Bài tập chương 2
Các phương pháp chứng minh

1 Dẫn nhập

Trong bài tập dưới đây, chúng ta sẽ làm quen với các phương pháp chứng minh bao gồm chứng minh trực tiếp, phản chứng, phản đảo và quy nạp. Sinh viên cần ôn lại lý thuyết về các phương pháp chứng minh trong chương 2, trước khi làm bài tập bên dưới.

2 Bài tập mẫu

Câu 1.

Chứng minh rằng 'với mọi giá trị nguyên $n \geq 1$, $10^{n+1} + 11^{2n-1} \vdots 111$'.
Lời giải. *Chúng ta có thể chứng minh bằng phép qui nạp như sau.*

a) Với $n = 1$, biểu thức bên trái có trị bằng $10^2 + 11^1 = 111$. Do vậy, mệnh đề trên đúng với $n = 1$.

b) Giả sử mệnh đề này đứng với $n = k$ nghĩa là $10^{k+1} + 11^{2k-1} \vdots 111$. Nói một cách khác, tồn tại một số nguyên x sao cho $10^{k+1} + 11^{2k-1} = 111.x$.
Chúng ta cần chứng minh mệnh đề trên cũng đúng với $n = k + 1$, nghĩa là $10^{k+2} + 11^{2k+1} \vdots 111$.
Khai triển biểu thức bên trái, ta có:
$10^{k+2} + 11^{2k+1} = (10^{k+2} - 11^2.10^{k+1}) + (11^2.10^{k+1} + 11^{2k+1}) = 10^{k+1}(10 - 11^2) + 11^2(10^{k+1} + 11^{2k-1}) = 10^{k+1}(-111) + 121(10^{k+1} + 11^{2k-1}) \vdots 111$.
Do đó, $10^{k+2} + 11^{2k+1} \vdots 111$; và vì thế mệnh đề này đúng với mọi số nguyên $n \geq 1$ do qui nạp.

□

Câu 2.

Hãy chứng minh bằng qui nạp rằng tổng của $1 + 3 + 5 + 7 + ... + 2n - 1$ là một số chính phương, với mọi $n \geq 1$.
Lời giải. *Đầu tiên, ta đặt $S_n = 1 + 3 + 5 + 7 + ... + 2n - 1$.*
Do vậy, ta có $S_{n+1} = S_n + (2n + 1)$.

a) *Kết quả dễ dàng được chứng minh đúng với* $n = 1$*, vì bản thân số 1 là một số chính phương.*

b) *Giả sử* S_n *là một số chính phương với* $n \geq 1$*, nghĩa là tồn tại một số nguyên* x *sao cho* $S_n = x^2$*.*
Chúng ta cần chứng minh rằng mệnh đề 'S_{n+1} *là một số chính phương' cũng đúng.*
Ta có $S_{n+1} = S_n + (2n+1) = x^2 + 2n + 1$*.*
Chọn $x = n$*, ta sẽ có được* $S_{n+1} = (x+1)^2$*.*
Do vậy, kết quả đã được chứng minh đúng với mọi số nguyên $n \geq 1$ *bằn phương pháp qui nạp.*

□

3 Bài tập cần giải

Câu 3.
Cho F_n là số Fibonacci number thứ n ($F_0 = 0$, $F_1 = 1$, $F_{n+2} = F_n + F_{n+1}$ với $n \geq 0$).
Chứng minh rằng với mọi $n \geq 1$, F_{3n} là một số chẵn.
Lời giải. *Chúng ta có thể chứng minh điều này bằng phương pháp qui nạp.*
Với $n = 1$*, ta có*$f(3) = 2$ *là một số chẵn.*
Giả sử tồn tại một số $k \geq 1$ *sao cho* $f(3k)$ *chẵn, nghĩa là tồn tại một số nguyên* m *sao cho* $f(3k) = 2m$*.*
Chúng ta cần chứng minh rằng $f(3k+3)$ *cũng là một số chẵn.*
Mặt khác, ta có:
$f(3k+3) = f(3k+2) + f(3k+1) = f(3k+1) + f(3k) + f(3k+1) = 2f(3k+1) + f(3k) = 2f(3k+1) + 2m = 2(f(3k+1) + m)$*. Nghĩa là* $f(3k+3)$ *là một số chẵn (đpcm).* □

Câu 4.
Chứng minh rằng với mọi số nguyên $n \geq 1$, $3^{2n-1} + 1$ chia hết cho 4.

