Bài tập chương 7
Xác suất rời rạc

1 Dẫn nhập

Trong chương bài tập này, chúng ta sẽ luyện tập với bài tập cơ bản về Xác suất rời rạc. Sinh viên cần ôn lại lý thuyết của chương 7 trước khi làm bài tập bên dưới.

2 Bài tập mẫu

Câu 1.
Xác suất để một chọn ngẫu nhiên một ngày mà ngày hôm đó là ngày trong tháng 4 là bao nhiêu? Biết năm được chọn là năm nhuận (366 ngày).
Lời giải.
Khi chọn một ngày trong năm, chúng ta có thể chọn trong $|S| = 366$ *ngày.*
Số ngày có thể chọn ra thỏa mãn đó là ngày trong tháng 4 là $|E| = 30$ *ngày (vì tháng 4 có 30 ngày).*
Vậy xác suất để chọn được một ngày trong tháng 4 là $30/366 \approx 0.08 = 8\%$. □

Câu 2.
Xác suất để chúng ta có được 4 mặt số khi thảy đồng xu cân bằng 5 lần là bao nhiêu, nếu lần thảy đầu tiên cho ra mặt số?
Lời giải.
Đây là một dạng bài toán tìm xác suất có điều kiện.
Gọi F *là sự kiện lần thảy đầu tiên xuất hiện mặt số,* E *là sự kiện có 4 mặt số sau tổng cộng 5 lần thảy.*
Sau khi đã thảy lần đầu tiên được mặt số, 4 lần thảy tiếp theo để thành công phải là một trong các trường hợp {SSSH, SSHS, SHSS, HSSS}, trong số 2^4 *khả năng xảy ra.*
Vậy xác suất cần tìm là $\frac{4}{2^4} = \frac{1}{4}$. □

3 Bài tập cần giải

Câu 3.
Với mỗi câu sau, hãy liệt kê không gian mẫu và nói xem các sự kiện có khả năng xảy ra như nhau hay không?

a) Tung 2 đồng xu; ghi lại thứ tự xuất hiện của mặt số và mặt hình.

b) Gia đình có ba con; ghi lại số con trai.

c) Tung đồng xu cho đến khi bạn có được một mặt số hoặc là 3 mặt hình liên tiếp.

d) Thảy hai con xúc xắc; ghi lại con số lớn hơn.

Lời giải.

a) Gọi H (head) là mặt ngửa và T (tail) là mặt sấp, ta có $S = \{$ HH, HT, TH, TT$\}$. Các sự kiện này có khả năng xảy ra như nhau.

b) $S = \{ 0, 1, 2, 3\}$. Khả năng xảy ra các sự kiện là như nhau.

c) $S = \{$H, TH, TTH, TTT $\}$. Khả năng xảy ra không như nhau.

d) $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Khả năng xuất hiện không như nhau, vì rõ ràng 1 khó xảy ra nhất (chỉ khi nào (1,1)), và 6 là dễ xảy ra nhất.

□

Câu sau dựa trên dữ kiện về trò chơi Xì tố như sau. Trong một dạng chơi xì tố, bạn được chia 5 con bài. Người thắng sẽ là người có tổ hợp bài tốt nhất. Tổ hợp theo thứ tự từ xấu nhất đến tốt nhất như sau:

1. Không có đôi nào
2. Có một đôi (hai lá bài có cùng số)
3. Có hai đôi (hai cặp bài cùng số)
4. Bộ ba (ba lá bài cùng số)
5. Sảnh (năm lá bài theo thứ tự nhưng không đồng chất)
6. Thùng (năm lá bài cùng chất nhưng không có thứ tự, ví dụ 5 con bích)
7. Cù lũ (một bộ ba và một đôi)
8. Tứ quý (bốn lá bài cùng số)
9. Thùng phá sảnh (một dây đồng chất, ví dụ 8, 9, 10, J, Q đều là chuồn)
10. Thùng phá sảnh lớn (là một thùng phá sảnh với xì là lá bài cao nhất)

Câu 4.
Trong trò chơi xì tố, tìm xác suất để có được:

a) Thùng phá sảnh lớn?

b) Tứ quý?

c) Thùng?

d) Cù lũ?

e) Bộ ba?

f) Không có thùng phá sảnh lớn?

