

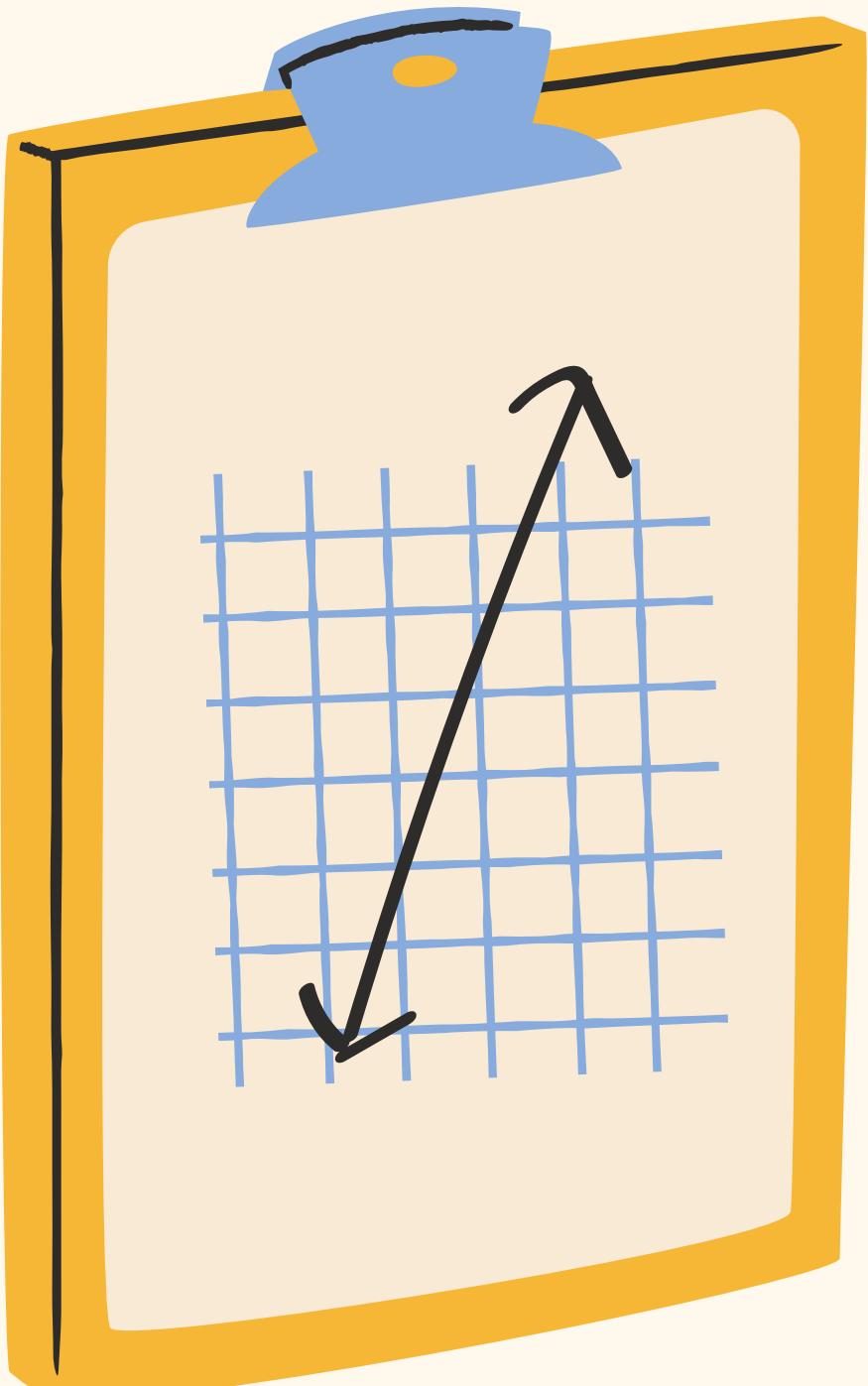
BÁO CÁO BÀI TẬP LỚN GIẢI TÍCH 2

ĐỀ TÀI 20

ỨNG DỤNG CỦA TÍCH PHÂN KÉP

GVHD: ĐÀO HUY CƯỜNG
NHÓM: GT2-L29-20

DANH SÁCH THÀNH VIÊN



- ◆ Phạm Tuấn Vũ
- ◆ Nguyễn Tường Vy
- ◆ Nguyễn Quốc Triệu Vy
- ◆ Phạm Công Võ
- ◆ Phan Ngọc Thảo Vy
- ◆ Lê Văn Quang Vinh

1. CƠ SỞ LÝ THUYẾT

1.1 TÍCH PHÂN BỘI HAI

**1.2 CÁC ỨNG DỤNG CỦA TÍCH
PHÂN KÉP**

**2. GIẢI CÁC BÀI TẬP SÁCH
JAMES STEAWART**

MỤC LỤC

1.1 TÍCH PHÂN BỘI HAI

Định nghĩa:

$$\iint_R f(x, y) dxdy = \iint_R f(x, y) dA = \lim_{m,n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f(x_{ij}^*, y_{ij}^*) \Delta x \Delta y$$

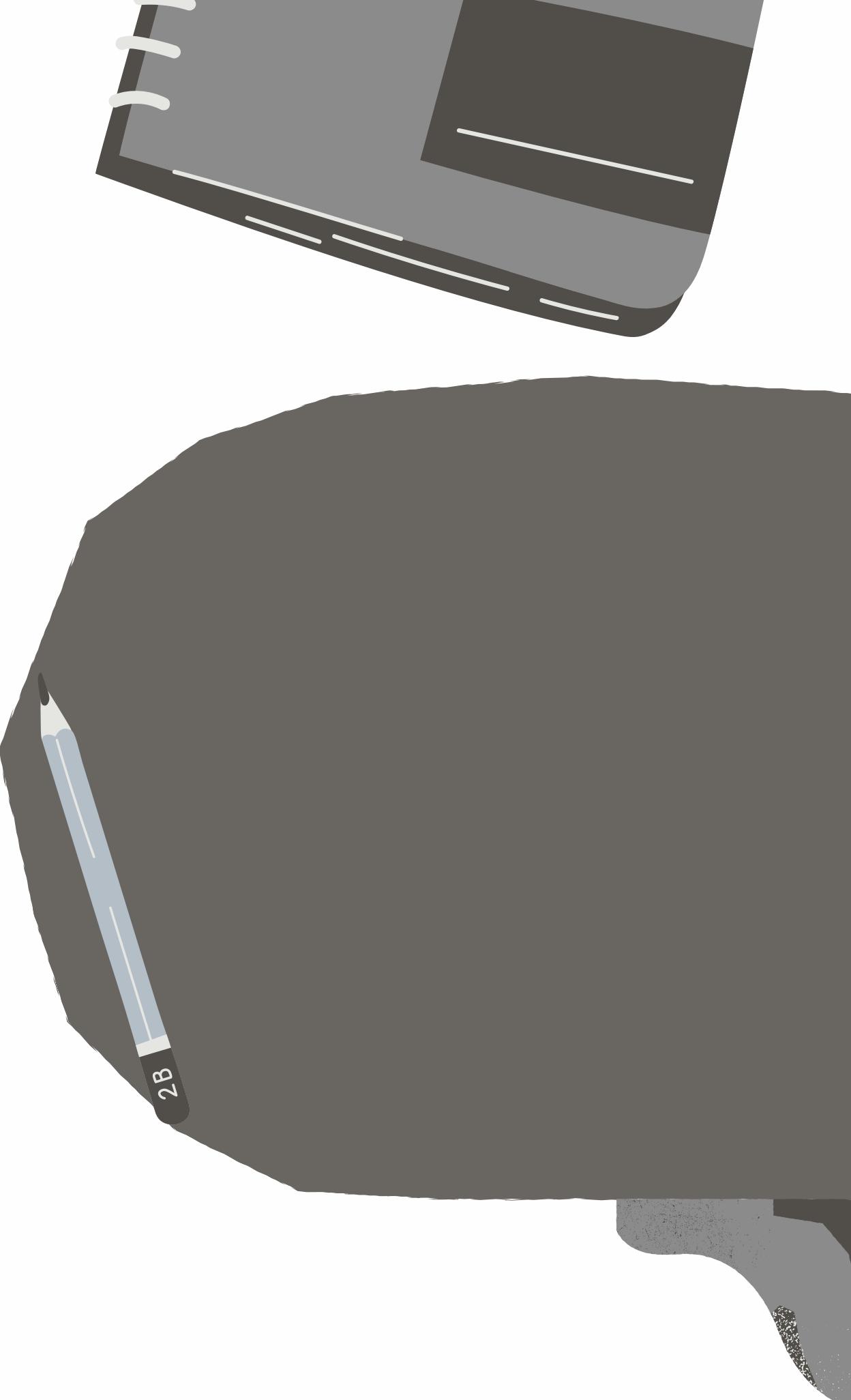
Tính chất:

a/ Nếu $R = R_1 + R_2$ và $f(x, y)$ khả tích trên R thì

$$\iint_R f(x, y) dxdy = \iint_{R_1} f(x, y) dxdy + \iint_{R_2} f(x, y) dxdy$$

b/ Nếu $f(x, y)$ và $|f(x, y)|$ là những hàm khả tích trên R thì

$$\left| \iint_R f(x, y) dxdy \right| = \iint_R |f(x, y)| dxdy$$



c/ Nếu $f(x, y)$ và $g(x, y)$ là những hàm khả tích trên R thì

$$\iint_R (f(x, y) \pm g(x, y)) dx dy = \iint_R f(x, y) dx dy \pm \iint_R g(x, y) dx dy$$

d/ Nếu \mathbf{c} là một hằng số, $f(x, y)$ là những hàm khả tích trên R thì

$$\iint_R (\mathbf{c} f(x, y)) dx dy = \mathbf{c} \iint_R f(x, y) dx dy, \mathbf{c} \in R$$

e/ Nếu $f(x, y)$ và $g(x, y)$ là những hàm khả tích trên R và $f(x, y) \geq g(x, y), \forall (x, y) \in R$ thì

$$\iint_R f(x, y) dx dy \geq \iint_R g(x, y) dx dy$$

f/ Nếu R là miền đóng, bị chặn thì

$$S_R = \iint_R dx dy$$

TÍCH PHÂN KÉP TRONG TỌA ĐỘ DESCARTES

Giả sử $f(x, y) \geq 0, \forall (x, y) \in R = [a, b] \times [c, d]$ là hàm liên tục trên hình chữ nhật D . Chúng ta cần tính tích phân $I = \iint_R f(x, y) dx dy$.

