

Bài tập chương 10

Đồ thị và Cây

1 Dẫn nhập

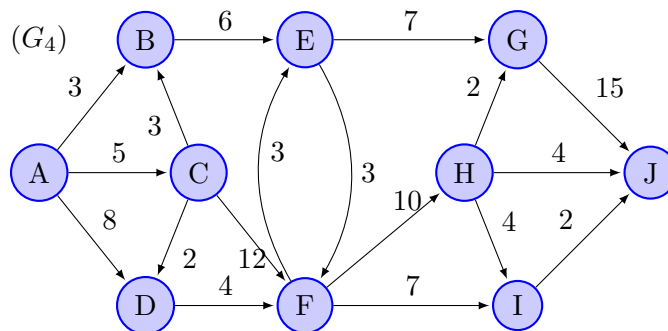
Trong bài tập dưới đây, chúng ta sẽ làm quen với:

- Các bài toán, giải thuật và ứng dụng của lý thuyết đồ thị. Sinh viên cần xem lại lý thuyết của Chương 9 trước khi thực hiện những bài tập này.
- Các khái niệm và định nghĩa về cây. Các kiến thức cần thiết cho bài này cũng bao gồm các phương pháp duyệt cây và các giải thuật tìm cây khung có nhỏ nhất. Sinh viên cần ôn lại lý thuyết về cây và các giải thuật liên quan được trình bày trong chương 10 trước khi làm bài tập bên dưới.

2 Bài tập mẫu

Câu 1.

Hãy dùng giải thuật Bellman-Ford để tìm đường đi ngắn nhất của đỉnh A đến một đỉnh bất kỳ khác trong đồ thị G_4 bên dưới.



Lời giải. Dựa theo giải thuật Bellman-Ford, chúng ta xây dựng bảng sau.

Step	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
0	0	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
1	0	3	5	8	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
2	0	3	5	7	9	12	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
3	0	3	5	7	9	12	16	22	19	$+\infty$
4	0	3	5	7	9	12	16	22	19	21
5	0	3	5	7	9	12	16	22	19	21

Stop since Step 5 = Step 4

Từ bảng trên, ta có thể xác định đường đi ngắn nhất từ A đến các đỉnh còn lại.

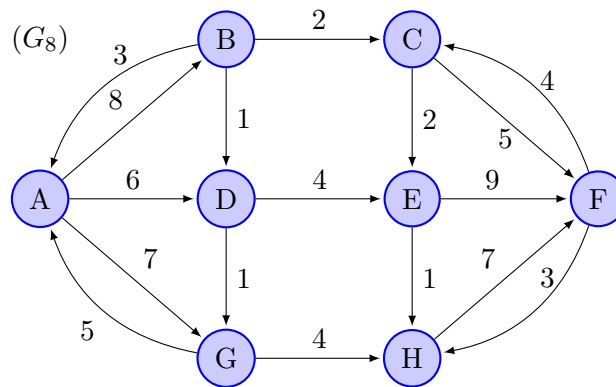
- $A \rightarrow B$
- $A \rightarrow C$
- $A \rightarrow C \rightarrow D$
- $A \rightarrow B \rightarrow E$

- $A \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow F$
- $A \rightarrow B \rightarrow E \rightarrow G$
- $A \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow F \rightarrow H$
- $A \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow F \rightarrow H \rightarrow I$
- $A \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow F \rightarrow H \rightarrow I \rightarrow J$

□

Câu 2.

Hãy dùng giải thuật Floyd-Warshall để tìm đường đi ngắn nhất của một đỉnh bất kỳ đến một đỉnh khác bất kỳ trong đồ thị G_8 như bên dưới.