Lời giải.

a) **Thùng phá sảnh lớn: các lá bài 10, J, Q, K, A cùng chất.**
Chỉ có 4 khả năng có thùng phá sảnh lớn với 4 chất khác nhau cơ, rô, chuồn, pích.
Số khả năng khi có 5 lá bài: $\binom{52}{5} = 2.589.960$.
Xác suất là $4/2.598.960 = 0,0000015$
Hay nói cách khác, 1 trên 650.000.

b) **Tứ quý: bốn con cùng số**
Các khả năng có thể có tứ quý:

- Có 13 khả năng có tứ quý
- Lá bài thứ năm có thể là bất kỳ lá nào trong 48 lá còn lại
- Vì vậy, tổng khả năng là $13 \times 48 = 624$

Xác suất $= 624/2.598.960 = 0{,}00024$
Hay nói cách khác, 1 trên 4165.

c) **Thùng: 5 lá bài cùng chất nhưng không có thứ tự**
Thực hiện thứ tự như sau:

- Chọn chất cho thùng: $\binom{4}{1}$
- Chọn 5 lá trong chất đó: $\binom{13}{5}$
- Vì không được có sảnh, nên liệt kê các trường hợp có sảnh gồm có (A, K, Q, J, 10) đến (6, 5, 4, 3, 2) rồi (5, 4, 3, 2, A) (Lưu ý: A có thể lớn nhất hoặc có thể bé nhất trong xì tố), nên có 10 khả năng là sảnh.
- Vì vậy $\binom{4}{1}(\binom{13}{5} - 10) = 5108$

Xác suất $= 5108/2.598.960 = 0{,}00197$
Hay nói cách khác, 1 trên 509.

d) **Cù lũ: Một bộ ba và một đôi**

- Chọn số cho bộ ba: $\binom{13}{1}$
- Chọn 3 trong 4 lá: $\binom{4}{3}$
- Chọn số cho cặp: $\binom{12}{1}$
- Chọn 2 trong 4 lá cho cặp: $\binom{4}{2}$
- Cho ra: $\binom{13}{1}\binom{4}{3}\binom{12}{1}\binom{4}{2} = 3744$

Xác suất $= 3744/2.598.960 = 0{,}00144$
Hay nói cách khác, 1 trên 694.

e) **Bộ ba: ba con cùng số, không được có cù lũ hoặc tứ quý**

- Chọn số cho bộ ba: $\binom{13}{1}$
- Chọn 3 trong 4 lá để dùng: $\binom{4}{3}$
- Chọn hai lá còn lại có giá trị khác nhau: $\binom{12}{2}$
- Chọn chất cho hai lá này: $\binom{4}{1} * \binom{4}{1}$
- Cho ra $\binom{13}{1}\binom{4}{3}\binom{12}{2}\binom{4}{1}\binom{4}{1} = 54912$

Xác suất $= 54912/2.598.960 = 0{,}0211$
Hay nói cách khác, 1 trong 47

f) **Không có thùng phá sảnh lớn**
Câu a co thấy xác suất để có thùng phá sảnh lớn là 0,0000015. Vậy xác suất để không có thùng phá sảnh lớn là
$1 - 0,0000015 = 0,9999985$

□

Câu 5.
Một cuộc khảo sát nhà trọ cho thấy có 38% số nhà trọ có tủ lạnh, 52% có TV, và 21% có cả tủ lạnh lẫn TV. Xác suất để một nhà trọ được lựa chọn ngẫu nhiên là bao nhiêu khi nhà trọ đó có:

a) TV nhưng không có tủ lạnh?

b) có TV hoặc có tủ lạnh, nhưng không có cả hai thứ?

c) không có TV lẫn tủ lạnh?