Lời giải. *Với* $n = 1$*, ta sẽ có* $4 \vdots 4$ *- điều này luôn luôn đúng.*
Giả sử tồn tại một số nguyên $k \geq 1$ *sao cho* $3^{2k-1} + 1$ *chia hết cho 4.*
Hay nói cách khác, tồn tại số nguyên m *sao cho* $3^{2k-1} + 1 = 4m$*.*
Chúng ta cần chứng minh rằng $3^{2(k+1)-1} + 1$ *chia hết cho 4.*
Điều này tương đương với việc chứng minh rằng $3^{2k+1} + 1$ *chia hết cho 4.*
Mặt khác, ta có:
$3^{2k+1} + 1 = 3^2(3^{2k-1} + 9 - 8 = 9(3^{2k-1} + 1) - 2.4 = 4(9m + 2)$*. Và do vậy,* $3^{2k+1} + 1$ *cũng là bội của 4, nên mệnh đề trên được chứng minh bằng qui nạp.* □

Câu 5.
Chứng minh rằng với mọi số nguyên $n \geq 1$, $6^n - 1$ đều chia hết cho 5.

Lời giải. *Với* $n = 1$*, ta sẽ có* $6^1 - 1 = 5 \vdots 5$ *- điều này luôn luôn đúng.*
Giả sử tồn tại một số nguyên $n \geq 1$ *sao cho* $6^n - 1$ *chia hết cho* 5*.*
Hay nói cách khác, tồn tại số nguyên m *sao cho* $6^n - 1 = 5m$*.*
Chúng ta cần chứng minh rằng $6^{n+1} - 1$ *cũng chia hết cho* 5*.*
Mặt khác, ta có:
$6^{n+1} - 1 = 6.6^n - 6 + 5 = 6(6^n - 1) + 5 = 30m + 5 = 5(6m + 1)$*. Và do vậy,* $6^{n+1} - 1$ *cũng là bội của* 5*, nên mệnh đề trên được chứng minh bằng qui nạp.* □

Câu 6.
Chứng minh rằng với mọi số nguyên $n \geq 1$, $5^{2n-1} + 1$ đều chia hết cho 6.

Lời giải. *Với* $n = 1$*, ta sẽ có* $5^{2-1} + 1 = 4 \vdots 4$ *- điều này luôn luôn đúng.*
Giả sử tồn tại một số nguyên $n \geq 1$ *sao cho* $5^{2n-1} + 1$ *chia hết cho* 6*.*
Hay nói cách khác, tồn tại số nguyên m *sao cho* $5^{2n-1} + 1 = 6m$*.*
Chúng ta cần chứng minh rằng $5^{2(n+1)-1} + 1$ *cũng chia hết cho* 6*.*
Điều này tương đương với việc chứng minh rằng $5^{2n+1} + 1$ *chia hết cho* 6*.*
Mặt khác, ta có:
$5^{2n+1} - 1 = 5^2.5^{2n-1} + 25 - 24 = 5^2(5^{2n-1} + 1) - 24 = 150m - 24 = 6(25m - 4)$*. Và do vậy,* $5^{2n-1} + 1$ *cũng là bội của* 6*, nên mệnh đề trên được chứng minh bằng qui nạp.* □

Câu 7.
Chứng minh rằng với mọi số nguyên $n \geq 1$, $8^n - 1$ đều chia hết cho 7.

