Chapter 3
Proving methods

Discrete Structures for Computing on September 2, 2017

Nguyen An Khuong, Tran Tuan Anh, Le Hong Trang
Faculty of Computer Science and Engineering
University of Technology - VNUHCM
nakhuong@hcmut.edu.vn

Contents
Proving Methods
Exercise

Contents

1. Proving Methods

2. Exercise

Course outcomes

	Course learning outcomes
L.O.1	Understanding of logic and discrete structures
	L.O.1.1 – Describe definition of propositional and predicate logic L.O.1.2 – Define basic discrete structures: set, mapping, graphs
L.O.2	Represent and model practical problems with discrete structures
	L.O.2.1 – Logically describe some problems arising in Computing L.O.2.2 – Use proving methods: direct, contrapositive, induction L.O.2.3 – Explain problem modeling using discrete structures
L.O.3	Understanding of basic probability and random variables
	L.O.3.1 – Define basic probability theory L.O.3.2 – Explain discrete random variables
L.O.4	Compute quantities of discrete structures and probabilities
	L.O.4.1 – Operate (compute/ optimize) on discrete structures L.O.4.2 – Compute probabilities of various events, conditional ones, Bayes theorem

Nguyen An Khuong, Tran Tuan Anh, Le Hong Trang

Contents
Proving Methods
Exercise

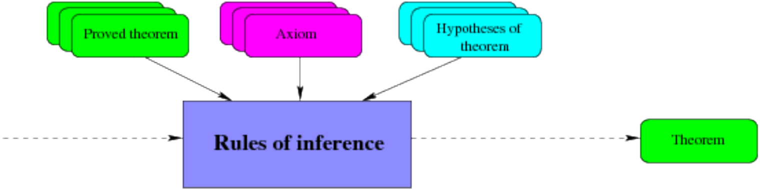
Introduction

Definition

A proof is a sequence of logical deductions from
- axioms, and
- previously proved theorems

that concludes with a new theorem.

Terminology



- **Theorem** (*định lý*) = a statement that can be shown to be true
- **Axiom** (*tiên đề*) = a statement we assume to be true
- **Hypothesis** (*giả thiết*) = the premises of the theorem

Nguyen An Khuong, Tran Tuan Anh, Le Hong Trang

Contents
Proving Methods
Exercise

- **Lemma** (*bổ đề*) = less important theorem that is helpful in the proofs of other results
- **Corollary** (*hệ quả*) = a theorem that can be established directly from a proved theorem
- **Conjecture** (*phỏng đoán*) = statement being proposed to be true, when it is proved, it becomes theorem

Proving a Theorem

Many theorem has the form $\forall x P(x) \rightarrow Q(x)$

Goal:

- Show that $P(c) \rightarrow Q(c)$ is true with arbitrary c of the domain

Proving a Theorem

Many theorem has the form $\forall x P(x) \rightarrow Q(x)$

Goal:

- Show that $P(c) \rightarrow Q(c)$ is true with arbitrary c of the domain
- Apply universal generalization

Proving a Theorem

Many theorem has the form $\forall x P(x) \rightarrow Q(x)$

Goal:

- Show that $P(c) \rightarrow Q(c)$ is true with arbitrary c of the domain
- Apply universal generalization

Proving a Theorem

Many theorem has the form $\forall x P(x) \rightarrow Q(x)$

Goal:

- Show that $P(c) \rightarrow Q(c)$ is true with arbitrary c of the domain
- Apply universal generalization

$\Rightarrow$ How to show that conditional statement $p \rightarrow q$ is true.

Methods of Proof

- Direct proofs (*chứng minh trực tiếp*)
- Proof by contraposition (*chứng minh phản đảo*)
- Proof by contradiction (*chứng minh phản chứng*)
- Mathematical induction (*quy nạp toán học*)

Direct Proofs

Definition

A direct proof shows that $p \to q$ is true by showing that if p is true, then q must also be true.

Direct Proofs

Nguyen An Khuong, Tran Tuan Anh, Le Hong Trang

Contents
Proving Methods
Exercise

Definition

A direct proof shows that $p \to q$ is true by showing that if p is true, then q must also be true.

Example

Ex.: If n is an odd integer, then n^2 is odd.

Pr.: Assume that n is odd. By the definition, $n = 2k + 1$, $k \in \mathbb{Z}$. $n^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$ is an odd number.

Proof by Contraposition

Definition

$p \to q$ can be proved by showing (directly) that its contrapositive, $\neg q \to \neg p$, is true.

Proof by Contraposition

Definition

$p \to q$ can be proved by showing (directly) that its contrapositive, $\neg q \to \neg p$, is true.

Example

Ex.: Given an integer n, show that if $3n + 2$ is odd, then n is odd.

Nguyen An Khuong, Tran Tuan Anh, Le Hong Trang

Proof by Contraposition

Nguyen An Khuong, Tran Tuan Anh, Le Hong Trang

Contents
Proving Methods
Exercise

Definition

$p \to q$ can be proved by showing (directly) that its contrapositive, $\neg q \to \neg p$, is true.

Example

Ex.: Given an integer n, show that if $3n+2$ is odd, then n is odd.

Pr.: Assume that "n is even", so $n = 2k$, $k \in \mathbb{Z}$. Substituting $3n+2 = 3(2k)+2 = 6k+2 = 2(3k+1)$ is even. Because the negation of the conclusion of the conditional statement implies that the hypothesis is false, *Q.E.D.*

Proofs by Contradiction

Contents

Proving Methods

Exercise

Definition

p is true if if can show that $\neg p \to (r \wedge \neg r)$ is true for some proposition r.

Proofs by Contradiction

Nguyen An Khuong, Tran Tuan Anh, Le Hong Trang

Contents
Proving Methods
Exercise

Definition

p is true if if can show that $\neg p \to (r \land \neg r)$ is true for some proposition r.

Example

Ex.: Prove that $\sqrt{2}$ is irrational.