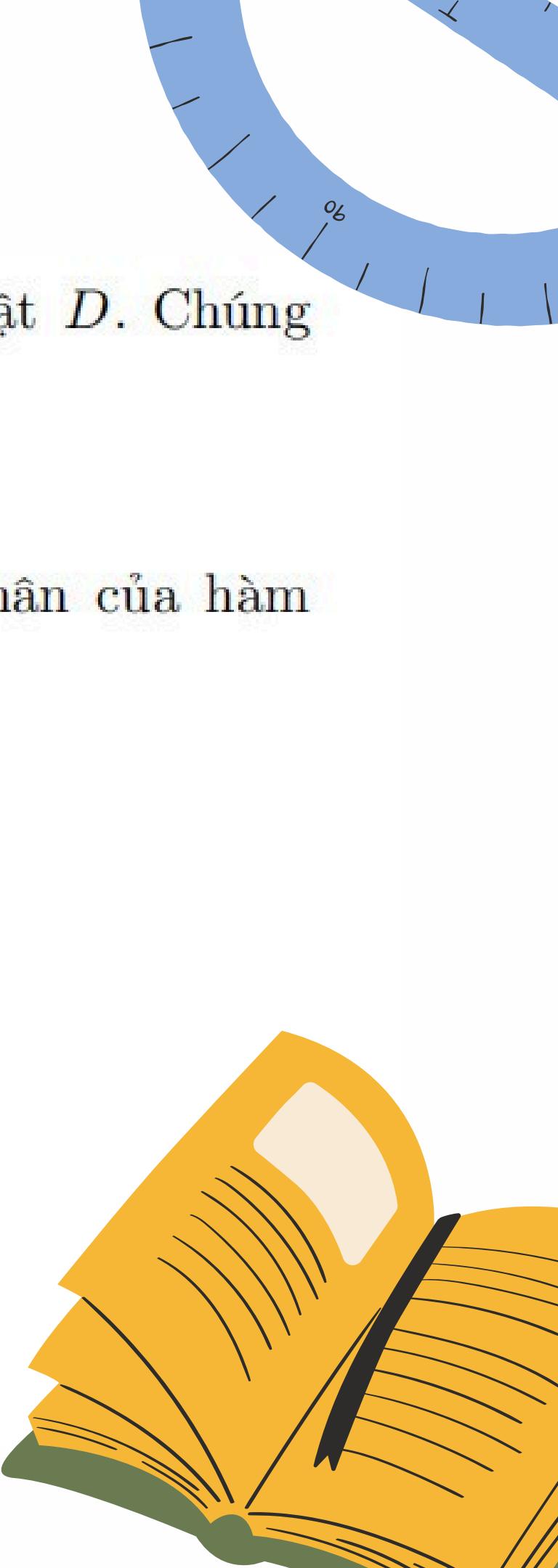
Chúng ta sử dụng kí hiệu $\int_c^d f(x, y) dy$ có nghĩa là cho x cố định và lấy tích phân của hàm $f(x, y)$ theo biến y từ c đến d . Như vậy:

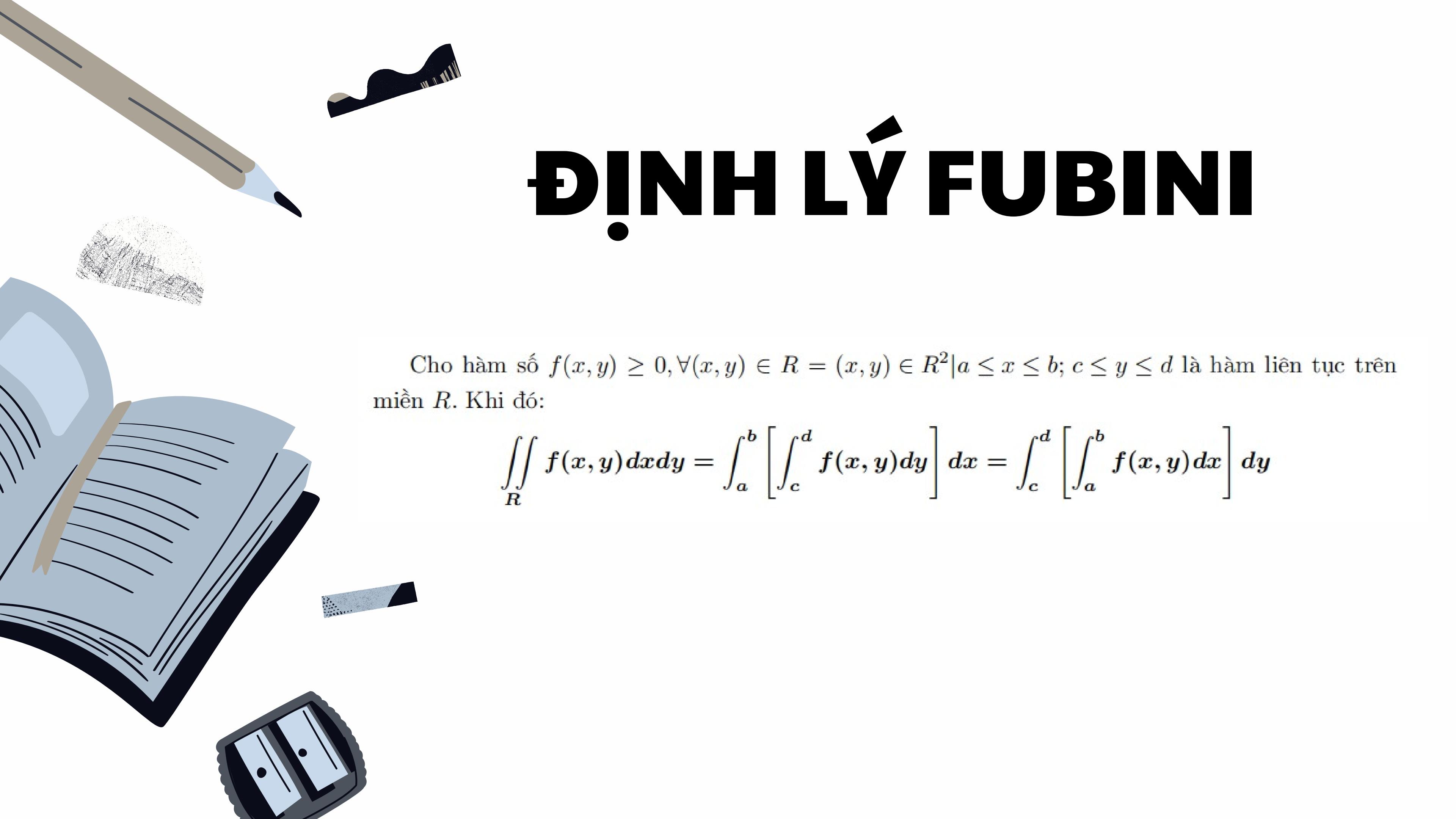
$$h(x) = \int_c^d f(x, y) dy$$

Nếu chúng ta tiếp tục lấy tích phân của hàm $h(x)$ theo biến x từ a đến b , ta được:

$$\int_a^b h(x) f(x, y) dx = \int_a^b \left[\int_c^d f(x, y) dy \right] dx$$

Tương tự, chúng ta cũng có khái niệm tích phân $\int_c^d \left[\int_a^b f(x, y) dx \right] dy$.





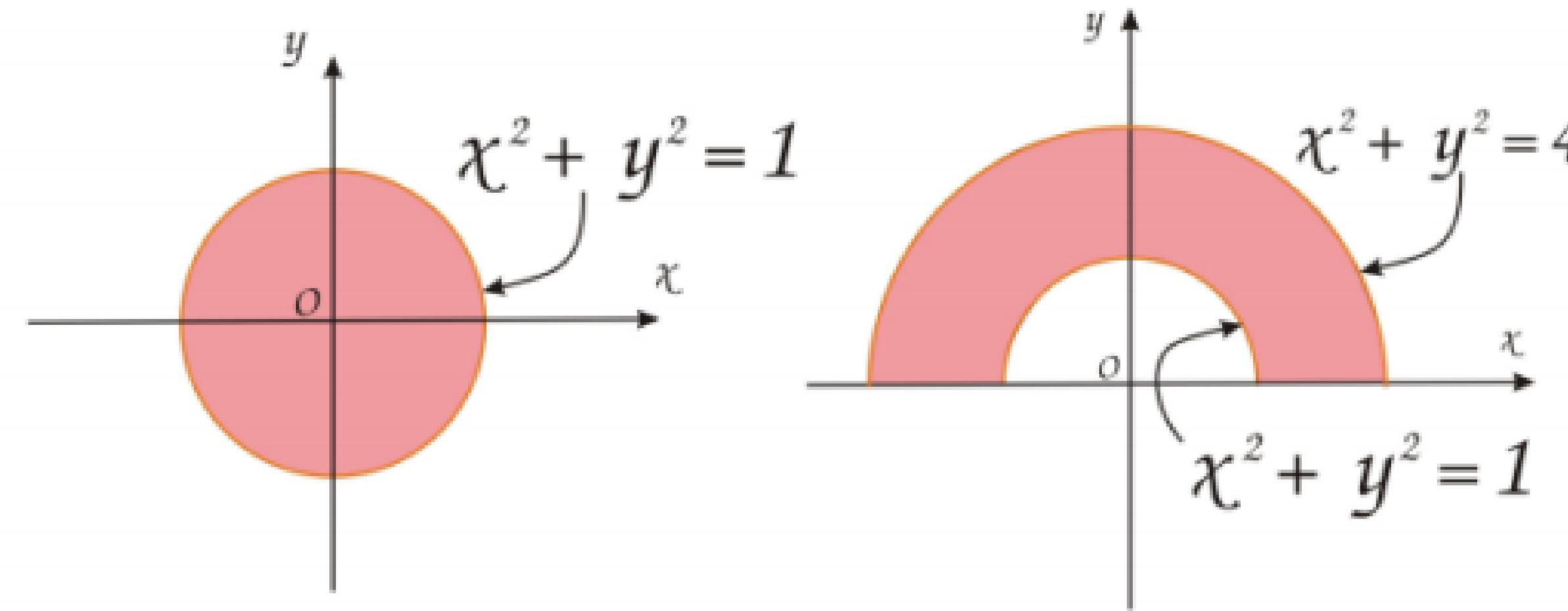
ĐỊNH LÝ FUBINI

Cho hàm số $f(x, y) \geq 0, \forall (x, y) \in R = (x, y) \in R^2 | a \leq x \leq b; c \leq y \leq d$ là hàm liên tục trên miền R . Khi đó:

$$\iint_R f(x, y) dx dy = \int_a^b \left[\int_c^d f(x, y) dy \right] dx = \int_c^d \left[\int_a^b f(x, y) dx \right] dy$$

