Bài tập chương 4
Hàm số và Dãy

1 Dẫn nhập

Trong bài tập dưới đây, chúng ta sẽ làm quen với các kiến thức liên quan đến hàm số, các loại ánh xạ, dãy số, hệ thức truy hồi và sự đệ quy. Sinh viên cần ôn lại lý thuyết của chương 4 trước khi làm bài tập bên dưới.

2 Bài tập mẫu

Câu 1.
Hãy dò theo Giải thuật tính giai thừa trong bài giảng khi đầu vào là $n = 4$.
Lời giải.
Đầu tiên, ta sử dụng bước đệ quy để viết $4! = 4 \cdot 3!$.
Sau đó sử dụng bước đệ quy nhiều lần để viết $3! = 3 \cdot 2!, 2! = 2 \cdot 1!$, *và* $1! = 1 \cdot 0!$.
Đưa giá trị của $0! = 1$ *vào, và đi ngược lại các bước, ta thấy rằng*
$1! = 1 \cdot 1 = 1$
$2! = 2 \cdot 1! = 2$
$3! = 3 \cdot 2! = 3 \cdot 2 = 6$, *và*
$4! = 4 \cdot 3! = 4 \cdot 6 = 24$. $\square$

Câu 2.
Tại sao f không phải là hàm từ $\mathbb{R}$ đến $\mathbb{R}$ nếu

a) $f(x) = 1/x$?

b) $f(x) = \sqrt{x}$?

c) $f(x) = \pm\sqrt{(x^2 + 1)}$?

Lời giải.

1. *Vì tồn tại giá trị* $x = 0$ *không có giá trị tương ứng trong miền giá trị* $\mathbb{R}$.

2. *Vì tồn tại giá trị* $x < 0$ *trong miền xác định không có giá trị tương ứng trong miền giá trị* $\mathbb{R}$.

3. *Vì tồn tại một giá trị $x \in R$ có hai kết quả khác nhau trong miền giá trị $\mathbb{R}$.*

□

Câu 3.
Xác định xem các hàm đi từ tập $\{a, b, c, d\}$ vào chính nó có phải là đơn ánh hay không.

a) $f(a) = b, f(b) = a, f(c) = c, f(d) = d$

b) $f(a) = b, f(b) = b, f(c) = d, f(d) = c$

c) $f(a) = d, f(b) = b, f(c) = c, f(d) = d$

Lời giải.

a) Đơn ánh

b) Không

c) Không

□

Câu 4.
Hàm nào trong Câu 3 là toàn ánh?
Lời giải.

a) Toàn ánh

b) Không

c) Không

□

Câu 5.
Hàm nào trong Câu 3 là song ánh?
Lời giải.

a) Song ánh

b) Không

c) Không

□

Câu 6.
Tìm miền xác định và range của các hàm sau.

a) hàm chuyển một cặp số nguyên dương thành số nguyên đầu tiên trong cặp số

b) hàm chuyển một số nguyên dương thành chữ số lớn nhất của số đó

Lời giải.

a) Miền xác định: $\mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+$. *Range:* $\mathbb{Z}^+$.

b) Miền xác định: $\mathbb{Z}^+$. *Range* $= \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

□

Câu 7.
Tìm hàm ngược của $f(x) = x^3 + 1$
Lời giải.
$f^{-1}(x) = \sqrt[3]{f(x) - 1}$ □

Câu 8.
Tìm các giá trị sau.

a) $\lfloor 1.1 \rfloor$

b) $\lceil 1.1 \rceil$

c) $\lfloor -0.1 \rfloor$

d) $\lceil -0.1 \rceil$

Lời giải.

a) $\lfloor 1.1 \rfloor = 1$

b) $\lceil 1.1 \rceil = 2$

c) $\lfloor -0.1 \rfloor = -1$

d) $\lceil -0.1 \rceil = 0$

□

Câu 9.
Tìm số hạng a_8 của dãy $\{a_n\}$ nếu a_n bằng

a) 2^{n-1}

b) 7

c) $1+(-1)^n$

d) $-(-2)^n$

Lời giải.

a) $2^{8-1} = 2^7$

b) 7

c) $1+(-1)^8 = 0$

d) $-(-2)^8 = -2^8$

□

3 Bài tập cần giải

Câu 10.
Xác định xem f có phải là hàm đi từ $\mathbb{Z}$ đến $\mathbb{R}$ không, nếu

a) $f(n) = \pm n$.

b) $f(n) = \sqrt{n^2+1}$.

c) $f(x) = 1/(n^2-4)$.