Proofs by Contradiction

Nguyen An Khuong, Tran Tuan Anh, Le Hong Trang

Contents
Proving Methods
Exercise

Definition

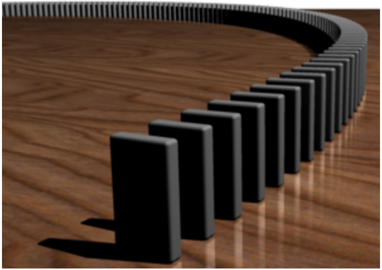
p is true if if can show that $\neg p \to (r \wedge \neg r)$ is true for some proposition r.

Example

Ex.: Prove that $\sqrt{2}$ is irrational.

Pr.: Let p is the proposition "$\sqrt{2}$ is irrational". Suppose $\neg p$ is true, which means $\sqrt{2}$ is rational. If so, $\exists a, b \in \mathbb{Z}, \sqrt{2} = a/b$, a, b have no common factors. Squared, $2 = a^2/b^2$, $2b^2 = a^2$, so a^2 is even, and a is even, too. Because of that $a = 2c, c \in \mathbb{Z}$. Thus, $2b^2 = 4c^2$, or $b^2 = 2c^2$, which means b^2 is even and so is b. That means 2 divides both a and b, contradict with the assumption.

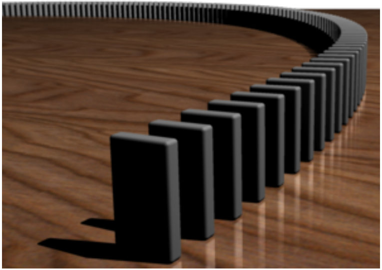
Problem



Assume that we have an infinite domino string, we want to know whether every dominoes will fall, if we only know two things:

1. We can push the first domino to fall
2. If a domino falls, the next one will be fall

Problem



Assume that we have an infinite domino string, we want to know whether every dominoes will fall, if we only know two things:

1. We can push the first domino to fall
2. If a domino falls, the next one will be fall

We can! Mathematical induction.

Contents

Proving Methods

Exercise

Mathematical Induction

Definition (Induction)

To prove that $P(n)$ is true for all positive integers n, where $P(n)$ is a propositional function, we complete two steps:

- **Basis Step**: Verify that $P(1)$ is true.
- **Inductive Step**: Show that the conditional statement $P(k) \to P(k+1)$ is true for all positive integers k

Logic form:

$[P(1) \land \forall k P(k) \to P(k+1))] \to \forall n P(n)$

Mathematical Induction

Nguyen An Khuong, Tran Tuan Anh, Le Hong Trang

Contents
Proving Methods
Exercise

Definition (Induction)

To prove that $P(n)$ is true for all positive integers n, where $P(n)$ is a propositional function, we complete two steps:

- **Basis Step**: Verify that $P(1)$ is true.
- **Inductive Step**: Show that the conditional statement $P(k) \rightarrow P(k+1)$ is true for all positive integers k

Logic form:

$[P(1) \wedge \forall k P(k) \rightarrow P(k+1))] \rightarrow \forall n P(n)$

What is $P(n)$ in domino string case?

Example on Induction

Example

Show that if n is a positive integer, then

$$1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Example on Induction

Example

Show that if n is a positive integer, then

$$1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Solution

Let $P(n)$ be the proposition that sum of first n is $n(n+1)/2$

- Basis Step: $P(1)$ is true, because $1 = \frac{1(1+1)}{2}$

Contents

Proving Methods

Exercise

Example on Induction

Example

Show that if n is a positive integer, then

$$1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Solution

Let $P(n)$ be the proposition that sum of first n is $n(n+1)/2$

- Basis Step: $P(1)$ is true, because $1 = \frac{1(1+1)}{2}$
- Inductive Step:
  Assume that $1 + 2 + \ldots + k = \frac{k(k+1)}{2}$.
  Then:

$$\begin{aligned} 1 + 2 + \ldots + k + (k+1) &= \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) \\ &= \frac{k(k+1) + 2(k+1)}{2} \\ &= \frac{(k+1)(k+2)}{2} \end{aligned}$$

shows that $P(k+1)$ is true under the assumption that $P(k)$ is true.

Nguyen An Khuong, Tran Tuan Anh, Le Hong Trang

Example on Induction

Example

Prove that $n < 2^n$ for all positive integers n.

Example on Induction

Nguyen An Khuong, Tran Tuan Anh, Le Hong Trang

Contents
Proving Methods
Exercise

Example

Prove that $n < 2^n$ for all positive integers n.

Solution

Let $P(n)$ be the proposition that $n < 2^n$.

- Basis Step: $P(1)$ is true, because $1 < 2^1 = 2$

Example on Induction

Example

Prove that $n < 2^n$ for all positive integers n.

Solution

Let $P(n)$ be the proposition that $n < 2^n$.

- Basis Step: $P(1)$ is true, because $1 < 2^1 = 2$
- Inductive Step:
  Assume that $P(k)$ is true for the positive k, that is, $k < 2^k$.
  Add 1 to both side of $k < 2^k$, note that $1 \leq 2^k$.

$$k + 1 < 2^k + 1 \leq 2^k + 2^k = 2 \cdot 2^k = 2^{k+1}.$$

  shows that $P(k+1)$ is true, namely, that $k + 1 < 2^{k+1}$, based on the assumption that $P(k)$ is true.

Contents

Proving Methods

Exercise

Exercise

Prove that, if n is a non-negative integer and $7n + 9$ is an even number, then n is an odd number by three ways:

1. Directed proof.
2. contraposition proof(phản đảo).
3. Contradiction.

Exercise

Directed proof

Assume: $7n + 9$ is the even number. Then, $7n + 9 = 2k, (k \in \mathbb{Z})$
So: $n = 2k - 6n - 9 = 2k - 6n - 10 + 1 = 2(k - 3n - 5) + 1$
That means n is an odd number.

Exercise

Directed proof

Assume: $7n + 9$ is the even number. Then, $7n + 9 = 2k, (k \in \mathbb{Z})$
So: $n = 2k - 6n - 9 = 2k - 6n - 10 + 1 = 2(k - 3n - 5) + 1$
That means n is an odd number.

