

Bài tập chương 5

Quan hệ

1 Dẫn nhập

Trong bài tập dưới đây, chúng ta sẽ làm quen với các kiến thức liên quan đến lý thuyết tập hợp (bao gồm quan hệ, quan hệ tương đương và quan hệ thứ tự). Sinh viên cần ôn lại lý thuyết của chương 5 trước khi làm bài tập bên dưới.

2 Bài tập mẫu

Câu 1.

Cho quan hệ $R = \{(1, 1), (2, 3), (3, 2)\}$ trên tập $X = \{1, 2, 3\}$. Hãy xác định nếu R là

- a) phản xạ
- b) đối xứng
- c) bắc cầu

Lời giải.

- a) Quan hệ R không có tính chất phản xạ vì $(2, 2) \notin R$;
- b) Quan hệ R có tính chất đối xứng đối xứng vì $R^{-1} = R$;
- c) Quan hệ R không có tính chất bắc cầu vì $(3, 2) \in R$ và $(2, 3) \in R$, nhưng $(3, 3) \notin R$.

□

Câu 2.

Quan hệ R trên \mathbb{N} được định nghĩa bởi “ $n R m$ nếu và chỉ nếu $m = n + 1$ ” là

- a) đối xứng?
- b) phản xạ?
- c) bắc cầu?

Lời giải.

- a) Nếu R có tính chất đối xứng, ta sẽ có $m = n + 1 \iff n = m + 1$ (vô lý!).
- b) Nếu R có tính chất phản xạ, thì $n = n + 1$ (vô lý!).
- c) Nếu R có tính chất bắc cầu, thì ta sẽ có $m = n + 1$ và $p = m + 1 \implies p = n + 1$ (vô lý!).

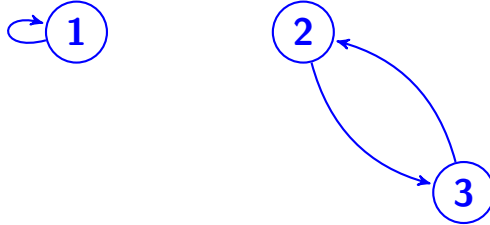
□

Câu 3.

Vẽ ma trận và đồ thị có hướng tương ứng với quan hệ R trong câu 1

Lời giải.

• Ma trận : $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$



• Đồ thị :

□

3 Bài tập cần giải

Câu 4.

Cho Z là tập hợp các số nguyên, L là tập hợp các đường thẳng trong mặt phẳng. Xác định các quan hệ sau có tính *phản xạ*, *đối xứng*, *phản đối xứng*, *bắc cầu*, *tương đương* hay không? Giải thích.

a) Trên tập $\{1, 2, 3, 4\}$, các quan hệ sau:

$$R_1 = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3)\}$$

$$R_2 = \{(4, 2), (2, 4), (2, 2), (2, 3), (3, 2), (3, 3), (4, 4)\}$$

$$R_3 = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 3)\}$$

$$R_4 = \{(1, 1), (1, 3), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (4, 4)\}$$

$$R_5 = \{(4, 4), (4, 1), (4, 2), (1, 4), (1, 1), (1, 2), (2, 4), (2, 2), (3, 3)\}$$

$$R_6 = \{(1, 2)\}$$

b) Trên tập Z , các quan hệ: “=”, “ \equiv ”, “ \leq ”, “ \neq ”

c) Trên tập L , các quan hệ: “//”, “ \perp ”, “cắt nhau”, “chéo nhau”.

d) Trên tập Z , các quan hệ sau:

$$R_7 : xRy \Leftrightarrow (x + y) \text{ chẵn}$$

$$R_8 : xRy \Leftrightarrow (x - y) \text{ chẵn}$$

$$R_9 : xRy \Leftrightarrow (x^2 + y^2) \text{ chẵn}$$

e) Trên tập R , các quan hệ sau:

$$R_{10} : xRy \Leftrightarrow |x| = |y|$$

$$R_{11} : xRy \Leftrightarrow \sin^2 x + \cos^2 y = 1$$

f) Trên tập $Z \times Z$, quan hệ $R_{12} : (a, b)R(c, d) \Leftrightarrow a \leq c$

Câu 5.

Vẽ ma trận và đồ thị có hướng tương ứng với quan hệ $R_x (1 \leq x \leq 6)$ trong câu 4a

Câu 6.

