

Bài tập chương 10

Cây

1 Dẫn nhập

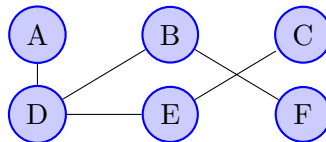
Trong bài tập dưới đây, chúng ta sẽ làm quen với các khái niệm và định nghĩa về cây. Các kiến thức cần thiết cho bài này cũng bao gồm các phương pháp duyệt cây và các giải thuật tìm cây khung có nhỏ nhất. Sinh viên cần ôn lại lý thuyết về cây và các giải thuật liên quan được trình bày trong chương 10 trước khi làm bài tập bên dưới.

2 Bài tập mẫu

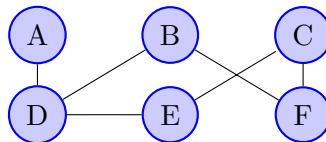
Câu 1.

Những đồ thị bên dưới đây có được gọi là cây?

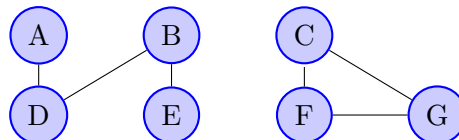
a)



b)



c)



Lời giải. Đồ thị trong trường hợp (a) được gọi là cây nhưng trong trường hợp (b) và (c) thì không phải. \square

Câu 2.

Có bao nhiêu đỉnh trong một cây tứ phân đầy đủ với 100 đỉnh lá?

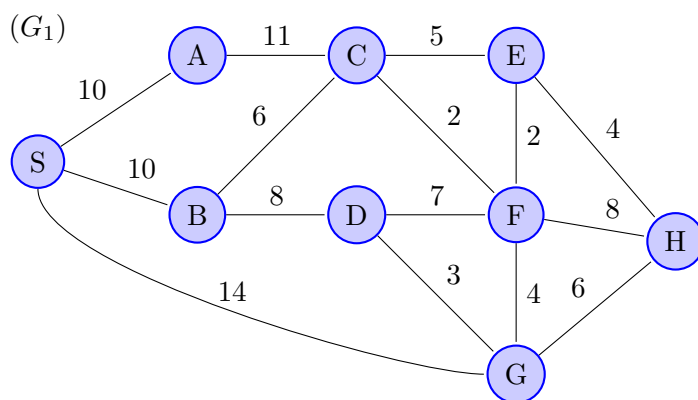
Lời giải. Theo các tính chất về cây được trình bày trong phần lý thuyết chương 6, chúng ta biết rằng số đỉnh n trong một cây m phân đầy đủ sẽ là $n = (m\ell - 1)/(m - 1)$ với ℓ là số đỉnh lá của cây.

Trong trường hợp cây tứ phân với 33 đỉnh lá, $n = (4 \cdot 100 - 1)/(4 - 1) = 133$. \square

Câu 3.

a) Hãy dùng giải thuật Prim để tìm cây khung nhỏ nhất của đồ thị G_1 .

b) Hãy dùng giải thuật Kruskal để tìm cây khung nhỏ nhất của đồ thị G_1 .



Lời giải.

a) Theo giải thuật Prim, chúng ta bắt đầu từ cạnh (E, F) .

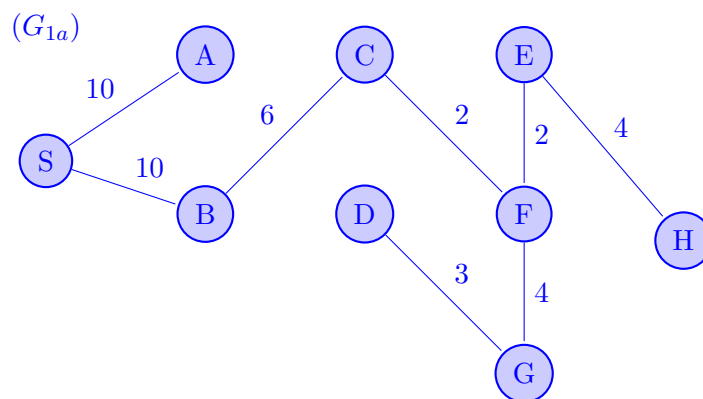
Cây khung có nhỏ nhất sẽ lần lượt được hình thành như sau: $\{E, F\} \cup \{C\} \cup \{H\} \cup \{G\} \cup \{D\} \cup \{B\} \cup \{S\} \cup \{A\}$

Đồ thị G_{1a} biểu diễn kết quả thu được với tổng trọng số là 41.

b) Theo giải thuật Kruskal, đầu tiên ta sắp xếp các cạnh theo trọng số không giảm, nghĩa là theo thứ tự như sau: (C, F) , (E, F) , (D, G) , (E, H) , (F, G) , (C, E) , (C, B) , (G, H) , (D, F) , (D, B) , (S, A) , (S, B) , (A, C) , (S, G) .

Sau đó ta sẽ thêm từng mỗi cạnh như trên theo đúng thứ tự vào cây khung nếu cạnh đó không tạo ra chu trình và sẽ dừng ngay khi cây khung chứa đủ tất cả các đỉnh.

