chúng ta tính toán diện tích, thể tích, trọng tâm và nhiều thuộc tính khác của các hình phức tạp.

Hiện nay, nhờ vào sự tiến bộ của khoa học và kỹ thuật, quá trình tính toán thể tích đã trở nên linh hoạt và hiệu quả hơn nhiều. Sự xuất hiện của các phần mềm tính toán kĩ thuật hiện đại như MATLAB đặt ra một cách tiếp cận mới, giúp thực hiện các phép tính nhanh chóng và chính xác, đồng thời mang lại hiệu suất cao trong các ứng dụng thực tế và nghiên cứu khoa học.

MATLAB, với hơn 40 năm phát triển và hình thành, đã trở thành một môi trường tính toán số và lập trình phổ biến. Nó cung cấp khả năng thực hiện các phép toán số trên ma trận, vẽ đồ thị hàm số và biểu đồ thông tin, thực hiện các thuật toán phức tạp, tạo giao diện người dùng, và kết nối với các chương trình máy tính viết bằng nhiều ngôn ngữ lập trình khác nhau.

Báo cáo bài tập lớn về đề tài **"Ứng dụng của tích phân kép"** là kết quả của quá trình cố gắng không ngừng của mỗi thành viên trong nhóm và được sự giúp đỡ, hướng dẫn tận tình của thầy Đào Huy Cường. Nhóm chúng em xin gửi lời cảm ơn đến thầy đã giúp đỡ, hướng dẫn, truyền tải kiến thức trong thời gian học tập - nghiên cứu bộ môn Giải Tích 2 trong thời gian vừa qua. Trong quá trình thực hiện nhóm chúng em đã cố gắng đưa ra những phương án tốt nhất, song đó không thể tránh các thiếu sót, mong thầy nhận xét và góp ý giúp chúng em có thể hoàn thiện bài báo cáo một cách tốt hơn.

1 CƠ SỞ LÝ THUYẾT

1.1 Tích phân bội hai

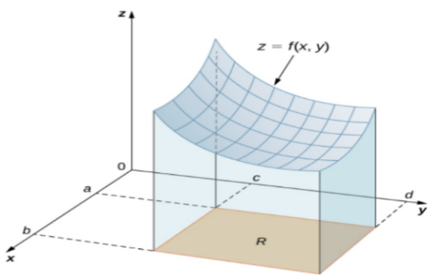
1.1.1 Đặt vấn đề

Chúng ta bắt đầu bằng việc xét không gian phía trên một vùng hình chữ nhật R. Xét hàm số $z = f(x, y)$ là hàm số xác định trên miền đóng R:

$$\boldsymbol{R = [a, b] \times [c, d] = \{(x, y) \in R^2 \mid a \leq x \leq b;\ c \leq y \leq d\}}$$

Ở đây $[a, b] \times [c, d]$ biểu thị tích *Descartes* của hai khoảng kín $[a, b]$và $[c, d]$. Nó bao gồm các cặp hình chữ nhật (x, y) sao cho $a \leq x \leq b$ và $c \leq y \leq d$.
Đồ thị của f đại diện cho một bề mặt phía trên mặt phẳng Oxy - mặt phẳng có phương trình $z = f(x, y)$, với z là độ cao của mặt tại điểm (x, y).

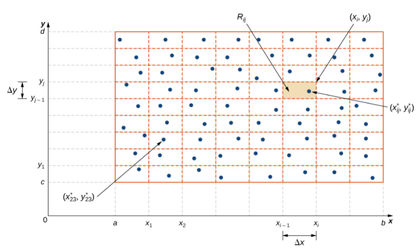
Gọi S là vật rắn nằm phía trên miền R và dưới đồ thị của f *(Hình 1)*. Đáy của vật rắn là hình chữ nhật R trong mặt phẳn Oxy. Ta muốn tìm thể tích V của chất rắn S.



Hình 1: Đồ thị $f(x, y)$ trên R trong mặt phẳng Oxy là một mặt cong

Đầu tiên, chúng ta chia miền R thành những hình chữ nhật nhỏ R_{ij}, mỗi hình có diện tích, có các cạnh $\triangle x$ và $\triangle y$. Chúng ta chia đoạn $[a, b]$ thành m khoảng con $[x_{i-1}, x_i]$ và chia đoạn $[c, d]$ thành n khoảng $[y_{j-1}, y_j]$. Với độ dài $\triangle x = \frac{(b-a)}{m}$, $\triangle y = \frac{(d-c)}{n}$.
Bằng cách vẽ những đường thẳng song song với các trục tọa độ và đi qua các điểm chia, chúng ta thu được hình chữ nhật nhỏ với diện tích $\triangle A = \triangle x \triangle y$.

$$\boldsymbol{R_{ij} = \{(x, y) \in R^2 : x_{i-1} \leq x \leq x_i;\ y_{j-1} \leq y \leq y_j\}}$$



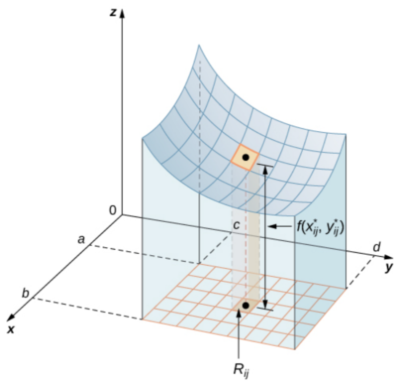
Hình 2: Chia miền R thành những hình chữ nhật nhỏ R_{ij}

Nếu chúng ta chọn một điểm tùy ý $(x^*_{ij}, y^*_{jj}) \in R_{ij}$ thì chúng ta có thể xấp xỉ được thể tích V cần tìm, bằng cách tính tổng các thể tích hình hộp chữ nhật nhỏ với đáy là R_{ij} có diện tích $\triangle A = \triangle x \times \triangle y$ và chiều cao $f(x^*_{ij}, y^*_{ij})$. Thể tích hình hộp chữ nhật nhỏ này bằng:

$$\boldsymbol{f(x^*_{ij}, y^*_{ij})\triangle A = f(x^*_{ij}, y^*_{ij})\triangle x \triangle y}$$

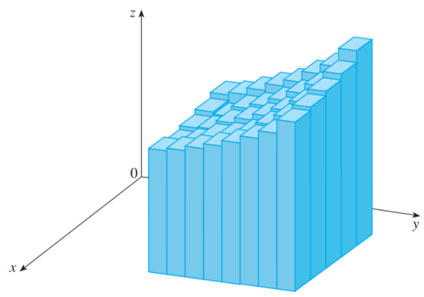
Sử dụng cùng một ý tưởng cho tất cả các hình chữ nhật cong, khi cộng tất cả những thể tích của những hình hộp chữ nhật nhỏ, chúng ta sẽ xấp xỉ được thể tích V cần tìm:

$$\boldsymbol{V \approx \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f(x^*_{ij}, y^*_{ij})\triangle A = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f(x^*_{ij}, y^*_{ij})\triangle x \triangle y}$$



Hình 3: Thể tích của hình hộp chữ nhật nhỏ

Tổng này được gọi là tổng Riemann kép và có thể được sử dụng để tính gần đúng giá trị thể tích của vật rắn. Ở đây, tổng kép có nghĩa là đối với mỗi hình chữ nhật con, chúng ta đánh giá hàm tại điểm đã chọn, nhân với diện tích của mỗi hình chữ nhật, sau đó cộng tất cả các kết quả.



Hình 4: Thể tích gần đúng chất rắn S

Khi cho $m, n \to \infty$ chúng ta sẽ thu được:

$$\boldsymbol{V = \lim_{m,n\to\infty} \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f(x^*_{ij}, y^*_{ij})\triangle x \triangle y}$$

1.1.2 Định nghĩa tích phân kép

Cho hàm số $f(x,y) \geq 0, \forall (x,y) \in R$.

Tích phân kép của hàm số $f(x,y)$ trên vùng chữ nhật R được định nghĩa:

$$\iint\limits_{R} f(x,y)dxdy = \iint\limits_{R} f(x,y)dA = \lim_{m,n\to\infty} \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f(x^*_{ij}, y^*_{ij})\triangle x \triangle y$$

nếu giới hạn này tồn tại. Lúc này $f(x,y)$ được gọi là hàm khả tích trên R.