TÍCH PHÂN KÉP TRONG TỌA ĐỘ CỰC

Giả sử chúng ta cần tính tích phân $\iint_D f(x, y) dxdy$, khi D có hình dạng



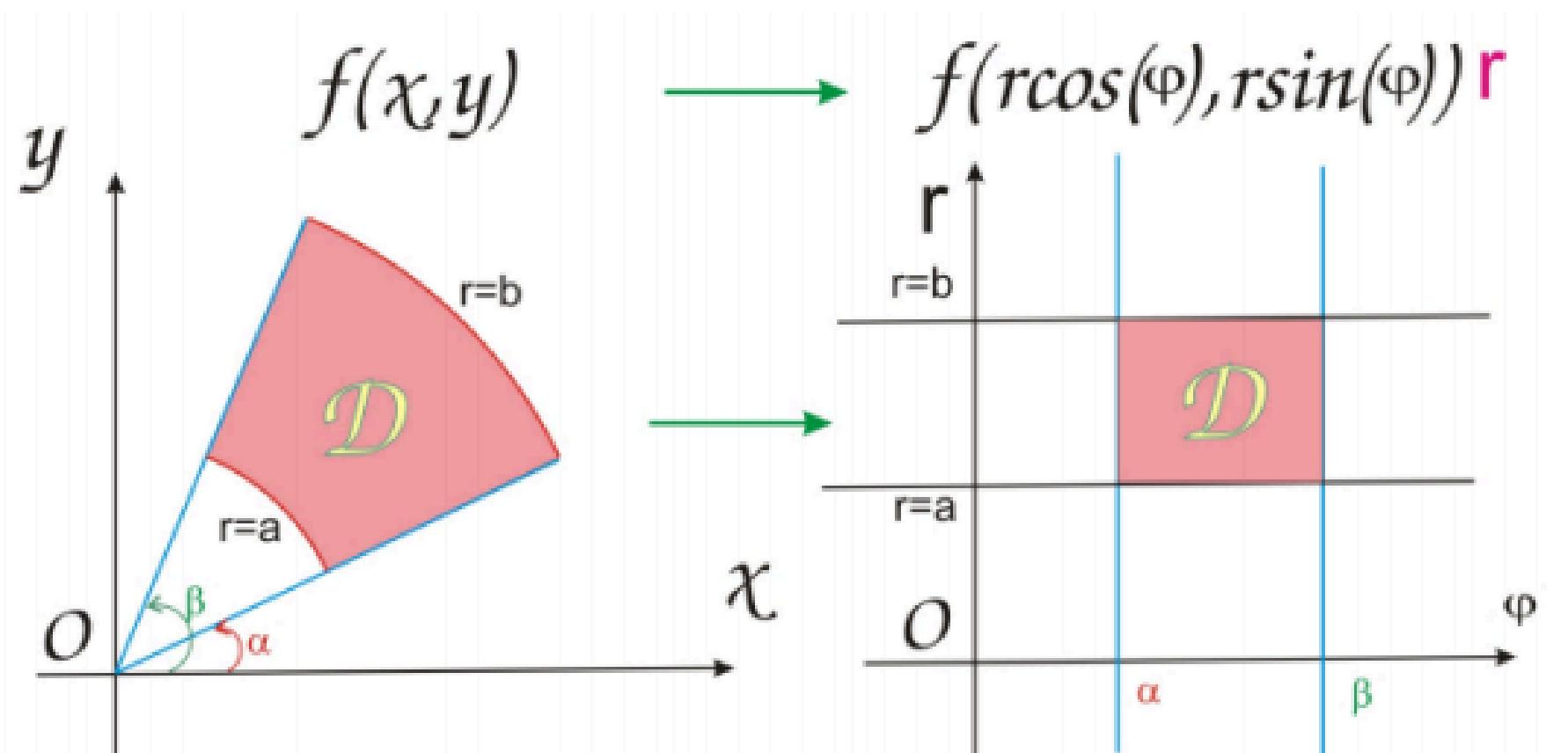
Hệ tọa độ cực (r, φ) xác định một điểm có tọa độ (x, y) như sau

$$r^2 = x^2 + y^2; \quad \begin{cases} x = r \cos(\phi), \\ y = r \sin(\phi) \end{cases}; \quad \tan(\phi) = \frac{y}{x}$$

ĐỊNH LÝ TÍCH PHÂN KÉP TRONG HỆ TỌA ĐỘ CỰC

Nếu $f(x, y)$ là hàm liên tục trên miền $R = (r, \phi) : 0 \leq r \leq b, \alpha \leq \phi \leq \beta$, ở đây $0 \leq \beta - \alpha \leq 2\pi$, thì

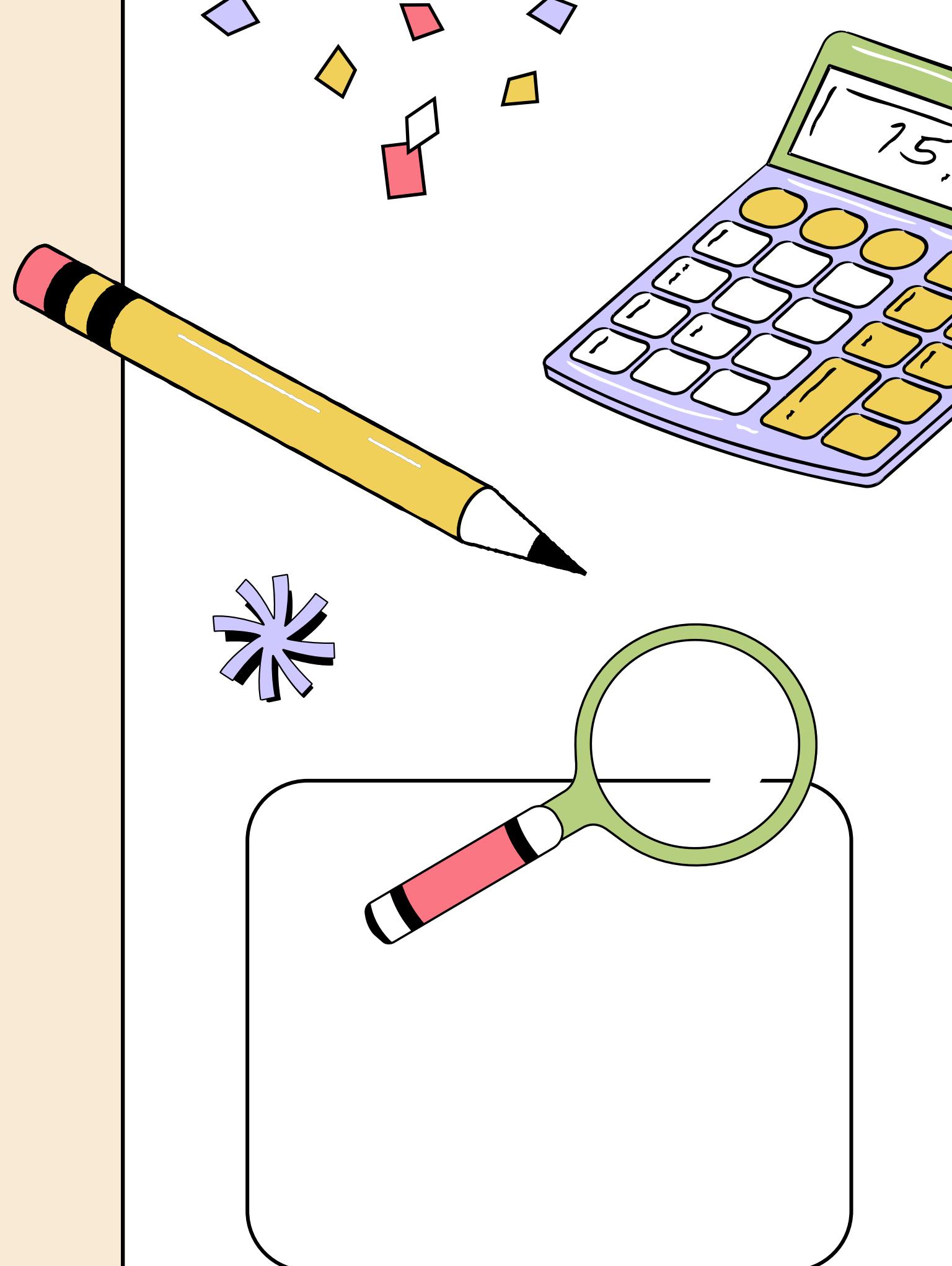
$$\iint_R f(x, y) dxdy = \int_{\alpha}^{\beta} \left[\int_a^b f(r \cos \alpha, r \sin \alpha) \color{red}{r} dr dp \right]$$



Hình 6: Miền D được chuyển từ hệ tọa độ Descartes sang hệ tọa độ cực

1.2 CÁC ỨNG DỤNG cỦA TÍCH PHÂN KÉP

- Tính diện tích phẳng D
- Tính thể tích của vật thể
- Tính mật độ và khối lượng
- Tính momen và khối tâm
- Tính momen quán tính
- Tính diện tích mặt cong



2. ỨNG DỤNG TÍCH PHÂN KÉP GIẢI CÁC BÀI TẬP SÁCH JAMES STEAWART

Bài 1:

Diện tích được phân bố trên hình chữ nhật $1 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq 2$ sao cho mật độ điện tích tại (x, y) là $\sigma(x, y) = 2xy + y^2$ (được đo bằng coulombs trên mét vuông ($\frac{C}{m^2}$)). Tính tổng điện tích trên hình chữ nhật.