Lời giải.

$$L^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 & 8 & \infty & 6 & \infty & \infty & 7 & \infty \\ 3 & 0 & 2 & 1 & \infty & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & 0 & \infty & 2 & 5 & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & 0 & 4 & \infty & 1 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 0 & 9 & \infty & 1 \\ \infty & \infty & 4 & \infty & \infty & 0 & \infty & 3 \\ 5 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 0 & 4 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 7 & \infty & 0 \end{pmatrix}$$

$$L^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 8 & \infty & 6 & \infty & \infty & 7 & \infty \\ 3 & 0 & 2 & 1 & \infty & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & 0 & \infty & 2 & 5 & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & 0 & 4 & \infty & 1 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 0 & 9 & \infty & 1 \\ \infty & \infty & 4 & \infty & \infty & 0 & \infty & 3 \\ 5 & 13 & \infty & 11 & \infty & \infty & 0 & 4 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 7 & \infty & 0 \end{pmatrix}$$

$$L^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & 8 & 10 & 6 & \infty & \infty & 7 & \infty \\ 3 & 0 & 2 & 1 & \infty & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & 0 & \infty & 2 & 5 & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & 0 & 4 & \infty & 1 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 0 & 9 & \infty & 1 \\ \infty & \infty & 4 & \infty & \infty & 0 & \infty & 3 \\ 5 & 13 & 15 & 11 & \infty & \infty & 0 & 4 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 7 & \infty & 0 \end{pmatrix}$$

$$L^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 & 8 & 10 & 6 & 12 & 15 & 7 & \infty \\ 3 & 0 & 2 & 1 & 4 & 7 & \infty & \infty \\ \infty & \infty & 0 & \infty & 2 & 5 & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & 0 & 4 & \infty & 1 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 0 & 9 & \infty & 1 \\ \infty & \infty & 4 & \infty & 6 & 0 & \infty & 3 \\ 5 & 13 & 15 & 11 & 17 & 20 & 0 & 4 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 7 & \infty & 0 \end{pmatrix}$$

$$L^{(4)} = \begin{pmatrix} 0 & 8 & 10 & 6 & 10 & 15 & 7 & \infty \\ 3 & 0 & 2 & 1 & 4 & 7 & 2 & \infty \\ \infty & \infty & 0 & \infty & 2 & 5 & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & 0 & 4 & \infty & 1 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 0 & 9 & \infty & 1 \\ \infty & \infty & 4 & \infty & 6 & 0 & \infty & 3 \\ 5 & 13 & 15 & 11 & 15 & 20 & 0 & 4 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 7 & \infty & 0 \end{pmatrix}$$

$$L^{(5)} = \begin{pmatrix} 0 & 8 & 10 & 6 & 10 & 15 & 7 & 11 \\ 3 & 0 & 2 & 1 & 4 & 7 & 2 & 5 \\ \infty & \infty & 0 & \infty & 2 & 5 & \infty & 3 \\ \infty & \infty & \infty & 0 & 4 & 13 & 1 & 5 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 0 & 9 & \infty & 1 \\ \infty & \infty & 4 & \infty & 6 & 0 & \infty & 3 \\ 5 & 13 & 15 & 11 & 15 & 20 & 0 & 4 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 7 & \infty & 0 \end{pmatrix}$$

$$L^{(6)} = \begin{pmatrix} 0 & 8 & 10 & 6 & 10 & 15 & 7 & 11 \\ 3 & 0 & 2 & 1 & 4 & 7 & 2 & 5 \\ \infty & \infty & 0 & \infty & 2 & 5 & \infty & 3 \\ \infty & \infty & \infty & 0 & 4 & 13 & 1 & 5 \\ \infty & \infty & 13 & \infty & 0 & 9 & \infty & 1 \\ \infty & \infty & 4 & \infty & 6 & 0 & \infty & 3 \\ 5 & 13 & 15 & 11 & 15 & 20 & 0 & 4 \\ \infty & \infty & 11 & \infty & 13 & 7 & \infty & 0 \end{pmatrix}$$