Lời giải.

a) Không. f đi từ $\mathbb{Z}$ đến $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

b) Đúng.

c) Không. f có miền xác định là $\mathbb{Z} - \{\pm 2\}$.

□

Câu 11.
Tìm miền xác định và range của các hàm sau.

a) hàm chuyển một chuỗi bit thành số số 1 trừ đi số số 0 trong chuỗi

b) hàm chuyển một số nguyên dương thành số nguyên lớn nhất không lớn hơn căn bậc hai của số nguyên đó

c) hàm chuyển một chuỗi bit thành chuỗi số 1 dài nhất trong chuỗi

Lời giải.

a) *Miền xác định:* $\{x \mid x : \textit{bit string}\}$. *Range:* $\mathbb{Z}$.

b) *Miền xác định:* $\mathbb{Z}^+$. *Range:* $\mathbb{Z}^+$.

c) *Miền xác định:* $\{x \mid x$: *bit string*$\}$. *Range:* $\{x \mid x : \textit{bit string}\}$.

□

Câu 12.
Cho $S = \{-1, 0, 2, 4, 7\}$. Tìm $f(S)$ nếu

a) $f(x) = 1$

b) $f(x) = 2x + 1$

c) $f(x) = \lceil x/5 \rceil$

d) $f(x) = \lfloor (x^2 + 1)/3 \rfloor$

Lời giải.

a) $f(S) = \{1\}$

b) $f(S) = \{-1, 1, 5, 9, 15\}$

c) $f(S) = \{0, 1, 2\}$

d) $f(S) = \{0, 1, 5, 16\}$

□

Câu 13.
Xác định xem các hàm đi từ $\mathbb{Z}$ đến $\mathbb{Z}$ dưới đây, hàm nào là đơn ánh.

a) $f(n) = n - 1$

b) $f(n) = n^2 + 1$

c) $f(n) = n^3$

d) $f(n) = \lceil n/2 \rceil$

Lời giải.

a) Đơn ánh

b) Không

c) Đơn ánh

d) Không

□

Câu 14.
Hàm nào trong Câu 13 là toàn ánh?
Lời giải.

a) Toàn ánh

b) Không

c) Không

d) Toàn ánh

□

Câu 15.
Xác định hàm $f \colon \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ có phải là toàn ánh hay không nếu

a) $f(m, n) = m + n$

b) $f(m, n) = m^2 + n^2$

c) $f(m, n) = m$

d) $f(m, n) = |n|$

e) $f(m, n) = m - n$

Lời giải.

a) Toàn ánh

b) Không

c) Toàn ánh

d) Không

e) Toàn ánh

□

Câu 16.
Trong các hàm sau đây, hàm nào là song ánh từ $\mathbb{R}$ đến $\mathbb{R}$.

a) $f(x) = -3x + 4$

b) $f(x) = -3x^2 + 7$

c) $f(x) = (x + 1)/(x + 2)$

d) $f(x) = x^5 + 1$

Lời giải.

a) Song ánh

b) Không

c) Song ánh

d) Song ánh

□

Câu 17.
Chứng minh rằng hàm $f(x) = ax + b$ đi từ $\mathbb{R}$ vào $\mathbb{R}$ là khả nghịch, trong đó a và b là các hằng số, với $a \neq 0$, và tìm hàm ngược của f.
Lời giải.
$\forall x \forall y(ax + b = ay + b \rightarrow x = y) => f$ là đơn ánh.
$\forall y \exists (x = \frac{y-b}{a}) : f(x) = y => f$ là toàn ánh.
Do đó f là song ánh, hay f khả nghịch.
Hàm ngược: $f^{-1}(x) = \frac{x-b}{a}$. □

Câu 18.
Tìm $f \circ g$ và $g \circ f$, nếu $f(x) = x^2 + 1$ và $g(x) = x + 2$, là các hàm đi từ $\mathbb{R}$ vào $\mathbb{R}$.
Lời giải.