1.1.3 Tính chất tích phân kép

a/ Nếu $R = R_1 + R_2$ và $f(x,y)$ khả tích trên R thì

$$\iint\limits_{R} f(x,y)dxdy = \iint\limits_{R_1} f(x,y)dxdy + \iint\limits_{R_2} f(x,y)dxdy$$

b/ Nếu $f(x,y)$ và $|\ f(x,y)\ |$ là những hàm khả tích trên R thì

$$\left|\iint\limits_{R} f(x,y)dxdy\right| = \iint\limits_{R} |f(x,y)dxdy|$$

c/ Nếu $f(x,y)$ và $g(x,y)$ là những hàm khả tích trên R thì

$$\iint\limits_{R} \left(f(x,y) \pm g(x,y)\right) dxdy = \iint\limits_{R} f(x,y)dxdy \pm \iint\limits_{R} g(x,y)dxdy$$

d/ Nếu **c** là một hằng số, $f(x,y)$ là những hàm khả tích trên R thì

$$\iint\limits_{R} \left(cf(x,y)\right) dxdy = c\iint\limits_{R} f(x,y)dxdy,\ c \in R$$

e/ Nếu $f(x,y)$ và $g(x,y)$ là những hàm khả tích trên R và $f(x,y) \geq g(x,y), \forall (x,y) \in R$ thì

$$\iint\limits_{R} f(x,y)dxdy \geq \iint\limits_{R} g(x,y)dxdy$$

f/ Nếu R là miền đóng, bị chặn thì

$$S_R = \iint\limits_{R} dxdy$$

1.1.4 Tích phân kép trong tọa độ Descartes

Chúng ta đã biết cách thiết lập tích phân kép và cách thu được giá trị gần đúng của nó, ta cũng có thể tưởng tượng rằng việc tính tích phân kép bằng cách sử dụng định nghĩa có thể là một quá trình rất dài nếu chúng ta chọn các giá trị lớn hơn cho m.

Ý tưởng cơ bản là việc đánh giá trở nên dễ dàng hơn nếu chúng ta có thể chia tích phân kép thành tích phân đơn bằng cách lấy tích phân trước tiên theo một biến và sau đó theo biến kia. Công cụ chính mà chúng ta cần được gọi là tích phân lặp.

Giả sử $f(x,y) \geq 0, \forall(x,y) \in R = [a,b] \times [c,d]$ là hàm liên tục trên hình chữ nhật D. Chúng ta cần tính tích phân $\boldsymbol{I = \iint\limits_R f(x,y)dxdy}$.

Chúng ta sử dung kí hiệu $\int_c^d f(x,y)dy$ có nghĩa là cho x cố định và lấy tích phân của hàm $f(x,y)$ theo biến y từ c đến d. Như vậy:

$$\boldsymbol{h(x) = \int_c^d f(x,y)dy}$$

Nếu chúng ta tiếp tục lấy tích phân của hàm $h(x)$ theo biến x từ a đến b, ta được:

$$\boldsymbol{\int_a^b h(x)f(x,y)dx = \int_a^b \left[\int_c^d f(x,y)dy\right] dx}$$

Tương tự, chúng ta cũng có khái niệm tích phân $\int_c^d \left[\int_a^b f(x,y)dx\right] dy$.

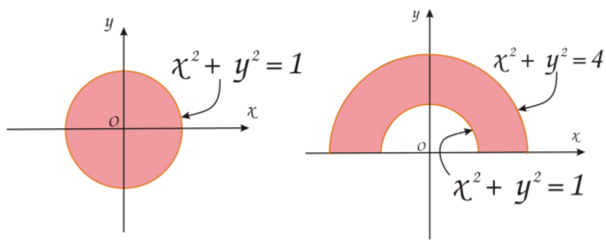
**** ĐỊNH LÝ FUBINI***

Cho hàm số $f(x,y) \geq 0, \forall(x,y) \in R = (x,y) \in R^2 | a \leq x \leq b; c \leq y \leq d$ là hàm liên tục trên miền R. Khi đó:

$$\boldsymbol{\iint\limits_R f(x,y)dxdy = \int_a^b \left[\int_c^d f(x,y)dy\right] dx = \int_c^d \left[\int_a^b f(x,y)dx\right] dy}$$

1.1.5 Tích phân kép trong tọa độ cực

Giả sử chúng ta cần tính tích phân $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$, khi D có hình dạng như trong (hình 5). Việc mô tả miền D trong hệ trục tọa độ Descartes khá phức tạp nhưng mô tả trong hệ tọa độ cực thì dễ dàng hơn.



Hình 5

Hệ tọa độ cực (r,φ) xác định một điểm có tọa độ (x,y) như sau

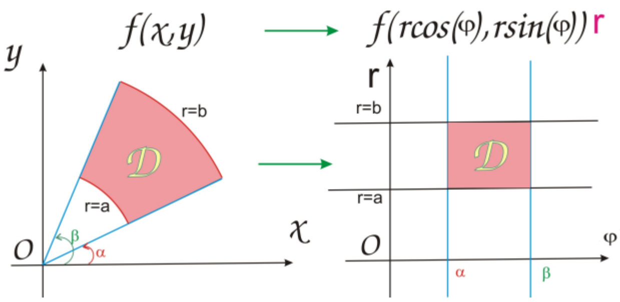
$$\boldsymbol{r^2 = x^2 + y^2; \quad \begin{cases} x = r\cos(\phi), \\ y = r\sin(\phi) \end{cases} \quad ; \quad \tan(\phi) = \frac{y}{x}}$$

khi đó ta sẽ có công thức tích phân kép trong hệ tọa độ cực.

ĐỊNH LÍ TÍCH PHÂN KÉP TRONG TỌA ĐỘ CỰC

Nếu $f(x, y)$ là hàm liên tục trên miền $R = (r, \phi) : 0 \leq a \leq r \leq b, \alpha \leq \phi \leq \beta$, ở đây $0 \leq \beta - \alpha \leq 2\pi$, thì

$$\iint\limits_{R} f(x, y)dxdy = \int_{\alpha}^{\beta} \left[\int_{a}^{b} f(r\cos\alpha, r\sin\alpha) r\, dr dp \right]$$



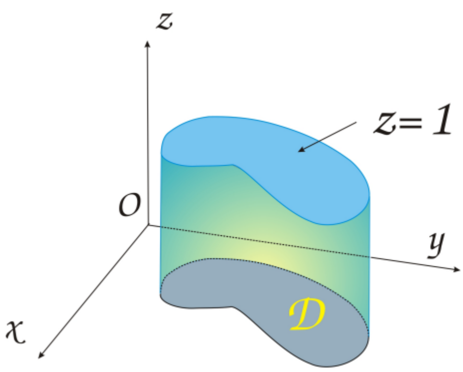
Hình 6: Miền D được chuyển từ hệ tọa độ Descartes sang hệ tọa độ cực

1.2 Các ứng dụng của tích phân kép

1.2.1 Tính diện tích phẳng D

Diện tích của hình phẳng D được cho bởi:

$$S_D = \iint\limits_{D} 1\, dxdy$$

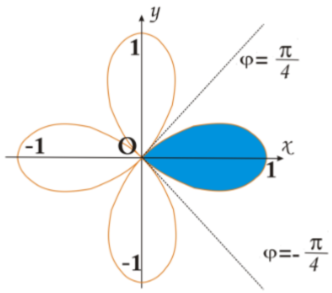


Hình 7: Ứng dụng tích phân kép tính diện tích miền D

Ví dụ: Tính diện tích miền $D = \left\{(r; \phi) : -\frac{\pi}{4} \leq \phi \leq \frac{\pi}{4}, 0 \leq r \leq \cos 2\phi\right\}$

Giải:

Diện tích miền D là

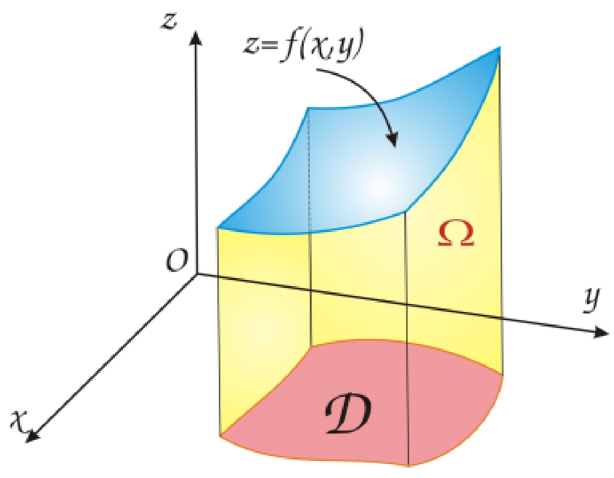


$$S_D = \iint dxdy = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \left[\int_0^{\cos 2\varphi} rdr\right] d\varphi = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \left[\frac{1}{2}.r^2\right]_{r=0}^{r=\cos 2\phi} = \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 2\varphi d\varphi$$
$$= \frac{1}{4}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} (1+\cos 4\varphi)d\varphi = \frac{1}{4}.\left[\varphi + \frac{1}{4}\sin 4\varphi\right]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{8}$$

1.2.2 Tính thể tích của vật thể

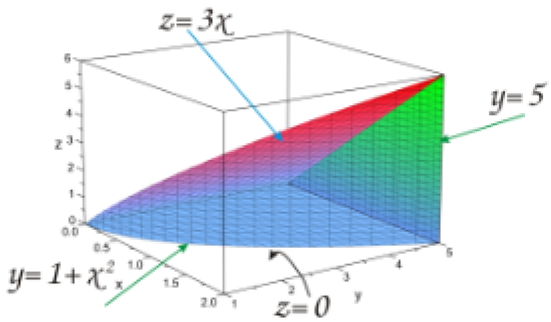
Thể tích của vật thể hình trụ Ω giới hạn trên bởi mặt cong $z = f(x,y)$, giới hạn dưới bởi miền D và giới hạn xung quanh bởi những đường thẳng song song trục Oz, tựa trên biên của miền D được tính theo công thức:

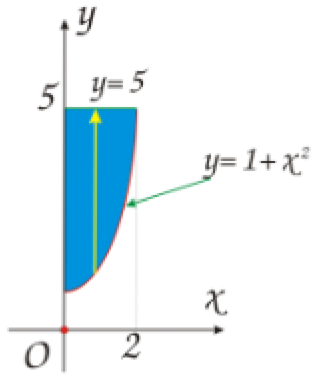
$$V = \iint\limits_D f(x,y)dxdy$$



Hình 8: Vật thể Ω

Ví dụ: Tính thể tích vật thể giới hạn bởi $y = 1 + x^2, y = 5, z = 0$ (phần $x > 0$) và hình chiếu D.





