

Bài tập chương 3

Tập hợp

1 Dẫn nhập

Trong bài tập dưới đây, chúng ta sẽ làm quen với các kiến thức liên quan đến lý thuyết tập hợp (bao gồm tập hợp và các toán tử trên tập hợp). Sinh viên cần ôn lại lý thuyết của chương 3 trước khi làm bài tập bên dưới.

2 Bài tập mẫu

Câu 1.

Những phát biểu bên dưới là đúng hay sai

- a) $0 \in \emptyset$
- b) $\{\emptyset \in \{\{\emptyset\}\}\}$
- c) $\{\emptyset\} \subset \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$

Lời giải.

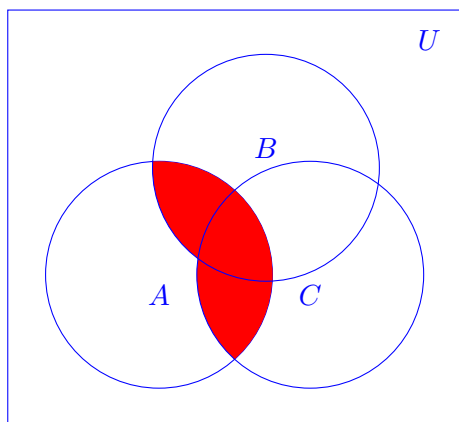
- a) *Sai*
- b) *Sai*
- c) *Đúng*

□

Câu 2.

Vẽ giản đồ Venn cho biểu diễn tập hợp $S = A \cap (B \cup C)$.

Lời giải.



□

3 Bài tập cần giải

Câu 3.

Cho $A = \{a, b, c\}$, $B = \{x, y\}$, và $C = \{0, 1\}$. Tìm

- a) $A \times B$
- b) $B \times A$
- c) $A \times B \times C$
- d) $C \times B \times A$
- e) $C \times A \times B$
- f) $B \times B \times B$

Câu 4.

Xác định tập hợp A và B biết rằng:

- $A - B = \{1, 5, 7, 8\}$,
- $B - A = \{2, 10\}$,
- và $A \cap B = \{3, 6, 9\}$.

Câu 5.

Sử dụng sơ đồ Venn để minh họa cho các quan hệ sau.

- a) $A \subseteq B$ và $B \subseteq C$
- b) $A \subset B$ và $B \subset C$
- c) $A \subset B$ và $A \subset C$.

Câu 6.

Một bàn cờ vua 64 ô gồm 8 hàng (đánh nhãn 1 đến 8) và 8 cột (đánh nhãn từ a đến h). Mỗi ô trên bàn cờ được biểu diễn dưới một cặp số (cột, hàng).

- a) Quân mã đang ở vị trí $(d, 3)$. Hãy liệt kê các vị trí di chuyển quân hợp lệ (chỉ 1 nước cờ).
- b) Gọi $R = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ là tập hợp các hàng trên bàn cờ, $C = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$ là tập hợp các cột trên bàn cờ. Hãy xác định tập P là biểu diễn cho tất cả các vị trí trên bàn cờ.
- c) Quân xe đang ở vị trí $(g, 2)$. Gọi $T = \{2\}$ và $G = \{g\}$, hãy xác định tập hợp các vị trí di chuyển quân hợp lệ (chỉ 1 nước cờ).

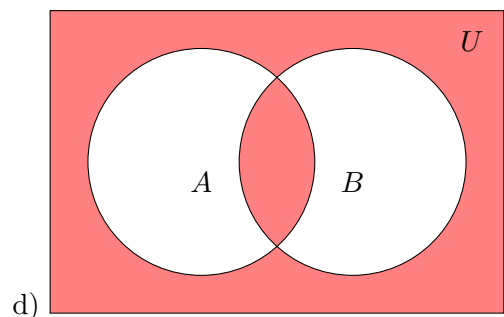
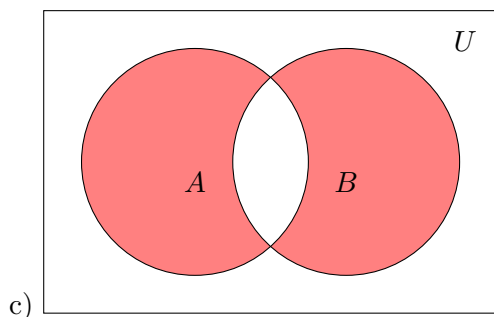
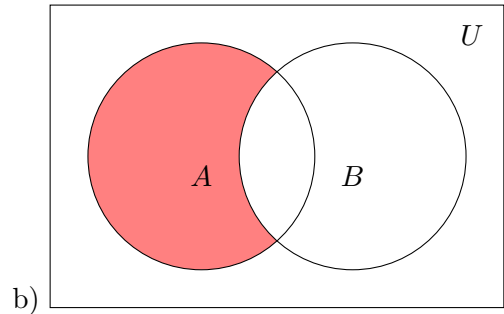
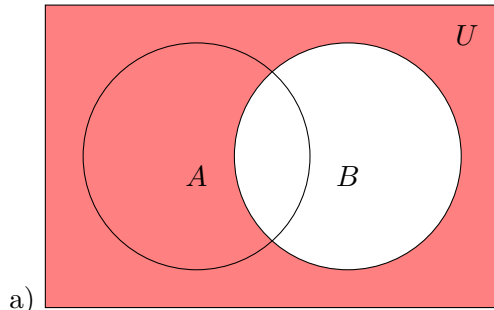
Câu 7.