Giải:

Gọi $Q (C)$ là tổng điện tích trên hình chữ nhật cần tìm.

Ta có:

Miền xác định D :
$$\begin{cases} 1 \leq x \leq 3 \\ 0 \leq y \leq 2 \end{cases}$$

Tổng điện tích trên hình chữ nhật là:
$$Q = \iint_D \sigma(x, y) dA$$

$$\begin{aligned} &= \int_0^2 dy \int_1^3 (2xy + y^2) dx \\ &= \int_0^2 (yx^2 + y^2 x) \Big|_{x=1}^{x=3} dy \\ &= \int_0^2 (2y^2 + 8y) dy \\ &= \frac{64}{3} (C) \end{aligned}$$

Vậy tổng điện tích trên hình chữ nhật cần tìm là $\frac{64}{3} (C)$.

Dùng MATLAB giải bài toán:

Code:

```
1 %Khai bao cac gioi han cua hình chu nhat
2 x_min = 1;
3 x_max = 3;
4 y_min = 0;
5 y_max = 2;
6
7 %Dinh nghia ham mat do dien tich
8 sigma = @(x, y) 2 .* x .* y + y.^2;
9
10 % Tich phan kep
11 total_charge = integral2(sigma, x_min, x_max, y_min, y_max);
12
13 % Hien thi ket qua
14 fprintf('Tổng diện tích trên hình chữ nhật là: %.4f coulombs\n', total_charge);
15 % 21.333 coulombs
```

Kết quả MATLAB:

```
% Hiển thị kết quả
fprintf('Tổng diện tích trên hình chữ nhật là: %.4f coulombs\n', total_charge);
% % 21.333 coulombs
Tổng diện tích trên hình chữ nhật là: 21.3333 coulombs
>>
```

Bài 3:

Tìm khối lượng và trọng tâm của một tấm mỏng chiếm vùng D và có hàm mật độ cho trước ρ .

- $D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 2, -1 \leq y \leq 1\}$
- $\rho(x, y) = xy^2$

Giải:

Gọi m là khối lượng của tấm mỏng cần tìm.

Gọi $I(\bar{x}, \bar{y})$ là khối tâm của tấm mỏng cần tìm.

Miền xác định D : $\begin{cases} 0 \leq x \leq 2 \\ -1 \leq y \leq 1 \end{cases}$

- Tính khối lượng m :

$$\begin{aligned} m &= \iint_D \rho(x, y) dA \\ &= \int_0^2 dx \int_{-1}^1 xy^2 dy \\ &= \int_0^2 \left(\frac{1}{3}y^3 x \right) \Big|_{y=-1}^{y=1} dx \\ &= \int_0^2 \frac{2}{3}x dx \\ &= \frac{4}{3} \end{aligned}$$

- Tính khối tâm $I(\bar{x}, \bar{y})$:

Tìm \bar{x} :

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{1}{m} \iint_D x \rho(x, y) dA \\ &= \frac{1}{m} \int_0^2 dx \int_{-1}^1 x (xy^2) dy \\ &= \frac{1}{m} \int_0^2 \left(\frac{1}{3}x^2 y^3 \right) \Big|_{y=-1}^{y=1} dx \\ &= \frac{3}{4} \int_0^2 \frac{2}{3}x^2 dx \\ &= \frac{4}{3} \end{aligned}$$

Tìm \bar{y} :

$$\begin{aligned} \bar{y} &= \frac{1}{m} \iint_D y \rho(x, y) dA \\ &= \frac{1}{m} \int_0^2 dx \int_{-1}^1 y (xy^2) dy \\ &= \frac{1}{m} \int_0^2 \left(\frac{1}{4}y^4 x \right) \Big|_{y=-1}^{y=1} dx \\ &= \frac{3}{4} \int_0^2 0 dx \\ &= 0 \end{aligned}$$

Vậy khối lượng của tấm mỏng cần tìm là $\frac{4}{3}$, khối tâm của tấm mỏng cần tìm là $I(\frac{4}{3}, 0)$.

Code:

```
1 % Mien xac dinh D
2 x_min = 0;
3 x_max = 2;
4 y_min = -1;
5 y_max = 1;
6
7 % Ham mat do
8 rho = @(x, y) x.*y.^2;
9
10 % Tinh khoi luong
11 mass = integral2(rho, x_min, x_max, y_min, y_max);
12
13 % Tinh toa do trong tam (x, y)
14 x_center = integral2(@(x, y) x .* rho(x, y), x_min, x_max, y_min, y_max) / mass;
15 y_center = integral2(@(x, y) y .* rho(x, y), x_min, x_max, y_min, y_max) / mass;
16
17 % Hien thi ket qua
18 fprintf('Khoi luong cua tam mong la: %.4f\n', mass);
19 % 1.3333
20 fprintf('Trung tam cua tam mong (x, y) la: (%.4f, %.4f)\n', x_center, y_center);
21 % 1.3333; 0.0000
```

Kết quả MATLAB:

```
% Hiển thị kết quả
fprintf('Khối lượng của tâm mỏng là: %.4f\n', mass); % 1.3333
fprintf('Trọng tâm của tâm mỏng (x, y) là: (%.4f, %.4f)\n', x_center, y_center); % 1.3333; 0.0000

Khối lượng của tâm mỏng là: 1.3333
Trọng tâm của tâm mỏng (x, y) là: (1.3333, 0.0000)
>> |
```

Bài 5:

Tìm khối lượng và trọng tâm của một tấm mỏng chiếm vùng tam giác D với các đỉnh $(0,0), (2,1), (0,3)$ và có hàm mật độ ρ .

- D là vùng tam giác với các đỉnh $(0,0), (2,1), (0,3)$
- $\rho(x,y) = x + y$

Giải:

Gọi m là khối lượng của tấm mỏng cần tìm.

Gọi $I(\bar{x}, \bar{y})$ là khối tâm của tấm mỏng cần tìm.

Ta có:

Miền xác định D :
$$\begin{cases} 0 \leq x \leq 2 \\ \frac{1}{2}x \leq y \leq -x + 3 \end{cases}$$

- Tính khối lượng m :

$$\begin{aligned} m &= \iint_D \rho(x,y)dA \\ &= \int_0^2 dx \int_{\frac{1}{2}x}^{-x+3} (x+y)dy \\ &= \int_0^2 \left(\frac{1}{2}y^2 + xy \right) \Big|_{y=\frac{1}{2}x}^{y=3-x} dx \\ &= \int_0^2 \left[\frac{1}{2}(3-x)^2 + x(3-x) \right] dx - \int_0^2 \left[\frac{1}{2}\left(\frac{x}{2}\right)^2 + x\left(\frac{x}{2}\right) \right] dx \\ &= 6 \end{aligned}$$

- Tính khối tâm $I(\bar{x}, \bar{y})$:

Tìm \bar{x} :

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{1}{m} \iint_D x\rho(x,y)dA \\ &= \frac{1}{m} \int_0^2 dx \int_{\frac{1}{2}x}^{3-x} x(x+y)dy \\ &= \frac{1}{m} \int_0^2 \left(\frac{1}{2}xy^2 + x^2y \right) \Big|_{y=\frac{1}{2}x}^{y=3-x} dx \\ &= \frac{1}{6} \left\{ \int_0^2 \left[\frac{1}{2}x(3-x)^2 + x^2(3-x) \right] dx - \int_0^2 \left[\frac{1}{2}x\left(\frac{x}{2}\right)^2 + x^2\left(\frac{x}{2}\right) \right] dx \right\} \\ &= \frac{3}{4} \end{aligned}$$

Tìm \bar{y} :

$$\begin{aligned} \bar{y} &= \frac{1}{m} \iint_D y\rho(x,y)dA \\ &= \frac{1}{m} \int_0^2 dx \int_{\frac{1}{2}x}^{3-x} y(x+y)dy \\ &= \frac{1}{m} \int_0^2 \left(\frac{1}{2}xy^2 + \frac{1}{3}y^3 \right) \Big|_{y=\frac{1}{2}x}^{y=3-x} dx \\ &= \frac{1}{6} \left\{ \int_0^2 \left[\frac{1}{2}x(3-x)^2 + \frac{1}{3}(3-x)^3 \right] dx - \int_0^2 \left[\frac{1}{2}x\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{x}{2}\right)^3 \right] dx \right\} \\ &= \frac{3}{2} \end{aligned}$$

Vậy khối lượng của tấm mỏng cần tìm là 6, khối tâm của tấm mỏng cần tìm là $I(\frac{3}{4}, \frac{3}{2})$.