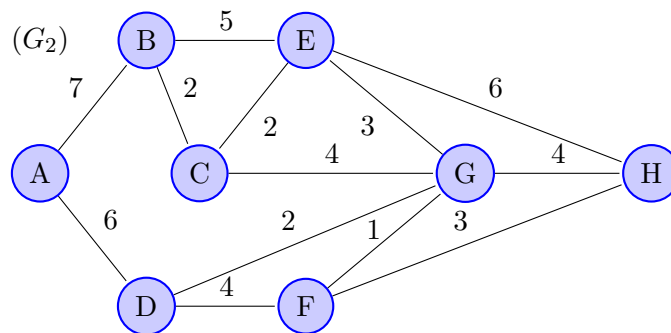
$$L^{(7)} = \begin{pmatrix} 0 & 8 & 10 & 6 & 10 & 15 & 7 & 11 \\ 3 & 0 & 2 & 1 & 4 & 7 & 2 & 5 \\ \infty & \infty & 0 & \infty & 2 & 5 & \infty & 3 \\ 6 & 14 & 16 & 0 & 4 & 13 & 1 & 5 \\ \infty & \infty & 13 & \infty & 0 & 9 & \infty & 1 \\ \infty & \infty & 4 & \infty & 6 & 0 & \infty & 3 \\ 5 & 13 & 15 & 11 & 15 & 20 & 0 & 4 \\ \infty & \infty & 11 & \infty & 13 & 7 & \infty & 0 \end{pmatrix}$$

$$L^{(8)} = \begin{pmatrix} 0 & 8 & 10 & 6 & 10 & 15 & 7 & 11 \\ 3 & 0 & 2 & 1 & 4 & 7 & 2 & 5 \\ \infty & \infty & 0 & \infty & 2 & 5 & \infty & 3 \\ 6 & 14 & 16 & 0 & 4 & 12 & 1 & 5 \\ \infty & \infty & 12 & \infty & 0 & 8 & \infty & 1 \\ \infty & \infty & 4 & \infty & 6 & 0 & \infty & 3 \\ 5 & 13 & 15 & 11 & 15 & 11 & 0 & 4 \\ \infty & \infty & 11 & \infty & 13 & 7 & \infty & 0 \end{pmatrix}$$

□

Câu 3.

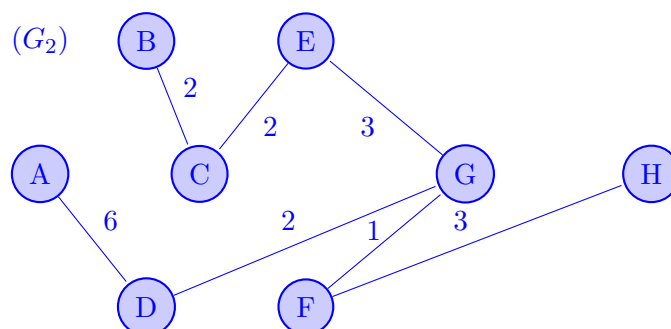
- a) Hãy dùng giải thuật Prim để tìm cây khung nhỏ nhất của đồ thị G_2 .
b) Hãy dùng giải thuật Kruskal để tìm cây khung nhỏ nhất của đồ thị G_2 .



Lời giải.

- a) Bắt đầu từ một đỉnh bất kì, giả sử là đỉnh A. Ta lần lượt thêm các đỉnh theo thứ tự sau: $\{A\} \cup \{D\} \cup \{G\} \cup \{F\} \cup \{E\} \cup \{C\} \cup \{B\} \cup \{H\}$

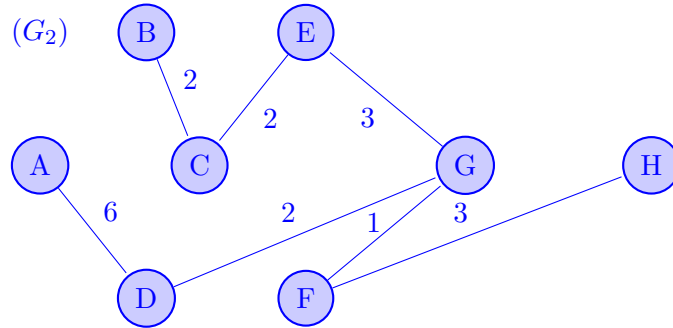
Tổng trọng số: 19



b) Sắp xếp các cạnh theo thứ tự không giảm của trọng số ta được thứ tự sau: $(F, G)(B, C)(C, E)(D, G)(E, G)(F, H)$

Lần lượt thêm các cạnh theo thứ tự trên sao cho không tạo thành chu trình (nếu tạo thành chu trình thì ta xét cạnh tiếp theo). Ta thêm được các cạnh $(F, G)(B, C)(C, E)(D, G)(E, G)(F, H)(A, D)$

Tổng trọng số vẫn là 19.