Vẽ giản đồ Venn cho những trường hợp sau.

- a) $\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}$
- b) $(A - B) \cup (A - C) \cup (B - C)$
- c) $(A \cap B) \cup (C \cap D)$

Câu 8.

Cho các giản đồ Venn của hai tập hợp A, B như sau, hãy biểu diễn dưới dạng ký hiệu tập hợp chỉ dùng \cup, \cap và phần bù.



Câu 9.

Cho A, B và C là các tập hợp. Chứng minh rằng:

- $(A \cup B) \subseteq (A \cup B \cup C)$
- $A \cap B \cap C \subseteq (A \cap B)$
- $(B - A) \cup (C - A) = (B \cup C) - A$
- $(A \cap B) \cup (A \cap \bar{B}) = A$

Câu 10.

Xét $A = \{1, \{1\}, \{2\}\}$. Hãy chỉ ra các khẳng định đúng trong số các khẳng định dưới đây:

- $1 \in A$
- $\{1\} \subset A$
- $\{1\} \in A$
- $\{\{1\}\} \subset A$
- $\{\{2\}\} \in A$
- $\{2\} \subset A$

Câu 11.

Xét các tập hợp con của \mathbf{Z} :

- $A = \{2n | n \in \mathbf{Z}\}$

- $B = \{3n | n \in \mathbf{Z}\}$
- $C = \{4n | n \in \mathbf{Z}\}$
- $D = \{6n | n \in \mathbf{Z}\}$
- $E = \{8n | n \in \mathbf{Z}\}$

Hãy chỉ ra các khẳng định đúng trong các khẳng định dưới đây:

- a) $E \subset C \subset A$,
- b) $A \subset C \subset E$,
- c) $D \subset B$,
- d) $D \subset A$,
- e) $B \subset D$,
- f) $\overline{D} \subset \overline{A}$

Câu 12.

Đơn giản các biểu thức dưới đây:

- a) $A \cap (B \cap \overline{A})$
- b) $(A \cap B) \cup (A \cap B \cap \overline{C} \cap D) \cup (\overline{A} \cap B)$
- c) $\overline{A} \cup \overline{B} \cup (A \cap B \cap \overline{C})$

Câu 13.

Liệt kê các phần tử của các tập sau.

- a) $\{x | x \text{ là số thực sao cho } x^2 = 1\}$
- b) $\{x | x \text{ là số nguyên dương bé hơn } 12\}$
- c) $\{x | x \text{ số chính phương và } x < 100\}$
- d) $\{x | x \text{ là một số nguyên sao cho } x^2 = 2\}$

Câu 14.

Xác định xem các tập sau, tập nào là tập lũy thừa (*power set*) của một tập hợp nào đó, trong đó a và b là hai phần tử riêng biệt.

- a) \emptyset
- b) $\{\emptyset, \{a\}\}$
- c) $\{\emptyset, \{a\}, \{\emptyset, a\}\}$
- d) $\{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$

Câu 15.

Sử dụng sơ đồ Venn để chỉ ra một trường hợp để cho thấy các phát biểu sau là SAI

- a) Với mọi A, B và C , nếu $A \not\subseteq B$ và $B \not\subseteq C$ thì $A \not\subseteq C$.
- b) Với mọi tập hợp A, B và C , $(A \cup B) \cap C = A \cup (B \cap C)$.
- c) Với mọi tập hợp A, B và C , $(A - B) \cap (C - B) = A - (B \cup C)$.