Do vậy, ta thu được: (C, F) , (E, F) , (D, G) , (E, H) , (F, G) , (C, B) , (S, A) , (S, B) .



Trong trường hợp này, chúng ta sẽ thu được cùng kết quả cây khung giống với kết quả của giải thuật Prim (được biểu diễn bởi đồ thị G_{1a} với tổng trọng số là 41).

c)

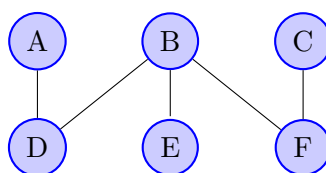
□

3 Bài tập cần giải

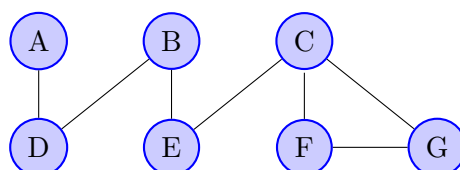
Câu 4.

Những đồ thị bên dưới đây có được gọi là cây?

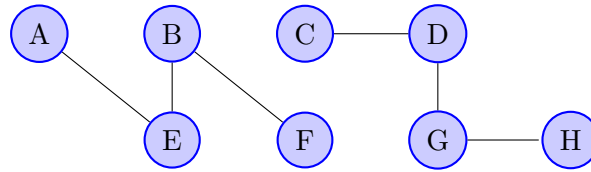
a)



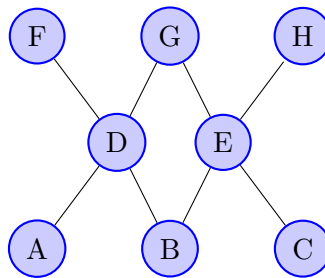
b)



c)



d)



Lời giải. Đồ thị (a) là cây, các đồ thị còn lại không phải là cây (đồ thị (b),(d) có chu trình; đồ thị (c) là rừng). □

Câu 5.

Có bao nhiêu đỉnh trong một cây ngũ phân đầy đủ với 100 đỉnh trung gian?

Lời giải. Ta biết cây m -phân có u đỉnh trung gian thì sẽ có $n = u \times m + 1$ đỉnh tất cả.

Áp dụng công thức trên ta sẽ có $n = 100 \times 5 + 1 = 501$ đỉnh tất cả. □

Câu 6.

Có bao nhiêu cạnh trong một cây nhị phân đầy đủ với 1000 đỉnh trung gian?

Lời giải. Tương tự câu (5), số đỉnh của cây sẽ là $n = 1000 \times 2 + 1 = 2001$.

Từ đó suy ra số cạnh của đồ thị là $n - 1 = 2000$ □

Câu 7.

Có bao nhiêu lá trong một cây tam phân đầy đủ với 100 đỉnh?

Lời giải. $n = 100, m = 3$ số lá $l = [(m - 1)n + 1]/m = (2 \times 100 + 1)/3 = 67$ □

Câu 8.

Một cây m phân đầy đủ T có 81 lá và có chiều cao là 4. Hãy cho biết giá trị cận trên và cận dưới của m (nghĩa là xác định giá trị lớn nhất có thể và nhỏ nhất có thể). Nếu T là cây cân bằng thì m phải là bao nhiêu? Hãy giải thích rõ.

Lời giải.

Cây m -phân chiều cao h thì có số lá tối đa là m^h

Nói cách khác $l = 81 \leq m^4$, hay $m \geq \sqrt[4]{81} = 3$

Cây m -phân đầy đủ có chiều cao là 4 thì số đỉnh trung gian tối thiểu $i = 4$.

Từ đó có số nút lá tối thiểu là $(m-1)i + 1 = 4 \times m - 3$ lá.

Ta có $81 \geq 4 \times m - 3$ hay $m \leq (81 + 3)/4 = 21$

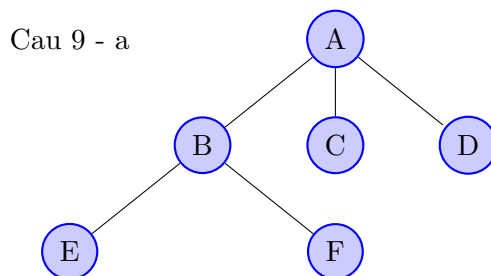
Kết luận $3 \leq m \leq 21$

Nếu là cây cân bằng thì $h = \lceil \log_m l \rceil$, suy ra $m = 3$ hoặc $m = 4$. Tuy nhiên, nghiệm $m = 4$ bị loại vì không thể tính được số đỉnh trung gian i . \square

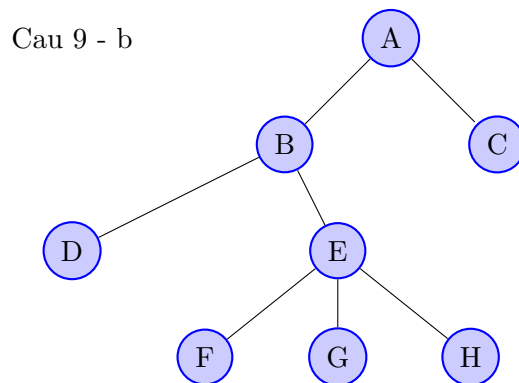
Câu 9.