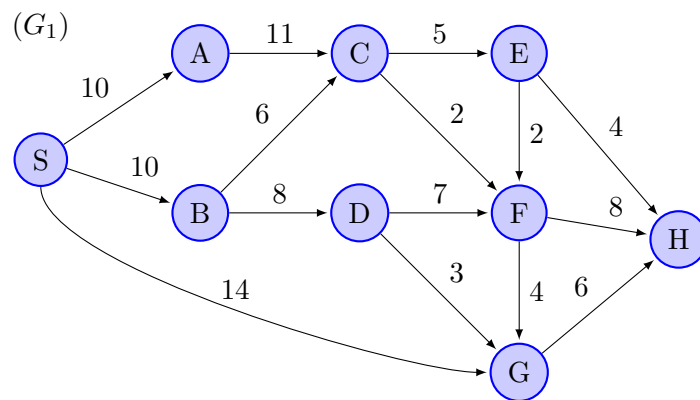


□

3 Bài tập cần giải

Câu 4.

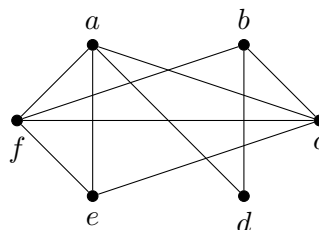
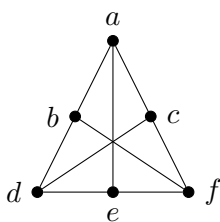
Đồ thị G_1 như hình bên dưới đây.



Tìm đường đi ngắn nhất xuất phát từ S đến tất cả các đỉnh còn lại bằng giải thuật Dijkstra, Bellman-Ford, Floyd-Warshall.

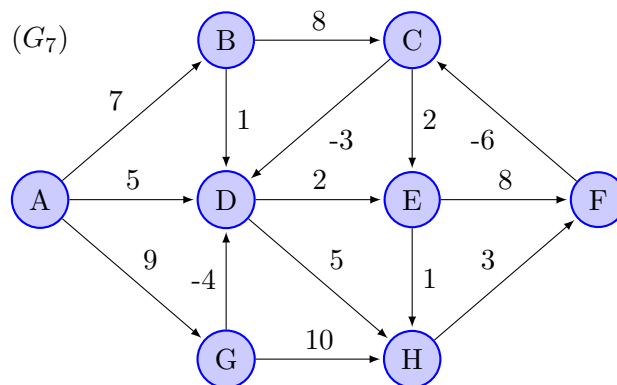
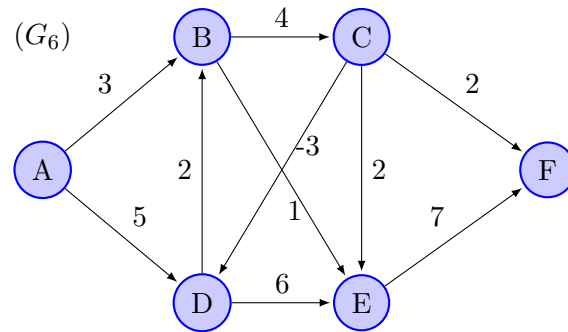
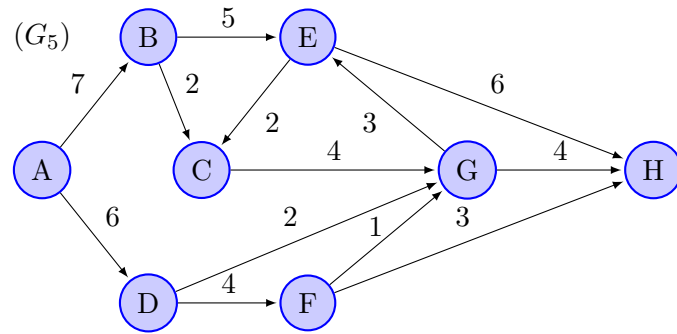
Câu 5.

Xác định xem các đồ thị sau có phẳng hay không. Nếu có, hãy vẽ lại đồ thị sao cho không có cạnh nào giao nhau.