- $f \circ g = (x + 2)^2 + 1$.
- $g \circ f = (x^2 + 1) + 2$

□

Câu 19.
Tìm $f + g$ và fg với các hàm f và g cho trong Câu 18.
Lời giải.

- $f + g = x^2 + x + 3$.
- $fg = (x^2 + 1)(x + 1)$

□

Câu 20.
Tìm các giá trị sau.

a) $\lceil 2.99 \rceil$

b) $\lceil -2.99 \rceil$

c) $\lfloor \frac{1}{2} + \lceil \frac{1}{2} \rceil \rfloor$

d) $\lceil \lfloor \frac{1}{2} \rfloor + \lceil \frac{1}{2} \rceil + \frac{1}{2} \rceil$

Lời giải.

a) 3

b) -2

c) 1

d) 2

□

Câu 21.
Hãy nhận dạng quy luật của dãy số nguyên sau, sau đó tìm ba số hạng tiếp theo của dãy.

a) $1, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 1, \ldots$

b) $1, 2, 2, 3, 4, 4, 5, 6, 6, 7, 8, 8, \ldots$

c) $3, 6, 12, 24, 48, 96, 192, \ldots$

d) $15, 8, 1, -6, -13, -20, -27, \ldots$

Lời giải.

a) Quy luật: Đầu tiên số 1 xuất hiện một lần, sau đó số 0 xuất hiện một lần. Số lần xuất hiện của số 1 những lần sau bằng số lần xuất hiện của dãy những số 1 liền trước nó (cách bởi dãy những số 0) cộng thêm một lần. Tương tự với số 0.
Ba số hạng tiếp theo: 1, 1, 1.

b) Quy luật: Bắt đầu từ 1, các số liền sau của số hạng cuối cùng đang có trong dãy xuất hiện một hoặc hai lần theo quy luật: số chẵn xuất hiện hai lần, số lẻ xuất hiện một lần.
Ba số hạng tiếp theo: 9, 10, 10.

c) Quy luật: Số hạng sau lớn gấp đôi số hạng trước, bắt đầu từ số 3.
Ba số hạng tiếp theo: 384, 768, 1536.

d) Quy luật: Số hạng sau nhỏ hơn số hạng trước 7 đơn vị, bắt đầu từ số 15.
Ba số hạng tiếp theo: -34, -41, -48.

□

Câu 22.
Tìm giá trị của các tổng sau

a) $\sum_{k=1}^{5}(k+1)$

b) $\sum_{j=0}^{8}(2^{j+1}-2^{j})$

c) $\sum_{j=0}^{8}3\cdot 2^{j}$

d) $\sum_{j=0}^{8}(2\cdot 3^{j}+3\cdot 2^{j})$

e) $\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{2}(i-j)$

f) $\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=0}^{2}j$

Lời giải.

a) 20

b) 2^9-1

c) $3(2^9-1)$

d) $3^9-1+3(2^9-1)$

e) 3

f) 9

□

Câu 23.
Tìm sáu số hạng đầu tiên của dãy được định nghĩa bằng công thức truy hồi và điều kiện đầu sau.

a) $a_n=-2a_{n-1}, a_0=-1$

b) $a_n=a_{n-1}-a_{n-2}, a_0=2, a_1=-1$

c) $a_n=4a_{n-1}^2, a_0=1$

d) $a_n=na_{n-1}+a_{n-2}^2, a_0=1, a_1=1$

e) $a_n=a_{n-1}+a_{n-3}, a_0=1, a_1=2, a_2=0$

Lời giải.

a) -1, 2, -4, 8, -16, 32.

b) 2, -1, -3, -2, 1, 3.

c) 1, 4, 64, 16884, 1073741284, 4.61169E+18.

d) 1, 1, 3, 10, 49, 345.

e) 1, 2, 0, 1, 3, 3.