Code:

```
1 % Gioi han x
2 x_min = 0;
3 x_max = 2;
4
5 % Gioi han y
6 y_min = @(x) 0.5 * x;
7 y_max = @(x) -x + 3;
8
9 % Ham mat do
10 rho = @(x, y) x + y;
11
12 % Tinh khoi luong
13 mass = integral2(@(x, y) rho(x, y), x_min, x_max, y_min, y_max);
14
15 % Tinh x_center cua trong tam
16 x_center = integral2(@(x, y) x .* rho(x, y), x_min, x_max, y_min, y_max) / mass;
17
18 % Tinh y_center cua trong tam
19 y_center = integral2(@(x, y) y .* rho(x, y), x_min, x_max, y_min, y_max) / mass;
20
21 % Hien thi ket qua
22 fprintf('Khối lượng của tâm mỏng là: %.4f\n', mass);
23 % 6.000
24 fprintf('Tọa độ của tâm mỏng là: (%.4f, %.4f)\n', x_center, y_center);
25 %0.7500; 1.5000
```

Kết quả MATLAB:

```
% Hiển thị kết quả
fprintf('Khối lượng của tâm mỏng là: %.4f\n', mass); % 6.000
fprintf('Tọa độ trọng tâm của tâm mỏng là: (%.4f, %.4f)\n', x_center, y_center); %0.7500; 1.5000
Khối lượng của tâm mỏng là: 6.0000
Tọa độ trọng tâm của tâm mỏng là: (0.7500, 1.5000)
>> |
```



Bài 11:

Một tấm mỏng chiếm phần của đĩa $x^2 + y^2 \leq 1$ trong góc phần tư thứ nhất. Tìm trọng tâm của nó nếu mật độ tại bất kỳ điểm nào tỷ lệ thuận với khoảng cách từ điểm đó đến trục x .

Giải:

Gọi m là khối lượng của tấm mỏng đã cho.

Gọi $I(\bar{x}, \bar{y})$ là khối tâm của tấm mỏng cần tìm.

Chuyển về tọa độ cực:

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}, \quad D : \begin{cases} 0 \leq r \leq 1 \\ 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \end{cases}, \quad \rho(x, y) = ky = kr \sin \theta$$

- Tìm khối lượng m :

$$\begin{aligned} m &= \iint_D \rho(x, y) dA \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^1 kr^2 \sin \theta dr \\ &= k \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{3}r^3 \sin \theta \right) \Big|_{r=0}^{r=1} d\theta \\ &= \frac{1}{3}k \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta d\theta \\ &= \frac{1}{3}k \end{aligned}$$

Ta có:
 $I(\bar{x}, \bar{y}) = I\left(\frac{\bar{y}}{m}, \frac{\bar{x}}{m}\right) = I\left(\frac{3}{8}, \frac{3\pi}{16}\right)$

- Tìm khối tâm $I(\bar{x}, \bar{y})$:

Tìm \bar{y} :

$$\begin{aligned} \bar{y} &= \iint_D x \rho(x, y) dA \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^1 kr^3 \sin \theta \cos \theta dr \\ &= k \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{4}r^4 \sin \theta \cos \theta \right) \Big|_{r=0}^{r=1} d\theta \\ &= \frac{1}{4}k \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta \cos \theta d\theta \\ &= \frac{1}{8}k \end{aligned}$$

Tìm \bar{x} :

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \iint_D y \rho(x, y) dA \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^1 kr^3 (\sin \theta)^2 dr \\ &= k \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{1}{4}r^4 (\sin \theta)^2 \right] \Big|_{r=0}^{r=1} d\theta \\ &= \frac{1}{4}k \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin \theta)^2 d\theta \\ &= \frac{\pi}{16}k \end{aligned}$$

Vậy khối tâm cần tìm là $I\left(\frac{3}{8}, \frac{3\pi}{16}\right)$.

Dùng MATLAB giải bài toán:

Code:

```
1 % K là một biến số bất kỳ sẽ bị triết tiêu
2 k = 1; % chọn biến số giá trị của k
3
4 %Hàm mat do
5 rho = @(r, theta) r .* sin(theta) .* k;
6
7 % Mien xác định D
8 r_min = 0;
9 r_max = 1;
10 theta_min = 0;
11 theta_max = pi/2;
12
13 %Tinh khoi luong
14 mass = integral2(@(r, theta) rho(r, theta) .* r, r_min, r_max, theta_min, theta_max
    );
15
16 I_x = integral2(@(r, theta) r .* rho(r, theta) .* sin(theta) .* r, r_min, r_max,
    theta_min, theta_max);
17
18 I_y = integral2(@(r, theta) r .* rho(r, theta) .* cos(theta) .* r, r_min, r_max,
    theta_min, theta_max);
19
20 % Tinh toa do cua trong tam
21 x_bar = I_y / mass; % Toa do x cua trong tam
22 y_bar = I_x / mass; % Toa do y cua trong tam
23
24 % Hien thi ket qua
25 fprintf('Khối lượng của tẩm mỏng là: %.4f\n', mass);
26 % 0.3333
27 fprintf('Trọng tâm (x_bar, y_bar): (%.4f, %.4f)\n', x_bar, y_bar);
28 % 0.3750; 0.5890
```

Kết quả MATLAB:

```
% Hiển thị kết quả
fprintf('Khối lượng của tẩm mỏng là: %.4f\n', mass); % In ra khối lượng của tẩm mỏng % 0.3333
fprintf('Trọng tâm (x_bar, y_bar): (%.4f, %.4f)\n', x_bar, y_bar); % In ra tọa độ của trọng tâm % 0.3750; 0.5890
Khối lượng của tẩm mỏng là: 0.3333
Trọng tâm (x_bar, y_bar): (0.3750, 0.5890)
>>
```

Bài 15:

Tìm trọng tâm của một tấm mỏng có hình dạng là tam giác vuông cân với hai cạnh bằng nhau có độ dài a , nếu mật độ tại bất kỳ điểm nào tỷ lệ thuận với bình phương khoảng cách từ đỉnh đối diện với cạnh huyền.

Giải:

Gọi m là khối lượng của tấm mỏng đã cho.

Gọi $I(\bar{x}, \bar{y})$ là khôi tâm của tấm mỏng cần tìm.

$$\text{Miền xác định } D: \begin{cases} 0 \leq x \leq a \\ 0 \leq y \leq a - x \end{cases}$$

Dặt đỉnh đối diện với cạnh huyền tại $(0, 0)$, ta được: $\rho(x, y) = k(x^2 + y^2)$.

Khi đó:

- Khôi lượng m :

$$\begin{aligned} m &= \iint_D \rho(x, y) dA \\ &= \int_0^a dx \int_0^{a-x} k(x^2 + y^2) dy \\ &= k \int_0^a \left[x^2 y + \frac{y^3}{3} \right]_{y=0}^{y=a-x} dx \\ &= k \int_0^a \left[x^2(a-x) + \frac{1}{3}(a-x)^3 \right] dx \\ &= \frac{1}{6}a^4k \end{aligned}$$

- Khôi tâm:

Theo tính đối xứng, ta có:

$$\begin{aligned} M_x = M_y &= \iint_D y \rho(x, y) dA \\ &= \int_0^a dx \int_0^{a-x} ky(x^2 + y^2) dy \\ &= k \int_0^a \left(\frac{1}{2}y^2x^2 + \frac{1}{4}y^4 \right) \Big|_{y=0}^{y=a-x} dx \\ &= k \int_0^a \left[\frac{1}{2}(a-x)^2 x^2 + \frac{1}{4}(a-x)^4 \right] dx \\ &= \frac{1}{15}a^5k \end{aligned}$$

$$\text{Ta có: } I(\bar{x}, \bar{y}) = I\left(\frac{M_y}{m}, \frac{M_x}{m}\right) = I\left(\frac{2}{5}a, \frac{2}{5}a\right)$$

$$\text{Vậy khôi tâm cần tìm là } I\left(\frac{2}{5}a, \frac{2}{5}a\right).$$

Dùng MATLAB giải bài toán:

Code:

```
1 % Do dai cua tam giac can
2 a = 1; % O day lay a = 1
3 k = 1; % Chon k = 1
4 % Gia tri a co the tuy y thay doi tuy vao de bai
5
6 % Ham mat do
7 rho = @(x, y) (x.^2 + y.^2) .* k;
8
9 % Mien xac dinh
10 x_min = 0;
11 x_max = a;
12 y_min = 0;
13 y_max = @(x) (a - x);
14
15 % Tinh khoi luong
16 mass = integral2(@(x, y) rho(x, y), 0, a, 0, @(x) a - x);
17
18 % Tinh toa do trong tam
19 x_center = integral2(@(x, y) x .* rho(x, y), 0, a, 0, @(x) (a - x)) / mass;
20 y_center = integral2(@(x, y) y .* rho(x, y), 0, a, 0, @(x) (a - x)) / mass;
21
22 % Hien thi ket qua
23 fprintf('Trung tam cua tam mong (x,y) la: (%.4f, %.4f)\n', x_center, y_center);
24 % 0.4000; 0.4000
```

Kết quả MATLAB:

```
% Hiển thị kết quả
fprintf('Trung tâm của tẩm mỏng (x, y) là: (%.4f, %.4f)\n', x_center, y_center); % 0.4000; 0.4000
Trung tâm của tẩm mỏng (x, y) là: (0.4000, 0.4000)
>>
```

Bài 20:

Xét một lưỡi quạt hình vuông với cạnh có độ dài 2 và góc dưới bên trái đặt tại gốc tọa độ. Nếu mật độ của lưỡi quạt là $\rho(x, y) = 1 + 0.1x$, thì khó khăn hơn khi quay lưỡi quạt quanh trục x hay trục y ?

Giải:

Để xác định độ khó quay lưỡi quạt quanh các trục, ta cần tính momen quán tính quanh các trục x và y .

Miền xác định D :
$$\begin{cases} 0 \leq x \leq 2 \\ 0 \leq y \leq 2 \end{cases}$$

Tìm I_x :

$$\begin{aligned} I_x &= \iint_D y^2 (\rho(x, y)) dA \\ &= \int_0^2 y^2 dy \int_0^2 (1 + 0.1x) dx \\ &= \frac{8}{3} \int_0^2 (1 + 0.1x) dx \\ &= \frac{88}{15} \end{aligned}$$

Tìm I_y :

$$\begin{aligned} I_y &= \iint_D x^2 (\rho(x, y)) dA \\ &= \int_0^2 dy \int_0^2 x^2 (1 + 0.1x) dx \\ &= \frac{46}{15} \int_0^2 dy \\ &= \frac{92}{15} \end{aligned}$$

Momen quán tính lớn đòi hỏi một lực momen lớn hơn để thay đổi tốc độ quay của nó. Điều này có nghĩa là:

- Khi momen quán tính lớn, vật sẽ chống lại sự thay đổi trạng thái quay của nó mạnh mẽ hơn. Do đó, sẽ cần một lực lớn hơn để làm cho vật bắt đầu quay hoặc dừng quay.
- Khi momen quán tính nhỏ, vật sẽ dễ dàng thay đổi trạng thái quay hơn, cần ít lực hơn để bắt đầu hoặc dừng quay.