Giải:

Vật thể Ω được giới hạn bởi mặt trên $z = 3x$ và mặt dưới $z = 0$, hình chiếu D xuống mặt phẳng Oxy được giới hạn bởi những đường thẳng $y = 1 + x^2, y = 5, x = 0$.

Như vậy, thể tích của vật thể Ω là:

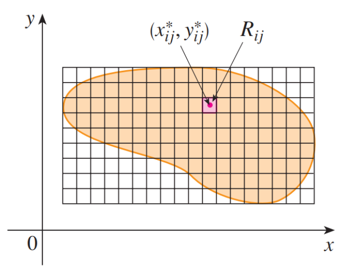
$$V = \iint_D (3x - 0)dxdy = \int_0^2 \left[\int_{1+x^2}^5 3xdy\right] dx = \int_0^2 [3xy]_{y=5}^{y=1+x^2} dx$$
$$= \int_0^2 \left[3x.5 - 3x(1+x^2)\right] dx = 12$$

1.2.3 Tính mật độ và khối lượng

Với viếc ứng dụng của tích phân kép, chúng ta xem xét một mảnh phẳng có mật độ thay đổi. Giả sử mảnh phẳng chiếm một miền xác định D trên mặt phẳng Oxy và mật độ của nó (tính bằng đơn vị khối lượng trên một đơn vị diện tích) tại một điểm (x, y) thuộc D được cho bởi hàm $\rho(x, y)$ liên tục trên D:

$$\boldsymbol{\rho(x, y) = \lim \frac{\triangle m}{\triangle A}}$$

Trong đó $\triangle m$ và $\triangle A$ là khối lượng và diện tích hình chữ nhật nhỏ có chứa (x, y), giới hạn được lấy làm kích thước của hình chữ nhật tiếp cận 0.



Để tìm tổng khối lượng m của mảnh phẳng, chúng ta chia một hình chữ nhật R chứa miền D thành những hình chữ nhật phụ R_{ij} có cùng kích thướt và xét $\rho(x, y) = 0$ bên ngoài D. Nếu chúng ta chọn một điểm $(x^*_{ij}, y^*_{ij}) \in R_{ij}$, thì khối lượng của mảnh phẳng chiếm xấp xỉ $\boldsymbol{\rho(x^*_{ij}, y^*_{ij}).\triangle A}$, trong đó $\boldsymbol{\triangle A}$ là diện tích của R_{ij}. Nếu chúng ta cộng tất cả các khối lượng như vậy, chúng ta sẽ có được một xấp xỉ với tổng khối lượng:

$$\boldsymbol{m \approx \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{l}\rho(x_{ij}^*, y_{ij}^*)\triangle A}$$

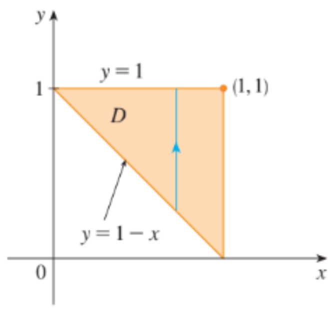
Nếu bây giờ chúng ta tăng số lượng hình chữ nhật, chúng ta sẽ thu được tổng khối lượng của tấm phẳng là giá trị giới hạn của các xấp xỉ:

$$\boldsymbol{m = \lim_{k,l\to\infty}\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{l}\rho(x_{ij}^*, y_{ij}^*)\triangle A = \iint_D \rho(x,y)dA}$$

Các nhà vật lý cũng xem xét các loại mật độ khác có thể được xử lý theo cách tương tự. Ví dụ: nếu một điện tích được phân phối trên một vùng và mật độ điện tích (tính bằng đơn vị điện tích trên một đơn vị diện tích) được cho bởi $\sigma(x, y)$ tại một điểm (x, y) trong D, thì tổng điện tích Q được cho bởi

$$\boldsymbol{Q = \iint_D \sigma(x,y)dA}$$

Ví dụ: Điện tích được phân bố trên vùng D như hình 9 sao cho mật độ điện tích tại (x, y) là $\sigma(x, y) = xy$, được đo bằng coulombs trên mét vuông (C/m^2). Tính tổng điện tích Q.



Hình 9

Giải:

Ta có tổng diện tích Q bằng:

$$Q = \iint_D \sigma(x,y)dA = \int_0^1\int_{1-x}^1 xydydx = int_0^1\left[x\frac{y^2}{2}\right]_{y=1-x}^{y=1}dx$$
$$= \int_0^1 \frac{x}{2}\left[1^2-(1-x)^2\right]dx = \frac{1}{2}\int_0^1(2x^2-x^3)dx = \frac{1}{2}x^3\left[\frac{2}{3}-\frac{x^4}{4}\right]_0^1 = \frac{5}{24}$$

1.2.4 Tính Momen và Khối Tâm

Giả sử tấm phẳng chiếm một vùng D và có hàm mật độ $\rho(x, y)$. Chúng ta đã biết mômen của một hạt về một trục là tích của khối lượng và khoảng cách có hướng của nó từ trục. Khối lượng của R_{ij} xấp xỉ $\boldsymbol{\rho(x_{ij}^*, y_{ij}^*)\triangle A}$, vì vậy chúng ta có thể xấp xỉ momen của R_{ij} đối với trục x bởi:

$$[(x_{ij}^*, y_{ij}^*)\triangle A]y_{ij}^*$$

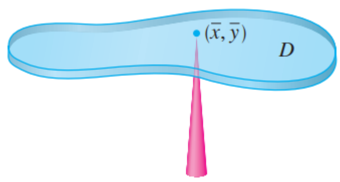
Nếu bây giờ chúng ta cộng các đại lượng này và lấy giới hạn khi số lượng hình chữ nhật trở nên lớn, chúng ta sẽ có được mômen của toàn bộ mảnh phẳng về trục x

$$M_x = \lim_{m,n\to\infty} \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} y_{ij}^* \rho(x_{ij}^*, y_{ij}^*)\triangle A = \iint_D y\rho(x,y)dA$$

Tương tự, mômen của toàn bộ mảnh phẳng về trục y

$$M_y = \lim_{m,n\to\infty} \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_{ij}^* \rho(x_{ij}^*, y_{ij}^*)\triangle A = \iint_D x\rho(x,y)dA$$

Chúng ta xác định khối tâm của mảnh phẳng sao cho $m\overline{x} = M_y$ và $m\overline{y} = M_x$. Tọa độ khối tâm của một mảnh phẳng chiếm vùng D và có hàm mật độ $\rho(x,y)$ là



$$\overline{x} = \frac{M_y}{m} = \frac{1}{m}\iint_D x\rho(x,y)dA; \quad \overline{y} = \frac{M_x}{m} = \frac{1}{m}\iint_D y\rho(x,y)dA$$

Với khối lượng $\boldsymbol{m}$ được xác định bằng

$$m = \iint_D \rho(x,y)dA$$

Ví dụ: Tìm khối lượng m của tấm tam giác có các đỉnh $(0,0),(1,0),(0,2)$ và hàm mật độ là $\rho(x,y) = 1 + 2x + y$.