□

Câu 24.
Tìm $f(1), f(2), f(3)$ và $f(4)$ nếu $f(n)$ được định nghĩa một cách đệ quy với $f(0) = 1$ và $n = 0, 1, 2, \ldots$

a) $f(n+1) = f(n) + 2$.

b) $f(n+1) = 3f(n)$.

c) $f(n+1) = 2^{f(n)}$.

d) $f(n+1) = f(n)^2 + f(n) + 1$

Lời giải.

a) $f(1) = 3, f(2) = 5, f(3) = 7, f(4) = 9$.

b) $f(1) = 3, f(2) = 9, f(3) = 27, f(4) = 81$.

c) $f(1) = 2, f(2) = 4, f(3) = 16, f(4) = 65536$.

d) $f(1) = 3, f(2) = 13, f(3) = 183, f(4) = 33673$.

□

Câu 25.
Hãy dò theo Giải thuật tính giai thừa trong bài giảng khi đầu vào là $n = 5$. Thực hiện tương tự Bài tập mẫu khi tìm 4!.
Lời giải.
Đầu tiên, ta sử dụng bước đệ quy để viết $5! = 5 \cdot 4!$.
Sau đó sử dụng bước đệ quy nhiều lần để viết $4! = 4 \cdot 3!, 3! = 3 \cdot 2!, 2! = 2 \cdot 1!$, *và* $1! = 1 \cdot 0!$.
Đưa giá trị của $0! = 1$ *vào, và đi ngược lại các bước, ta thấy rằng*
$1! = 1 \cdot 1 = 1$
$2! = 2 \cdot 1! = 2$
$3! = 3 \cdot 2! = 3 \cdot 2 = 6$

$4! = 4 \cdot 3! = 4 \cdot 6 = 24$
$5! = 5 \cdot 4! = 5 \cdot 4 = 120.$ $\square$

Câu 26.
Hãy viết giải thuật đệ quy để tính nx khi n là số nguyên dương và x là số nguyên, chỉ được sử dụng phép cộng.
Lời giải.
procedure $nTimeX(n$: nonnegative integer, x: integer)
if n $= 0$ **then return** 0
else return $x + nTimeX(n-1, x)$
{output is nx} $\square$

4 Bài tập nâng cao

Câu 27.
Cho mô tả các hàm như sau. Trả lời giải thích cho các câu hỏi sau:

- Thông tin cung cấp có đủ để xác định một hàm số không?
- Có thể xác định được hàm là đơn ánh? toàn ánh? song ánh?

a) $f : \{>, <, +, ?\} \to \{1, 2, 3\}$, $f(>) = 3, f(<) = 1, f(+) = 2, f(?) = 3$.

b) $f : \{1, 2, 3\} \to \{>, <, +, ?\}$, $f(1) =?, f(2) =<, f(3) = +$.

c) $f : \{1, 2, 3, 4, 5\} \to \{1, 2, 3, 4\}$, $f^{-1}(1) = \{1, 3, 5\}, f^{-1}(2) = \{2, 4\}$.

d) $f : \{1, 2, 3, 4, 5\} \to \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $f^{-1}(1) = \{1\}, f^{-1}(2) = \{2\}, f^{-1}(3) = \{3\}, f^{-1}(4) = \{4\}, f^{-1}(5) = \{5\}$

Câu 28.
Xác định xem các hàm sau có phải song ánh từ $\mathbb{R}$ đến $\mathbb{R}$ hay không:

a) $f(x) = 2x + 1$

b) $f(x) = x^2 + 1$

c) $f(x) = x^3$

d) $f(x) = (x^2 + 1)/(x^2 + 2)$

Câu 29.
Giả sử g là ánh xạ từ A đến B, f là ánh xạ từ B đến C. Hãy chứng minh

a) Nếu cả f và g đều là đơn ánh thì $f \circ g$ cũng là đơn ánh

b) Nếu cả f và g đều là toán ánh thì $f \circ g$ cũng là toán ánh.