Do $I_y > I_x$, nên ta kết luận nên ta kết luận được xoay cánh quạt theo chiều trục y sẽ khó hơn trục x .

Dùng MATLAB giải bài toán:

Code:

```
1 % Ham mat do
2 rho = @(x, y) 1 + 0.1*x;
3
4 % Mien xac dinh D
5 x_min = 0;
6 x_max = 2;
7 y_min = 0;
8 y_max = 2;
9
10 % Tinh I_y
11 I_y = integral2(@(x, y) rho(x, y) .* x.^2, x_min, x_max, y_min, y_max); %6.1333
12
13 % Tinh I_x
14 I_x = integral2(@(x, y) rho(x, y) .* y.^2, x_min, x_max, y_min, y_max); %5.8667
15
16 % Hien thi ket qua
17 fprintf('Momen quan tinh truc y (I_y) la: %.4f\n', I_y);
18 fprintf('Momen quan tinh truc x (I_x) la: %.4f\n', I_x);
19
20 % So sanh va dua ra ket luan
21 if I_y > I_x
22     fprintf('Quay luoi quat quanh trục y khó hơn.\n');
23 else
24     fprintf('Quay luoi quat quanh trục x khó hơn.\n');
25 end
```

Kết quả MATLAB:

```
% So sánh và đưa ra kết luận
if I_y > I_x
    fprintf('Quay luoi quat quanh trục y khó hơn.\n'); % Đúng
else
    fprintf('Quay luoi quat quanh trục x khó hơn.\n'); % Sai
end
Momen quán tính quanh trục y (I_y) là: 6.1333
Momen quán tính quanh trục x (I_x) là: 5.8667
Quay luỗi quạt quanh trục y khó hơn.
>>
```

Bài 21:

Sử dụng hệ thống đại số máy tính để tìm khối lượng, trọng tâm và momen quán tính của tấm mỏng chiếm vùng D và có hàm mật độ cho trước.

- $D = \{(x, y) | 0 \leq y \leq \sin x; 0 \leq x \leq \pi\}$
- $\rho(x, y) = xy$

Giải:

Gọi m là khối lượng tấm mỏng cần tìm.

Gọi (\bar{x}, \bar{y}) là khối tâm của tấm mỏng cần tìm.

- Khối lượng:

$$\begin{aligned} m &= \iint_D \rho(x, y) dA \\ &= \int_0^\pi \int_0^{\sin x} xy dx dy \\ &= \frac{1}{2} \int_0^\pi x \sin^2 x dx \\ &= \frac{\pi^2}{8} \end{aligned}$$

- Khối tâm:

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{1}{m} \iint_D x \rho(x, y) dA \\ &= \frac{1}{m} \int_0^\pi \int_0^{\sin x} x^2 y dx dy \\ &= \frac{8}{\pi^2} \int_0^\pi x^2 \frac{y^2}{2} \Big|_{y=0}^{\sin x} dx \\ &= \frac{4}{\pi^2} \int_0^\pi x^2 \sin^2 x dx \\ &= \frac{2\pi^2 - 3}{3\pi} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{y} &= \frac{1}{m} \iint_D y \rho(x, y) dA \\ &= \frac{1}{m} \int_0^\pi \int_0^{\sin x} xy^2 dx dy \\ &= \frac{8}{\pi^2} \int_0^\pi x \frac{y^3}{2} \Big|_{y=0}^{\sin x} dx \\ &= \frac{2}{\pi^2} \int_0^\pi x \sin^3 x dx \\ &= \frac{16}{9\pi} \end{aligned}$$

- Momen quán tính:

+ Theo trục x :

$$\begin{aligned} I_x &= \iint_D y^2 \rho(x, y) dA \\ &= \int_0^\pi \int_0^{\sin x} y^3 x dx dy \\ &= \frac{1}{4} \int_0^\pi xy^4 \Big|_{y=0}^{\sin x} dx \\ &= \frac{3\pi^2}{64} \end{aligned}$$

Vậy:

- Khối lượng tấm mỏng cần tìm: $\frac{\pi^2}{8}$.
- Khối tâm tấm mỏng cần tìm: $(\frac{2\pi^2 - 3}{3\pi}, \frac{16}{9\pi})$.
- Momen quán tính cần tìm: $I_x = \frac{3\pi^2}{64}$ và $I_y = \frac{\pi^4 - 3\pi^2}{16}$.

+ Theo trục y :

$$\begin{aligned} I_y &= \iint_D x^2 \rho(x, y) dA \\ &= \int_0^\pi \int_0^{\sin x} yx^3 dx dy \\ &= \frac{1}{2} \int_0^\pi x^3 y^2 \Big|_{y=0}^{\sin x} dx \\ &= \frac{\pi^4 - 3\pi^2}{16} \end{aligned}$$

```

1 % Khai báo biến
2 syms x y;
3
4 % Hàm mật độ
5 rho = x*y;
6
7 % Tính khối lượng
8 mass = int( int(rho, y, 0, sin(x)), x, 0, pi);
9
10 % Tính tọa độ trọng tâm
11 x_cm = 1/mass * int( int(x*rho, y, 0, sin(x)), x, 0, pi);
12 y_cm = 1/mass * int( int(y*rho, y, 0, sin(x)), x, 0, pi);
13
14 % Tính momen quán tính
15 I_x = int( int(y^2*rho, y, 0, sin(x)), x, 0, pi);
16 I_y = int( int(x^2*rho, y, 0, sin(x)), x, 0, pi);
17
18 % In kết quả
19 fprintf('Khối lượng: %.4f\n', mass);
20 fprintf('Trọng tâm: (%.4f, %.4f)\n', x_cm, y_cm);
21 fprintf('Momen quán tính: Ix = %.4f, Iy = %.4f\n', I_x, I_y);

```

Kết quả MATLAB:

```

% In kết quả
fprintf('Khối lượng: %.4f\n', mass);
fprintf('Trọng tâm: (%.4f, %.4f)\n', x_cm, y_cm);
fprintf('Momen quán tính: Ix = %.4f, Iy = %.4f\n', I_x, I_y);
Khối lượng: 1.2337
Trọng tâm: (1.7761, 0.5659)
Momen quán tính: Ix = 0.4626, Iy = 4.2375
>>

```

Bài 25:

Một tấm mỏng có mật độ không đổi $\rho(x, y) = \rho$ chiếm vùng cho trước. Tìm momen quán tính I_x và I_y và bán kính quay \bar{x} và \bar{y} .

Phần của đĩa $x^2 + y^2 \leq a^2$ trong gốc phân tư thứ nhất.

Giải:

Chuyển đổi về tọa độ cực: $\{(r, \theta) | 0 \leq r \leq a; 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\}$ và $\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}$

Vì mật độ không đổi nên ta có khối lượng: $m = \rho S = \frac{\rho \pi r^2}{4}$

- Tính I_x :

$$I_x = \rho \iint_D y^2 \rho(x, y) dA$$

$$= \rho \int_0^a r^3 dr \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} \sin^2 \theta d\theta$$

$$= \rho \frac{r^4}{a} \Big|_{r=0}^{r=a} \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos 2\theta) d\theta$$

$$= \frac{\pi \rho a^4}{16}$$

- Tính I_y :

$$I_y = \rho \iint_D x^2 \rho(x, y) dA$$

$$= \rho \int_0^a r^3 dr \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} \cos^2 \theta d\theta$$

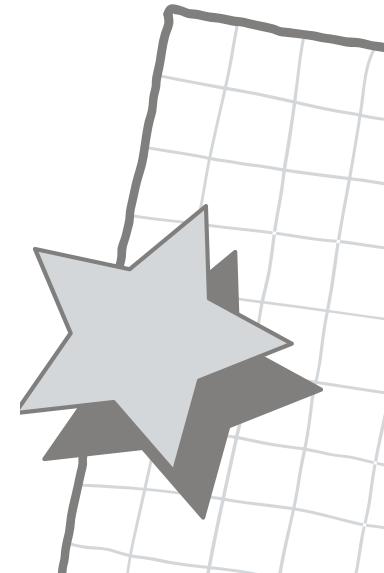
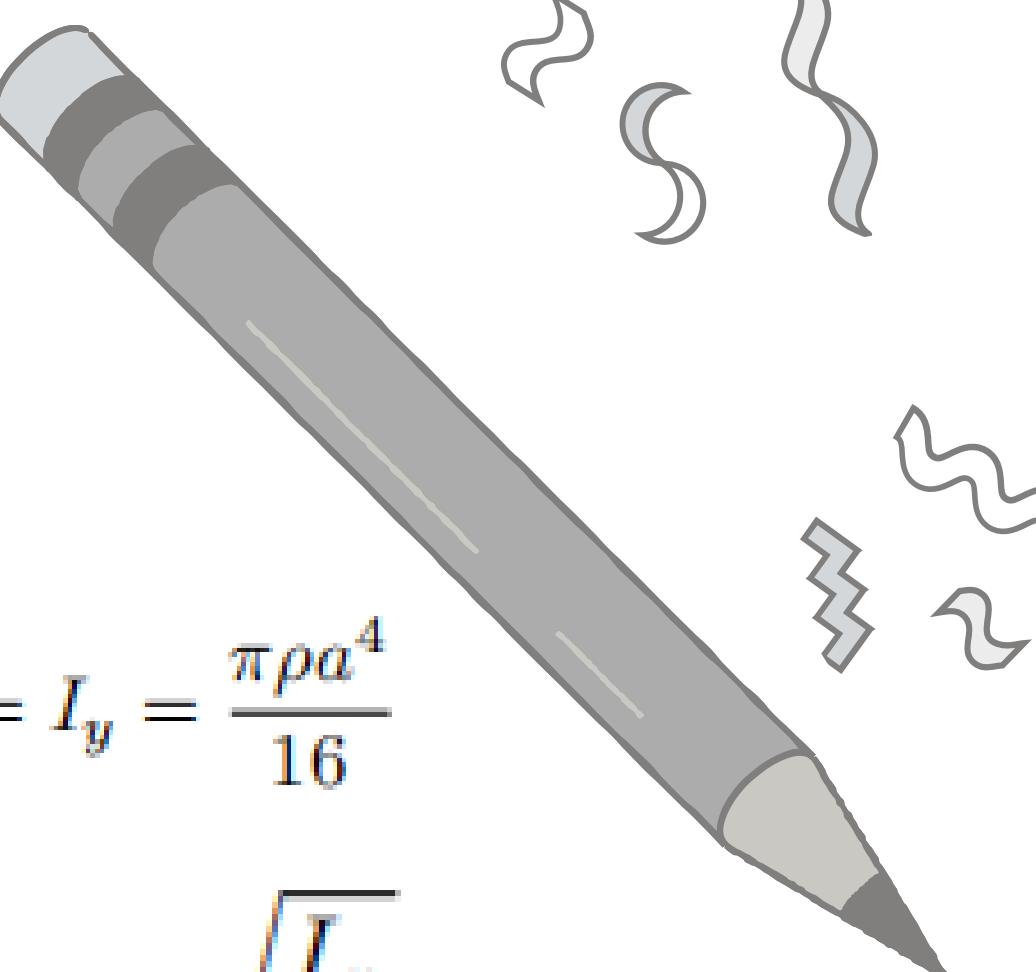
$$= \rho \frac{r^4}{a} \Big|_{r=0}^{r=a} \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2\theta) d\theta$$