Giải:

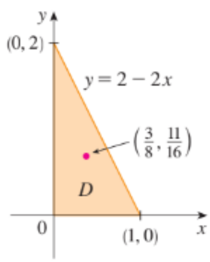


FIGURE 5

$$m = \iint_D \rho(x,y)dy = \int_0^1 \int_0^{2-2x} (1+2x+y)dydx = \int_0^1 \left[y + 3xy + \frac{y^2}{2}\right]_0^{2-2x} dx$$
$$= 4\int_0^1 (1-x^2)dx = 4\left[x - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{8}{3}$$

1.2.5 Tính Momen Quán Tính

Momen quán tính của một hạt có khối lượng m về một trục được định nghĩa bởi công thức mr^2, trong đó r là khoảng cách từ hạt đến trục. Chúng ta mở rộng khái niệm này thành một mảnh phẳng có hàm mật độ $\rho(x, y)$ và chiếm một miền D. Chúng ta chia miền D thành các hình chữ nhật nhỏ, xấp xỉ momen quán tính của mỗi hình chữ nhật phụ về trục x và lấy giới hạn của tổng khi số lượng hình chữ nhật trở nên lớn. Kết quả là momen quán tính của mảnh phẳng về trục x:

$$I_x = \lim_{m,n\to\infty} \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} (y_{ij}^*)^2 \rho(x_{ij}^*, y_{ij}^*)\triangle A = \iint\limits_D y^2\rho(x, y)dA$$

Tương tự, momen quán tính về trục y:

$$I_y = \lim_{m,n\to\infty} \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} (x_{ij}^*)^2 \rho(x_{ij}^*, y_{ij}^*)\triangle A = \iint\limits_D x^2\rho(x, y)dA$$

Điều được quan tâm để xem xét momen quán tính cực:

$$I_0 = I_x + Iy = \lim_{m,n\to\infty} \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \left[(x_{ij}^*)^2 + (y_{ij}^*)^2\right] \rho(x_{ij}^*, y_{ij}^*)\triangle A = \iint\limits_D \left[x^2 + y^2\right]\rho(x, y)dA$$

Ví dụ: Tìm momen quán tính về trục I_0 của một đĩa đồng nhất D có mật độ $\rho(x, y) = p$, tâm và bán kính a.

Giải:

Miền giới hạn của D là đường tròn $x^2 + y^2 = a^2$ và trong tọa độ cực D được biểu diễn bởi $0 \leq \ \theta \leq 2\pi$, $0 \leq r \leq a$

$$I_0 = \iint\limits_D (x^2 + y^2)\rho dA = \rho\int_0^{2\pi}\int_0^a r^3 dr d\theta = \rho\int_0^{2\pi} d\theta\int_0^a r^3 dr = \frac{\pi\rho a^4}{2}$$

1.2.6 Tính diện tích mặt cong

Trong không gian $Oxyz$, xét mặt cong U được xác định bởi phương trình $z = f(x, y)$, trong đó $z = f(x, y)$ là hàm liên tục và có đạo hàm riêng liên tục.

Gọi D là hình chiếu vuông góc của U lên mặt phẳng Oxy. Khi đó diện tích mặt cong được xác định bởi công thức:

$$S_U = \iint\limits_D \sqrt{1 + [f'_x(xy)]^2 + \left[f'_y(xy)\right]^2}\,dxdy$$

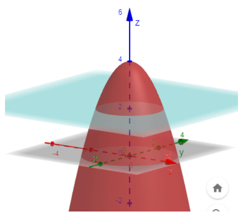
Đặc biệt, nếu mặt cong U được xác đinh bởi phương trình tham số: $\begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \\ z = z(u, v) \end{cases}$ thì thì diện tích mặt cong U được xác định bởi công thức như sau:

$$S = \iint\limits_{D_{uv}} \sqrt{EF - G^2}\,dudv$$

Trong đó,

$$E = (x'_u)^2 + (y'_u)^2 + (z'_u)^2;$$
$$F = (x'_v)^2 + (y'_v)^2 + (z'_v)^2;$$
$$G = x'_u x'_v + y'_u y'_v + z'_u z'_v.$$

Ví dụ: Tính diện tích bề mặt của phần *parabol* $z = 4 - x^2 - y^2$ nằm phía trên mặt phẳng $z = 2$.



Giải:

Gọi D là hình chiếu của mặt cầu tính diện tích lên mặt phẳng Oxy

Ta có: $D : x^2 + y^2 \leq 2$

Giao $\begin{cases} z = 4 - x^2 - y^2 \\ z = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 2 \\ z = 2 \end{cases}$

$f(x, y) = 4 - x^2 - y^2 => f_x = -2x;\ f_y = -2y$

Diện tích mặt cong D là:

$$S_D = \iint\limits_D \sqrt{1 + \left[f_x{}'(xy)\right]^2 + \left[f_y{}'(xy)\right]^2}\, dxdy = \iint\limits_D \sqrt{1 + (-2x^2) + (-2y^2)}\, dA$$

Đặt $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases} \Rightarrow D' : \begin{cases} 0 \leq r \leq \sqrt{2} \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi \end{cases}$

$\Rightarrow S_D = \iint\limits_{D'} \sqrt{1 + 4(r\cos\varphi)^2 + 4(r\sin\varphi)^2}\, r dA = \iint\limits_{D'} \sqrt{1 + 4r^2}\, r dA = \dfrac{13\pi}{3}$

2 ỨNG DỤNG TÍCH PHÂN KÉP GIẢI CÁC BÀI TẬP SÁCH JAMES STEWART

Bài 1:

Điện tích được phân bố trên hình chữ nhật $1 \leq x \leq 3$, $0 \leq y \leq 2$ sao cho mật độ điện tích tại (x, y) là $\sigma(x, y) = 2xy + y^2$ (được đo bằng coulombs trên mét vuông $(\frac{C}{m^2})$). Tính tổng điện tích trên hình chữ nhật.

Giải:

Gọi Q (C) là tổng điện tích trên hình chữ nhật cần tìm.

Ta có:

Miền xác định $D : \begin{cases} 1 \leq x \leq 3 \\ 0 \leq y \leq 2 \end{cases}$

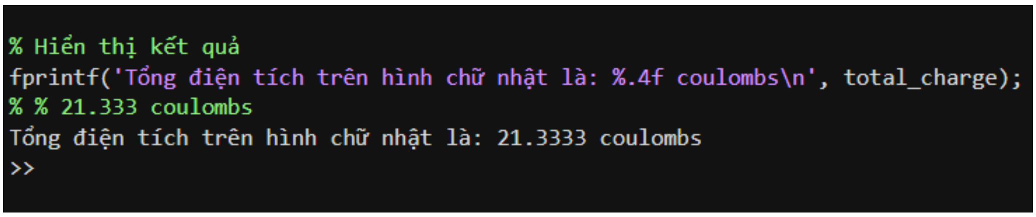
Tổng điện tích trên hình chữ nhật là

$$\begin{aligned} Q &= \iint\limits_D \sigma(x,y)dA \\ &= \int_0^2 dy \int_1^3 \left(2xy + y^2\right) dx \\ &= \int_0^2 \left(yx^2 + y^2x\right)\Bigg|_{x=1}^{x=3} dy \\ &= \int_0^2 \left(2y^2 + 8y\right) dy \\ &= \frac{64}{3}\,(C) \end{aligned}$$

Vậy tổng điện tích trên hình chữ nhật cần tìm là $\frac{64}{3}\,(C)$.
Dùng MATLAB giải bài toán:
Code:

```
%Khai bao cac gioi han cua hinh chu nhat
x_min = 1;
x_max = 3;
y_min = 0;
y_max = 2;

%Dinh nghia ham mat do dien tich
sigma = @(x, y) 2 .* x .* y + y.^2;

% Tich phan kep
total_charge = integral2(sigma, x_min, x_max, y_min, y_max);

% Hien thi ket qua
fprintf('Tong dien tich tren hinh chu nhat la: %.4f coulombs\n', total_charge);
% 21.333 coulombs
```

Kết quả MATLAB:



Bài 3:

Tìm khối lượng và trọng tâm của một tấm mỏng chiếm vùng D và có hàm mật độ cho trước ρ.

- $D = \{(x,y) \mid 0 \le x \le 2,\ -1 \le y \le 1\}$
- $\rho(x,y) = xy^2$

Giải:
Gọi m là khối lượng của tấm mỏng cần tìm.
Gọi $I(\overline{x}, \overline{y})$ là khối tâm của tấm mỏng cần tìm.
Miền xác định D: $\begin{cases} 0 \le x \le 2 \\ -1 \le y \le -1 \end{cases}$
- Tính khối lượng m:

$$\begin{aligned} m &= \iint\limits_D \rho(x,y)dA \\ &= \int_0^2 dx \int_{-1}^1 xy^2 dy \\ &= \int_0^2 \left(\frac{1}{3}y^3x\right)\Bigg|_{y=-1}^{y=1} dx \\ &= \int_0^2 \frac{2}{3}xdx \\ &= \frac{4}{3} \end{aligned}$$

- Tính khối tâm $I(\overline{x}, \overline{y})$:
Tìm $\overline{x}$:

$$\begin{aligned} \overline{x} &= \frac{1}{m}\iint\limits_D x\rho(x,y)dA \\ &= \frac{1}{m}\int_0^2 dx \int_{-1}^1 x\left(xy^2\right) dy \\ &= \frac{1}{m}\int_0^2 \left(\frac{1}{3}x^2y^3\right)\Bigg|_{y=-1}^{y=1} dx \\ &= \frac{3}{4}\int_0^2 \frac{2}{3}x^2dx \\ &= \frac{4}{3} \end{aligned}$$

Tìm $\overline{y}$:

$$\begin{aligned} \overline{y} &= \frac{1}{m}\iint\limits_D y\rho(x,y)dA \\ &= \frac{1}{m}\int_0^2 dx \int_{-1}^1 y\left(xy^2\right) dy \\ &= \frac{1}{m}\int_0^2 \left(\frac{1}{4}y^4x\right)\Bigg|_{y=-1}^{y=1} dx \\ &= \frac{3}{4}\int_0^2 0dx \\ &= 0 \end{aligned}$$