Câu 6.

Hãy dùng các giải thuật Dijkstra, giải thuật Floyd-Warshall và giải thuật Ford để tìm đường đi ngắn nhất của đỉnh A đến tất cả các đỉnh còn lại trong các đồ thị G_5, G_6, G_7 như bên dưới.



Câu 7.

Những đồ thị nêu dưới đây, đồ thị nào là cây?

a)

b)

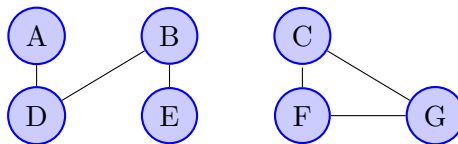
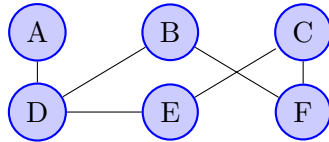
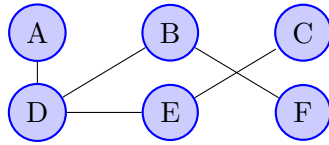
c)

Câu 8.

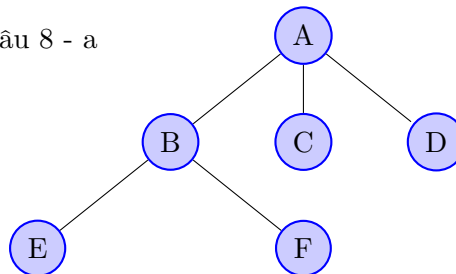
Hãy cho biết tiền thứ tự, trung thứ tự và hậu thứ tự của những cây sau đây.

a)

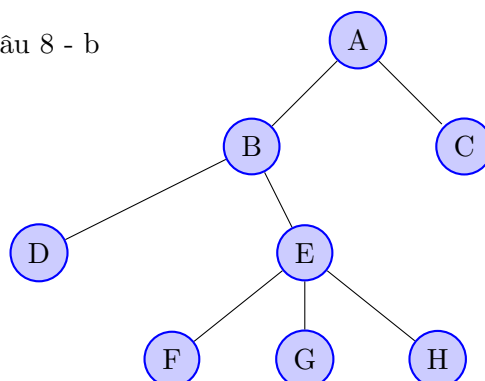
b)



Câu 8 - a

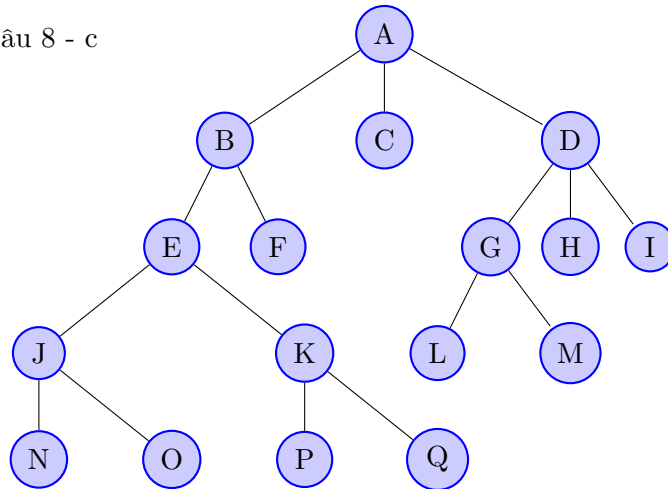


Câu 8 - b



c)

Câu 8 - c



Câu 9.

Hãy xác định cây nhị phân mô tả biểu thức toán học (dạng trung tố) sau:

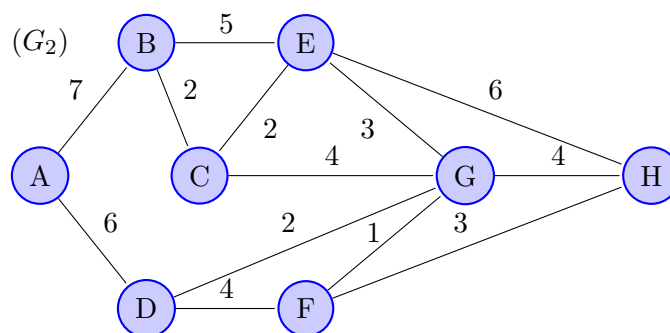
- $(3 - a) * (b + 4)$
- $a - b - c * d - e - f$
- $1 * 3 : a + (b - c + d) * 7$
- $(8 * 2) - (a + (b - c) * d) : (5 : 2)$

Câu 10.