Contrapositive proof (phản đảo)

To proof the above statement, firstly, we convert it into the logic expression: $p \to q$ with $p = 7n + 9$ is the even number and $q = n$ is the odd number.
Its contrapositive: "If n is not an odd number, then $7n + 9$ is not an even number". We can prove this statement follows this way:
If n is not an odd number, that means n can divisible 2. So that, $n = 2k, (k \in \mathbb{Z})$
We imply: $7n + 9 = 7(2k) + 9 = 14k + 9 = 2(7k + 4) + 1$
That means: $7n + 9$ is not the even number. Totally, we have proved the logic expression: $\neg q \to \neg p$. Therefore $p \to q$ is also truth.

Nguyen An Khuong, Tran Tuan Anh, Le Hong Trang

Contents
Proving Methods
Exercise

Exercise

Directed proof

Assume: $7n + 9$ is the even number. Then, $7n + 9 = 2k, (k \in \mathbb{Z})$
So: $n = 2k - 6n - 9 = 2k - 6n - 10 + 1 = 2(k - 3n - 5) + 1$
That means n is an odd number.

Contrapositive proof (phản đảo)

To proof the above statement, firstly, we convert it into the logic expression: $p \to q$ with $p = 7n + 9$ is the even number and $q = n$ is the odd number.
Its contrapositive: "If n is not an odd number, then $7n + 9$ is not an even number". We can prove this statement follows this way:
If n is not an odd number, that means n can divisible 2. So that, $n = 2k, (k \in \mathbb{Z})$
We imply: $7n + 9 = 7(2k) + 9 = 14k + 9 = 2(7k + 4) + 1$
That means: $7n + 9$ is not the even number. Totally, we have proved the logic expression: $\neg q \to \neg p$. Therefore $p \to q$ is also truth.

Contradiction proof

Suppose $7n + 9$ is an even number and n is not an odd number or n is an even number.
Because n is an even number, then $n = 2k, (k \in \mathbb{Z})$
We infer: $7n + 9 = 7(2k) + 9 = 14k + 9 = 2(7k + 4) + 1$
Its means: $7n + 9$ is the odd number. We can show that, if n is an even number, then $7n + 9$ is an odd number. This contradicts with the hypothesis $7n + 9$ is an even number.

Contents

Proving Methods

Exercise

Exercise

Which of the method of proof is used for proving the statement below:

To prove *"If m and n are integers, $m \times n$ is an even number, then either m is even or n is even"*, we follow these inferences:
Assume m and n are odd numbers. Then we can express: $m = 2k + 1$ and $n = 2l + 1$. So $mn = (2k + 1)(2l + 1) = 2(2kl + k + l) + 1$ is the odd number. Contradiction. That means either m is even or n even.

A) Directed proof.

B) Contradiction proof or contra-positive proof

C) inductive proof

D) All the above answers are incorrect.

Nguyen An Khuong, Tran Tuan Anh, Le Hong Trang

Exercise

Which of the method of proof is used for proving the statement below:

To prove *"If m and n are integers, $m \times n$ is an even number, then either m is even or n is even"*, we follow these inferences:
Assume m and n are odd numbers. Then we can express: $m = 2k + 1$ and $n = 2l + 1$. So $mn = (2k + 1)(2l + 1) = 2(2kl + k + l) + 1$ is the odd number. Contradiction. That means either m is even or n even.

A) Directed proof.

B) Contradiction proof or contra-positive proof correct answer!

C) inductive proof

D) All the above answers are incorrect.

Nguyen An Khuong, Tran Tuan Anh, Le Hong Trang

Nguyen An Khuong, Tran Tuan Anh, Le Hong Trang

Contents
Proving Methods
Exercise

Điều gì sai trong chuỗi lý luận dưới đây rằng tất cả các bông hoa đều có cùng một màu?

(1) Đặt $P(n)$ là một mệnh đề rằng tất cả các bông hoa trong một tập n bông đều có cùng màu.

(2) Ta thấy rõ ràng, $P(1)$ luôn đúng.

(3) Nếu giả sử $P(n)$ đúng. Nghĩa là, giả sử rằng tất cả các bông hoa trong một tập n bông hoa bất kỳ đều có cùng màu sắc.

(4) Xét một tập bất kỳ $n+1$ bông; được đánh số lần lượt là $1, 2, 3, \ldots, n, (n+1)$.

(5) Dựa theo giả định trên, chuỗi n bông hoa đầu tiên của những bông hoa này có cùng màu, và chuỗi n bông hoa sau cũng sẽ có cùng một màu.

(6) Do hai tập hợp bông hoa này có sự giao thoa $n-1$ bông, nên tất cả $n+1$ bông hoa này phải cùng một màu.

(7) Điều này chứng minh rằng $P(n+1)$ là đúng và được chứng minh bằng phương pháp qui nạp.

Xét một tập con D $(\mathcal{N} \times N)$ được đinh nghĩa đệ quy như sau:

(i) $(n, 0) \in D$.

(ii) nếu $(n, m) \in D$, thì $(n, n + m) \in D$.

Hãy

1) xác định vài phần tử của D.
2) chứng minh bằng phép quy nạp trên k rằng 'nếu $m = k.n$ thì '$(n, m) \in D$'.
3) chứng minh rằng nếu $(n, m) \in D$, thì chúng ta sẽ có $m = kn$ với $k \in \mathcal{N}$.

a) Chứng minh rằng $\forall n \in \mathcal{N}^+$
$(n+1)^2 - (n+2)^2 - (n+3)^2 + (n+4)^2 = 4$.

b) Từ đó suy ra rằng với mọi số tự nhiên m, tồn tại n nguyên dương để có thể viết m dưới dạng tổng bình phương của 1^2, 2^2, …, n^2, nghĩa là: $\forall m \in \mathcal{N}^+$, $\exists n \in \mathcal{N}^+$, $\exists \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n \in \{-1, 1\}$, $m = \varepsilon_1 1^2 + \varepsilon_2 2^2 + \ldots + \varepsilon_n n^2$.
(**Gợi ý**: thử biểu diễn các giá trị $m \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$)

