Chapter 1
Logics

Discrete Structures for Computing

Huynh Tuong Nguyen, Tran Tuan Anh, Nguyen Ngoc Le
Faculty of Computer Science and Engineering
University of Technology - VNUHCM
{htnguyen;trtanh}@hcmut.edu.vn

Contents

Huynh Tuong Nguyen, Tran Tuan Anh, Nguyen Ngoc Le

Course outcomes

	Course learning outcomes
L.O.1	Understanding of logic and discrete structures
	L.O.1.1 – Describe definition of propositional and predicate logic L.O.1.2 – Define basic discrete structures: set, mapping, graphs
L.O.2	Represent and model practical problems with discrete structures
	L.O.2.1 – Logically describe some problems arising in Computing L.O.2.2 – Use proving methods: direct, contrapositive, induction L.O.2.3 – Explain problem modeling using discrete structures
L.O.3	Understanding of basic probability and random variables
	L.O.3.1 – Define basic probability theory L.O.3.2 – Explain discrete random variables
L.O.4	Compute quantities of discrete structures and probabilities
	L.O.4.1 – Operate (compute/ optimize) on discrete structures L.O.4.2 – Compute probabilities of various events, conditional ones, Bayes theorem

Logic

Definition (Averroes)

The tool for distinguishing between the true and the false.

Definition (Penguin Encyclopedia)

The formal systematic study of the principles of valid inference and correct reasoning.

Definition (Discrete Mathematics - Rosen)

Rules of logic are used to distinguish between valid and invalid mathematical arguments.

Applications in Computer Science

- Design of computer circuits
- Construction of computer programs
- Verification of the correctness of programs
- Constructing proofs automatically
- Artificial intelligence
- Many more...

Propositional Logic

Definition

A proposition is a declarative sentence that is either true or false, but not both.

Examples

- Hanoi is the capital of Viet Nam.
- New York City is the capital of USA.
- $1 + 1 = 2$
- $2 + 2 = 3$

Examples

Examples (Which of these are propositions?)

- How easy is logic!
- Read this carefully.
- H1 building is in Ho Chi Minh City.
- $4 > 2$
- $2^n \geq 100$
- The sun circles the earth.
- Today is Thursday.
  - Proposition only when the time is **specified**

Notations

- Propositions are denoted by $p, q, \ldots$
- The **truth value** (''chân trị'') is true (T) or false (F)

Operators

Huynh Tuong Nguyen, Tran Tuan Anh, Nguyen Ngoc Le

Negation - "Phủ định": $\neg p$

Bảng: Truth Table for Negation

p	$\neg p$
T	F
F	T

Operators

Conjunction - "Hội": $p \wedge q$
"p and q"

p	q	$p \wedge q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

I'm teaching DM1 and it is raining today.

Disjunction - "Tuyển": $p \vee q$
"p or q"

p	q	$p \vee q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

We need students who have experience in Java or C++.
Tomorrow, I will eat Pho or Bun bo.

Operators

Exclusive OR - *Tuyển loại*: $p \oplus q$
"p or q (but not both)"

p	q	$p \oplus q$
T	T	F
T	F	T
F	T	T
F	F	F

Implication - *Kéo theo*: $p \rightarrow q$
"if p, then q"

p	q	$p \rightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

If it rains, the pavement will be wet.

More Expressions for Implication $p \to q$

- if p, then q
- p implies q
- p is sufficient for q
- q if p
- p only if q
- q unless $\neg p$
- If you get 100% on the final, you will get 10 grade.
- If you feel asleep this afternoon, then $2 + 3 = 5$.

Conditional Statements From $p \to q$

- $q \to p$ (converse - *đảo*)
- $\neg q \to \neg p$ (contrapositive - *phản đảo*)
- Prove that only contrapositive have the same truth table with $p \to q$

Exercise

What are the converse and contrapositive of the following conditional statement

"If he plays online games too much, his girlfriend leaves him."

- Converse: If his girlfriend leaves him, then he plays online games too much.
- Contrapositive: If his girlfriend does not leave him, then he does not play online games too much.

Biconditionals

$$p \leftrightarrow q$$

"p if and only if q"

p	q	$p \leftrightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

- "p is necessary and sufficient for q".
- "if p then q, and conversely".
- "p iff q".