Hãy xác định các biểu thức tiền tố và hậu tố của các biểu thức ở câu 9.

Câu 11.

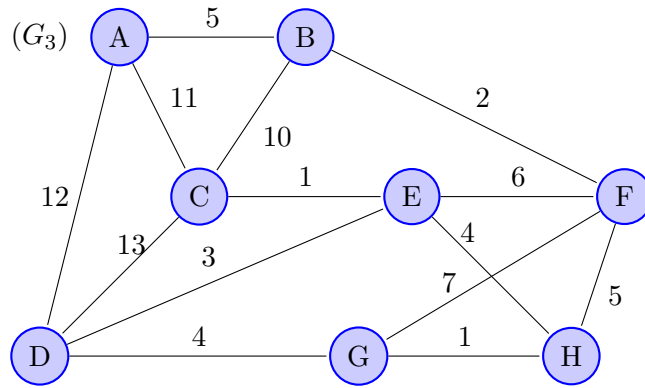
- Hãy dùng giải thuật Prim để tìm cây khung nhỏ nhất của đồ thị G_2 .
- Hãy dùng giải thuật Kruskal để tìm cây khung nhỏ nhất của đồ thị G_2 .



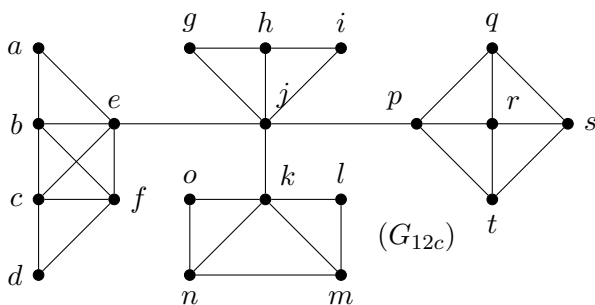
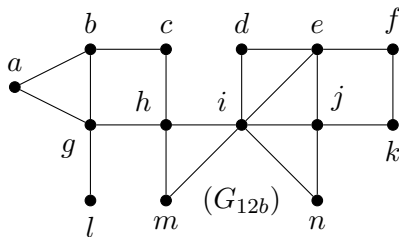
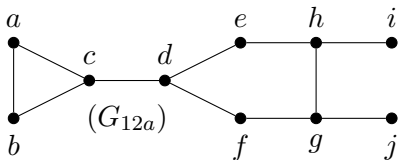
Câu 12.

- Hãy dùng giải thuật Prim để tìm cây khung nhỏ nhất của đồ thị G_3 .
- Hãy dùng giải thuật Kruskal để tìm cây khung nhỏ nhất của đồ thị G_3 .

Câu 13.



- a) Hãy dùng giải thuật tìm kiếm ưu tiên chiều sâu để tìm cây khung của các đồ thị G_{12a} , G_{12b} và G_{12c} . Chọn đỉnh a là gốc của cây khung.
- b) Hãy dùng giải thuật tìm kiếm ưu tiên chiều rộng để tìm cây khung của các đồ thị G_{12a} , G_{12b} và G_{12c} . Chọn đỉnh a là gốc của cây khung.



4 Bài tập làm thêm

Câu 14.

Có bao nhiêu đỉnh trong một cây tứ phân đầy đủ với 100 đỉnh lá?

Câu 15.

Có bao nhiêu đỉnh trong một cây ngũ phân đầy đủ với 100 đỉnh trung gian?

Câu 16.

Có bao nhiêu cạnh trong một cây nhị phân đầy đủ với 1000 đỉnh trung gian?

Câu 17.

Có bao nhiêu lá trong một cây tam phân đầy đủ với 100 đỉnh?

Câu 18.