Câu 16.

Chứng minh rằng với mọi tập hợp A, B và C , $(A - B) \cap (C - B) = (A \cap C) - B$.

Câu 17.

Trong số các tập hợp dưới đây, tập nào khác \emptyset ?

- a) $\{x \in \mathbf{N} | 2x + 7 = 3\}$
- b) $\{x \in \mathbf{Z} | 3x + 5 = 9\}$
- c) $\{x \in \mathbf{Q} | x^2 + 4 = 6\}$
- d) $\{x \in \mathbf{R} | x^2 + 4 = 6\}$
- e) $\{x \in \mathbf{R} | x^2 + 5 = 4\}$
- f) $\{x \in \mathbf{R} | x^2 + 3x + 3 = 0\}$

Câu 18.

Xác định xem các phát biểu sau là đúng hay sai?

- a) $\{1, 2\} \in \{\{1, 2\}, \{3, 4\}\}$
- b) $\{2\} \in \{1, 2, 3, 4\}$
- c) $\{3\} \in \{1, \{2\}, \{3\}\}$
- d) $\{1, 2\} \subseteq \{1, 2, \{1, 2\}, \{3, 4\}\}$

Câu 19.

Vẽ sơ đồ Venn cho các câu sau đây

- a) $A \subseteq B, C \subseteq B, A \cap C = \emptyset$
- b) $A \supseteq C, B \cap C = \emptyset$

Câu 20.

Hãy dùng giản đồ Venn để chứng minh lại định luật De Morgan:

“Nếu A và B là hai tập hợp thì $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$.”

4 Bài tập nâng cao

Câu 21.

Các phát biểu sau đúng hay sai.

- a) $x \in \{x\}$
- b) $\{x\} \subseteq \{x\}$
- c) $\{x\} \in \{x\}$
- d) $\{x\} \in \{\{x\}\}$
- e) $\emptyset \subseteq \{x\}$
- f) $\emptyset \in \{x\}$

Câu 22.

Chứng minh phát biểu sau bằng phương pháp “chọn một phần tử” (phương pháp $A \subseteq B$ và $B \subseteq A$)

- a) Nếu A, B và C là tập con của U , thì $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$.
- b) Nếu A, B và C là tập con của U , thì $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$.

Câu 23.

Cho A, B và C là các tập hợp. Chứng minh rằng

- a) $(A \cup B) \subseteq (A \cup B \cup C)$.
- b) $(A \cap B \cap C) \subseteq (A \cap B)$.
- c) $(A - B) - C \subseteq A - C$.
- d) $(A - C) \cap (C - B) = \emptyset$.

Câu 24.

Hiệu đối xứng của hai tập A và B , ký hiệu $A \oplus B$, là tập chứa các phần tử thuộc A hoặc B , nhưng không được vừa nằm trong A vừa nằm trong B . Hãy chứng minh:

- a) $A \oplus B = (A \cup B) - (A \cap B)$
- b) $A \oplus B = (A - B) \cup (B - A)$
- c) $A \oplus B = B \oplus A$

Câu 25.

Chứng minh:

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

Câu 26.

Cho hai tập hợp A và B , chứng minh rằng $A \cup (B \setminus A) = A \cup B$.
Từ đó, hãy đơn giản tập hợp dưới đây.

$$C \cup (A \setminus (B \cup C)) \cup (B \setminus C) \cup (D \setminus (A \cup B \cup C))$$

Câu 27.

Các tập hợp sau có bao nhiêu tập con?

1. $\{x \in \mathbb{Z} : x^{2014} - 4x^{2012} + 2x^2 - 8 < 0\}$
2. $\mathbb{Z} \cap \{x \in \mathbb{R} : x^{2013} - 5x^{2012} + 20x^2 + 2012 = 0\}$

Câu 28.

Hãy so sánh các cặp tập hợp sau để xác định:

- Chúng có thể bằng nhau được hay không?
- Có tập nào là tập con của tập kia không?
- Chúng có thể có cùng bản số được không?

- a) $P(A \cup B)$ và $P(A) \cup P(B)$
- b) $P(A \cap B)$ và $P(A) \cap P(B)$
- c) $P(A \times B)$ và $P(A) \times P(B)$

5 Tổng kết

Thông qua các bài tập trong phần này, chúng ta đã hiểu rõ hơn và làm quen với lý thuyết tập hợp trong đó các chi tiết liên quan đã được trình bày trong slide chương 3.