

## Bài tập chương 8 Lý thuyết đồ thị

### 1 Dẫn nhập

Trong phần bài tập này, chúng ta sẽ làm quen với các khái niệm và định nghĩa trong lý thuyết đồ thị. Sinh viên cần ôn lại lý thuyết của chương 4 trước khi làm các bài tập bên dưới.

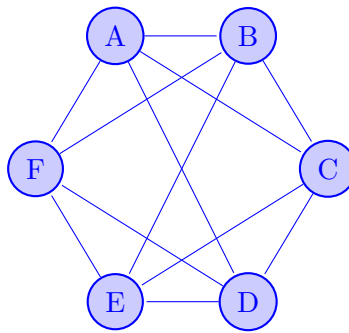
### 2 Bài tập mẫu

#### Câu 1.

Có bao nhiêu cạnh trong một đồ thị vô hướng có 6 đỉnh, mỗi đỉnh có bậc bằng 4?

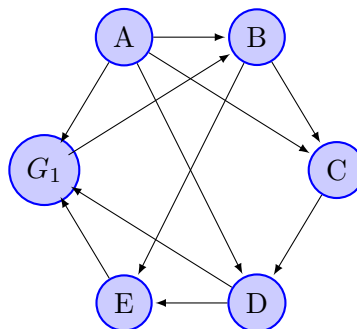
**Lời giải.** Vì tổng các bậc của đồ thị là  $6 \times 4 = 24$ , nên  $2e=24$ . Do đó, số cạnh trong đồ thị là  $e=12$ . Đồ thị có thể được vẽ như hình bên dưới đây:

□



#### Câu 2.

Có bao nhiêu bậc vào và bậc ra của mỗi đỉnh trong đồ thị có hướng  $G_1$  như dưới đây?



**Lời giải.**

- $\deg^-(A) = 0, \deg^-(B) = 2, \deg^-(C) = 2, \deg^-(D) = 2, \deg^-(E) = 2, \deg^-(F) = 3,$
- $\deg^+(A) = 4, \deg^+(B) = 2, \deg^+(C) = 1, \deg^+(D) = 2, \deg^+(E) = 1, \deg^+(F) = 1.$

□

#### Câu 3.

Liệu có tồn tại một đơn đồ thị gồm các đỉnh mà có bậc lần lượt là :

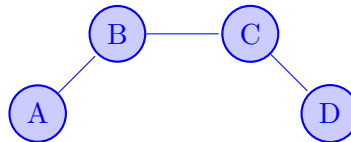
a) 1,1,2,2?

b) 1,1,2,2,3,3,3?

Nếu có hãy vẽ đồ thị đó.

**Lời giải.**

a) Có tồn tại đơn đồ thị gồm 4 đỉnh mà có bậc lần lượt là 1, 1, 2, và 2.  
Đồ thị này được vẽ như sau:



b) Không tồn tại đơn đồ thị gồm 7 đỉnh mà có bậc lần lượt là 1,1,2,2,3,3, và 3 vì tổng số bậc của tất cả các đỉnh là một số lẻ.

□

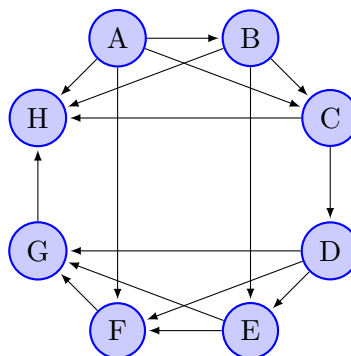
### 3 Bài tập cần giải

**Câu 4.**

Có bao nhiêu cạnh trong một đồ thị vô hướng có 8 đỉnh, mỗi đỉnh có bậc là 5 ? Vẽ đồ thị này.

**Câu 5.**

Có bao nhiêu bậc vào và bậc ra của mỗi đỉnh trong đồ thị có hướng  $G_2$  như dưới đây?



**Câu 6.**

Đếm số cạnh của các đồ thị đặc biệt sau:

a)  $K_n$

b)  $C_n$

c)  $K_{m,n}$

d)  $W_n$

e)  $Q_n$

### Câu 7.

Liệu có tồn tại một đơn đồ thị gồm các đỉnh mà có bậc lần lượt là :

- a) 1,2,3,4,5,6?
- b) 3,3,3,3?
- c) 1,2,3,4,5,6,7?
- d) 1, 1,2,3,4,5,6?

Nếu có hãy vẽ đồ thị đó.

### Câu 8.

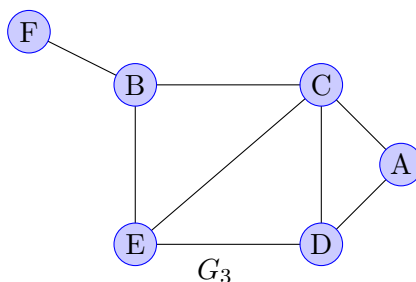
Số cạnh nhiều nhất có thể của một đơn đồ thị gồm 12 đỉnh là bao nhiêu? Còn trong trường hợp đa đồ thị và giả đồ thị thì như thế nào?