Lời giải. *Với* $n = 1$*, ta sẽ có* $8^1 - 1 = 7 \vdots 7$ *- điều này luôn luôn đúng.*
Giả sử tồn tại một số nguyên $n \geq 1$ *sao cho* $8^n - 1$ *chia hết cho* 7*.*
Hay nói cách khác, tồn tại số nguyên m *sao cho* $8^n - 1 = 7m$*.*
Chúng ta cần chứng minh rằng $8^{n+1} - 1$ *cũng chia hết cho* 7*.*
Mặt khác, ta có:
$8^{n+1} - 1 = 8.8^n - 8 + 7 = 8(8^n - 1) + 7 = 56m + 7 = 7(8m + 1)$*. Và do vậy,* $8^{n+1} - 1$ *cũng là bội của* 7*, nên mệnh đề trên được chứng minh bằng qui nạp.* □

Câu 8.
Chứng minh rằng với mọi số nguyên $n \geq 1$, $3^n > n^2$.
Lời giải. *Với* $n = 1$*, ta sẽ có* $3^1 = 3$ *và* $1^2 = 1$*. Do đó, mệnh đề này đúng với* $n = 1$*.*
Với $n = 2$*, ta sẽ có* $3^2 = 9$ *và* $2^2 = 4$*. Do đó, mệnh đề này cũng đúng với* $n = 2$*.*
Giả sử tồn tại một số nguyên $n \geq 2$ *sao cho* $3^n > n^2$*.*
Chúng ta cần chứng minh rằng 3^{n+1} *cũng lớn hơn* $(n+1)^2$*.*
Mặt khác, khai triển biểu thức bên phải của bất đẳng thức, ta thu được: $(n+1)^2 = n^2 + 2n + 1$*.*
Do ta chỉ xét n *geq2, nên* $n^2 = n \times n \geq 2n$ *và* $3^n > 1$*.*
Xét biểu thức bên trái của bất đẳng thức:
$3^{n+1} = 3 \times 3^n = 3^n + 3^n + 3^n > n^2 + n^2 + 1 > n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$ *(đpcm)*
. Do vậy, mệnh đề trên được chứng minh bằng qui nạp. □

Câu 9.
Chứng minh rằng với mọi số nguyên $n \geq 4$, $n! > 2^n$.
Lời giải. *Với $n = 4$, ta sẽ có $4! = 24 > 2^4 = 16$.*
Giả sử tồn tại một số nguyên $n \geq 1$ sao cho $n! > 2^n$.
Chúng ta cần chứng minh rằng $(n+1)!$ cũng lớn hơn 2^{n+1}.
Mặt khác, ta có:
$(n+1)! = (n+1) \times n!$. Theo giả thuyết, ta có: $(n+1)! > (n+1) \times 2^n$.
Hơn nữa, biểu thức bên phải có giá trị lớn hơn $2 \times 2^n = 2^{n+1}$ (vì $n \geq 4 > 2$) Và do vậy, mệnh đề trên được chứng minh bằng qui nạp. □

Câu 10.

a) Chứng minh rằng $\forall n \in \mathcal{N}^+$ $(n+1)^2 - (n+2)^2 - (n+3)^2 + (n+4)^2 = 4$.

b) Từ đó suy ra rằng với mọi số tự nhiên m, tồn tại n nguyên dương để có thể viết m dưới dạng tổng bình phương của 1^2, 2^2, ..., n^2, nghĩa là: $\forall m \in \mathcal{N}^+$, $\exists n \in \mathcal{N}^+$, $\exists \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n \in \{-1, 1\}$, $m = \varepsilon_1 1^2 + \varepsilon_2 2^2 + \ldots + \varepsilon_n n^2$.
(**Gợi ý**: thử biểu diễn các giá trị $m \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$)

Lời giải.

- $m = 0$: $0 = 1^2 + 2^2 - 3^2 + 4^2 - 5^2 - 6^2 + 7^2$
- $m = 1$: $1 = 1^2$
- $m = 2$: $2 = -1^2 - 2^2 - 3^2 + 4^2$
- $m = 3$: $3 = -1^2 + 2^2$
- $m = 4$: $4 =?$
- $m = 5$: $5 =?$

□

Câu 11.
Xét một tập con D $(\mathcal{N} \times N)$ được đinh nghĩa đệ quy như sau:

(i) $(n, 0) \in D$.

(ii) nếu $(n, m) \in D$, thì $(n, n+m) \in D$.

Hãy

1) xác định vài phần tử của D.

2) chứng minh bằng phép quy nạp trên k rằng 'nếu $m = k.n$ thì '$(n, m) \in D$'.