Hãy cho biết tiền thứ tự, trung thứ tự và hậu thứ tự của những cây sau đây.

a)

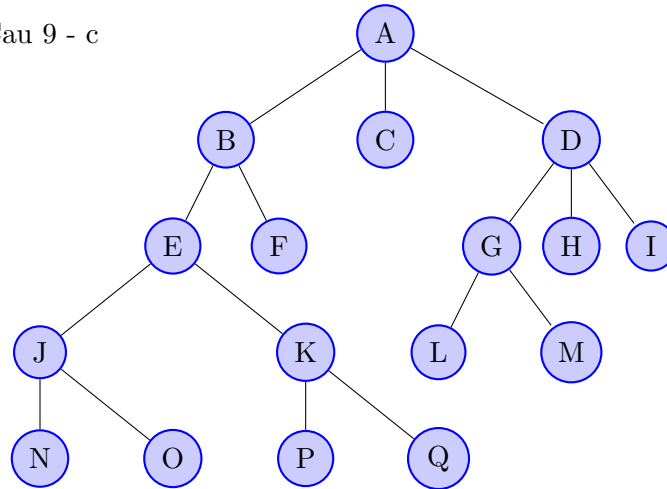


b)



c)

Câu 9 - c



Lời giải.

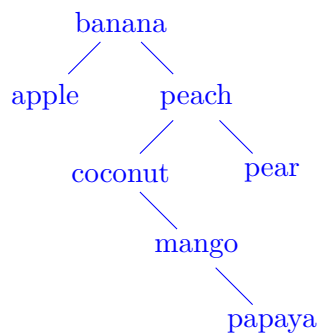
- a) **Tiền thứ tự** A, B, E, F, C, D
Trung thứ tự E, B, F, A, C, D
Hậu thứ tự E, F, B, C, D, A
- b) **Tiền thứ tự** A, B, D, E, F, G, H, C
Trung thứ tự D, B, F, E, G, H, A, C
Hậu thứ tự D, F, G, H, E, B, C, A
- c) **Tiền thứ tự** A, B, E, J, N, O, K, P, Q, F, C, D, G, L, M, H, I
Trung thứ tự N, J, O, E, P, K, Q, B, F, A, C, L, G, M, D, H, I
Hậu thứ tự N, O, J, P, Q, K, E, F, B, C, L, M, G, H, I, D, A

□

Câu 10.

Xây dựng cây nhị phân tìm kiếm cho các từ *banana*, *peach*, *apple*, *pear*, *coconut*, *mango* và *papaya* theo thứ tự ABC.

Lời giải. Lần lượt thêm vào các nodes ta được cây tìm kiếm nhị phân



□

Câu 11.

Cần bao nhiêu lần so sánh để tìm thấy hoặc thêm các từ sau vào cây tìm kiếm ở Câu trên.

- a) *pear*
- b) *banana*
- c) *kumquat*
- d) *orange*

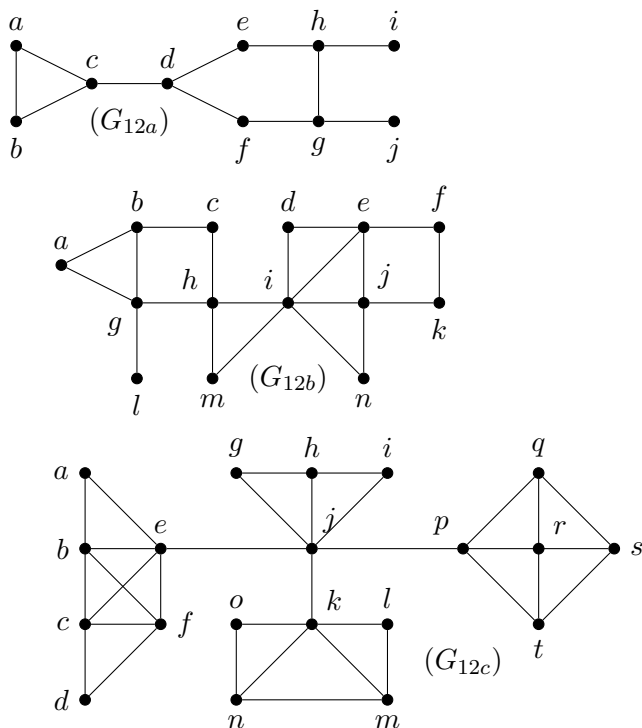
Lời giải.

- a) 3 lần
- b) 1 lần
- c) 5 lần
- d) 6 lần

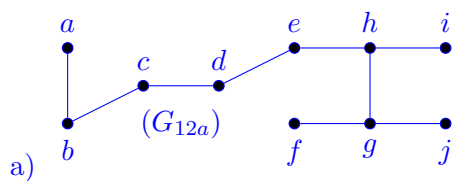
□

Câu 12.