Câu 30.
Nếu f và $f \circ g$ là toàn ánh, ta có thể suy được g là toàn ánh hay không? Chứng minh.

Câu 31.
Cho $S = \{f \mid f : A \to B, f \text{ đơn ánh}\}$. Trong mỗi trường hợp, hãy tìm $|S|$.

a) $|A| = 3$ và $|B| = 3$

b) $|A| = 3$ và $|B| = 5$

c) $|A| = m$ và $|B| = n$

Câu 32.
Cho $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ và $g \circ f : X \to Z$. Chứng minh hoặc phản chứng minh:

a) Với mọi tập con $A \subseteq X$, $f^{-1}(f(A)) = A$.

b) Với mọi tập con $B \subseteq Y$, $f(f^{-1}(B)) = B$.

c) Với mọi tập con $E \subseteq Z$, $(g \circ f)^{-1}(E)) = f^{-1}(g^{-1}(E))$.

Câu 33.
Chứng minh rằng hàm $f(x) = e^x$ đi từ $\mathbb{R}$ đến $\mathbb{R}$ không phải là hàm khả nghịch, nhưng nếu miền giá trị được giới hạn lại chỉ trong tập các số thực dương, thì hàm mới sẽ là hàm khả nghịch.

Câu 34.
Cho $f(x) = \lfloor x^2/3 \rfloor$. Tìm $f(S)$ nếu

a) $S = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$

b) $S = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$

c) $S = \{1, 5, 7, 11\}$

d) $S = \{2, 6, 10, 14\}$

Câu 35.
Chứng minh rằng nếu x là số thực và n là số nguyên, thì

a) $x \leq n$ nếu và chỉ nếu $\lceil x \rceil \leq n$.

b) $n \leq x$ nếu và chỉ nếu $n \leq \lfloor x \rfloor$.

Câu 36.
Hãy nhận dạng quy luật của dãy số nguyên sau, sau đó tìm ba số hạng tiếp theo của dãy.

a) 3, 5, 8, 12, 17, 23, 30, 38, 47, ...

b) 2, 16, 54, 128, 250, 432, 686, ...

c) 2, 3, 7, 25, 121, 721, 5041, 40321, ...

Câu 37.
Cho a_n là số hạng thứ n của dãy $1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 5, 5, 6, 6, 6, 6, 6, 6, \ldots$, được xây dựng bằng cách lặp số nguyên k chính xác k lần. Chứng minh rằng $a_n = \lfloor \sqrt{2n} + \frac{1}{2} \rfloor$.

Câu 38.
Cần bao nhiêu byte để mã hóa n bit dữ liệu, với n bằng

a) 7 b) 17 c) 1001 d) 28.800

Câu 39.
Trong mỗi trường hợp, hãy biểu diễn các dãy sau bằng ký hiệu tổng ($\sum$) và tích ($\prod$).

a) $1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 \cdots$

b) $(1^3 - 1) + (2^3 + 1) + (3^3 - 1) \cdots$

c) $(2^2 - 1)(3^2 + 1)(4^2 - 1) \cdots$

d) $(1 - r)(1 - r^3)(1 - r^5) \cdots$

e) $\frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \frac{3}{4!} + \cdots$

f) $n + \frac{n-1}{2!} + \frac{n-2}{3!} + \cdots$

Câu 40.
Giả sử $A \neq 1$. Cho $G(n) = 1 + A + A^2 + \ldots + A^{n-1}$ với $n \geq 1$.

a) Dùng quy nạp, hãy chứng minh $G(n) = (1 - A^n)/(1 - A)$ với $n \geq 1$ (Đây là công thức tổng của *cấp số nhân*).

b) Hãy hình thành một công thức đệ quy đơn giản cho $G(n)$ từ $G(n) = 1 + A + A^2 + \ldots + A^{n-1}$ kể cả điều kiện đầu.

c) Bằng cách đặt $A = y/x$ và dùng một ít đại số, chứng minh rằng

$$\frac{x^{k+1} - y^{k+1}}{x - y} = x^k y^0 + x^{k-1} y^1 + \cdots + x^0 y^k \text{ khi } x \neq y$$

.