3) chứng minh rằng nếu $(n, m) \in D$, thì với mọi $k \in \mathcal{N}$, chúng ta sẽ có $m = kn$.

Câu 12.

- Hãy tìm công thức tính tổng n số nguyên chẵn đầu tiên.
- Dùng quy nạp toán học để chứng minh công thức tìm được.

Câu 13.

Với n nguyên dương, tìm công thức tính tổng của:

a) $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2^n}$

b) $\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)}$

Câu 14.

Dùng quy nạp toán học để chứng minh với n nguyên dương rằng:

a) $3 + 3.5 + 3.5^2 + \ldots + 3.5^n = \frac{3(5^{n+1}-1)}{4}$

b) $2 - 2.7 + 2.7^2 + \ldots + 2.(-7)^n = \frac{1-(-7)^{n+1}}{4}$

c) $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

d) $1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = [\frac{n(n+1)}{2}]^2$

e) $1^2 + 3^2 + \ldots + (2n+1)^2 = \frac{(n+1)(2n+1)(2n+3)}{3}$

f) $1.1! + 2.2! + \ldots + n.n! = (n+1)! - 1$

g) $1.2 + 2.3 + \ldots + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$

h) $1.2.3 + 2.3.4 + \ldots + n(n+1)(n+2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$

i) $1^2 - 2^2 + 3^2 - \ldots + (-1)^{n-1}n^2 = \frac{(-1)^n n(n+1)}{2}$

j) $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \ldots + \frac{1}{n^2} \leq 2 - \frac{1}{n}$

k) $1^4 + 2^4 + \ldots + n^4 = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}$

l) $\frac{1.3.5 \ldots (2n-1)}{2.4 \ldots (2n)} \geq \frac{1}{2n}$

4 Bài tập làm thêm

Câu 15.
Hãy chứng minh rằng nếu n là số nguyên dương và n^3+5 là số lẻ thì n là số chẵn bằng cách:

1. Chứng minh gián tiếp (phản đảo)
2. Chứng minh phản chứng

Câu 16.
Chứng minh: $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \ldots + \frac{1}{n^2} < 2 - \frac{1}{n}$ với $n > 1$, $n \in \mathbb{Z}$

Câu 17.
Tìm công thức của:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots + \frac{1}{2^n}$$

bằng cách kiểm tra với các giá trị n nhỏ.
Chứng minh công thức vừa tìm thấy là đúng.

Câu 18.
Hãy chứng minh: $1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{k}} > 2(\sqrt{k+1} - 1)$, với $n > 0$, $n \in \mathbb{Z}$

Câu 19.
Các bước suy luận sau để tìm lời giải cho phương trình

$$\sqrt{2x^2 - 1} = x$$

có đúng hay không?

(1) $\sqrt{2x^2 - 1} = x$;

(2) Bình phương hai vế ta có $2x^2 - 1 = x^2$;

(3) Trừ x^2 mỗi vế, $x^2 - 1 = 0$;

(4) Đặt nhân tử, $(x-1)(x+1) = 0$;

(5) $x = 1$ hoặc $x = -1$.

Câu 20.
Chứng minh rằng chỉ hai toán tử $\neg$ và $\wedge$ là đủ thể hiện tất cả các toán tử luận lý khác.

Câu 21.
Chứng minh rằng với mọi số nguyên $n \geq 1$, $2^{2n} - 1$ đều chia hết cho 3.
Câu 22.
Chứng minh rằng với mọi số nguyên $n \geq 1$, $9^n + 3$ đều chia hết cho 4.
Câu 23.
Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương $n \geq 2$, $n^3 - n$ đều là bội của 6.
Câu 24.
Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên lẻ n, $n^2 - 1$ đều chia hết cho 8.

Câu 25.
Chứng minh rằng với mọi số nguyên $n \geq 1$, $4^n + 15n - 1$ đều chia hết cho 9.
Câu 26.
Chứng minh rằng với mọi số nguyên $n \geq 3$, tổng các góc trong của một đa giác lồi với n đỉnh là $180(n-2)$ độ.