Lời giải.
Vẽ sơ đồ Venn, dễ thấy vùng giao nhau giữa hai tập hợp chính là 21% có cả tủ lạnh lẫn TV. Tập TV có 52% và tập 38% có tủ lạnh.

a) Tỷ lệ có TV nhưng không có tủ lạnh $= 52 - 21 = 31\%$

b) Tỷ lệ có TV hoặc có tủ lạnh nhưng không phải cả hai $= 38 + 52 - 2 \times 21 = 48\%$

c) Không có TV lẫn tủ lạnh $= 100 - (38 + 52 - 21) = 31\%$

□

Câu 6.
Để đi đến trường, một sinh viên phải băng qua một đường ray xe lửa. Thời gian xe lửa chạy qua đường ray có hơi xê xích qua mỗi ngày, nhưng sinh viên này ước tính chị ta sẽ đứng đợi xe lửa khoảng 15% số ngày đi học. Trong một tuần đi học có 5 ngày, xác suất sẽ là bao nhiêu nếu sinh viên này

a) Gặp xe lửa vào thứ 2 và lại gặp xe lửa vào thứ 3?

b) Lần gặp xe lửa đầu tiên trong tuần là thứ 5?

c) Gặp xe lửa mỗi ngày?

d) Gặp xe lửa ít nhất một lần trong cả tuần?

Lời giải.
Gọi X_i là sự kiện gặp xe lửa vào ngày thứ i. Ta thấy rằng sự kiện gặp xe lửa vào các ngày là hoàn toàn độc lập với nhau. Hay nói cách khác, việc gặp hay không gặp xe lửa vào ngày này không ảnh hưởng đến xác suất gặp hay không gặp xe lửa vào ngày khác.

a) $p(X_2 \cap X_3) = p(X_2) \times p(X_3) = 0.15 \times 0.15 = 0.0225$

b) $p(\overline{X_2} \cap \overline{X_3} \cap \overline{X_4} \cap X_5) = 0.85^3 \times 0.15 = 0.0921$

c) $0.15^5 = 7.6 \times 10^{-5}$

d) Xác suất để không gặp xe lửa lần nào trong cả tuần là 0.85^5. Vậy xác suất để gặp xe lửa ít nhất một lần chính là bằng $1 - 0.85^5 = 0.5563$

□

Câu 7.
Giả sử 23% số người trưởng thành hút thuốc lá. Một cuộc điều tra cho thấy 57% người hút thuốc lá và 13% người không hút thuốc lá bị bệnh phổi trước 60 tuổi.

a) Giải thích tại sao những con số trên cho thấy việc bị bệnh phổi và hút thuốc lá không độc lập với nhau?

b) Xác suất để lựa chọn ngẫu nhiên một người 60 tuổi mắc bệnh phổi là bao nhiêu?

Lời giải.

Gọi E là biến cố hút thuốc lá.
Gọi F là biến cố bị bệnh lao phổi.
Theo đề bài, ta có:
$p(E) = 0.23$
$p(F|E) = 0.57$ và
$p(F|\overline{E}) = 0.13$

a) Nếu hai sự kiện hút thuốc lá và bị lao phổi là độc lập với nhau thì:
$p(F|E) = p(F) = p(F|\overline{E})$
Tuy nhiên, sự thật $p(F|E) \neq p(F|\overline{E})$ nên chúng không thể độc lập với nhau được.

b) Ta có xác suất để bị bệnh phổi trong cộng đồng là:
$p(F) = p(F \cap E) + p(F \cap \overline{E})$
$= p(F|E) \times p(E) + p(F|\overline{E}) \times p(\overline{E})$
$= 0.57 \times 0.23 + 0.13 \times (1 - 0.23)$
$= 0.2312$

□

Câu 8.

Một sinh viên muốn đến được trường phải đi qua 5 ngã tư có đèn giao thông, và phải dừng lại nếu có đèn đỏ. Sinh viên này ước lượng mô hình xác suất cho số đèn đỏ mà người này gặp phải, như sau.

X = số đèn đỏ	0	1	2	3	4	5
$P(X = x)$	0.05	0.25	0.35	0.15	0.15	0.05

a) Sinh viên này nên kỳ vọng sẽ gặp bao nhiêu đèn đỏ mỗi ngày?

b) Độ lệch chuẩn là bao nhiêu?