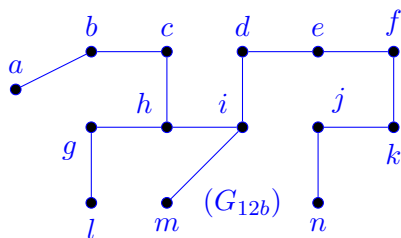
- a) Hãy dùng giải thuật tìm kiếm ưu tiên chiều sâu để tìm cây khung của các đồ thị G_{12a} , G_{12b} và G_{12c} . Chọn đỉnh a là gốc của cây khung.
- b) Hãy dùng giải thuật tìm kiếm ưu tiên chiều rộng để tìm cây khung của các đồ thị G_{12a} , G_{12b} và G_{12c} . Chọn đỉnh a là gốc của cây khung.



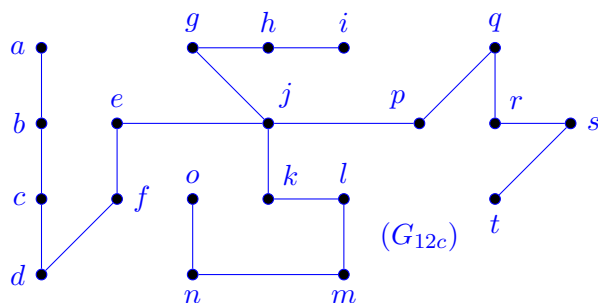
Lời giải.



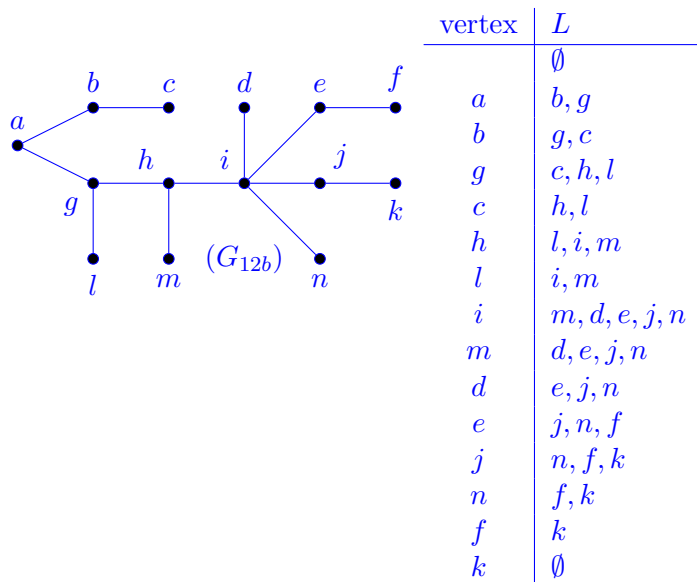
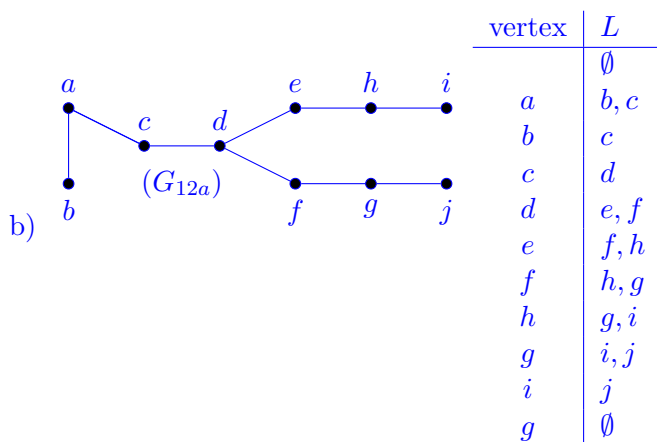
Trình tự duyệt qua các đỉnh (kể cả backtrack) là $abcdehgfjjghi$