Contents

Proving Methods

Exercise

a) Chứng minh rằng $\forall n \in \mathcal{N}^+$ $(n+1)^2 - (n+2)^2 - (n+3)^2 + (n+4)^2 = 4$.

b) Từ đó suy ra rằng với mọi số tự nhiên m, tồn tại n nguyên dương để có thể viết m dưới dạng tổng bình phương của 1^2, 2^2, ..., n^2, nghĩa là: $\forall m \in \mathcal{N}^+$, $\exists n \in \mathcal{N}^+$, $\exists \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n \in \{-1, 1\}$, $m = \varepsilon_1 1^2 + \varepsilon_2 2^2 + \ldots + \varepsilon_n n^2$. (**Gợi ý**: thử biểu diễn các giá trị $m \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$)

- $m = 0$: $0 = 1^2 + 2^2 - 3^2 + 4^2 - 5^2 - 6^2 + 7^2$
- $m = 1$: $1 = 1^2$
- $m = 2$: $2 = -1^2 - 2^2 - 3^2 + 4^2$
- $m = 3$: $3 = -1^2 + 2^2$
- $m = 4$: $4 = 1^2 - 2^2 - 3^2 + 4^2$

a) Chứng minh rằng $\forall n \in \mathcal{N}^+$ $(n+1)^2 - (n+2)^2 - (n+3)^2 + (n+4)^2 = 4$.

b) Từ đó suy ra rằng với mọi số tự nhiên m, tồn tại n nguyên dương để có thể viết m dưới dạng tổng bình phương của 1^2, 2^2, ..., n^2, nghĩa là: $\forall m \in \mathcal{N}^+$, $\exists n \in \mathcal{N}^+$, $\exists \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n \in \{-1, 1\}$, $m = \varepsilon_1 1^2 + \varepsilon_2 2^2 + \ldots + \varepsilon_n n^2$. (**Gợi ý**: thử biểu diễn các giá trị $m \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$)

- $m = 0$: $0 = 1^2 + 2^2 - 3^2 + 4^2 - 5^2 - 6^2 + 7^2$
- $m = 1$: $1 = 1^2$
- $m = 2$: $2 = -1^2 - 2^2 - 3^2 + 4^2$
- $m = 3$: $3 = -1^2 + 2^2$
- $m = 4$: $4 = 1^2 - 2^2 - 3^2 + 4^2$
- $m = 5$: $5 = 1^2 + (2^2 - 3^2 - 4^2 + 5^2)$

a) Chứng minh rằng $\forall n \in \mathcal{N}^+$ $(n+1)^2 - (n+2)^2 - (n+3)^2 + (n+4)^2 = 4$.

b) Từ đó suy ra rằng với mọi số tự nhiên m, tồn tại n nguyên dương để có thể viết m dưới dạng tổng bình phương của 1^2, 2^2, ..., n^2, nghĩa là: $\forall m \in \mathcal{N}^+$, $\exists n \in \mathcal{N}^+$, $\exists \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n \in \{-1, 1\}$, $m = \varepsilon_1 1^2 + \varepsilon_2 2^2 + \ldots + \varepsilon_n n^2$. (**Gợi ý**: thử biểu diễn các giá trị $m \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$)

- $m = 0$: $0 = 1^2 + 2^2 - 3^2 + 4^2 - 5^2 - 6^2 + 7^2$
- $m = 1$: $1 = 1^2$
- $m = 2$: $2 = -1^2 - 2^2 - 3^2 + 4^2$
- $m = 3$: $3 = -1^2 + 2^2$
- $m = 4$: $4 = 1^2 - 2^2 - 3^2 + 4^2$
- $m = 5$: $5 = 1^2 + (2^2 - 3^2 - 4^2 + 5^2)$
- $m = 6$: $6 = -1^2 - 2^2 - 3^2 + 4^2 + (5^2 - 6^2 - 7^2 + 8^2)$

Contents

Proving Methods

Exercise

Hãy chứng minh các đẳng thức sau bằng cách sử dụng phương pháp chứng minh quy nạp:

1. $1.2 + 2.5 + 3.8 + \ldots + n.(3n-1) = n^2(n+1), n \geq 1$
2. $1 + \frac{1}{1+2} + \frac{1}{1+2+3} + \ldots + \frac{1}{1+2+3+\ldots+n} = \frac{2n}{n+1}, n \geq 1$
3. $\sum_{i=1}^{n} 2^{i-1} = 2^n - 1$
4. Chứng minh $\log_5(2)$ là số vô tỷ.

Solution

Nguyen An Khuong, Tran Tuan Anh, Le Hong Trang

Contents

Proving Methods

Exercise

(1) $1.2 + 2.5 + 3.8 + \ldots + n.(3n-1) = n^2(n+1), n \geq 1$ (1)
- Với $n = 1$ thì ta có $1.2 = 1^2(1+1) \rightarrow$ (1) đúng.
- Giả sử (1) đúng với $n = k$, khi đó ta có
$1.2 + 2.5 + 3.8 + \ldots + k.(3k-1) = k^2(k+1)$
- Ta sẽ chứng minh (1) đúng với $n = k+1$, tức là
$1.2+2.5+3.8+\ldots+k.(3k-1)+(k+1)(3k+2) = (k+1)^2(k+2)$.
Thật vậy, $n = k+1$, tức là
$1.2 + 2.5 + 3.8 + \ldots + k.(3k-1) + (k+1)(3k+2) =$
$[1.2 + 2.5 + 3.8 + \ldots + k.(3k-1)] + (k+1)(3k+2) =$
$k^2(k+1) + (k+1)(3k+2) = (k+1)(k^2+3k+2) =$
$(k+1)(k+1)(k+2) = (k+1)^2(k+2)$.
Vậy biểu thức đã cho đúng với $n = k+1$.