Lời giải.

a) $E(X) = 0 \times 0.05 + 1 \times 0.25 + 2 \times 0.35 + 3 \times 0.15 + 4 \times 0.15 + 5 \times 0.05 = 2.25$
Vậy người này kỳ vọng sẽ gặp 2.25 đèn đỏ mỗi ngày

b) $V(X) = (0 - 2.25)^2 \times 0.05 + (1 - 2.25)^2 \times 0.25 + (2 - 2.25)^2 \times 0.35 + (3 - 2.25)^2 \times 0.15 + (4 - 2.25)^2 \times 0.15 + (5 - 2.25)^2 \times 0.05 = ...$

□

Câu 9.

Ta có thể sử dụng mô hình xác suất dựa trên phép thử Bernoulli cho các tình huống được hay không? Giải thích.

a) Thảy 50 con xúc xắc để tìm phân bố số dấu chấm trên mặt

b) Khi kiểm tra 120 người thì khả năng đa số có nhóm máu A là bao nhiêu, nếu ta biết nhóm máu A chiếm 43% trong dân số?

c) Chia 5 lá từ bộ bài và nhận được toàn bộ là cơ. Khả năng thế nào?

d) Ta muốn dự đoán kết quả bỏ phiếu về chính sách mới của trường, bằng cách chọn 500 trong tổng số 3000 sinh viên để xem có bao nhiêu người ủng hộ.

e) Một công ty nhận thấy có 10% gói hàng không được niêm phong đúng quy chuẩn. Nếu lấy ra 24 gói hàng, có khả năng có hơn 3 gói chưa được niêm phong không?

Lời giải.

a) Không. Vì việc kết quả của việc thảy xúc xắc có đến 6 khả năng xảy ra, không chỉ là 2 khả năng như phép thử Bernoulli yêu cầu.

b) Không. Vì các lần thử không độc lập với nhau. Nhóm máu có tính di truyền, do đó giả sử ta kiểm tra người cha có nhóm máu A, người mẹ có nhóm máu A, thì dẫn đến xác suất có nhóm máu A của con là rất cao.

c) Không. Tuy một lần chia bài có 2 kết quả cơ hoặc không có cơ. Xác suất có cơ qua mỗi lần chia bài thay đổi và việc chia lá trước có cơ hay không ảnh hưởng đến xác suất lần chia lá sau đó.

d) Không. Tuy thoạt nhìn ta có thể nghĩ đó là phép thử Bernoulli, trên thực tế có một nguyên tắc trong thống kê: "Nếu ta lấy mẫu với số lượng dưới 10% quần thể, thì khi đó mới có thể xem mẫu tuân theo phép thử Bernoulli". Trong trường hợp này, số lượng mẫu chiếm đến 1/6 nên mẫu không được xem là thỏa mãn phép thử Bernoulli. (Tham khảo thêm tại trang số 9 của http://www.docstoc.com/docs/27673823/STAT-100-Lecture-10-Bernoulli-Trials-and-the-Binomial)

e) Được. Với hai kết quả của một thí nghiệm, các lần kiểm tra là hoàn toàn độc lập và có cùng xác suất không đổi, sự kiện mở hộp kiểm tra hoàn toàn phù hợp với phép thử Bernoulli.

□

Câu 10.

Một cung thủ thi đấu Olympic có xác suất bắn trúng hồng tâm là 80%. Giả sử mỗi lần bắn là độc lập với nhau. Nếu cung thủ này bắn 6 mũi tên, xác suất trong các trường hợp sau sẽ như thế nào?

a) Cú trúng hồng tâm đầu tiên là phát bắn thứ 3.

b) Cung thủ bắn hụt hồng tâm ít nhất một lần.

c) Phát trúng hồng tâm đầu tiên là phát thứ 4 hoặc thứ 5.

d) Cung thủ bắn được chính xác 4 phát trúng hồng tâm.

e) Cung thủ bắn được ít nhất 4 phát trúng hồng tâm.

f) Cung thủ bắn được nhiều nhất 4 phát trúng hồng tâm.

Lời giải.