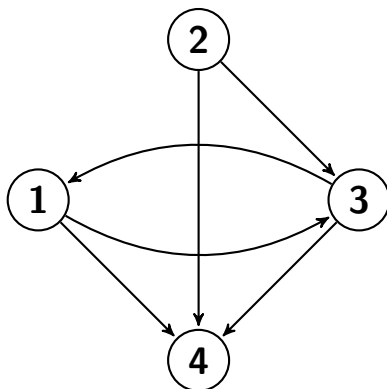
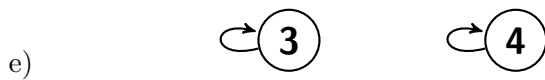
Cho các ma trận và đồ thị có hướng tương ứng với một quan hệ R_x trên tập $\{1, 2, 3, 4\}$. Xác định các quan hệ R_x có tính *phản xạ*, *đối xứng*, *phản đối xứng*, *bắc cầu*, *tương đương* hay không? Giải thích.

a)
$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

b)
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

c)
$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

d)
$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



Câu 7.

Hãy tìm một quan hệ trên $A = \{1, 2, 3, 4\}$ sao cho nó có tính chất:

- Phản xạ và đối xứng nhưng không bắc cầu.
- Phản xạ và bắc cầu nhưng không đối xứng.
- Bắc cầu và đối xứng nhưng không phản xạ.

Câu 8.

Trên tập $\{1, 2, 3, 4\}$, cho các quan hệ sau:

$$R_1 = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3)\}$$

$$R_2 = \{(4, 2), (2, 4), (2, 2), (2, 3), (3, 2), (3, 3), (4, 4)\}$$

$$R_3 = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 3)\}$$

$$R_4 = \{(1, 1), (1, 3), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (4, 4)\}$$

$$R_5 = \{(4, 4), (4, 1), (4, 2), (1, 4), (1, 1), (1, 2), (2, 4), (2, 2), (3, 3)\}$$

$$R_6 = \{(1, 2)\}$$

Tìm:

a) $R_1 \circ R_2, R_1 \circ R_3, R_1 \circ R_4, R_1 \circ R_5, R_1 \circ R_6$

b) $R_2 \circ R_3 \circ R_4 \circ R_6$

c) $(R_3)^2$

d) $(R_3)^4$

e) Bao đóng phản xạ của R_2

f) Bao đóng đối xứng của $R_1 \circ R_2$

g) Bao đóng bắc cầu của R_6

Câu 9.

Liệt kê các cặp trong quan hệ tương đương được tạo bởi các phân hoạch sau của $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$.

1. $\{0\}, \{1, 2\}, \{3, 4, 5\}$
2. $\{0, 1\}, \{2, 3\}, \{4, 5\}$
3. $\{0, 1, 2\}, \{3, 4, 5\}$
4. $\{0\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}$

Câu 10.

Quan hệ trên tập $\{0, 1, 2, 3\}$ nào sau đây là thứ tự bộ phận? Nếu không có thứ tự bộ phận, xác định các tính chất của một thứ tự bộ phận mà quan hệ đó còn thiếu.

1. $\{(0, 0), (1, 1), (2, 2), (3, 3)\}$
2. $\{(0, 0), (1, 1), (2, 0), (2, 2), (2, 3), (3, 2), (3, 3)\}$
3. $\{(0, 0), (1, 1), (1, 2), (2, 2), (3, 3)\}$
4. $\{(0, 0), (1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 2), (2, 3), (3, 3)\}$
5. $\{(0, 0), (0, 1), (0, 2), (1, 0), (1, 1), (1, 2), (2, 0), (2, 2), (3, 3)\}$

Câu 11.

Trả lời các câu hỏi sau đối với poset $(\{2, 4, 6, 9, 12, 18, 27, 36, 48, 60, 72\}, |)$.

1. Tìm phần tử cực đại.
2. Tìm phần tử cực tiểu.
3. Có phần tử lớn nhất hay không?
4. Có phần tử nhỏ nhất hay không?
5. Tìm tất cả cận trên của $\{2, 9\}$.
6. Tìm cận trên nhỏ nhất của $\{2, 9\}$, nếu có.
7. Tìm tất cả cận dưới của $\{60, 72\}$.