$$= \frac{\pi \rho a^4}{16}$$

- Do $I_x = I_y = \frac{\pi \rho a^4}{16}$

$$\Rightarrow \bar{x} = \bar{y} = \sqrt{\frac{I_x}{m}}$$

$$\begin{aligned} &= \sqrt{\frac{\frac{\pi \rho a^4}{16}}{\frac{\rho \pi r^2}{4}}} \\ &= \sqrt{\frac{1}{\frac{16}{\rho \pi r^2}}} \\ &= \frac{a}{2} \end{aligned}$$



Dùng MATLAB giải bài toán:

Code:

```
1 rho_val = 1; % Gia tri nay thay doi tuy theo de bai
2 a_val = 1; % Gia tri nay thay doi tuy theo de bai
3
4 % Tinh khoi luong
5 mass_val = subs(mass, [rho, a], [rho_val, a_val]);
6
7 % Tinh momen quan tinh
8 I_x_val = subs(I_x, [rho, a], [rho_val, a_val]);
9 I_y_val = subs(I_y, [rho, a], [rho_val, a_val]);
10
11 % Tinh ban kinh quay
12 r_x_val = subs(r_x, [rho, a], [rho_val, a_val]);
13 r_y_val = subs(r_y, [rho, a], [rho_val, a_val]);
14
15 % In ket qua
16 fprintf('Momen quan tinh: Ix = %.4f, Iy = %.4f\n', double(I_x_val), double(I_y_val));
17 fprintf('Ban kinh quay: r_x = %.4f, r_y = %.4f\n', double(r_x_val), double(r_y_val));
```



Kết quả MATLAB:

```
% In kết quả
fprintf('Momen quán tính: Ix = %.4f, Iy = %.4f\n', double(I_x_val), double(I_y_val));
fprintf('Bán kính quay: r_x = %.4f, r_y = %.4f\n', double(r_x_val), double(r_y_val));
Momen quán tính: Ix = 0.1963, Iy = 0.1963
Bán kính quay: r_x = 0.5000, r_y = 0.5000
>>
```

Bài 32:

Xavier và Yolanda đều có lớp học kết thúc vào buổi trưa và họ đồng ý gặp nhau sau giờ học mỗi ngày. Họ đến quán cà phê độc lập với nhau. Thời gian đến của Xavier là X và thời gian đến của Yolanda là Y , trong đó X và Y được đo bằng phút sau buổi trưa. Các hàm mật độ xác suất cá nhân

$$f_1(x) = \begin{cases} e^{-x} & (\text{if } x \geq 0) \\ 0 & (\text{if } x \leq 0) \end{cases}, \quad f_2(y) = \begin{cases} \frac{y}{50} & (\text{if } 0 \leq y \leq 10) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

(Xavier đến một lúc nào đó sau buổi trưa và có khả năng đến đúng giờ hơn là đến muộn. Yolanda luôn đến trước 12:10 PM và có khả năng đến muộn hơn là đến sớm). Sau khi Yolanda đến, cô ấy sẽ chờ Xavier trong tối đa nửa giờ, nhưng Xavier sẽ không chờ cô ấy. Tìm xác suất rằng họ gặp nhau.

Giải:

Gọi P là xác xuất để Xavier và Yolanda gặp nhau.

Chúng ta tìm kiếm xác xuất mà x và y thỏa: $\begin{cases} 0 \leq y \leq 10 \\ y \leq x \leq y + 30 \end{cases}$

Do chúng là các biến ngẫu nhiên độc lập nên: $f(x, y) = f_1(x)f_2(y)$

\Rightarrow

$$\begin{aligned} P &= \int_0^{10} \int_y^{y+30} e^{-x} \frac{y}{50} dx dy \\ &= - \int_0^{10} \frac{y}{50} (e^{-y-30} - e^{-y}) dy \end{aligned}$$

Tính tích phân từng phần với $u = \frac{y}{50}$ và $dv = e^{-y-30} - e^{-y}$

⇒

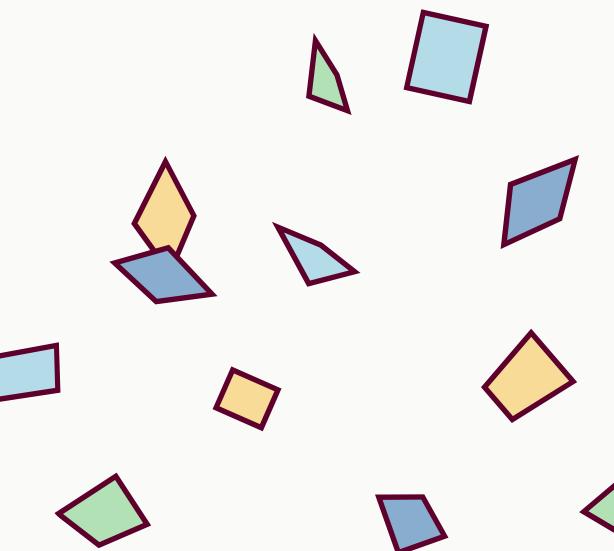
$$\begin{aligned} P &= - \left[\frac{y}{50} (e^{-y} - e^{-y-30}) \Big|_{y=0}^{y=10} - \frac{1}{50} \int_0^{10} e^{-y} - e^{-y-30} dy \right] \\ &= - \left[\frac{1}{5} (e^{-10} - e^{-40}) + \frac{1}{50} (e^{-10} - e^{-40} - 1 + e^{-30}) \right] \\ &= -\frac{e^{-10}}{5} - \frac{e^{-10}}{50} + \frac{2e^{-40}}{5} + \frac{e^{-40}}{50} - \frac{e^{-30}}{50} + \frac{1}{50} \\ &\approx 0.02 \end{aligned}$$

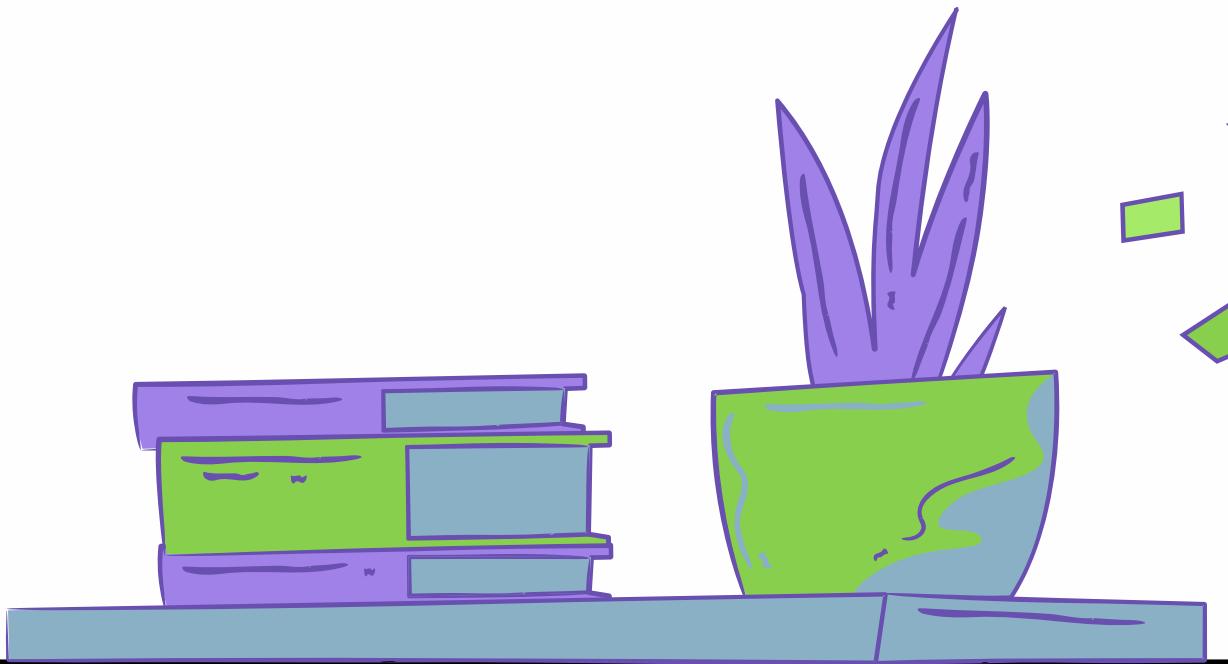
Vậy xác suất để Xavier và Yolanda gặp nhau là: 0.02(2%).