Solution

(2) $1+\frac{1}{1+2}+\frac{1}{1+2+3}+\ldots+\frac{1}{1+2+3+\ldots+n}=\frac{2n}{n+1}, n \geq 1$ (2)

- Với $n=1$ thì ta có P(1): $1=\frac{2}{1+1} \rightarrow$ (2) đúng.
- Giả sử (2) đúng với $n=k$, khi đó ta có P(k):

$1+\frac{1}{1+2}+\frac{1}{1+2+3}+\ldots+\frac{1}{1+2+3+\ldots+k}=\frac{2k}{k+1}$

- Ta sẽ chứng minh (2) đúng với $n=k+1$, tức là P(k+1):

$1+\frac{1}{1+2}+\frac{1}{1+2+3}+\ldots+\frac{1}{1+2+3+\ldots+k}+\frac{1}{1+2+\ldots+k+(k+1)}=$
$\frac{2k}{k+1}+\frac{1}{1+2+\ldots+k+(k+1)}=\frac{2k}{k+1}+\frac{2}{(k+1)(k+2)}=\frac{2k(k+2)+2}{(k+1)(k+2)}=$
$\frac{2(k^2+2k+1)}{(k+1)(k+2)}=\frac{2(k+1)^2}{(k+1)(k+2)}=\frac{2(k+1)}{k+2}$ [Chú ý:
$1+2+\ldots+k+(k+1)=\frac{(k+1)(k+2)}{2}$]

Vậy biểu thức đã cho đúng với $n=k+1$.

Contents

Proving Methods

Exercise

Solution

(3) $\sum_{i=1}^{n} 2^{i-1} = 2^n - 1$ (3)
- Với $i = 1$ thì ta có S(1): $\sum_{i=1}^{1} 2^{i-1} = 2^{1-1} = 2^1 - 1 \rightarrow$ (3) đúng.
- Giả sử (3) đúng với $n = k$, khi đó ta có S(k):
$\sum_{i=1}^{k} 2^{i-1} = 2^k - 1$
- Ta sẽ chứng minh (3) đúng với $n = k + 1$, tức là S(k+1):
$\sum_{i=1}^{k+1} 2^{i-1} = \sum_{i=1}^{k} 2^{i-1} + 2^k = 2^k - 1 + 2^k = 2^{k+1} - 1$
Vậy biểu thức đã cho đúng với $n = k + 1$.

(4) Chứng minh $\log_5(2)$ là một số vô tỷ.
Giả sử ngược lại tức là $\log_5(2)$ là một số hữu tỷ. Do đó, $\log_5(2) = \frac{a}{b}$, trong đó $a, b \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$, UCLN(a,b) = 1
Khi đó, $5^{\frac{a}{b}} = \sqrt[b]{5^a} = 2 \Leftrightarrow 5^a = 2^b$. Bởi vì 5^a luôn luôn là số lẽ và 2^b luôn luôn là số chẵn. Suy ra, điều này luôn sai. Vậy suy ra đpcm.

Exercise

Hãy sử dụng phương pháp chứng minh quy nạp để chứng minh:

1. Chứng minh rằng với mọi số nguyên $n \geq 1$, $3^{2n-1} + 1$ chia hết cho 4.
2. Chứng minh rằng với mọi số nguyên $n \geq 1$, $6^n - 1$ đều chia hết cho 5.
3. Chứng minh rằng với mọi số nguyên $n \geq 1$, $5^{2n-1} + 1$ đều chia hết cho 6.
4. Chứng minh rằng với mọi số nguyên $n \geq 1$, $8^n - 1$ đều chia hết cho 7.
5. Chứng minh rằng với mọi số nguyên $n \geq 1$, $4^n + 15n - 1$ đều chia hết cho 9.

Contents

Proving Methods

Exercise

Solution

(1) Chứng minh rằng với mọi số nguyên $n \geq 1$, $3^{2n-1} + 1$ chia hết cho 4.

Với $n = 1$, ta sẽ có $4 \vdots 4$ - điều này luôn luôn đúng.
Giả sử tồn tại một số nguyên $k \geq 1$ sao cho $3^{2k-1} + 1$ chia hết cho 4.
Hay nói cách khác, tồn tại số nguyên m sao cho $3^{2k-1} + 1 = 4m$.
Chúng ta cần chứng minh rằng $3^{2(k+1)-1} + 1$ chia hết cho 4.
Điều này tương đương với việc chứng minh rằng $3^{2k+1} + 1$ chia hết cho 4.
Mặt khác, ta có:
$3^{2k+1}+1 = 3^2(3^{2k-1}+9-8 = 9(3^{2k-1}+1)-2.4 = 4(9m+2)$.
Và do vậy, $3^{2k+1} + 1$ cũng là bội của 4, nên mệnh đề trên được chứng minh bằng qui nạp.

Solution

Nguyen An Khuong, Tran Tuan Anh, Le Hong Trang

Contents
Proving Methods
Exercise

(2) Chứng minh rằng với mọi số nguyên $n \geq 1$, $6^n - 1$ đều chia hết cho 5.

Với $n = 1$, ta sẽ có $6^1 - 1 = 5 \vdots 5$ - điều này luôn luôn đúng.
Giả sử tồn tại một số nguyên $n \geq 1$ sao cho $6^n - 1$ chia hết cho 5.
Hay nói cách khác, tồn tại số nguyên m sao cho $6^n - 1 = 5m$.
Chúng ta cần chứng minh rằng $6^{n+1} - 1$ cũng chia hết cho 5.
Mặt khác, ta có:
$6^{n+1} - 1 = 6.6^n - 6 + 5 = 6(6^n - 1) + 5 = 30m + 5 = 5(6m + 1)$.
Và do vậy, $6^{n+1} - 1$ cũng là bội của 5, nên mệnh đề trên được chứng minh bằng qui nạp.