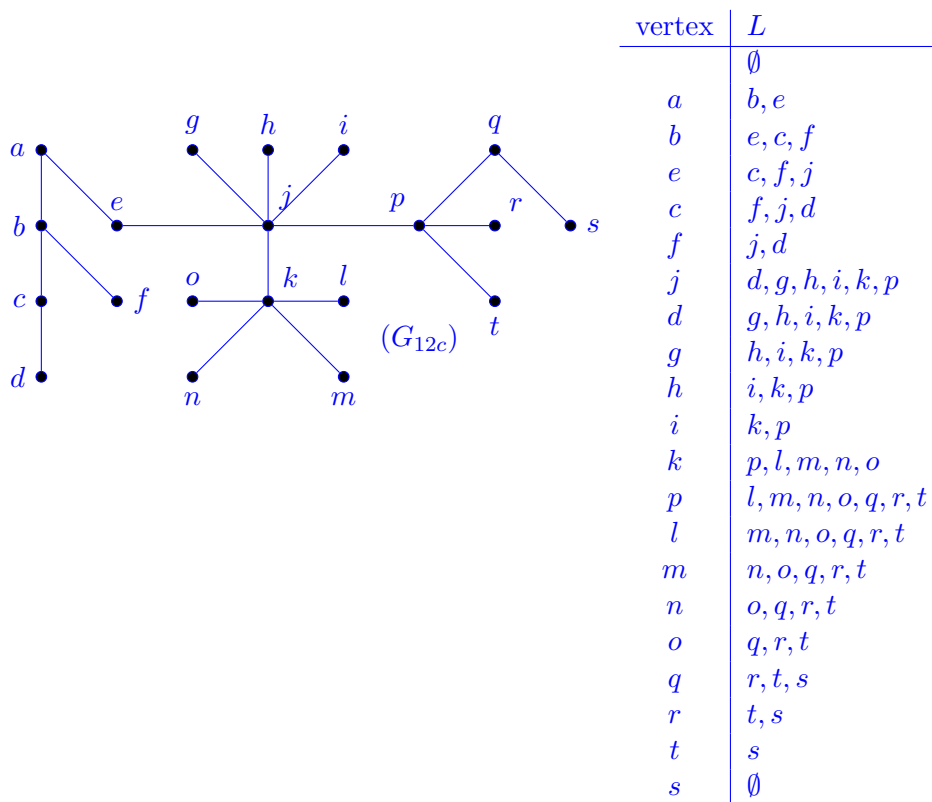


Trình tự duyệt qua các đỉnh (kể cả backtrack) là $abchglghidefkjnjkfeim$



Trình tự duyệt qua các đỉnh (kể cả backtrack) là $abcdfegjihgjjklmnonmlkjprst$

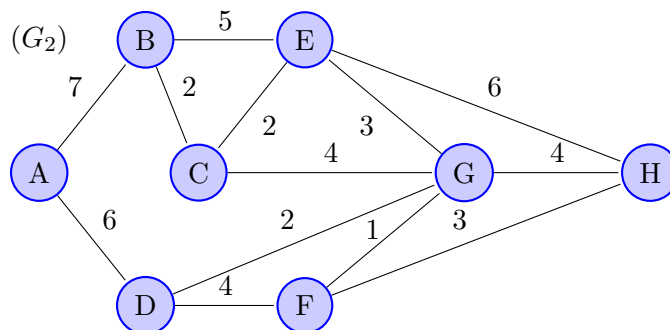




□

Câu 13.

- Hãy dùng giải thuật Prim để tìm cây khung nhỏ nhất của đồ thị G_2 .
- Hãy dùng giải thuật Kruskal để tìm cây khung nhỏ nhất của đồ thị G_2 .

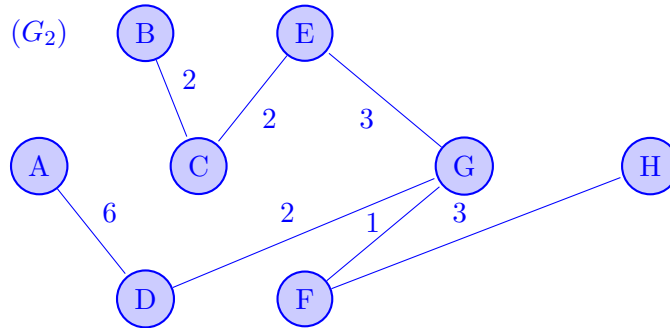


Lời giải.



- a) Bắt đầu từ một đỉnh bất kì, giả sử là đỉnh A. Ta lần lượt thêm các đỉnh theo thứ tự sau: $\{A\} \cup \{D\} \cup \{G\} \cup \{F\} \cup \{E\} \cup \{C\} \cup \{B\} \cup \{H\}$

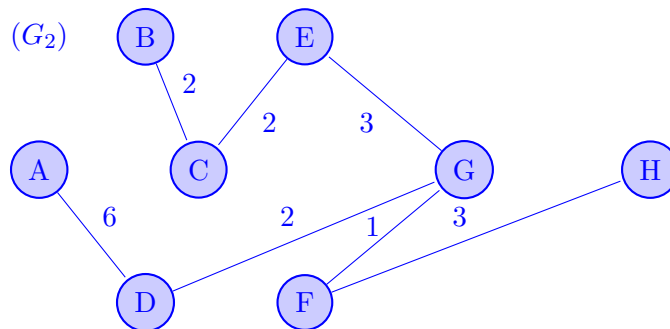
Tổng trọng số: 19



- b) Sắp xếp các cạnh theo thứ tự không giảm của trọng số ta được thứ tự sau: $(F, G)(B, C)(C, E)(D, G)(E, G)(F, H)(A, D)$

Lần lượt thêm các cạnh theo thứ tự trên sao cho không tạo thành chu trình (nếu tạo thành chu trình thì ta xét cạnh tiếp theo). Ta thêm được các cạnh $(F, G)(B, C)(C, E)(D, G)(E, G)(F, H)(A, D)$

Tổng trọng số vẫn là 19.