Sự kiện bắn trúng hồng tâm hay không của cung thủ có thể xem là một phép thử Bernoulli.

a) Đây là dạng câu hỏi cần sử dụng mô hình hình học.
$p(X=3) = (1-0.8)^{3-1}0.8 = 0.032$

b) Đây là dạng câu hỏi cần sử dụng mô hình nhị thức.
Xác suất để bắn trúng hồng tâm cả 6 phát là: $\binom{6}{6}0.8^6 0.2^0 = 0.262144$
Vậy xác suất để bắn hụt ít nhất một lần là: $1 - 0.262144 = 0.737856$

c) Đây là dạng câu hỏi cần sử dụng mô hình hình học.
$p = p(X=4) + p(X=5) = (1-0.8)^{4-1}0.8 + (1-0.8)^{5-1}0.8 = 0.00768$

d) Đây là dạng câu hỏi cần sử dụng mô hình nhị thức.
$p = \binom{6}{4}0.8^4 0.2^2 = 0.24576$

e) Đây là dạng câu hỏi cần sử dụng mô hình nhị thức.
$p = \binom{6}{4}0.8^4 0.2^2 + \binom{6}{5}0.8^5 0.2^1 + \binom{6}{6}0.8^6 0.2^0 = 0.24576 + 0.393216 + 0.262144 = 0.90112$

f) Đây là dạng câu hỏi cần sử dụng mô hình nhị thức.
Xác suất để bắn được nhiều nhất 4 phát là bù của bắn trúng 5 hoặc 6 phát.
$p = 1 - 0.393216 - 0.262144 = 0.34464$

□

4 Bài tập làm thêm

Câu 11.

Một tổ chức tiêu dùng ước tính rằng qua 1 năm sử dụng 17% số xe máy cần được sửa chữa một lần, 7% cần sửa chữa hai lần, và 4% cần sửa chữa từ ba lần trở lên.

a) Xác suất để một chiếc xe được chọn ngẫu nhiên sẽ

1. không cần phải sửa?

2. không quá một lần sửa?
3. có bị sửa chữa?

b) Nếu bạn có hai chiếc xe máy, xác suất sẽ thế nào nếu

1. cả hai chiếc đều không cần sửa?
2. cả hai chiếc đều cần phải sửa?

Lời giải.

□

Câu 12.

Hãng sản xuất kẹo Sô-cô-la M&M nói rằng số viên màu vàng trơn chiếm 20% lượng sản xuất, đỏ chiếm 20%, và cam, xanh dương và xanh lá mỗi màu chiếm 10%. Còn lại là màu nâu.

a) Nếu bạn lấy ngẫu nhiên một viên kẹo M&M, xác suất sẽ là gì để

1. nó màu nâu?
2. nó màu vàng hoặc màu cam?
3. nó không phải màu xanh lá?
4. nó có sọc?

b) Nếu bạn lấy liên tiếp ba viên kẹo M&M, xác suất là bao nhiêu để

1. chúng đều có màu nâu?
2. viên thứ ba là viên đầu tiên có màu đỏ?
3. không có viên nào màu vàng?
4. có ít nhất một viên màu xanh lá?

Lời giải.

□

Câu 13.

Trong Bài 4 chúng ta đã tính xác suất có được các loại kẹo M&M khác nhau. Trong một số câu trả lời, chúng ta phải dựa vào giả định rằng các kết quả có được là *rời nhau*; tức là, chúng không thể đồng thời xảy ra cùng một lúc. Các câu trả lời khác lại dựa trên sự kiện là chúng *độc lập*l tức là, sự xảy ra một kết quả không ảnh hưởng đến xác suất của các kết quả khác. Bạn có hiểu được sự khác nhau giữa rời nhau và độc lập?

a) Nếu bạn lấy ra một vien M&M, sự kiện lấy được một viên đỏ và lấy được một viên cam là rời nhau hay độc lập với nhau hay không phải cả hai?

b) Nếu bạn lấy ra lần lượt 2 viên M&M, sự kiện đầu tiên lấy ra viên đỏ rồi tiếp đến là viên đỏ nữa là rời nhau hay độc lập với nhau?

c) Các sự kiện rời nhau có thể độc lập được với nhau hay không? Giải thích.