8. Tìm cận dưới lớn nhất của $\{60, 72\}$, nếu có.

Câu 12.

Cho quan hệ $R = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (4, 5), (5, 4), (5, 5), (6, 6)\}$ trên tập $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

- a) R có phải là một quan hệ tương đương không? Vì sao?
- b) Tìm các lớp tương đương $[1], [2], [3], [4], [5], [6]$
- c) Tìm phân hoạch của A thành các lớp tương đương ở câu b.

Câu 13.

Cho $A = \{1, 2, 3, 4, 5\} \times \{1, 2, 3, 4, 5\}$ và R là quan hệ trên A sao cho:

$$(a, b)R(c, d) \Leftrightarrow a + b = c + d$$

- a) R có phải là một quan hệ tương đương không? Vì sao?
- b) Tìm các lớp tương đương $[(1, 3)], [(2, 4)], [(1, 1)]$
- c) Tìm phân hoạch của A thành các lớp tương đương ở câu b.

Câu 14.

Quan hệ nào sau đây là poset?

- a) $(\mathbb{Z}, =)$
- b) (\mathbb{Z}, \neq)
- c) (\mathbb{Z}, \geq)
- d) (\mathbb{Z}, \dagger)

Câu 15.

Các cặp phần tử nào trong đây là so sánh được trong poset $(\mathbb{Z}^+, |)$?

- 1. 5, 15
- 2. 6, 9
- 3. 8, 16
- 4. 7, 7

Câu 16.

Một tập hợp có thứ tự bộ phận (poset) trên tập hợp A được nói là có thứ tự bộ phận tốt nếu mọi tập hợp khác \emptyset của A đều có phần tử bé nhất. Khi ấy ta nói (A, \preceq) được sắp tốt. Cho biết trong các tập hợp dưới đây, tập hợp nào sắp thứ tự tốt?

- a) (\mathbb{N}, \leq)
- b) (\mathbb{Z}, \leq)
- c) (\mathbb{Q}, \leq)
- d) (\mathbb{Q}^+, \leq)
- e) (\mathbb{P}, \leq) trong đó \mathbb{P} là tập hợp các số nguyên tố.
- f) (A, \leq) trong đó $A \neq \emptyset$ là một tập con hữu hạn của \mathbb{Z} .

Câu 17.

- a) Cho ví dụ của một tập hợp sắp tốt không có phần tử lớn nhất.
- b) Cho ví dụ của một tập hợp sắp tốt có phần tử lớn nhất.
- c) Chứng minh rằng mọi tập có thứ tự bộ phận tốt đều là tập có thứ tự toàn phần.
- d) Điều ngược lại của câu c có đúng không?

4 Bài tập thêm

Câu 18.

Trong các quan hệ sau trên tập $\{1, 2, 3, 4\}$, xác định xem nó có phản xạ, đối xứng, phản đối xứng và bắc cầu hay không

1. $\{(2, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 2), (3, 3), (3, 4)\}$
2. $\{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4)\}$
3. $\{(2, 4), (4, 2)\}$
4. $\{(1, 2), (2, 3), (3, 4)\}$
5. $\{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4)\}$
6. $\{(1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 1), (3, 4)\}$

Câu 19.

Quan hệ R trên \mathbb{N} được định nghĩa bởi “ $n R m$ nếu và chỉ nếu m và n có cùng ước số chung lớn hơn 1” là

- a) đối xứng?
- b) phản xạ?
- c) bắc cầu?

Câu 20.

Xác định quan hệ R trên tập tất cả mọi người là phản xạ, đối xứng, phản đối xứng hay bắc cầu. Biết rằng $(a, b) \in R$ nếu và chỉ nếu

- a) a cao hơn b ;
- b) a và b sinh cùng ngày;
- c) a và b có cùng ông bà nội.

Câu 21.

Liệt kê các cặp có thứ tự trong quan hệ trên tập $\{1, 2, 3, 4\}$ tương ứng với ma trận sau (trong đó hàng và cột tương ứng với số nguyên liệt kê theo thứ tự tăng dần)

a)
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

b)
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

c)
$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Câu 22.

Xác định các quan hệ trong bài trên có phản xạ, đối xứng, phản đối xứng và bắc cầu hay không.

Câu 23.