Dùng MATLAB giải bài toán:

Code:

```
1 % Khai bao bien
2 syms x y;
3
4 % Ham mat do xac suat
5 f1 = @(x) (x >= 0) .* exp(-x);
6 f2 = @(y) (y >= 0 & y <= 10) .* y / 50;
7
8 % Tinh xac suat gap nhau
9 P_meet = double(integral2(@(x, y) f1(x) .* f2(y) .* (y <= x & x <= y + 30), 0, inf,
    0, inf));
10
11 % In ket qua
12 fprintf('Xac suat rang Xavier va Yolanda gap nhau la: %.4f\n', P_meet);
```





Kết quả MATLAB:

```
% In kết quả  
fprintf('Xác suất rằng Xavier và Yolanda gặp nhau là: %.4f\n', P_meet);
```

```
Xác suất rằng Xavier và Yolanda gặp nhau là: 0.0200
```

```
>> |
```

Bài 33:

Khi nghiên cứu sự lây lan của một dịch bệnh, ta giả sử rằng xác suất mà một người bị nhiễm sẽ lây bệnh cho một người không bị nhiễm là một hàm của khoảng cách giữa họ. Xét một thành phố hình tròn có bán kính 10 dặm mà dân số được phân bố đều. Đối với một người không bị nhiễm tại một điểm cố định $A(x_0, y_0)$, hàm xác suất được cho bởi

$$f(P) = \frac{1}{20} [20 - d(P, A)] \text{ trong đó } d(P, A) \text{ biểu thị khoảng cách giữa } P \text{ và } A.$$

- (a) Giả sử mức độ phơi nhiễm của một người đối với bệnh là tổng của các xác suất nhiễm bệnh từ tất cả các thành viên của dân số. Giả sử rằng những người bị nhiễm được phân bố đều khắp thành phố, với k người bị nhiễm trên mỗi dặm vuông. Tìm tích phân kép biểu diễn mức độ phơi nhiễm của một người cư trú tại A .

Giải:

Khi đó xác suất truyền nhiễm của từ một người ở hình chữ nhật: $f(P) = \frac{20 - d}{20}$

Số người trong một dặm vuông: $k dA$

Do đó, sự tiếp xúc của người đó từ hình chữ nhật: $f(P)k dA$

Gọi M là tích phân kép biểu thị mức độ tiếp xúc của một người cư trú tại A . Khi đó:

$$\begin{aligned} M &= k \iint_D f(P) dA \\ &= k \iint_D \frac{20 - d}{20} dA \quad (d = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}) \\ &= k \iint_D \left[1 - \frac{1}{20} \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} \right] dA \end{aligned}$$

(b) Tính giá trị của tích phân cho trường hợp A ở trung tâm thành phố và cho trường hợp A nằm ở rìa thành phố. Bạn muốn sống ở đâu?

Giải:

Ta có: $M = k \iint_D \left[1 - \frac{1}{20} \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} \right] dA$ với D là vùng trong hình tròn $x^2 + y^2 = 100$

Trường hợp A ở rìa thành phố $x_0 = 10, y_0 = 0$:

$$\begin{aligned} M &= k \iint_D \left[1 - \frac{1}{20} \sqrt{(x - 10)^2 + y^2} \right] dA \\ &= k \int_0^{2\pi} \int_0^{10} r \left[1 - \frac{1}{20} \sqrt{(r \cos \theta - 10)^2 + r^2 \sin^2 \theta} \right] dr d\theta \\ &\approx 136k \end{aligned}$$

Trường hợp A ở trung tâm thành phố $x_0, y_0 = 0$:

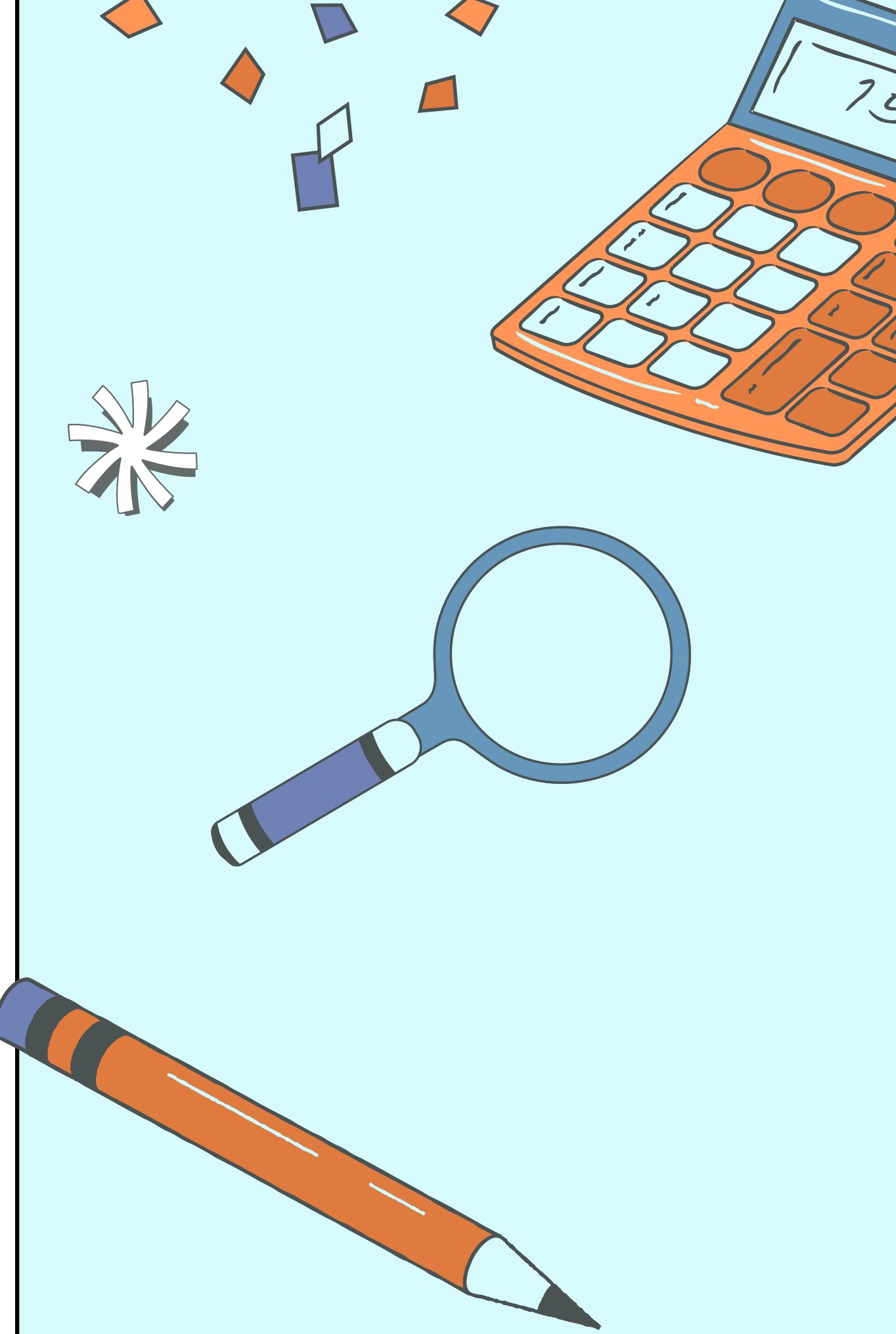
$$M = k \iint_D \left(1 - \frac{1}{20} \sqrt{x^2 + y^2} \right) dA$$

Trong hệ tọa độ cực, ta có:

$$\begin{aligned} M &= k \int_0^{2\pi} \int_0^{10} \left(1 - \frac{1}{20} \sqrt{r^2} \right) r dr d\theta \\ &= k \theta \Big|_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \int_0^{10} \left(r - \frac{r^2}{20} \right) dr \\ &= \frac{200\pi k}{3} \approx 209k \end{aligned}$$

Kết luận:

Sự tiếp xúc ở rìa thành phố thành phố ít hơn. Tôi sẽ chọn sống ở rìa thành phố.



```

2 syms x y x0 y0 k real;
3
4 k = 1; %Tuy chon dua vao de bai toan
5
6 % Ham xac suat
7 f = @(x, y, x0, y0) 1/20 * (20 - sqrt((x-x0).^2 + (y-y0).^2));
8
9 % Tinh muc do phoi nhiem
10 exposure = @(x0, y0) k * double(integral2(@(x, y) f(x, y, x0, y0), -10, 10, @(x) -
    sqrt(100-x.^2), @(x) sqrt(100-x.^2)));
11
12 % Truong hop A o trung tam thanh pho
13 exposure_center = exposure(0, 0);
14
15 % Truong hop A o ria thanh pho
16 exposure_edge = exposure(10, 0);
17
18 % In ket qua
19 fprintf('Muc do phoi nhiem khi A nam o trung tam thanh pho: %.4f\n',
    exposure_center);
20 fprintf('Muc do phoi nhiem khi A nam o ria thanh pho: %.4f\n', exposure_edge);
21
22 % So sanh
23 if exposure_center < exposure_edge
    fprintf('Ban nen song o trung tam thanh pho.\n');
24 else
    fprintf('Ban nen song o ria thanh pho.\n');
25 end

```

Kết quả MATLAB:

```

% So sánh
if exposure_center < exposure_edge
    fprintf('Bạn nên sống ở trung tâm thành phố.\n');
else
    fprintf('Bạn nên sống ở rìa thành phố.\n');
end
Mức độ phơi nhiễm khi A ở trung tâm thành phố: 209.4395
Mức độ phơi nhiễm khi A nằm ở rìa thành phố: 136.3815
Bạn nên sống ở rìa thành phố.
>> |

```



THANKS FOR WATCHING