Vậy khối lượng của tấm mỏng cần tìm là $\dfrac{4}{3}$, khối tâm của tấm mỏng cần tìm là $I(\dfrac{4}{3}, 0)$.
Dùng MATLAB giải bài toán:
Code:

```
% Mien xac dinh D
x_min = 0;
x_max = 2;
y_min = -1;
y_max = 1;

% Ham mat do
rho = @(x, y) x.*y.^2;

% Tinh khoi luong
mass = integral2(rho, x_min, x_max, y_min, y_max);

% Tinh toa do trong tam (x, y)
x_center = integral2(@(x, y) x .* rho(x, y), x_min, x_max, y_min, y_max) / mass;
y_center = integral2(@(x, y) y .* rho(x, y), x_min, x_max, y_min, y_max) / mass;

% Hien thi ket qua
fprintf('Khoi luong cua tam mong la: %.4f\n', mass);
% 1.3333
fprintf('Trong tam cua tam mong (x, y) la: (%.4f, %.4f)\n', x_center, y_center);
% 1.3333; 0.0000
```

Kết quả MATLAB:

```
% Hiển thị kết quả
fprintf('Khối lượng của tấm mỏng là: %.4f\n', mass); % 1.3333
fprintf('Trọng tâm của tấm mỏng (x̄, ȳ) là: (%.4f, %.4f)\n', x_center, y_center); % 1.3333; 0.0000

Khối lượng của tấm mỏng là: 1.3333
Trọng tâm của tấm mỏng (x̄, ȳ) là: (1.3333, 0.0000)
>> |
```

Bài 5:

Tìm khối lượng và trọng tâm của một tấm mỏng chiếm vùng tam giác D với các đỉnh $(0, 0), (2, 1), (0, 3)$ và có hàm mật độ ρ.

- D là vùng tam giác với các đỉnh $(0, 0), (2, 1), (0, 3)$
- $\rho(x, y) = x + y$

Giải:
Gọi m là khối lượng của tấm mỏng cần tìm.
Gọi $I(\overline{x}, \overline{y})$ là khối tâm của tấm mỏng cần tìm.
Ta có:

Miền xác định D: $\begin{cases} 0 \leq x \leq 2 \\ \dfrac{1}{2}x \leq y \leq -x + 3 \end{cases}$

- Tính khối lượng m:

$$\begin{aligned}
m &= \iint\limits_D \rho(x,y)dA \\
&= \int_0^2 dx \int_{\frac{1}{2}x}^{-x+3} (x+y)dy \\
&= \int_0^2 \left(\frac{1}{2}y^2 + xy\right)\Bigg|_{y=\frac{x}{2}}^{y=3-x} dx \\
&= \int_0^2 \left[\frac{1}{2}(3-x)^2 + x(3-x)\right] dx - \int_0^2 \left[\frac{1}{2}\left(\frac{x}{2}\right)^2 + x\left(\frac{x}{2}\right)\right] dx \\
&= 6
\end{aligned}$$

- Tính khối tâm $I(\overline{x}, \overline{y})$:
Tìm $\overline{x}$:

$$\begin{aligned}
\overline{x} &= \frac{1}{m}\iint\limits_D x\rho(x,y)dA \\
&= \frac{1}{m}\int_0^2 dx \int_{\frac{x}{2}}^{3-x} x(x+y)dy \\
&= \frac{1}{m}\int_0^2 \left(\frac{1}{2}xy^2 + x^2y\right)\Bigg|_{y=\frac{x}{2}}^{y=3-x} dx \\
&= \frac{1}{6}\left\{\int_0^2 \left[\frac{1}{2}x(3-x)^2 + x^2(3-x)\right] dx - \int_0^2 \left[\frac{1}{2}x\left(\frac{x}{2}\right)^2 + x^2\left(\frac{x}{2}\right)\right] dx\right\} \\
&= \frac{3}{4}
\end{aligned}$$

Tìm $\overline{y}$:

$$\begin{aligned}
\overline{y} &= \frac{1}{m}\iint\limits_D x\rho(x,y)dA \\
&= \frac{1}{m}\int_0^2 dx \int_{\frac{x}{2}}^{3-x} y(x+y)dy \\
&= \frac{1}{m}\int_0^2 \left(\frac{1}{2}xy^2 + \frac{1}{3}y^3\right)\Bigg|_{y=\frac{x}{2}}^{y=3-x} dx \\
&= \frac{1}{6}\left\{\int_0^2 \left[\frac{1}{2}x(3-x)^2 + \frac{1}{3}(3-x)^3\right] dx - \int_0^2 \left[\frac{1}{2}x\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{x}{2}\right)^3\right] dx\right\} \\
&= \frac{3}{2}
\end{aligned}$$

Vậy khối lượng của tấm mỏng cần tìm là 6, khối tâm của tấm mỏng cần tìm là $I(\frac{3}{4}, \frac{3}{2})$.
Dùng MATLAB giải bài toán:

Code:

```
% Gioi han x
x_min = 0;
x_max = 2;

% Gioi han y
y_min = @(x) 0.5 * x;
y_max = @(x) -x + 3;

% Ham mat do
rho = @(x, y) x + y;

% Tinh khoi luong
mass = integral2(@(x, y) rho(x, y), x_min, x_max, y_min, y_max);

% Tinh x_center cua trong tam
x_center = integral2(@(x, y) x .* rho(x, y), x_min, x_max, y_min, y_max) / mass;

% Tinh y_center cua trong tam
y_center = integral2(@(x, y) y .* rho(x, y), x_min, x_max, y_min, y_max) / mass;

% Hien thi ket qua
fprintf('Khoi luong cua tam mong la: %.4f\n', mass);
% 6.000
fprintf('Toa do cua tam mong la: (%.4f, %.4f)\n', x_center, y_center);
%0.7500; 1.5000
```

Kết quả MATLAB:

```
% Hiển thị kết quả
fprintf('Khối lượng của tấm mỏng là: %.4f\n', mass); % 6.000
fprintf('Tọa độ trọng tâm của tấm mỏng là: (%.4f, %.4f)\n', x_center, y_center); %0.7500; 1.5000
Khối lượng của tấm mỏng là: 6.0000
Tọa độ trọng tâm của tấm mỏng là: (0.7500, 1.5000)
>> |
```

Bài 11:

Một tấm mỏng chiếm phần của đĩa $x^2 + y^2 \leq 1$ trong góc phần tư thứ nhất. Tìm trọng tâm của nó nếu mật độ tại bất kỳ điểm nào tỷ lệ thuận với khoảng cách từ điểm đó đến trục x.

Giải:

Gọi m là khối lượng của tấm mỏng đã cho.

Gọi $I(\overline{x}, \overline{y})$ là khối tâm của tấm mỏng cần tìm.

Chuyển về tọa độ cực:

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}, \quad D: \begin{cases} 0 \leq r \leq 1 \\ 0 \leq \theta \leq \dfrac{\pi}{2} \end{cases}, \quad \rho(x, y) = ky = kr\sin\theta$$

- Tìm khối lượng m:

$$\begin{aligned}
m &= \iint\limits_D \rho(x,y)dA \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^1 kr^2 \sin\theta dr \\
&= k\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{3}r^3 \sin\theta\right)\Bigg|_{r=0}^{r=1} d\theta \\
&= \frac{1}{3}k\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta d\theta \\
&= \frac{1}{3}k
\end{aligned}$$

- Tìm khối tâm $I(\overline{x},\overline{y})$:
Tìm $\overline{y}$:

$$\begin{aligned}
\overline{y} &= \iint\limits_D x\rho(x,y)dA \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^1 kr^3 \sin\theta\cos\theta dr \\
&= k\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{4}r^4 \sin\theta\cos\theta\right)\Bigg|_{r=0}^{r=1} d\theta \\
&= \frac{1}{4}k\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta\cos\theta d\theta \\
&= \frac{1}{8}k
\end{aligned}$$

Tìm $\overline{x}$:

$$\begin{aligned}
\overline{x} &= \iint\limits_D y\rho(x,y)dA \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^1 kr^3 (\sin\theta)^2 dr \\
&= k\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{1}{4}r^4 (\sin\theta)^2\right]\Bigg|_{r=0}^{r=1} d\theta \\
&= \frac{1}{4}k\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin\theta)^2 d\theta \\
&= \frac{\pi}{16}k
\end{aligned}$$

Ta có:
$I(\overline{x},\overline{y}) = I(\frac{\overline{y}}{m},\frac{\overline{x}}{m}) = I\left(\frac{3}{8},\frac{3\pi}{16}\right)$

Vậy khối tâm cần tìm là $I\left(\dfrac{3}{8}, \dfrac{3\pi}{16}\right)$.