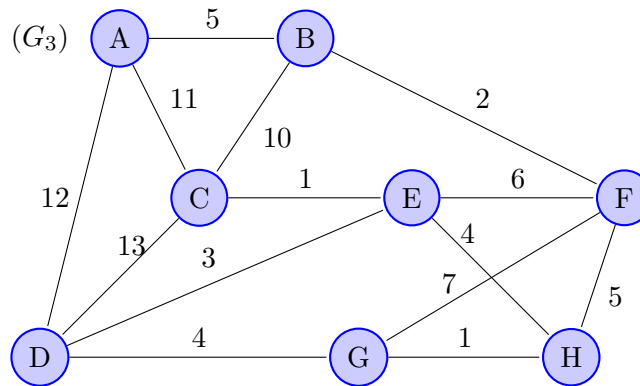
□

Câu 14.

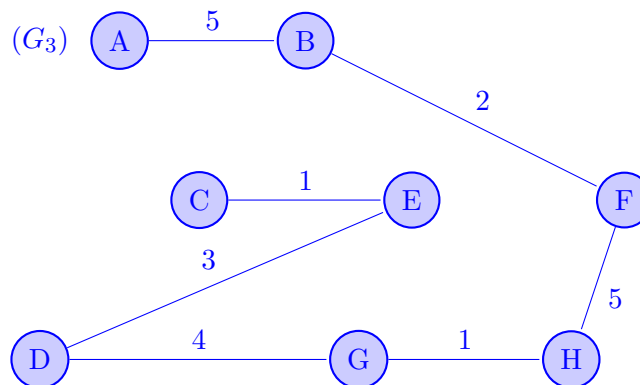
- a) Hãy dùng giải thuật Prim để tìm cây khung nhỏ nhất của đồ thị G_3 .
b) Hãy dùng giải thuật Kruskal để tìm cây khung nhỏ nhất của đồ thị G_3 .

Lời giải.

- a) Bắt đầu, chọn một đỉnh bất kì, chẳng hạn C, ta lần lượt thêm vào các đỉnh có đường nối tới những đỉnh đã chọn là ngắn nhất:



Ta thêm vào E vì E có khoảng cách tới $\{C\}$ là ngắn nhất (1), ta được tập $\{C, E\}$
 Ta thêm vào D vì D có khoảng cách tới $\{C, E\}$ ngắn nhất (3), ta được tập $\{C, E, D\}$
 Ta thêm vào G vì G có khoảng cách tới $\{C, E, D\}$ ngắn nhất (4), ta được tập $\{C, E, D, G\}$
 ...
 Lập lại quá trình trên ta được thứ tự thêm các đỉnh như sau $\{C\} \cup \{E\} \cup \{D\} \cup \{G\} \cup \{H\} \cup \{F\} \cup \{B\} \cup \{A\}$



b) Thực hiện tương tự câu (13b).

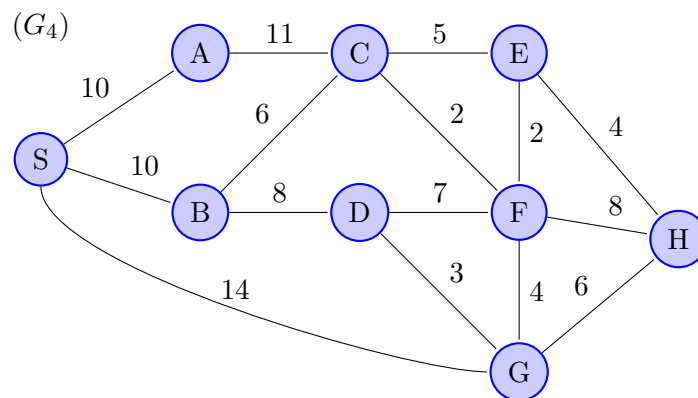
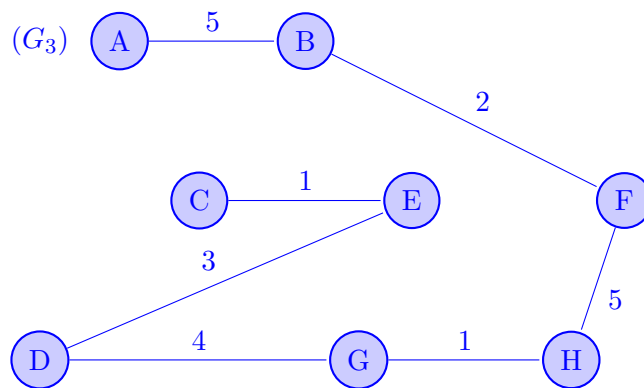
Thứ tự thêm các cạnh vào là $(C, E)(G, H)(B, F)(D, E)(D, G)(A, B)(F, H)$

□

Câu 15.

a) Hãy dùng giải thuật Prim để tìm cây khung nhỏ nhất của đồ thị G_4 .