Vẽ đồ thị có hướng từ 3 ma trận ở Bài 4 và dựa vào đó, vẽ đồ thị có hướng của bao đóng phản xạ, và vẽ đồ thị có hướng của bao đóng đối xứng.

Câu 24.

Cho R là quan hệ $\{(a, b) \mid a \neq b\}$ trên tập số nguyên. Bao đóng phản xạ của R là gì?

Câu 25.

Tìm thứ tự của các chuỗi sau theo chữ cái tiếng Anh:

1. *quack, quick, quicksilver, quicksand, quacking*
2. *open, opener, opera, operand, opened*
3. *zoo, zero, zoom, zoology, zoological*

Câu 26.

Xác định xem quan hệ R trên tập tất cả các trang Web là phản xạ, đối xứng, phản đối xứng, hay bắc cầu, trong đó $(a, b) \in R$ khi và chỉ khi

1. Tất cả những ai đã xem trang Web a cũng xem trang Web b .
2. Tại cả hai trang Web a và b không có liên kết nào giống nhau.
3. Có ít nhất một liên kết giống nhau trên trang Web a và trang Web b .
4. Có một trang Web có chứa liên kết đến cả trang Web a lẫn trang Web b .

Câu 27.

Cho R là một quan hệ trên tập $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ có chứa các cặp $(1,1), (1,2), (1,3), (2,3), (2,4), (3,1), (3,4), (3,5), (4,2), (4,5), (5,1), (5,2)$ và $(5,4)$. Tìm

- a) R^2 .
- b) R^3 .
- c) R^4 .
- d) R^5 .

Câu 28.

Cho R là quan hệ trên tập $\{0,1,2,3\}$ có chứa các cặp $(0,1), (1,1), (1,2), (2,0), (2,2)$ và $(3,0)$. Tìm

- a) bao đóng phản xạ của R .
- b) bao đóng đối xứng của R .
- c) bao đóng bắc cầu của R .

Câu 29.

Cho ma trận quan hệ trên tập $\{a, b, c, d\}$ như sau (trong đó hàng và cột tương ứng với chữ cái liệt kê theo thứ tự tăng dần)

$$1. \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$2. \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$3. \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Vẽ đồ thị có hướng từ 3 ma trận trên và dựa vào đó, vẽ đồ thị có hướng của bao đóng phản xạ, và vẽ đồ thị có hướng của bao đóng đối xứng.

Câu 30.

Các quan hệ sau trên $\{0, 1, 2, 3\}$, quan hệ nào là tương đương. Nếu không phải, hãy chỉ ra tính chất còn thiếu để nó trở thành tương đương. Nếu là tương đương, hãy chỉ ra các lớp đương tương của nó.

- a) $\{(0, 0), (1, 1), (2, 2), (3, 3)\}$
- b) $\{(0, 0), (0, 2), (2, 0), (2, 2), (2, 3), (3, 2), (3, 3)\}$
- c) $\{(0, 0), (1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 3)\}$
- d) $\{(0, 0), (1, 1), (1, 3), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3)\}$
- e) $\{(0, 0), (0, 1), (0, 2), (1, 0), (1, 1), (1, 2), (2, 0), (2, 2), (3, 3)\}$

5 Bài tập nâng cao

Câu 31.

Gọi R là một quan hệ phản xạ. Chứng minh rằng R^n cũng là một quan hệ phản xạ với mọi số nguyên dương n .

Câu 32.

Làm thế nào để xác định trên ma trận quan hệ R trên tập A là phi phản xạ? Với định nghĩa một quan hệ R trên tập A là **phi phản xạ** nếu với mọi $a \in A, (a, a) \notin R$.

Câu 33.

Làm thế nào để xác định trên ma trận quan hệ R trên tập A là phi đối xứng? Với định nghĩa một quan hệ R được gọi là **phi đối xứng** nếu $(a, b) \in R$ nghĩa là $(b, a) \notin R$.

Câu 34.

Cho R là quan hệ $\{(a, b) \mid a \text{ là ước của } b\}$ trên tập số nguyên. Bao đóng đối xứng của R là gì?

6 Tổng kết

Thông qua các bài tập trong phần này, chúng ta đã hiểu rõ hơn và làm quen với lý thuyết về quan hệ (bao gồm quan hệ tương đương và quan hệ thứ tự) mà chi tiết về lý thuyết đã được trình bày trong slide chương 5.