Câu 14.
Công an vừa thiết lập một trạm kiểm tra–trong đó người lái xe sẽ được yêu cầu dừng lại để trả lời một vài câu hỏi ngắn để công an quyết định người này có say rượu hay không. Nếu viên công anh không cảm thấy có vấn đề, người lái xe sẽ được tiếp tục cho đi. Ngược lại, người lái xe sẽ được yêu cầu thổi vào ống kiểm tra để quyết định xem họ có bị bắt giữ hay không. Công an cho rằng dựa trên việc hỏi đáp, một công an viên có thể quyết định đúng 80%. Tại thời điểm 9 giờ tối thứ 7, các chuyên gia cho rằng có khoảng 12% người lái xe có uống bia rượu.

a) Bạn bị chặn xe ở trạm, và tất nhiên, bạn không uống bia rượu. Xác suất bạn bị yêu cầu thổi vào ống kiểm tra là bao nhiêu?

b) Xác suất một người bị yêu cầu thổi vào ống là bao nhiêu?

c) Xác suất để một lái xe bị yêu cầu thổi vào ống thực sự đang say rượu?

d) Xác suất để một láu xe được thả thực ra đang say rượu?

Câu 15.
Một công ty bán túi hạt giống, mỗi túi có 20 hạt. Số hạt trung bình sẽ mọc thành cây là 18, với độ lệnh chuẩn là 1.2. Bạn mua năm túi hạt giống khác nhau.

a) Bạn kỳ vọng sẽ có bao nhiêu hạt bị hỏng?

b) Độ lệch chuẩn là gì?

Câu 16.
Bạn sẽ chơi hai lượt của một trò chơi với cùng một đối thủ. Xác suất để bạn thắng lượt đầu tiên là 0.4. Nếu bạn thắng trận đầu, xác suất để bạn thắng trận thứ hai là 0.2. Nếu bạn thua trận đầu, xác suất để bạn thắng trận thứ hai là 0.3.

a) Hai lượt chơi có độc lập với nhau hay không? Giải thích.

b) Xác suất để bạn thua cả hai lượt chơi là gì?

c) Xác suất để bạn thắng cả hai lượt chơi là gì?

d) Gọi biến ngẫu nhiên X là số lượt chơi mà bạn thắng. Tìm mô hình xác suất cho X.

e) Giá trị kỳ vọng và độ lệch chuẩn của X là bao nhiêu?

Câu 17.
Một cầu thủ bóng rổ ném thành công 80% số quả ném phạt mà anh ta được ném. Giả sử các lần ném là độc lập với nhau, tìm xác suất trong trận đấu tối nay mà anh ta

a) ném hụt lần đầu tiên trong lần ném thứ năm

b) ném thành công lần đầu tiên trong lần ném thứ tư

c) ném thành công lần đầu tiên trong ba lần ném đầu tiên.

d) Số lần ném kỳ vọng của cầu thủ này cho đến khi anh ta ném hụt là bao nhiêu?

Lời giải.

□

Câu 18.
Giả sử vận động viên bắn cung trong Bài 3 bắn 10 mũi tên.

a) Tìm giá trị trung bình và độ lệch chuẩn của số lần bắn trúng hồng tâm của người này

b) Xác suất để cô ta không bắt trượt phát nào là bao nhiêu?

c) Xác suất để có không quá 8 lần bắn trúng hồng tâm là bao nhiêu?

d) Xác suất để có chính xác 8 lần bắn trúng hồng tâm là bao nhiêu?

e) Xác suất để số lần cô ta bắn trúng hồng tâm nhiều hơn số lần bắn hụt là bao nhiêu?

Lời giải.

□

5 Tổng kết

Thông qua các bài tập trong phần này, chúng ta đã hiểu rõ hơn và làm quen với các phép đếm (bao gồm lượng số, tổ hợp, chỉnh hợp, và các nguyên lý đếm) mà chi tiết về lý thuyết đã được trình bày trong slide chương 3.