Translating Natural Sentences

Exercise

I will buy a new phone **only if** I have enough money to buy iPhone 4 **or** my phone is not working.

- p: I will buy a new phone
- q: I have enough money to buy iPhone 4
- r: My phone is working

- $p \to (q \vee \neg r)$

Translating Natural Sentences

Exercise

He will not run the red light if he sees the police unless he is too risky.

Construct Truth Table

Huynh Tuong Nguyen, Tran Tuan Anh, Nguyen Ngoc Le

Exercise

Construct the truth table of the compound proposition

$(p \vee \neg q) \rightarrow (p \wedge q)$.

p	q	$\neg q$	$p \vee \neg q$	$p \wedge q$	$(p \vee \neg q) \rightarrow (p \wedge q)$
T	T	F	T	T	T
T	F	T	T	F	F
F	T	F	F	F	T
F	F	T	T	F	F

Exercise - Truth table

$\neg p \to (\neg q \vee r)$

p	q	r	$\neg p$	$\neg q$	$\neg q \vee r$	$\neg p \to (\neg q \vee r)$
T	T	T	F	F	T	T
T	T	F	F	F	F	F
T	F	T	F	T	T	T
T	F	F	F	T	T	T
F	T	T	T	F	T	T
F	T	F	T	F	F	F
F	F	T	T	T	T	T
F	F	F	T	T	T	T

a) $(p \wedge q) \to \neg q$

b) $(p \vee r) \to (r \vee \neg p)$

c) $(p \to q) \vee (q \to p)$

d) $(p \vee \neg q) \wedge (\neg p \vee q)$

e) $(p \to \neg q) \vee (q \to \neg p)$

f) $\neg(\neg p \wedge \neg q)$

g) $(p \vee q) \to (p \oplus q)$

h) $(p \wedge q) \vee (r \oplus q)$

Applications

- System specifications
  - "When a user clicked on *Help* button, a pop-up will be shown up"
- Boolean search
  - type "dai hoc bach khoa" in Google
  - means "dai AND hoc AND bach AND khoa"

Applications (cont.)

Huynh Tuong Nguyen, Tran Tuan Anh, Nguyen Ngoc Le

- **Logic puzzles**
  - There are two kinds of inhabitants on an island, knights, who always tell the truth, and their opposites, knaves, who may lie. You encounter two people A and B. What are A and B if A says **"B is a knight"** and B says **"The two of us are opposite types"**?
- **Bit operations**
  - 101010011 is a bit string of length nine.

Tautology and Contradiction

Definition

A compound proposition that is always true (false) is called a tautology - hằng đúng (contradiction - hằng sai).

- Tautology: *hằng đúng*
- Contradiction: *mâu thuẫn*

Example

- $p \vee \neg p$ (tautology)
- $p \wedge \neg p$ (contradiction)

Question

Hãy chỉ ra hằng đúng trong các dạng mệnh đề sau:
Gợi ý: dùng bảng chân trị.

a) $(p \vee q) \rightarrow (p \wedge q)$

b) $(p \wedge q) \rightarrow (p \vee q)$

c) $p \rightarrow (\neg q \rightarrow p)$

d) $p \rightarrow (p \rightarrow q)$

e) $p \rightarrow (p \rightarrow p)$

f) $(p \rightarrow q) \rightarrow [(p \rightarrow r) \rightarrow (q \rightarrow r)]$

Proposition? Truth value?

a) "Phan-xi-păng là ngọn núi cao nhất Việt Nam."
b) "Hai số nguyên tố cùng nhau chỉ có ước chung là 1."
c) "Tích 3 số nguyên liên tiếp thì chia hết cho 3."
d) "Hãy đứng lên!"
e) "x+1=0"
f) "Hình lập phương có 8 đỉnh."
g) "0 là một số dương."
h) "Phương trình: $x^2 + 5x + 6 = 0$ vô nghiệm."
i) "2 có phải là số nguyên tố không?"
j) "Phương trình m$x^2 + 2x - 1 = 0$ có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi m=-1."
k) "Có số nguyên tố là số chẵn."
l) "$x^2 + 1 > 0$."
m) "Bao giờ lớp mình đi dã ngoại?"
n) "Thủy ngân không phải là kim loại."
o) "$3^{20} > 2^{30}$."
p) "Máy bay là phương tiện di chuyển nhanh nhất"
q) "Năm 2002 là năm nhuận."
r) "Có vô số số nguyên tố."
s) "$2^{10} - 1$ chia hết cho 11."
t) "Cấm hút thuốc lá nơi công cộng."
u) "Mọi số nguyên dương chẵn lớn hơn 2 là tổng của hai số nguyên tố."
v) "Số x là nguyên tố nếu nó không có ước số khác 1 và x."