Solution

(3) Chứng minh rằng với mọi số nguyên $n \geq 1$, $5^{2n-1} + 1$ đều chia hết cho 6. Với $n = 1$, ta sẽ có $5^{2-1} + 1 = 4 \vdots 4$ - điều này luôn luôn đúng.
Giả sử tồn tại một số nguyên $n \geq 1$ sao cho $5^{2n-1} + 1$ chia hết cho 6.
Hay nói cách khác, tồn tại số nguyên m sao cho $5^{2n-1} + 1 = 6m$.
Chúng ta cần chứng minh rằng $5^{2(n+1)-1} + 1$ cũng chia hết cho 6.
Điều này tương đương với việc chứng minh rằng $5^{2n+1} + 1$ chia hết cho 6.
Mặt khác, ta có:
$5^{2n+1} - 1 = 5^2.5^{2n-1} + 25 - 24 = 5^2(5^{2n-1} + 1) - 24 = 150m - 24 = 6(25m - 4)$. Và do vậy, $5^{2n-1} + 1$ cũng là bội của 6, nên mệnh đề trên được chứng minh bằng qui nạp.

Solution

Nguyen An Khuong, Tran Tuan Anh, Le Hong Trang

Contents
Proving Methods
Exercise

(4) Chứng minh rằng với mọi số nguyên $n \geq 1$, $8^n - 1$ đều chia hết cho 7.

Với $n = 1$, ta sẽ có $8^1 - 1 = 7 \vdots 7$ - điều này luôn luôn đúng.
Giả sử tồn tại một số nguyên $n \geq 1$ sao cho $8^n - 1$ chia hết cho 7.
Hay nói cách khác, tồn tại số nguyên m sao cho $8^n - 1 = 7m$.
Chúng ta cần chứng minh rằng $8^{n+1} - 1$ cũng chia hết cho 7.
Mặt khác, ta có:
$8^{n+1} - 1 = 8.8^n - 8 + 7 = 8(8^n - 1) + 7 = 56m + 7 = 7(8m + 1)$.
Và do vậy, $8^{n+1} - 1$ cũng là bội của 7, nên mệnh đề trên được chứng minh bằng qui nạp.

Solution

(5) Chứng minh rằng với mọi số nguyên $n \geq 1$, $4^n + 15n - 1$ đều chia hết cho 9.

Với $n = 1$, ta sẽ có $4^1 + 15 - 1 = 18 \vdots 9$ - điều này luôn luôn đúng.
Giả sử tồn tại một số nguyên $n \geq 1$ sao cho $4^n + 15n - 1$ chia hết cho 9
Hay nói cách khác, tồn tại số nguyên m sao cho
$4^n + 15n - 1 = 9m$
Chúng ta cần chứng minh rằng $4^{n+1} + 15(n + 1) - 1$ cũng chia hết cho 9.

Solution

Mặt khác, ta có:
$4^{n+1} + 15(n+1) - 1 = 4^n.4^1 + 15n + 15 - 1 =$
$3.4^n + 4^n + 15n + 15 - 1 = (4^n + 15n - 1) + 3.4^n + 15$

Ta thấy: $(4^n + 15n - 1)\vdots 9$ (theo giả thuyết quy nạp)

Còn: $3.4^n + 15 = 3(4^n + 5)$ để chia hết cho 9 thì $(4^n + 5)\vdots 3$

Đặt B(n) $= 4^n + 5$. Thế $k = 1$ thì $4^1 + 5 = 9\vdots 3 \to$ đúng với $k = 1$

Giả sử đúng với $k = i \to$ B(i) $= (4^1 + 5)\vdots 3$. Ta đi chứng minh đúng với $k = i + 1 \to$ B(i+1) $=$
$4^{i+1} + 5 = 4^i.4 + 5 = 3.4^i + 4^i + 5 = (4^i + 5) + 3.4^i$. Ta thấy:

$(4^i + 5)\vdots 3$ theo giả thuyết quy nạp

Còn: $3.4^i\vdots 3$. Do đó, $(4^n + 5)\vdots 3$. Vậy suy ra đpcm.

Hãy chứng minh các bất đẳng thức sau bằng cách sử dụng phương pháp chứng minh quy nạp:

1. Chứng minh rằng với mọi số nguyên $n \geq 1$, $3^n > n^2$.
2. Chứng minh rằng với mọi số nguyên $n \geq 4$, $n! > 2^n$.

Solution

(1) Chứng minh rằng với mọi số nguyên $n \geq 1$, $3^n > n^2$.
Với $n = 1$, ta sẽ có $3^1 = 3$ và $1^2 = 1$. Do đó, mệnh đề này đúng với $n = 1$.
Với $n = 2$, ta sẽ có $3^2 = 9$ và $2^2 = 4$. Do đó, mệnh đề này cũng đúng với $n = 2$.
Giả sử tồn tại một số nguyên $n \geq 2$ sao cho $3^n > n^2$.
Chúng ta cần chứng minh rằng 3^{n+1} cũng lớn hơn $(n+1)^2$.
Mặt khác, khai triển biểu thức bên phải của bất đẳng thức, ta thu được: $(n+1)^2 = n^2 + 2n + 1$.
Do ta chỉ xét $n \geq 2$, nên $n^2 = n \times n \geq 2n$ và $3^n > 1$.
Xét biểu thức bên trái của bất đẳng thức:
$3^{n+1} = 3 \times 3^n = 3^n + 3^n + 3^n > n^2 + n^2 + 1 >$
$n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$ (đpcm)
. Do vậy, mệnh đề trên được chứng minh bằng qui nạp.

Solution

(2) Chứng minh rằng với mọi số nguyên $n \geq 4$, $n! > 2^n$.
Với $n = 4$, ta sẽ có $4! = 24 > 2^4 = 16$.
Giả sử tồn tại một số nguyên $n \geq 1$ sao cho $n! > 2^n$.
Chúng ta cần chứng minh rằng $(n+1)!$ cũng lớn hơn 2^{n+1}.
Mặt khác, ta có:
$(n+1)! = (n+1) \times n!$. Theo giả thuyết, ta có:
$(n+1)! > (n+1) \times 2^n$.
Hơn nữa, biểu thức bên phải có giá trị lớn hơn $2 \times 2^n = 2^{n+1}$ (vì $n \geq 4 > 2$) Và do vậy, mệnh đề trên được chứng minh bằng qui nạp.