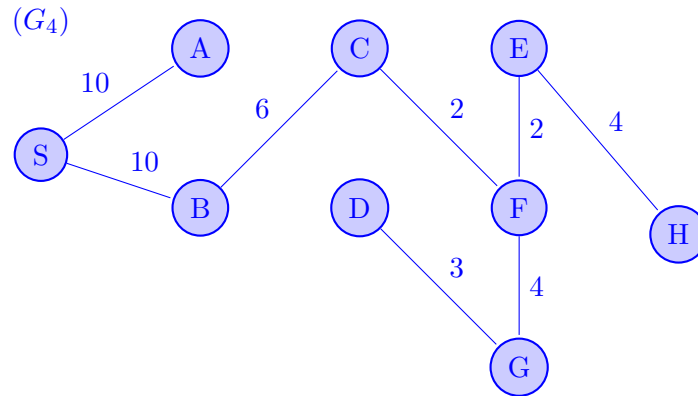
b) Hãy dùng giải thuật Kruskal để tìm cây khung nhỏ nhất của đồ thị G_4 .



Lời giải. Thực hiện tương tự câu 14, ta được tổng trọng số trên cây khung nhỏ nhất là

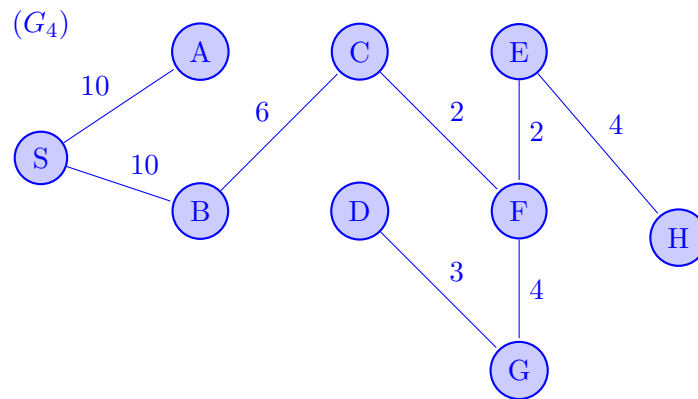
a) Chọn đỉnh bất kỳ, D chẳng hạn lần lượt thêm các đỉnh theo thứ tự sau:

$$\{D\} \cup \{G\} \cup \{F\} \cup \{C\} \cup \{E\} \cup \{H\} \cup \{B\} \cup \{S\} \cup \{A\}$$



b) Lần lượt thêm vào các cạnh sau:

$$(C, F)(E, F)(D, G)(E, H)(F, G)(C, B)(A, S)(S, B)$$



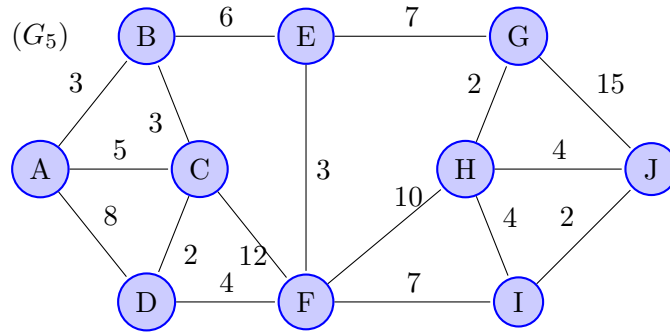
□

4 Bài tập làm thêm

Câu 16.

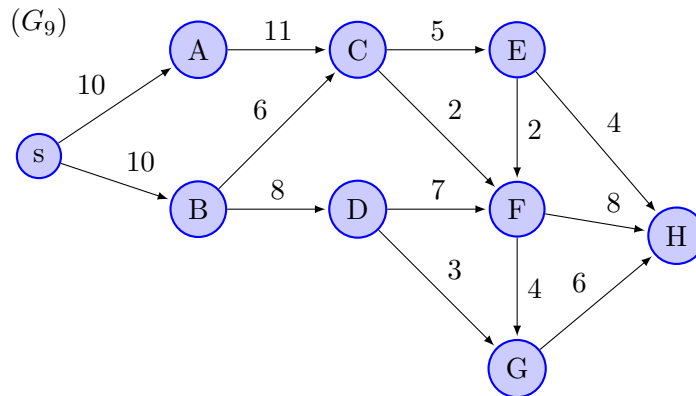
a) Hãy dùng giải thuật Prim để tìm cây khung nhỏ nhất của đồ thị G_5 .

b) Hãy dùng giải thuật Kruskal để tìm cây khung nhỏ nhất của đồ thị G_5 .



Câu 17.

Một nguồn nước s được cung cấp cho 8 thành phố A, B, C, D, E, E, G và H . Sự liên thông giữa các thành phố và nguồn nước được thể hiện qua đồ thị G_9 bên dưới trong đó trọng số của một cạnh (u, v) thể hiện khả năng truyền tải nước nguồn (m^3/h) từ thành phố u đến thành phố v . Hãy cho biết khả năng tiêu thụ nước tối đa (trong mỗi giờ) tại thành phố H .