### Câu 9.

Trong đồ thị  $G$  có chứa đúng 2 đỉnh bậc lẻ (các đỉnh còn lại nếu có đều bậc chẵn). Chứng minh có 1 đường đi nối 2 đỉnh bậc lẻ đó với nhau.

### Câu 10.

Hãy xác định danh sách kề, ma trận kề và ma trận liên thuộc của đồ thị  $G_3$  sau:



### Câu 11.

Xét đồ thị vô hướng  $G_4$  có ma trận kề (adjacency matrix) như sau:

$$\begin{matrix} & \begin{matrix} A & B & C & D & E & F & G & H \end{matrix} \\ \begin{matrix} A \\ B \\ C \\ D \\ E \\ F \\ G \\ H \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

- Hãy vẽ đồ thị  $G_4$ .
- Xác định danh sách kề và ma trận liên thuộc của đồ thị.
- Hãy cho biết đồ thị này có phải là đồ thị phân đôi không. Nếu có, hãy vẽ lại dưới dạng một đồ thị phân đôi.

- Hãy cho biết đồ thị này có phải là đồ thị phẳng không (*đồ thị phẳng* là đồ thị có thể được vẽ trên một mặt phẳng mà các cạnh không cắt chéo lẫn nhau). Nếu có, hãy vẽ lại dưới dạng một đồ thị phẳng.

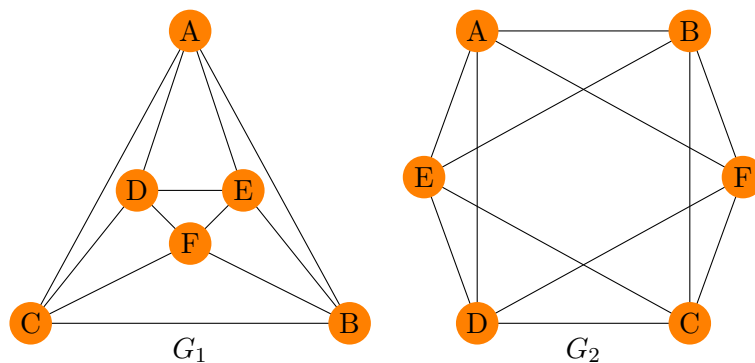
### Câu 12.

#### Đồ thị phân đôi.

- Các chu trình  $C_3, C_4$ , và  $C_5$  có phải là đồ thị phân đôi không?
- Mệnh đề sau là đúng hay là sai : "Nếu một đồ thị có chứa một tam giác thì sẽ không phải là phân đôi". Chứng minh.
- Mệnh đề nghịch đảo "Nếu một đồ thị không chứa bất kỳ một tam giác nào thì sẽ phân đôi" là đúng hay sai. Chứng minh.

### Câu 13.

Hãy xác định danh sách kề, ma trận kề và ma trận liên thuộc của hai đồ thị sau và cho biết hai đồ thị này có đẳng cấu không.



### Câu 14.

Trong một giải thi đấu thể thao có  $n$  đội tham dự và đã có  $n+1$  trận đấu được tiến hành. Chứng minh rằng có ít nhất 1 đội đã thi đấu ít nhất 3 trận.

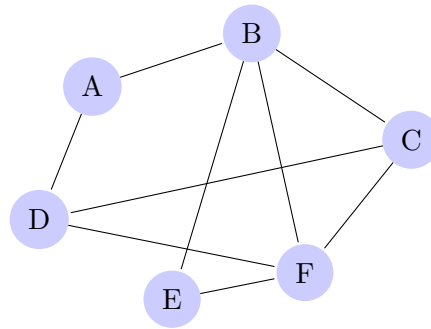
## 4 Bài tập nâng cao

### Câu 15.

Hãy vẽ các đồ thị sau:

- $K_8$
- $K_{1,7}$
- $K_{4,4}$
- $W_8$
- $Q_4$

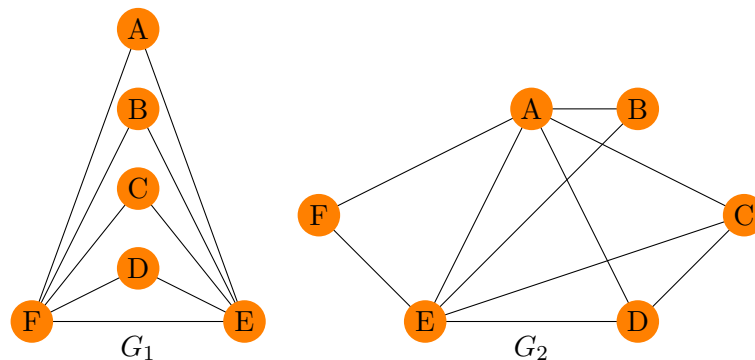
### Câu 16.