Exercise

Xác định lần lượt các giá trị $f(1)$, $f(2)$ và $f(3)$ nếu $f(n)$ được định nghĩa một cách đệ quy với $f(0) = 1$ và
$f(n+1) = f(n)^2 + f(n) + 1$, $n = 0, 1, 2, \ldots$

A) 1, 3, 13

B) 1, 3, 10

C) 3, 10, 111

D) 3, 13, 173

E) Các chọn lựa khác đều sai

Exercise

Xác định lần lượt các giá trị $f(1)$, $f(2)$ và $f(3)$ nếu $f(n)$ được định nghĩa một cách đệ quy với $f(0) = 1$ và $f(n+1) = f(n)^2 + f(n) + 1$, $n = 0, 1, 2, \ldots$

A) 1, 3, 13
B) 1, 3, 10
C) 3, 10, 111
D) 3, 13, 173
E) Các chọn lựa khác đều sai correct answer!

Exercise

Nguyen An Khuong, Tran Tuan Anh, Le Hong Trang

Contents
Proving Methods
Exercise

Một dãy số $\{t(n)\}_n$ được cho bởi công thức truy hồi (đệ quy):

$$t(n) + t(n-1) - 6\,t(n-2) = 0 \quad (t \geq 3),$$

biết thêm $t(1) = 1$, $t(2) = 3$. Công thức tường minh của dãy cho bởi:

A) $t(n) = \frac{3}{5} \cdot 2^n + \frac{1}{15} \cdot (-3)^n$

B) $t(n) = \frac{3}{5} \cdot 2^n + \frac{7}{15} \cdot (-3)^n$

C) $t(n) = 3 \cdot (-2)^n + \frac{7}{3} \cdot 3^n$

D) $t(n) = -3 \cdot 2^n + \frac{5}{3} \cdot (-3)^n$

E) Các chọn lựa khác đều sai

Exercise

Một dãy số $\{t(n)\}_n$ được cho bởi công thức truy hồi (đệ quy):

$$t(n) + t(n-1) - 6\,t(n-2) = 0 \quad (t \geq 3),$$

biết thêm $t(1) = 1$, $t(2) = 3$. Công thức tường minh của dãy cho bởi:

A) $t(n) = \frac{3}{5} \cdot 2^n + \frac{1}{15} \cdot (-3)^n$ correct answer!

B) $t(n) = \frac{3}{5} \cdot 2^n + \frac{7}{15} \cdot (-3)^n$

C) $t(n) = 3 \cdot (-2)^n + \frac{7}{3} \cdot 3^n$

D) $t(n) = -3 \cdot 2^n + \frac{5}{3} \cdot (-3)^n$

E) Các chọn lựa khác đều sai

Exercise

Tìm sáu số hạng đầu tiên của dãy được định nghĩa bằng công thức truy hồi và điều kiện đầu sau.

$$a_0 = -1, a_n = -2a_{n-1}$$

A) -1, 2, -3, 4, -5, 6

B) 1, 2, 4, 8, 16, 32

C) 2, -4, 8, -16, 32, -64

D) -1, 2, -4, 8, -16, 32

E) Các chọn lựa khác đều sai

Exercise

Tìm sáu số hạng đầu tiên của dãy được định nghĩa bằng công thức truy hồi và điều kiện đầu sau.

$$a_0 = -1, a_n = -2a_{n-1}$$

A) -1, 2, -3, 4, -5, 6

B) 1, 2, 4, 8, 16, 32

C) 2, -4, 8, -16, 32, -64

D) -1, 2, -4, 8, -16, 32 correct answer!

E) Các chọn lựa khác đều sai

Exercise

Hãy nhận dạng quy luật của dãy số nguyên sau, sau đó tìm bốn số hạng tiếp theo của dãy.

$$1, 0, 2, 2, 0, 0, 4, 4, 4, 0, 0, 0, \ldots$$

A) không tồn tại

B) 8,8,8,8

C) 6,6,6,6

D) có nhiều đáp án: 8,8,8,8 hoặc 0,8,8,8

E) Các chọn lựa khác đều sai

Exercise

Hãy nhận dạng quy luật của dãy số nguyên sau, sau đó tìm bốn số hạng tiếp theo của dãy.

$$1, 0, 2, 2, 0, 0, 4, 4, 4, 0, 0, 0, \ldots$$

A) không tồn tại

B) 8,8,8,8

C) 6,6,6,6

D) có nhiều đáp án: 8,8,8,8 hoặc 0,8,8,8 correct answer!

E) Các chọn lựa khác đều sai

Exercise

Nguyen An Khuong, Tran Tuan Anh, Le Hong Trang

Contents
Proving Methods
Exercise

Phát biểu nào sau đây là đúng?

A) Một số là hữu tỷ khi và chỉ khi bình phương của nó là hữu tỷ.
B) Một số nguyên n là lẻ khi và chỉ khi số $n^2 + 2n$ là lẻ.
C) Một số là vô tỷ khi và chỉ khi bình phương của nó là vô tỷ.
D) Một số nguyên n là lẻ khi và chỉ khi số $n(n + 1)$ là chẵn.
E) Các chọn lựa khác đều sai

Exercise

Phát biểu nào sau đây là đúng?

A) Một số là hữu tỷ khi và chỉ khi bình phương của nó là hữu tỷ.

B) Một số nguyên n là lẻ khi và chỉ khi số $n^2 + 2n$ là lẻ. correct answer!

C) Một số là vô tỷ khi và chỉ khi bình phương của nó là vô tỷ.

D) Một số nguyên n là lẻ khi và chỉ khi số $n(n+1)$ là chẵn.

E) Các chọn lựa khác đều sai

Exercise

Vào lúc mặt trời mọc, hai người mẫu X và Y đi trên bãi biển cùng khởi hành. X đi từ A đến B, và người kia đi từ B đến A. Đến 12h trưa, hai người mẫu gặp nhau, nhưng không dừng lại mà tiếp tục đi với cùng vận tốc như ban đầu của mình. Người đầu tiên đến B lúc 16 giờ, người còn lại đến A lúc 21 giờ.
Hỏi mặt trời mọc lúc mấy giờ ?