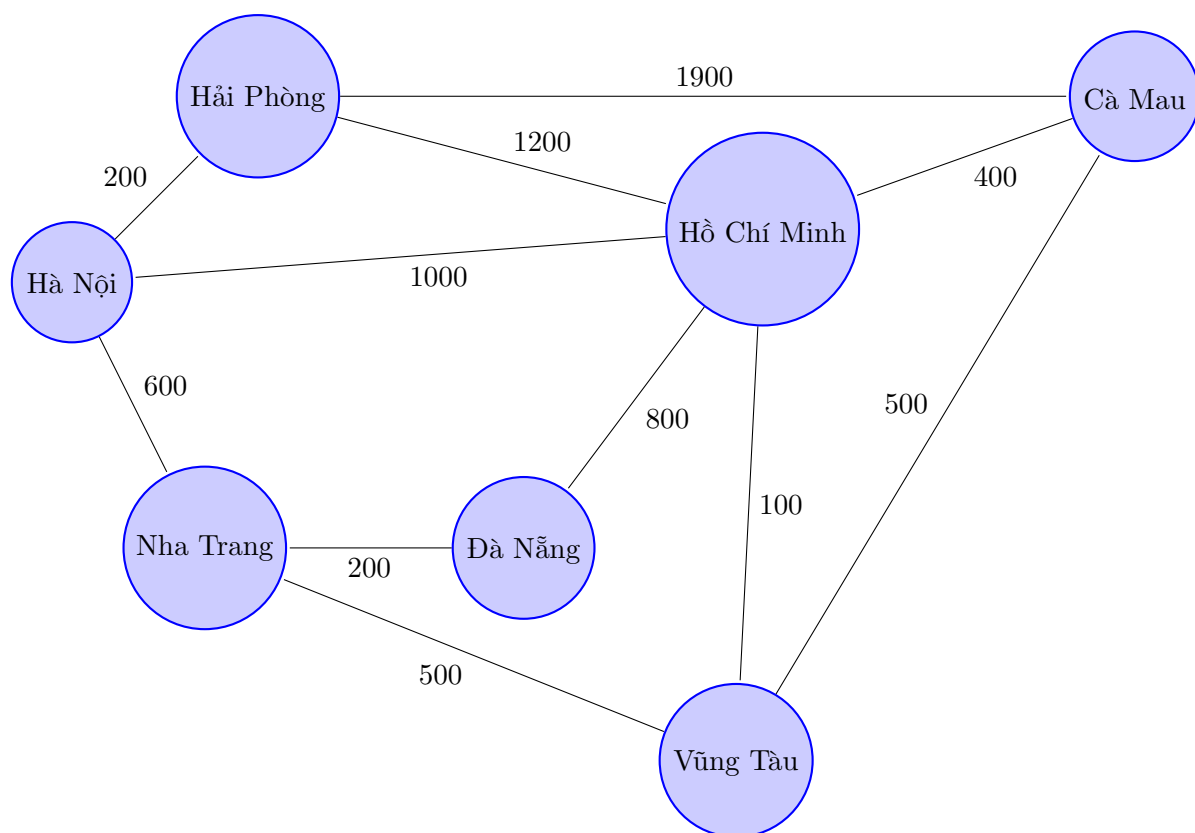


Câu 18.

Hãy tìm cây khung nhỏ nhất của một đồ thị có trọng số biểu diễn chi phí di chuyển giữa các thành phố.

Câu 19.

Đồ thị phân đôi đầy đủ $K_{m,n}$ nào có thể được xem là cây với m và n là những số nguyên dương?





Câu 20.

Cho G là một đơn đồ thị với n đỉnh. Chứng minh rằng G là một cây nếu và chỉ nếu G liên thông và có $n - 1$ cạnh.

Câu 21.

Chứng minh rằng nếu trong đồ thị liên thông G , các cạnh có trọng số hoàn toàn khác nhau từng đôi một, thì chỉ tồn tại duy nhất một cây khung có trọng số nhỏ nhất.

Câu 22.

Làm thế nào để đếm được số cây khung có thể có trong một đồ thị G cho trước. Hãy viết giải thuật đếm này.

Câu 23.

Làm thế nào để đếm được số cây khung khác nhau có trọng số nhỏ nhất có trong một đồ thị G cho trước. Hãy viết giải thuật đếm này.

Câu 24.

Làm thế nào để đếm được số cây khung khác nhau có trọng số nhỏ nhất có trong một đồ thị G cho trước. Hãy viết giải thuật đếm này.

Câu 25.

Hãy viết giải thuật để xác định cây khung có trọng số nhỏ nhất mà có chứa đường đi ngắn nhất từ một đỉnh u đến đỉnh v cho trước.

Câu 26.

Cho một đồ thị G , cây khung có trọng số nhỏ nhất T trong G . Hãy viết giải thuật nhanh để xác định (hoặc là cập nhật) cây khung có trọng số nhỏ nhất khi ta thêm một cạnh mới vào trong G .

Câu 27.

Hãy thiết kế giải thuật tìm cây khung có trọng số nhỏ nhất và có chứa một tập các cạnh cho trước.

5 Tổng kết

Thông qua các bài tập trong phần này, chúng ta đã làm quen với các định nghĩa và các tính chất về cây, bao gồm các phương pháp duyệt cây và các giải thuật tìm cây khung có trọng số nhỏ nhất. (tham khảo chi tiết lý thuyết trong chương 10).