Dùng MATLAB giải bài toán:

Code:

```
% K la mot bien so bat ky se bi triet tieu
k = 1; % chon bat ky gia tri cua k

%Ham mat do
rho = @(r, theta) r .* sin(theta) .* k;

% Mien xac dinh D
r_min = 0;
r_max = 1;
theta_min = 0;
theta_max = pi/2;

%Tinh khoi luong
mass = integral2(@(r, theta) rho(r, theta) .* r, r_min, r_max, theta_min, theta_max
    );

I_x = integral2(@(r, theta) r .* rho(r, theta) .* sin(theta) .* r, r_min, r_max,
    theta_min, theta_max);

I_y = integral2(@(r, theta) r .* rho(r, theta) .* cos(theta) .* r, r_min, r_max,
    theta_min, theta_max);

% Tinh toa do cua trong tam
x_bar = I_y / mass; % Toa do x cua trong tam
y_bar = I_x / mass; % Toa do y cua trong tam

% Hien thi ket qua
fprintf('Khoi luong cua tam mong la: %.4f\n', mass);
% 0.3333
fprintf('Trong tam (x_bar, y_bar): (%.4f, %.4f)\n', x_bar, y_bar);
% 0.3750; 0.5890
```

Kết quả MATLAB:

```
% Hiển thị kết quả
fprintf('Khối lượng của tấm mỏng là: %.4f\n', mass); % In ra khối lượng của tấm mỏng % 0.3333
fprintf('Trọng tâm (x_bar, y_bar): (%.4f, %.4f)\n', x_bar, y_bar); % In ra tọa độ của trọng tâm % 0.3750; 0.5890
Khối lượng của tấm mỏng là: 0.3333
Trọng tâm (x_bar, y_bar): (0.3750, 0.5890)
>>
```

Bài 15:

Tìm trọng tâm của một tấm mỏng có hình dạng là tam giác vuông cân với hai cạnh bằng nhau có độ dài a, nếu mật độ tại bất kỳ điểm nào tỷ lệ thuận với bình phương khoảng cách từ đỉnh đối diện với cạnh huyền.

Giải:

Gọi m là khối lượng của tấm mỏng đã cho.

Gọi $I(\overline{x}, \overline{y})$ là khối tâm của tấm mỏng cần tìm.

Miền xác định D: $\begin{cases} 0 \leq x \leq a \\ 0 \leq y \leq a - x \end{cases}$

Đặt đỉnh đối diện với cạnh huyền tại $(0, 0)$, ta được: $\rho(x, y) = k(x^2 + y^2)$.

Khi đó:

- Khối lượng m:

$$\begin{aligned} m &= \iint\limits_D \rho(x, y) dA \\ &= \int_0^a dx \int_0^{a-x} k(x^2 + y^2) dy \\ &= k \int_0^a \left[x^2 y + \frac{y^3}{3} \right] \Bigg|_{y=0}^{y=a-x} dx \\ &= k \int_0^a \left[x^2 (a-x) + \frac{1}{3}(a-x)^3 \right] dx \\ &= \frac{1}{6} a^4 k \end{aligned}$$

- Khối tâm:

Theo tính đối xứng, ta có:

$$\begin{aligned} M_x = M_y &= \iint\limits_D y \rho(x, y) dA \\ &= \int_0^a dx \int_0^{a-x} ky(x^2 + y^2) dy \\ &= k \int_0^a \left(\frac{1}{2} y^2 x^2 + \frac{1}{4} y^4 \right) \Bigg|_{y=0}^{y=a-x} dx \\ &= k \int_0^a \left[\frac{1}{2}(a-x)^2 x^2 + \frac{1}{4}(a-x)^4 \right] dx \\ &= \frac{1}{15} a^5 k \end{aligned}$$

Ta có: $I(\overline{x}, \overline{y}) = I(\frac{M_y}{m}, \frac{M_x}{m}) = I\left(\frac{2}{5}a, \frac{2}{5}a\right)$

Vậy khối tâm cần tìm là $I\left(\frac{2}{5}a, \frac{2}{5}a\right)$.

Dùng MATLAB giải bài toán:

Code:

```
% Do dai cua tam giac can
a = 1; % O day lay a = 1
k = 1; % Chon k = 1
% Gia tri a co the tuy y thay doi tuy vao de bai

% Ham mat do
rho = @(x, y) (x.^2 + y.^2) .* k;
```

```
% Mien xac dinh
x_min = 0;
x_max = a;
y_min = 0;
y_max = @(x) (a - x);

% Tinh khoi luong
mass = integral2(@(x, y) rho(x, y), 0, a, 0, @(x) a - x);

% Tinh toa do trong tam
x_center = integral2(@(x, y) x .* rho(x, y), 0, a, 0, @(x) (a - x)) / mass;
y_center = integral2(@(x, y) y .* rho(x, y), 0, a, 0, @(x) (a - x)) / mass;

% Hien thi ket qua
fprintf('Trong tam cua tam mong (x,y) la: (%.4f, %.4f)\n', x_center, y_center);
% 0.4000; 0.4000
```

Kết quả MATLAB:

```
% Hiển thị kết quả
fprintf('Trọng tâm của tấm mỏng (x̄, ȳ) là: (%.4f, %.4f)\n', x_center, y_center); % 0.4000; 0.4000
Trọng tâm của tấm mỏng (x̄, ȳ) là: (0.4000, 0.4000)
>>
```

Bài 20:

Xét một lưỡi quạt hình vuông với cạnh có độ dài 2 và góc dưới bên trái đặt tại gốc tọa độ. Nếu mật độ của lưỡi quạt là $\rho(x,y) = 1 + 0.1x$, thì khó khăn hơn khi quay lưỡi quạt quanh trục x hay trục y?

Giải:

Để xác định độ khó quay lưỡi quạt quanh các trục, ta cần tính momen quán tính quanh các trục x và y.

Miền xác định $D : \begin{cases} 0 \le x \le 2 \\ 0 \le y \le 2 \end{cases}$

Tìm I_x:

$$\begin{aligned} I_x &= \iint\limits_D y^2(\rho(x,y))dA \\ &= \int_0^2 y^2 dy \int_0^2 (1+0.1x)dx \\ &= \frac{8}{3}\int_0^2 (1+0.1x)dx \\ &= \frac{88}{15} \end{aligned}$$

Tìm I_y:

$$\begin{aligned}
I_y &= \iint\limits_D x^2(\rho(x,y))dA \\
&= \int_0^2 dy \int_0^2 x^2(1+0.1x)dx \\
&= \frac{46}{15}\int_0^2 dy \\
&= \frac{92}{15}
\end{aligned}$$

Momen quán tính lớn đòi hỏi một lực momen lớn hơn để thay đổi tốc độ quay của nó. Điều này có nghĩa là:

- Khi momen quán tính lớn, vật sẽ chống lại sự thay đổi trạng thái quay của nó mạnh mẽ hơn. Do đó, sẽ cần một lực lớn hơn để làm cho vật bắt đầu quay hoặc dừng quay.
- Khi momen quán tính nhỏ, vật sẽ dễ dàng thay đổi trạng thái quay hơn, cần ít lực hơn để bắt đầu hoặc dừng quay.

Do $Iy > Ix$, nên ta kết luận nên ta kết luận được xoay cánh quạt theo chiều trục y sẽ khó hơn trục x.

Dùng MATLAB giải bài toán:
Code:

```
% Ham mat do
rho = @(x, y) 1 + 0.1*x;

% Mien xac dinh D
x_min = 0;
x_max = 2;
y_min = 0;
y_max = 2;

% Tinh I_y
I_y = integral2(@(x, y) rho(x, y) .* x.^2, x_min, x_max, y_min, y_max); %6.1333

% Tinh I_x
I_x = integral2(@(x, y) rho(x, y) .* y.^2, x_min, x_max, y_min, y_max); %5.8667

% Hien thi ket qua
fprintf('Momen quan tinh truc y (I_y) la: %.4f\n', I_y);
fprintf('Momen quan tinh truc x (I_x) la: %.4f\n', I_x);

% So sanh va dua ra ket luan
if I_y > I_x
    fprintf('Quay luoi quat quanh truc y kho hon.\n');
else
    fprintf('Quay luoi quat quanh truc x kho hon.\n');
end
```

Kết quả MATLAB:

```
% So sánh và đưa ra kết luận
if I_y > I_x
    fprintf('Quay lưỡi quạt quanh trục y khó hơn.\n'); % Đúng
else
    fprintf('Quay lưỡi quạt quanh trục x khó hơn.\n'); % Sai
end
Mômen quán tính quanh trục y (I_y) là: 6.1333
Mômen quán tính quanh trục x (I_x) là: 5.8667
Quay lưỡi quạt quanh trục y khó hơn.
>>
```

Bài 21:

Sử dụng hệ thống đại số máy tính để tìm khối lượng, trọng tâm và momen quán tính của tấm mỏng chiếm vùng D và có hàm mật độ cho trước.