Huynh Tuong Nguyen, Tran Tuan Anh, Nguyen Ngoc Le

Logical Equivalences

Definition

The compound compositions p and q are called logically equivalent if $p \leftrightarrow q$ is a tautology, denoted $p \equiv q$.

Example

Show that $\neg(p \vee q)$ and $\neg p \wedge \neg q$ are logically equivalent.

Logical Equivalences

$p \wedge \mathbf{T}$	$\equiv$	p	Identity laws
$p \vee \mathbf{F}$	$\equiv$	p	Luật đồng nhất
$p \vee \mathbf{T}$	$\equiv$	$\mathbf{T}$	Domination laws
$p \wedge \mathbf{F}$	$\equiv$	$\mathbf{F}$	Luật nuốt
$p \vee p$	$\equiv$	p	Idempotent laws
$p \wedge p$	$\equiv$	p	Luật lũy đẳng
$\neg(\neg p)$	$\equiv$	p	Double negation law
			Luât phủ định kép

Logical Equivalences

$p \vee q$	$\equiv$	$q \vee p$	Commutative laws
$p \wedge q$	$\equiv$	$q \wedge p$	Luật giao hoán
$(p \vee q) \vee r$	$\equiv$	$p \vee (q \vee r)$	Associative laws
$(p \wedge q) \wedge r$	$\equiv$	$p \wedge (q \wedge r)$	Luật kết hợp
$p \vee (q \wedge r)$	$\equiv$	$(p \vee q) \wedge (p \vee r)$	Distributive laws
$p \wedge (q \vee r)$	$\equiv$	$(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	Luật phân phối
$\neg(p \wedge q)$	$\equiv$	$\neg p \vee \neg q$	De Morgan's law
$\neg(p \vee q)$	$\equiv$	$\neg p \wedge \neg q$	Luật De Morgan
$p \vee (p \wedge q)$	$\equiv$	p	Absorption laws
$p \wedge (p \vee q)$	$\equiv$	p	Luật hút thu

Logical Equivalences

Equivalence		
$p \lor \neg p$	$\equiv$	$\mathbf{T}$
$p \land \neg p$	$\equiv$	$\mathbf{F}$
$p \to q$	$\equiv$	$\neg p \lor q$
$(p \to q) \land (p \to r)$	$\equiv$	$p \to (q \land r)$
$(p \to r) \land (q \to r)$	$\equiv$	$(p \lor q) \to r$
$(p \to q) \lor (p \to r)$	$\equiv$	$p \to (q \lor r)$
$(p \to r) \lor (q \to r)$	$\equiv$	$(p \land q) \to r$
$p \leftrightarrow q$	$\equiv$	$(p \to q) \land (q \to p)$
$p \leftrightarrow q$	$\equiv$	$(\neg p \lor q) \land (p \lor \neg q)$

Constructing New Logical Equivalences

Example

Show that $\neg(p \vee (\neg p \wedge q))$ and $\neg p \wedge \neg q$ are logically equivalent by developing a series of logical equivalences.

Solution

$$
\begin{aligned}
\neg(p \vee (\neg p \wedge q)) &\equiv \neg p \wedge \neg(\neg p \wedge q) && \text{by the second De Morgan law} \\
&\equiv \neg p \wedge [\neg(\neg p) \vee \neg q] && \text{by the first De Morgan law} \\
&\equiv \neg p \wedge (p \vee \neg q) && \text{by the double negation law} \\
&\equiv (\neg p \wedge p) \vee (\neg p \wedge \neg q) && \text{by the second distributive law} \\
&\equiv \mathbf{F} \vee (\neg p \wedge \neg q) && \text{because } \neg p \wedge p \equiv \mathbf{F} \\
&\equiv \neg p \wedge \neg q && \text{by the identity law for } \mathbf{F}
\end{aligned}
$$

Consequently, $\neg(p \vee (\neg p \wedge q))$ and $\neg p \wedge \neg q$ are logically equivalent.