Một cây m phân đầy đủ T có 81 lá và có chiều cao là 4. Hãy cho biết giá trị cận trên và cận dưới của

m (nghĩa là xác định giá trị lớn nhất có thể và nhỏ nhất có thể). Nếu T là cây cân bằng thì m phải là bao nhiêu? Hãy giải thích rõ.

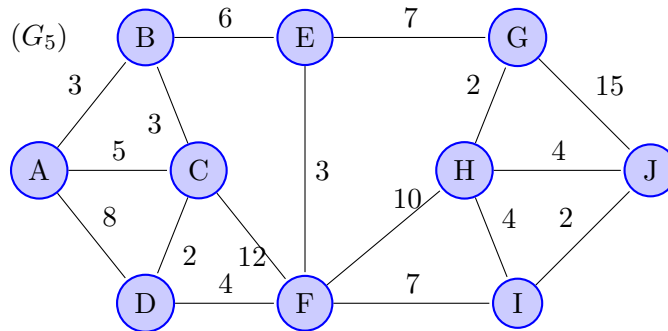
Câu 19.

Xây dựng cây nhị phân tìm kiếm cho các từ *banana*, *peach*, *apple*, *pear*, *coconut*, *mango* và *papaya* theo thứ tự ABC.

Câu 20.

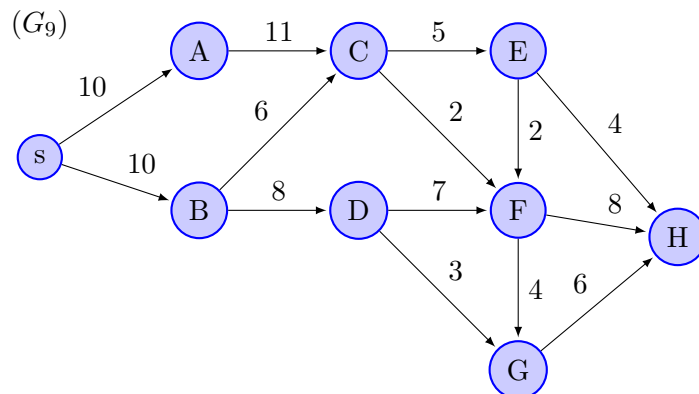
a) Hãy dùng giải thuật Prim để tìm cây khung nhỏ nhất của đồ thị G_5 .

b) Hãy dùng giải thuật Kruskal để tìm cây khung nhỏ nhất của đồ thị G_5 .



Câu 21.

Một nguồn nước s được cung cấp cho 8 thành phố A, B, C, D, E, F, G và H . Sự liên thông giữa các thành phố và nguồn nước được thể hiện qua đồ thị G_9 bên dưới trong đó trọng số của một cạnh (u, v) thể hiện khả năng truyền tải nước nguồn (m^3/h) từ thành phố u đến thành phố v . Hãy cho biết khả năng tiêu thụ nước tối đa (trong mỗi giờ) tại thành phố H .



Câu 22.

Hãy tìm cây khung nhỏ nhất của một đồ thị có trọng số biểu diễn chi phí di chuyển giữa các thành phố.

Câu 23.