- $D = \{(x, y) \,|\, 0 \le y \le \sin x;\ 0 \le x \le \pi\}$
- $\rho(x, y) = xy$

Giải:
Gọi m là khối lượng tấm mỏng cần tìm.
Gọi $(\overline{x}, \overline{y})$ là khối tâm của tấm mỏng cần tìm.
- Khối lượng:

$$\begin{aligned} m &= \iint_D \rho(x,y)dA \\ &= \int_0^{\pi}\int_0^{\sin x} xydxdy \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{\pi} x\sin^2 xdx \\ &= \frac{\pi^2}{8} \end{aligned}$$

- Khối tâm:

$$\begin{aligned} \overline{x} &= \frac{1}{m}\iint_D x\rho(x,y)dA \\ &= \frac{1}{m}\int_0^{\pi}\int_0^{\sin x} x^2ydxdy \\ &= \frac{8}{\pi^2}\int_0^{\pi} x^2\frac{y^2}{2}\bigg|_{y=0}^{y=\sin x} dx \\ &= \frac{4}{\pi^2}\int_0^{\pi} x^2\sin^2 xdx \\ &= \frac{2\pi^2-3}{3\pi} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\overline{y} &= \frac{1}{m}\iint_D y\rho(x,y)dA \\
&= \frac{1}{m}\int_0^{\pi}\int_0^{\sin x} xy^2 dxdy \\
&= \frac{8}{\pi^2}\int_0^{\pi} x\frac{y^3}{2}\Bigg|_{y=0}^{y=\sin x} dx \\
&= \frac{2}{\pi^2}\int_0^{\pi} x\sin^3 x dx \\
&= \frac{16}{9\pi}
\end{aligned}$$

- Momen quán tính:
+ Theo trục x:

$$\begin{aligned}
I_x &= \iint_D y^2\rho(x,y)dA \\
&= \int_0^{\pi}\int_0^{\sin x} y^3 xdxdy \\
&= \frac{1}{4}\int_0^{\pi} xy^4\Bigg|_{y=0}^{y=\sin x} dx \\
&= \frac{3\pi^2}{64}
\end{aligned}$$

+ Theo trục y:

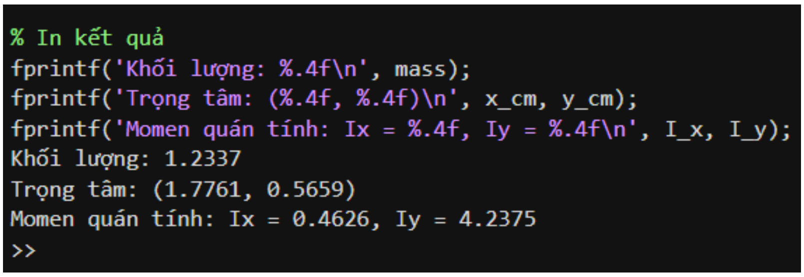
$$\begin{aligned}
I_y &= \iint_D x^2\rho(x,y)dA \\
&= \int_0^{\pi}\int_0^{\sin x} yx^3 dxdy \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{\pi} x^3y^2\Bigg|_{y=0}^{y=\sin x} dx \\
&= \frac{\pi^4-3\pi^2}{16}
\end{aligned}$$

Vậy:
- Khối lượng tấm mỏng cần tìm: $\frac{\pi^2}{8}$.
- Khối tâm tấm mỏng cần tìm: $(\frac{2\pi^2-3}{3\pi}, \frac{16}{9\pi})$.
- Momen quán tính cần tìm: $I_x = \frac{3\pi^2}{64}$ và $I_y = \frac{\pi^4-3\pi^2}{16}$.

Dùng MATLAB giải bài toán:
Code:

```matlab
% Khai bao bien
syms x y;

% Ham mat do
rho = x*y;

% Tinh khoi luong
mass = int(int(rho, y, 0, sin(x)), x, 0, pi);

% Tinh toa do trong tam
x_cm = 1/mass * int(int(x*rho, y, 0, sin(x)), x, 0, pi);
y_cm = 1/mass * int(int(y*rho, y, 0, sin(x)), x, 0, pi);

% Tinh momen quan tinh
I_x = int(int(y^2*rho, y, 0, sin(x)), x, 0, pi);
I_y = int(int(x^2*rho, y, 0, sin(x)), x, 0, pi);

% In ket qua
fprintf('Khoi luong: %.4f\n', mass);
fprintf('Trong tam: (%.4f, %.4f)\n', x_cm, y_cm);
fprintf('Momen quan tinh: Ix = %.4f, Iy = %.4f\n', I_x, I_y);
```

Kết quả MATLAB:



```
% In kết quả
fprintf('Khối lượng: %.4f\n', mass);
fprintf('Trọng tâm: (%.4f, %.4f)\n', x_cm, y_cm);
fprintf('Momen quán tính: Ix = %.4f, Iy = %.4f\n', I_x, I_y);
Khối lượng: 1.2337
Trọng tâm: (1.7761, 0.5659)
Momen quán tính: Ix = 0.4626, Iy = 4.2375
>>
```

Bài 25:

Một tấm mỏng có mật độ không đổi $\rho(x, y) = \rho$ chiếm vùng cho trước. Tìm momen quán tính I_x và I_y và bán kính quay $\overline{\overline{x}}$ và $\overline{\overline{y}}$.
Phần của đĩa $x^2 + y^2 \leq a^2$ trong góc phần tư thứ nhất.
Giải:

Chuyển đổi về tọa độ cực: $\left\{(r, \theta) \,|\, 0 \leq r \leq a;\, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\right\}$ và $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$

Vì mật độ không đổi nên ta có khối lượng: $m = \rho S = \dfrac{\rho\pi r^2}{4}$

- Tính I_x:

$$\begin{aligned}
I_x &= \rho \iint\limits_D y^2 \rho(x,y) dA \\
&= \rho \int_0^a r^3 dr \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\theta d\theta \\
&= \rho \frac{r^4}{a}\bigg|_{r=0}^{r=a} \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos 2\theta) d\theta \\
&= \frac{\pi \rho a^4}{16}
\end{aligned}$$

- Tính I_y:

$$\begin{aligned}
I_y &= \rho \iint\limits_D x^2 \rho(x,y) dA \\
&= \rho \int_0^a r^3 dr \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta d\theta \\
&= \rho \frac{r^4}{a}\bigg|_{r=0}^{r=a} \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1+\cos 2\theta) d\theta \\
&= \frac{\pi \rho a^4}{16}
\end{aligned}$$

- Do $I_x = I_y = \dfrac{\pi \rho a^4}{16}$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \bar{\bar{x}} = \bar{\bar{y}} &= \sqrt{\frac{I_x}{m}} \\
&= \sqrt{\frac{\frac{\pi \rho a^4}{16}}{\frac{\rho \pi r^2}{4}}} \\
&= \frac{a}{2}
\end{aligned}$$

Dùng MATLAB giải bài toán:

Code:

```
rho_val = 1; % Gia tri nay thay doi tuy theo de bai
a_val = 1; % Gia tri nay thay doi tuy theo de bai

% Tinh khoi luong
mass_val = subs(mass, [rho, a], [rho_val, a_val]);

% Tinh momen quan tinh
I_x_val = subs(I_x, [rho, a], [rho_val, a_val]);
I_y_val = subs(I_y, [rho, a], [rho_val, a_val]);

```

```
% Tinh ban kinh quay
r_x_val = subs(r_x, [rho, a], [rho_val, a_val]);
r_y_val = subs(r_y, [rho, a], [rho_val, a_val]);

% In ket qua
fprintf('Momen quan tinh: Ix = %.4f, Iy = %.4f\n', double(I_x_val), double(I_y_val));
fprintf('Ban kinh quay: r_x = %.4f, r_y = %.4f\n', double(r_x_val), double(r_y_val));
```

Kết quả MATLAB:

```
% In kết quả
fprintf('Momen quán tính: Ix = %.4f, Iy = %.4f\n', double(I_x_val), double(I_y_val));
fprintf('Bán kính quay: r_x = %.4f, r_y = %.4f\n', double(r_x_val), double(r_y_val));
Momen quán tính: Ix = 0.1963, Iy = 0.1963
Bán kính quay: r_x = 0.5000, r_y = 0.5000
>>
```

Bài 32:

Xavier và Yolanda đều có lớp học kết thúc vào buổi trưa và họ đồng ý gặp nhau sau giờ học mỗi ngày. Họ đến quán cà phê độc lập với nhau. Thời gian đến của Xavier là X và thời gian đến của Yolanda là Y, trong đó X và Y được đo bằng phút sau buổi trưa. Các hàm mật độ xác suất cá nhân

$$f_1(x) = \begin{cases} e^{-x} & (if\, x \geq 0) \\ 0 & (if\, x \leq 0) \end{cases} \quad , \quad f_2(y) = \begin{cases} \dfrac{y}{50} & (if\, 0 \leq y \leq 10) \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

(Xavier đến một lúc nào đó sau buổi trưa và có khả năng đến đúng giờ hơn là đến muộn. Yolanda luôn đến trước 12:10 PM và có khả năng đến muộn hơn là đến sớm). Sau khi Yolanda đến, cô ấy sẽ chờ Xavier trong tối đa nửa giờ, nhưng Xavier sẽ không chờ cô ấy. Tìm xác suất rằng họ gặp nhau.