Exercise

Lấy phủ định rồi đơn giản mệnh đề phủ định đó.

Example

$p \to (\neg q \wedge r)$

Bằng cách sử dụng bảng chân trị, ta dễ dàng chứng minh được hai dạng mệnh đề $p \to q$ và $\neg p \vee q$ là tương đương logic.

Phủ định: $\neg(p \to (\neg q \wedge r))$

$\equiv \neg(\neg p \vee (\neg q \wedge r))$

$\equiv p \wedge \neg(\neg q \wedge r)$

$\equiv p \wedge (q \vee \neg r)$

a) $p \wedge (q \vee r) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee r)$

b) $(p \wedge q) \to r$

c) $p \vee q \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge r)$

d) $[[[(p \wedge q) \wedge r] \vee [(p \wedge r) \wedge \neg r]] \vee \neg q] \to s$

Exercise

Chứng minh các mệnh đề sau đây là tương đương logic.
<u>Gợi ý:</u> dùng bảng chân trị hoặc dùng các phép biến đổi tương đương logic mệnh đề.

a) $\neg(p \leftrightarrow q)$ *và* $\neg p \leftrightarrow q$
b) $(p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r)$ *và* $p \rightarrow (q \wedge r)$
c) $(p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r)$ *và* $(p \vee q) \rightarrow r$
d) $(p \rightarrow q) \vee (p \rightarrow r)$ *và* $p \rightarrow (q \vee r)$
e) $\neg p \rightarrow (q \rightarrow r)$ *và* $q \rightarrow (p \vee r)$
f) $p \leftrightarrow q$ *và* $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$

Exercise

Các cặp mệnh đề được cho dưới đây có tương đương logic nhau không? Chứng minh?

a) $p \wedge (p \to q)$ và $p \wedge q$
b) $p \to q$ và $\neg p \vee (p \wedge q)$
c) $p \to q$ và $\neg p \vee \neg q$
d) $\neg p$ và $\neg(p \vee q) \vee (\neg p \wedge q)$
e) $[(p \leftrightarrow q) \wedge (q \leftrightarrow r) \wedge (r \leftrightarrow p)]$ và $[(p \to q) \wedge (q \to r) \wedge (r \to p)]$
f) $[(p \wedge q) \vee (q \wedge r) \vee (r \wedge p)]$ và $[(p \vee q) \wedge (q \vee r) \wedge (r \vee p)]$

Exercise

Xác định chân trị của các mệnh đề sau. Hãy phát biểu mệnh đề đảo và phản đảo của chúng.

a) "Nếu ABCD là hình chữ nhật thì AB vuông góc CD."
b) "Nếu 14 là số lẻ thì 15 chia hết cho 4."
c) "Hai tam giác bằng nhau thì có diện tích bằng nhau."
d) "Phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0$ có tích $a.c < 0$ thì nó có nghiệm."
e) "Nếu hai số x và y đều chia hết cho n thì $(x + y)$ cũng chia hết cho n."
f) "Nếu 45 tận cùng là 5 thì 45 chia hết cho 5."
g) "Nếu $\sqrt{2}$ là số vô tỷ thì $\sqrt{2}.\sqrt{2}$ là số vô tỷ."
h) "Nếu Pythagore là người Pháp thì Việt Nam thuộc về châu Á."
i) "Nếu $3n + 2$ là số nguyên lẻ thì n là số nguyên lẻ."
j) "Nếu 8 < 9 thì 5 là một số nguyên tố."
k) "Một tứ giác là hình thoi khi nó có 2 đường chéo vuông góc."
l) "Nếu 5 < 3 thì 7 là một số nguyên tố."

Exercise

Cho p và q là hai mệnh đề với:

- p: "Hùng thích đọc sách"
- q: "Hùng học giỏi"

Mệnh đề biểu diễn "Nếu Hùng thích đọc sách thì Hùng học giỏi, và ngược lại, Hùng học giỏi thì Hùng thích đọc sách" là:

A. $(p \land q) \to r$
B. $p \to q$
C. $p \lor q$
D. $p \land q$
E. $p \leftrightarrow q$
F. $\neg p \to \neg q$
G. $\neg p \lor (p \land q)$
H. Các chọn lựa khác đều sai.