Câu 41.
Xét $a_k = A2^k - a_{k-1}, k \geq 1, a_0 = C$.

a) Chứng minh rằng

$$a_k = A(2^k(-1)^0 + 2^{k-1}(-1)^1 + \cdots + 2^1(-1)^{k-1}) + (-1)^k C, k \geq 1,$$

là lời giải cho công thức truy hồi trên.

b) Hãy viết một công thức ngắn gọn hơn cho a_k, sử dụng kết quả của Câu 41

Câu 42.
Hãy thực hiện thay biến $j = i - 1$ cho $\displaystyle\sum_{i=1}^{n-1} \frac{i}{(n-i)^2}$

Câu 43.
Chứng minh rằng $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ với $n \geq 1$.

Câu 44.
Chứng minh rằng $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} (a_j - a_{j-1}) = a_n - a_0$, ở đây $a_0, a_1, \ldots, a_n$ là dãy các số thực. Loại tổng này được gọi là **viễn vọng**.

Câu 45.
Tìm lời giải cho các công thức truy hồi cùng với điều kiện đầu dưới đây.

a) $a_n = -a_{n-1}, a_0 = 5$

b) $a_n = a_{n-1} + 3, a_0 = 1$

c) $a_n = a_{n-1} - n, a_0 = 4$

d) $a_n = 2a_{n-1} - 3, a_0 = -1$

e) $a_n = (n+1)a_{n-1}, a_0 = 2$

f) $a_n = 2na_{n-1}, a_0 = 2$

g) $a_n = -a_{n-1} + n - 1, a_0 = 7$

Câu 46.
Giả sử dân số thế giới vào năm 2010 là 6,9 tỷ người và tiếp tục tăng với tỷ lệ 1,1% một năm.

a) Hãy thiết lập công thức truy hồi cho dân số thế giới sau n năm kể từ 2010.

b) Giải công thức truy hồi để tìm công thức tường minh cho dân số thế giới sau n năm kể từ năm 2010.

c) Dân số thế giới năm 2030 sẽ là bao nhiêu?

Xét bản định nghĩa quy nạp của **Hàm Ackermann**. Hàm Ackermann có vai trò quan trọng trong lý thuyết hàm đệ quy và nghiên cứu độ phức tạp của một số giải thuật liên quan đến phép hợp tập hợp.

$$A(m,n) = \begin{cases} 2n & \text{if } m = 0 \\ 0 & \text{if } m \geq 1 \text{ and } n = 0 \\ 2 & \text{if } m \geq 1 \text{ and } n = 1 \\ A(m-1, A(m, n-1)) & \text{if } m \geq 1 \text{ and } n \geq 2 \end{cases}$$

Câu 47.
Tìm các giá trị của hàm Ackermann.

a) $A(1,0)$

b) $A(0,1)$

c) $A(1,1)$

d) $A(2,2)$

e) $A(2,3)$

f) $A(3,3)$

Câu 48.
Chứng minh rằng $A(1,n) = 2^n$ hễ $n \geq 1$.

Câu 49.
Hãy viết giải thuật đệ quy để tìm tổng của n số nguyên dương đầu tiên.

Câu 50.
Hãy viết giải thuật đệ quy để tìm số lớn nhất trong một tập hữu hạn các số nguyên. [Gợi ý: tận dụng tính chất số lớn nhất trong n số nguyên luôn lớn hơn số nguyên cuối cùng trong danh sách và số lớn nhất của $n-1$ số nguyên trước đó trong danh sách].

5 Tổng kết

Thông qua các bài tập trong phần này, chúng ta đã hiểu rõ hơn và làm quen với lý thuyết về hàm và ánh xạ cùng với dãy số trong đó các chi tiết liên quan đã được trình bày trong slide chương 4.