Giải:

Gọi P là xác xuất để Xavier và Yolanda gặp nhau.

Chúng ta tìm kiếm xác xuất mà x và y thỏa: $\begin{cases} 0 \leq y \leq 10 \\ y \leq x \leq y + 30 \end{cases}$

Do chúng là các biến ngẫu nhiên độc lập nên: $f(x, y) = f_1(x) f_2(y)$

$\Rightarrow$

$$\begin{aligned} P &= \int_0^{10} \int_y^{y+30} e^{-x} \frac{y}{50} dx dy \\ &= -\int_0^{10} \frac{y}{50} (e^{-y-30} - e^{-y}) dy \end{aligned}$$

Tính tích phân từng phần với $u = \dfrac{y}{50}$ và $dv = e^{-y-30} - e^{-y}$

$\Rightarrow$

$$\begin{aligned}
P &= -\left[\frac{y}{50}\left(e^{-y}-e^{-y-30}\right)\Big|_{y=0}^{y=10} - \frac{1}{50}\int_0^{10} e^{-y}-e^{-y-30}dy\right] \\
&= -\left[\frac{1}{5}\left(e^{-10}-e^{-40}\right) + \frac{1}{50}\left(e^{-10}-e^{-40}-1+e^{-30}\right)\right] \\
&= -\frac{e^{-10}}{5} - \frac{e^{-10}}{50} + \frac{2e^{-40}}{5} + \frac{e^{-40}}{50} - \frac{e^{-30}}{50} + \frac{1}{50} \\
&\approx 0.02
\end{aligned}$$

Vậy xác suất để Xavier và Yolanda gặp nhau là: 0.02(2%).
Dùng MATLAB giải bài toán:
Code:

```
% Khai bao bien
syms x y;

% Ham mat do xac suat
f1 = @(x) (x >= 0) .* exp(-x);
f2 = @(y) (y >= 0 & y <= 10) .* y / 50;

% Tinh xac suat gap nhau
P_meet = double(integral2(@(x, y) f1(x) .* f2(y) .* (y <= x & x <= y + 30), 0, inf,
    0, inf));

% In ket qua
fprintf('Xac suat rang Xavier va Yolanda gap nhau la: %.4f\n', P_meet);
```

Kết quả MATLAB:

```
% In kết quả
fprintf('Xác suất rằng Xavier và Yolanda gặp nhau là: %.4f\n', P_meet);

Xác suất rằng Xavier và Yolanda gặp nhau là: 0.0200
>> |
```

Bài 33:

Khi nghiên cứu sự lây lan của một dịch bệnh, ta giả sử rằng xác suất mà một người bị nhiễm sẽ lây bệnh cho một người không bị nhiễm là một hàm của khoảng cách giữa họ. Xét một thành phố hình tròn có bán kính 10 dặm mà dân số được phân bố đều. Đối với một người không bị nhiễm tại một điểm cố định $A(x_0, y_0)$, hàm xác suất được cho bởi
$f(P) = \frac{1}{20}[20 - d(P, A)]$ trong đó d(P,A) biểu thị khoảng cách giữa P và A.

(a) Giả sử mức độ phơi nhiễm của một người đối với bệnh là tổng của các xác suất nhiễm bệnh từ tất cả các thành viên của dân số. Giả sử rằng những người bị nhiễm được phân bố đều khắp thành phố, với k người bị nhiễm trên mỗi dặm vuông. Tìm tích phân kép biểu diễn mức độ phơi nhiễm của một người cư trú tại A.

Giải:

Khi đó xác suất truyền nhiễm của từ một người ở hình chữ nhật: $f(P) = \dfrac{20-d}{20}$

Số người trong một dặm vuông: kdA

Do đó, sự tiếp xúc của người đó từ hình chữ nhật: $f(P)kdA$

Gọi M là tích phân kép biểu thị mức độ tiếp xúc của một người cư trú tại A.Khi đó:

$$\begin{aligned}
M &= k\iint\limits_D f(P)dA \\
&= k\iint\limits_D \frac{20-d}{20}dA\left(d=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_o)^2}\right) \\
&= k\iint\limits_D \left[1-\frac{1}{20}\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}\right]dA
\end{aligned}$$

(b) Tính giá trị của tích phân cho trường hợp A ở trung tâm thành phố và cho trường hợp A nằm ở rìa thành phố. Bạn muốn sống ở đâu?

Giải:

Ta có: $M = k\iint\limits_D \left[1-\frac{1}{20}\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}\right]$ với D là vùng trong hình tròn $x^2+y^2=100$

Trường hợp A ở rìa thành phố $x_0 = 10, y_0 = 0$:

$$\begin{aligned}
M &= k\iint\limits_D \left[1-\frac{1}{20}\sqrt{(x-10)^2+y^2}\right]dA \\
&= k\int_0^{2\pi}\int_0^{10} r\left[1-\frac{1}{20}\sqrt{(r\cos\theta-10)^2+r^2\sin^2\theta}\right]drd\theta \\
&\approx 136k
\end{aligned}$$

Trường hợp A ở trung tâm thành phố $x_0, y_0 = 0$:

$M = k\iint\limits_D \left(1-\frac{1}{20}\sqrt{x^2+y^2}\right)dA$

Trong hệ tọa độ cực, ta có:

$$\begin{aligned}
M &= k\int_0^{2\pi}\int_0^{10}\left(1-\frac{1}{20}\sqrt{r^2}\right)rdrd\theta \\
&= k\theta\Big|_{\theta=0}^{\theta=2\pi}\int_0^{10}\left(r-\frac{r^2}{20}\right)dr \\
&= \frac{200\pi k}{3} \approx 209k
\end{aligned}$$

Kết luận:

Sự tiếp xúc ở rìa thành phố thành phố ít hơn.Tôi sẽ chọn sống ở rìa thành phố.

Dùng MATLAB giải bài toán:

Code:

```
% Khai bao bien
```

```
syms x y x0 y0 k real;

k = 1; %Tuy chon dua vao de bai toan

% Ham xac suat
f = @(x, y, x0, y0) 1/20 * (20 - sqrt((x-x0).^2 + (y-y0).^2));

% Tinh muc do phoi nhiem
exposure = @(x0, y0) k * double(integral2(@(x, y) f(x, y, x0, y0), -10, 10, @(x) -
    sqrt(100-x.^2), @(x) sqrt(100-x.^2)));

% Truong hop A o trung tam thanh pho
exposure_center = exposure(0, 0);

% Truong hop A o ria thanh pho
exposure_edge = exposure(10, 0);

% In ket qua
fprintf('Muc do phoi nhiem khi A nam o trung tam thanh pho: %.4f\n',
    exposure_center);
fprintf('Muc do phoi nhiem khi A nam o ria thanh pho: %.4f\n', exposure_edge);

% So sanh
if exposure_center < exposure_edge
    fprintf('Ban nen song o trung tam thanh pho.\n');
else
    fprintf('Ban nen song o ria thanh pho.\n');
end
```

Kết quả MATLAB:

```
% So sánh
if exposure_center < exposure_edge
    fprintf('Bạn nên sống ở trung tâm thành phố.\n');
else
    fprintf('Bạn nên sống ở rìa thành phố.\n');
end
Mức độ phơi nhiễm khi A ở trung tâm thành phố: 209.4395
Mức độ phơi nhiễm khi A nằm ở rìa thành phố: 136.3815
Bạn nên sống ở rìa thành phố.
>> |
```

3 TỔNG KẾT

Với đề tài này, chúng em đã giải thích và làm rõ được phương trình tổng quát nhất để xác định diện tích mặt phẳng, khối lượng và momen quán tính và thể tích của một khối vật thể Ω bất kỳ. Đồng thời cũng đã nêu rõ các đặc điểm cũng như xác minh được độ tin cậy của phương pháp trên.

Ngoài ra, chúng em cũng đã đạt được mục tiêu chính của bài tập đó là hiểu sâu hơn về phần mềm quan trọng như MATLAB. MATLAB không chỉ giúp tối ưu hóa thời gian tính toán và xử lý vấn đề hơn so với các phương pháp thông thường, mà còn mang lại sự thuận tiện và dễ sử dụng thông qua các câu lệnh, hàm, và giao diện người dùng.

Mặc dù quá trình thiết kế đoạn mã có thể phức tạp và đòi hỏi nhiều thời gian, nhưng đó cũng là những trải nghiệm quý giá, giúp chúng em học hỏi và phát triển kỹ năng.

4 TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] Nguyễn Đình Huy, Ngô Thu Lương, Nguyễn Quốc Lân, Nguyễn Bá Thi, Trần Lưu Cường, Đậu Thế Phiệt, Đặng Văn Vinh, Trần Quốc Khánh, Nguyễn Thị Xuân Anh, and Trần Ngọc Diễm. *"Giáo Trình Giải Tích 2"*. Trường Đại học Bách Khoa TP.Hồ Chí Minh, 2009.

[2] James Stewart. *"Calculus: Early Transcendentals, SIXTH EDITION"*. Thomson Brooks/-Cole, 2008.