A) 5 giờ 30 phút
B) 6 giờ
C) 6 giờ 30 phút
D) 7 giờ
E) Các chọn lựa khác đều sai

Contents
Proving Methods
Exercise

Exercise

Vào lúc mặt trời mọc, hai người mẫu X và Y đi trên bãi biển cùng khởi hành. X đi từ A đến B, và người kia đi từ B đến A. Đến 12h trưa, hai người mẫu gặp nhau, nhưng không dừng lại mà tiếp tục đi với cùng vận tốc như ban đầu của mình. Người đầu tiên đến B lúc 16 giờ, người còn lại đến A lúc 21 giờ.
Hỏi mặt trời mọc lúc mấy giờ ?

A) 5 giờ 30 phút
B) 6 giờ correct answer!
C) 6 giờ 30 phút
D) 7 giờ
E) Các chọn lựa khác đều sai

Exercise

Các số Fibonacci tạo thành một dãy số 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, ..., với định nghĩa như sau: $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, và $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n, \forall n \geq 1$. Ước số chung lớn nhất của hai số a_{100} và a_{99} là

A) 1

B) 2

C) 218922995834555169026

D) Các chọn lựa khác đều sai

Nguyen An Khuong, Tran Tuan Anh, Le Hong Trang

Contents
Proving Methods
Exercise

Exercise

Các số Fibonacci tạo thành một dãy số 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, ..., với định nghĩa như sau: $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, và $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n, \forall n \geq 1$. Ước số chung lớn nhất của hai số a_{100} và a_{99} là

A) 1 correct answer!

B) 2

C) 218922995834555169026

D) Các chọn lựa khác đều sai

Nguyen An Khuong, Tran Tuan Anh, Le Hong Trang

Contents
Proving Methods
Exercise

Exercise

Tại một nước xa xôi mà tiền tệ không lưu hành nhiều, họ chỉ sử dụng trao đổi các vật dụng với nhau, hoặc với các đồng tiền có mệnh giá là 5 đồng hoặc 7 đồng.
Liệu có phải tất cả các loại vật dụng có giá trị từ 29 đồng trở lên đều có thể đổi được thành các đồng tiền có mệnh giá nêu trên?
Hãy chọn một đáp án đúng nhất cho câu hỏi trên.

A) Sai

B) Chính xác hơn nên hỏi là "các loại vật dụng có giá trị từ 25"

C) Chính xác hơn là "các loại vật dụng có giá trị từ 35"

D) Nên chỉnh sửa câu hỏi lại là "vật dụng có bất kỳ giá trị nào"

E) Đúng

F) Các chọn lựa khác đều sai

Nguyen An Khuong, Tran Tuan Anh, Le Hong Trang

Contents
Proving Methods
Exercise

Exercise

Tại một nước xa xôi mà tiền tệ không lưu hành nhiều, họ chỉ sử dụng trao đổi các vật dụng với nhau, hoặc với các đồng tiền có mệnh giá là 5 đồng hoặc 7 đồng.
Liệu có phải tất cả các loại vật dụng có giá trị từ 29 đồng trở lên đều có thể đổi được thành các đồng tiền có mệnh giá nêu trên?
Hãy chọn một đáp án đúng nhất cho câu hỏi trên.

A) Sai

B) Chính xác hơn nên hỏi là "các loại vật dụng có giá trị từ 25"

C) Chính xác hơn là "các loại vật dụng có giá trị từ 35"

D) Nên chỉnh sửa câu hỏi lại là "vật dụng có bất kỳ giá trị nào"

E) Đúng correct answer!

F) Các chọn lựa khác đều sai

Nguyen An Khuong, Tran Tuan Anh, Le Hong Trang

Contents
Proving Methods
Exercise

Exercise

Nguyen An Khuong, Tran Tuan Anh, Le Hong Trang

Contents
Proving Methods
Exercise

Given a convex polygon has n vertices. Prove that the number of diagonal in this polygon is $\frac{1}{2}n(n-3)$, với $n \geq 4$.
Solution:
Với $n = 4$ (đỉnh), thì đa giác là một hình có 4 cạnh và có 2 đường chéo (hình 1). Điều này cũng đúng với công thức trên, đó là $n = 4$ (đỉnh) , $\rightarrow \frac{1}{2}n(n-3) = \frac{1}{2}(4)(4-3) = 2$ (đường chéo)
Giả sử đúng với $n = k$ (đỉnh) thì số lượng đường chéo của một đa giác với k (đỉnh) là $\frac{1}{2}k(k-3)$ (đường chéo)
Ta đi chứng minh cũng đúng với $n = k+1$ (đỉnh) thì số lượng đường chéo của một đa giác với $k+1$ (đỉnh) là
$\frac{1}{2}(k+1)(k+1-3) = \frac{1}{2}(k+1)(k-2)$ (đường chéo)

Solution

Thât vậy, ta xét 2 loại đa giác, đa giác với k đỉnh và đa giác với $(k+1)$ đỉnh (xem hình 2 và hình 3)
Khi thêm 1 đỉnh vào đa giác có k đỉnh thì số lượng đường chéo trong đa giác có k đỉnh vẫn giữ nguyên trong đa giác có $(k+1)$ đỉnh. Nhưng lúc này khi nhìn vào hình 3 ta thấy đỉnh $(k+1)$ sẽ nối được tất cả các đỉnh trong đa giác có k đỉnh nhưng ngoại trừ 2 đỉnh sẽ không nối được đó là đỉnh thứ 1 và đỉnh thứ k và tiếp tục nối đỉnh thứ 1 và đỉnh thứ k trong đa giác có $(k+1)$ đỉnh.
Tóm lại khi thêm 1 đỉnh vào đa giác có k đỉnh ta sẽ được một đa giác có $(k+1)$ đỉnh và số lượng đường chéo trong đa giác có $(k+1)$ đỉnh là: $\frac{1}{2}k(k-3)+(k-2)+1=\frac{1}{2}(k(k-3)+2k-2)=\frac{1}{2}(k^2-k-2)=\frac{1}{2}(k+1)(k-2)$. Vậy suy ra đpcm.