- Hãy xác định danh sách kề, ma trận kề và ma trận liên thuộc của đồ thị sau:
- Hãy cho biết đồ thị này có phải là đồ thị phân đôi không. Nếu có, hãy vẽ lại dưới dạng một đồ thị phân đôi.
- Hãy cho biết đồ thị này có phải là đồ thị phẳng không. Nếu có, hãy vẽ lại dưới dạng một đồ thị phẳng.

### Câu 17.

Hãy xác định danh sách kề, ma trận kề và ma trận liên thuộc của hai đồ thị sau và cho biết hai đồ thị này có đẳng cấu không.



### Câu 18.

Hãy vẽ các đồ thị sau:

- Hãy vẽ một đồ thị gồm các đỉnh biểu diễn các số từ 1 đến 10, trong đó bất kỳ 2 đỉnh nào sẽ nối với nhau nếu và chỉ nếu 1 trong 2 số tương ứng sẽ chia hết cho số còn lại
- Hãy vẽ một đồ thị gồm các đỉnh biểu diễn các số từ 1 đến 10, trong đó bất kỳ 2 đỉnh nào sẽ nối với nhau nếu và chỉ nếu 2 số tương ứng có ước số chung lớn nhất là 1.
- Tìm số cạnh, và số bậc của từng đỉnh trong các đồ thị trên

### Câu 19.

Một cuộc họp có ít nhất hai đại biểu đến dự. Mỗi người quen ít nhất một đại biểu khác. Chứng minh rằng lượng người có số lẻ người quen là một số chẵn.

### Câu 20.

Hãy chứng minh rằng trong một đơn đồ thị, luôn tồn tại hai đỉnh có cùng bậc.

**Câu 21.**

Các đồ thị đặc biệt sau có phải là đồ thị phân đôi không, hãy giải thích:

- a)  $K_n$
- b)  $C_n$
- c)  $W_n$
- d)  $Q_n$

**Câu 22.**

Hãy chứng minh rằng trong một đồ thị vô hướng  $G$ ,

- a) nếu số đỉnh là một số chẵn, thì tồn tại một đỉnh trong  $G$  có số bậc là lẻ.
- b) nếu số đỉnh là một số lẻ, thì tồn tại một đỉnh trong  $G$  có số bậc là chẵn.
- c) nếu số đỉnh là một số chẵn, thì số đỉnh bậc chẵn trong  $G$  phải là số chẵn.
- d) nếu số đỉnh là một số lẻ, thì số đỉnh bậc chẵn trong  $G$  phải là số lẻ.
- e) nếu số đỉnh là một số chẵn, thì số đỉnh bậc lẻ trong  $G$  phải là chẵn.
- f) nếu số đỉnh là một số lẻ, thì số đỉnh bậc chẵn trong  $G$  phải là lẻ.

**Câu 23.**

Một buổi thảo luận có 101 khách mời; hãy chứng minh rằng tồn tại một người khách mời đã tranh luận với một số chẵn người khách mời khác.

**Câu 24.**

Do khói, bụi và hơi nước bốc lên từ một miệng núi lửa bên dưới mặt sông băng Eyjafjallajökull ở Iceland vào ngày thứ tư (14/04/2010), hơn 90.000 chuyến bay ở châu Âu đã bị hủy. Đây cũng là một minh chứng về sự bất ổn của thiên nhiên có thể gây tổn hại tới công việc kinh doanh toàn cầu.

Để giảm thiểu thiệt hại về kinh tế, cơ quan quản lý tối ưu hóa và lập lịch đường bay EuroControl cố gắng tiếp tục duy trì một số đường bay đi và đến Việt Nam, liên quan đến các thành phố lớn như: Hồ Chí Minh ( $A$ ), Paris ( $B$ ), Berlin ( $C$ ), và London ( $D$ ). Tuy nhiên, do ảnh hưởng của môi trường thiên nhiên nói trên, chỉ có một vài chuyến bay có thể hoạt động: từ  $A$  hướng đến  $B$  và  $D$ , từ  $B$  hướng đến  $C$ , từ  $C$  hướng đến  $A$  và  $D$ , từ  $D$  hướng đến  $B$ .

- a) Hãy vẽ đồ thị có hướng tương ứng.
- b) Viết ma trận kề  $M$  cho đồ thị có hướng này
- c) Hãy tính  $M + M^2 + M^3$  và cho biết ý nghĩa của ma trận này.

## 5 Tổng kết

Thông qua các bài tập trong phần này, chúng ta đã làm quen với các định nghĩa, các tính chất, cũng như là các định lý trong lý thuyết đồ thị (tham khảo chi tiết trong chương 4). Ngoài ra, các bài tập này cũng đã giúp chúng ta phần nào hiểu thêm các ứng dụng thực tiễn về đồ thị.