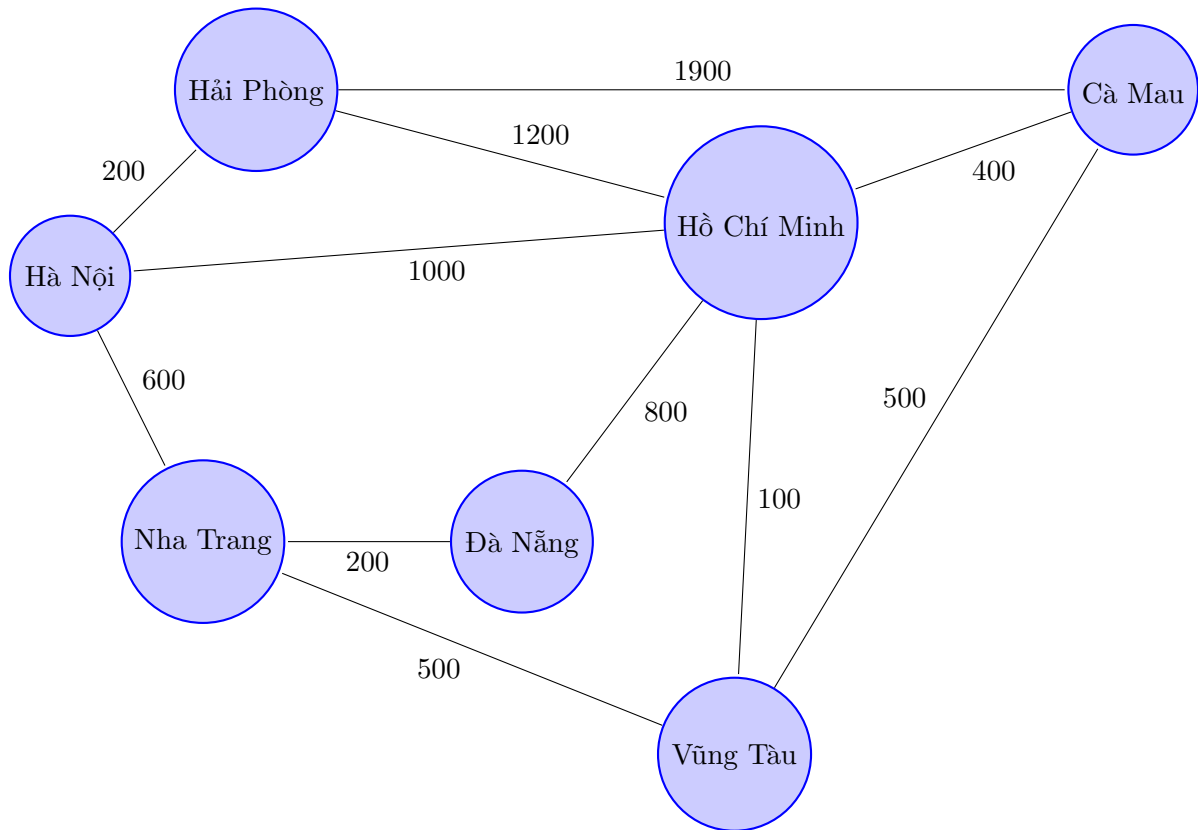
Đồ thị phân đôi đầy đủ $K_{m,n}$ nào có thể được xem là cây với m và n là những số nguyên dương?

Câu 24.

Cho G là một đơn đồ thị với n đỉnh. Chứng minh rằng G là một cây nếu và chỉ nếu G liên thông và có $n - 1$ cạnh.

Câu 25.

Chứng minh rằng nếu trong đồ thị liên thông G , các cạnh có trọng số hoàn toàn khác nhau từng đôi một, thì chỉ tồn tại duy nhất một cây khung có trọng số nhỏ nhất.



Câu 26.

Làm thế nào để đếm được số cây khung có thể có trong một đồ thị G cho trước. Hãy viết giải thuật đếm này.

Câu 27.

Làm thế nào để đếm được số cây khung khác nhau có trọng số nhỏ nhất có trong một đồ thị G cho trước. Hãy viết giải thuật đếm này.

Câu 28.

Làm thế nào để đếm được số cây khung khác nhau có trọng số nhỏ nhất có trong một đồ thị G cho trước. Hãy viết giải thuật đếm này.

Câu 29.

Hãy viết giải thuật để xác định cây khung có trọng số nhỏ nhất mà có chứa đường đi ngắn nhất từ một đỉnh u đến đỉnh v cho trước.

Câu 30.

Cho một đồ thị G , cây khung có trọng số nhỏ nhất T trong G . Hãy viết giải thuật nhanh để xác định (hoặc là cập nhật) cây khung có trọng số nhỏ nhất khi ta thêm một cạnh mới vào trong G .

Câu 31.

Hãy thiết kế giải thuật tìm cây khung có trọng số nhỏ nhất và có chứa một tập các cạnh cho trước.

5 Tổng kết

Thông qua các bài tập trong phần này, chúng ta đã làm quen với các định nghĩa và các tính chất về cây, bao gồm các phương pháp duyệt cây và các giải thuật tìm cây khung có trọng số nhỏ nhất. (tham khảo chi tiết lý thuyết trong chương 10).