Exercise

Gọi P, Q, R là các mệnh đề:

- P: "Bình đang học Toán".
- Q: "Bình đang học Tin học".
- R: "Bình đang học Anh Văn".

Hãy viết lại các mệnh đề dưới đây dưới dạng hình thức trong đó sử dụng các phép nối.

Example

Bình đang học Toán và Anh Văn nhưng không học Tin học:
$P \wedge R \wedge \neg Q$

a) Bình đang học Toán và Tin học nhưng không học cùng một lúc Tin học và Anh Văn.
b) Không đúng là Bình đang học Anh Văn mà không học Toán.
c) Không đúng là Bình đang học Anh Văn hay Tin học mà không học Toán.
d) Bình không học Tin học lẫn Anh Văn nhưng đang học Toán.

Exercise

Xác định các phát biểu sai trong các phát biểu bên dưới.

a) $x \in \{x\}$

b) $\{x\} \subseteq \{x\}$

c) $\{x\} \in \{x\}$

d) $\{x\} \in \{\{x\}\}$

e) $\emptyset \subseteq \{x\}$

A) a

B) b

C) c

D) d

E) Các đáp án khác đều sai.

Exercise

Mệnh đề nào bên dưới dùng là hằng đúng.

A) $(p \vee \neg q) \rightarrow q$

B) $p \rightarrow (p \wedge q)$

C) $\neg p \rightarrow (p \rightarrow q)$

D) $\neg(p \rightarrow q) \rightarrow q$

E) Các chọn lựa khác đều sai.

Exercise

Cho các mệnh đề sau

- p: "*ABC là một tam giác cân*".
- q: "*ABC là một tam giác đều*".
- r: "*Tam giác ABC có một góc bằng 60^o*".

Mệnh đề phức hợp nào sau đây biểu diễn định lý: *"Nếu tam giác ABC là tam giác cân và có một góc bằng 60^o thì tam giác đó là tam giác đều"* ?

A. $(p \wedge q) \to r$
B. $(p \wedge r) \to q$
C. $(p \wedge r) \vee q$
D. $q \to (p \vee r)$
E. Các đáp án khác đều sai.

Exercise

Sáu đội bóng A, B, C, D, E, F tham dự một giải vô địch. Dưới đây là 5 khẳng định khác nhau về 2 đội có mặt trong trận chung kết:

a. A và C
b. B và E
c. B và F
d. A và F
e. A và D

Biết rằng có 4 khẳng định đúng một nửa và một khẳng định sai hoàn toàn. Hãy cho biết 2 đội nào được thi đấu trong trận chung kết?

Exercise

Tìm chân trị các mệnh đề sau (có giải thích ngắn gọn):

a) "$\forall x \in N, x^2 + 5x + 6$ không phải là số nguyên tố."

b) "$\exists x \in R, x^2 + x + 1 \leq 0$"

c) "$\exists n \in N, (n^3 - n)$ không là bội của 3."

d) "$\forall n \in N*, n^2 - 1$ là bội của 3."

e) "$\forall x, \forall y \in R, x^2 + y^2 > 2xy$"

f) "$\exists r \in Q, 3 < r < \pi$"

g) "$\exists n \in N, n^2 + 1$ chia hết cho 8"

h) "$\forall x \in R, |x| < 3 \Leftrightarrow x^2 < 9$"

i) "$\exists a, b \in R, (a + b)^2 > 2(a^2 + b^2)$"

j) "Mọi số thực đều dương."

k) "Có kim loại ở thể lỏng."

l) "Mọi tam giác đều đều bằng nhau."

m) "Tất cả các chất khí đều không dẫn điện."

n) "Có những tứ giác không có đường tròn ngoại tiếp."

o) "Tồn tại số tự nhiên n, để với mọi số thực x, ta có $f(x) = x^2 - 2x + n$ nhận giá trị không âm."

p) "Với mọi số nguyên dương x, với mọi số nguyên dương y ta đều có $x \leq y$."

q) "Với mọi số nguyên dương x, có một số nguyên dương y để $x \leq y$."

r) "Có ít nhất một số nguyên dương x để với mọi số nguyên dương y ta đều có $x \leq y$."

s) "Tồn tại số nguyên dương x và một số nguyên dương y để có $x \leq y$."