Câu 27.
Hãy chứng minh dãy số Fibonacci có một số đặc tính đặc biệt như sau:

a) với mọi số nguyên $n \geq 1$, F_{4n} chia hết cho 3 , và $1 + F_{4n+1}$, $1 + F_{4n+2}$ cũng vậy.

b) $1 < (F_{n+1}/F_n) < 2$ với mọi số nguyên $n > 2$.

c) $F_n^2 = F_{n-1}F_{n+1} + (-1)^{n+1}$, với mọi số nguyên $n \geq 1$.

Câu 28.
Dịch vụ bưu chính chỉ phát hành hai loại tem thư, là tem 5 xu và 12 xu. Trước khi gửi thư thông qua bưu điện, người gửi cần phải dán các con tem trên lá thư tương ứng với chi phí n phải trả theo trọng lượng của nó. Hãy chứng minh rằng chúng ta luôn làm được điều này với $n > 44$.

Câu 29.
Chứng minh rằng n đường thẳng phân biệt sẽ chia mặt phẳng ra thành tối đa $(n^2+n+2)/2$ miền.

Câu 30.
Chúng ta định nghĩa một cách đệ quy dãy số *Ulam* bằng cách xác định $u_1 = 1$, $u_2 = 2$, và với mỗi chuỗi con số nguyên n, ta xác định n bằng số *Ulam* kế tiếp nếu nó có thể được viết một cách duy nhất bằng tổng của hai số *Ulam* khách nhau; ví dụ: $u_3 = 3$, $u_4 = 4$, $u_5 = 6$, $\ldots$.
Chứng minh rằng tồn tại một số lượng vô hạn các số *Ulam*.
Câu 31.
Bất đẳng thức Bernoulli's chỉ ra rằng nếu $x > -1$, $x \neq 0$ và n là một số nguyên dương lớn hơn 1, thì ta sẽ có $(1+x)^n > 1 + nx$. Hãy chứng minh bất đẳng thức này.

Câu 32.
Với mọi số tự nhiên $n \geq 1$, hãy chứng minh rằng $x^n - y^n$ chia hết cho $x - y$.
Câu 33.
Biết r là một số sao cho $r + 1/r$ là một số nguyên.
Hãy chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n, $r^n + 1/r^n$ cũng là một số nguyên.
Câu 34.
Cho dãy số $S(n) = n^2 + n + 41$. Chứng minh rằng $S(n)$ là một số nguyên tố với mọi $n = 1, 2, \ldots, 40$, nhưng $S(n)$ sẽ không còn là số nguyên tố với mọi $n \geq 41$.
Câu 35.
Nếu hai thành phố bất kỳ thuộc tiểu bang A đều được kết nối với nhau bằng đường một chiều, thì ta có thể xác định được một thành phố khởi đầu A và một hành trình từ A đi thông qua mỗi một thành phố khác một lần.
Câu 36.
Điều gì sai trong chuỗi lý luận dưới đây rằng tất cả các bông hoa đều có cùng một màu?

- Đặt $P(n)$ là một mệnh đề rằng tất cả các bông hoa trong một tập n bông đều có cùng màu.
- Ta thấy rõ ràng, $P(1)$ luôn đúng.
- Nếu giả sử $P(n)$ đúng. Nghĩa là, giả sử rằng tất cả các bông hoa trong một tập n bông hoa bất kỳ đều có cùng màu sắc.
- Xét một tập bất kỳ $n + 1$ bông; được đánh số lần lượt là $1, 2, 3, ..., n, (n + 1)$.
- Dựa theo giả định trên, chuỗi n bông hoa đầu tiên của những bông hoa này có cùng màu, và chuỗi n bông hoa sau cũng sẽ có cùng một màu.
- Do hai tập hợp bông hoa này có sự giao thoa $n - 1$ bông, nên tất cả $n + 1$ bông hoa này phải cùng một màu.
- Điều này chứng minh rằng $P(n + 1)$ là đúng và được chứng minh bằng phương pháp qui nạp.

5 Tổng kết

Thông qua các bài tập trong phần này, chúng ta đã làm quen với các phương pháp chứng minh (tham khảo chi tiết lý thuyết trong chương 2). Và các bài tập này cũng đã giúp chúng ta phần nào hiểu thêm về việc lý giải đúng sai trong các bài toán thực tế.