

Chapter 7

Counting

Discrete Structures for Computing

Huynh Tuong Nguyen, Tran Tuan Anh, Nguyen Ngoc Le
Faculty of Computer Science and Engineering
University of Technology - VNUHCM
{htnguyen;trtanh}@hcmut.edu.vn

Counting

Huynh Tuong Nguyen,
Tran Tuan Anh, Nguyen
Ngoc Le



Contents

Introduction

Counting Techniques

Pigeonhole Principle

Permutations &
Combinations

Exercises

Contents

- 1 Introduction
- 2 Counting Techniques
- 3 Pigeonhole Principle
- 4 Permutations & Combinations
- 5 Exercises

Counting

Huynh Tuong Nguyen,
Tran Tuan Anh, Nguyen
Ngoc Le



Contents

Introduction

Counting Techniques

Pigeonhole Principle

Permutations &
Combinations

Exercises

Course outcomes

Counting

Huynh Tuong Nguyen,
Tran Tuan Anh, Nguyen
Ngoc Le



Contents

[Introduction](#)

[Counting Techniques](#)

[Pigeonhole Principle](#)

[Permutations &
Combinations](#)

[Exercises](#)

Course learning outcomes

L.O.1	Understanding of logic and discrete structures
	L.O.1.1 – Describe definition of propositional and predicate logic
	L.O.1.2 – Define basic discrete structures: set, mapping, graphs
L.O.2	Represent and model practical problems with discrete structures
	L.O.2.1 – Logically describe some problems arising in Computing
	L.O.2.2 – Use proving methods: direct, contrapositive, induction
	L.O.2.3 – Explain problem modeling using discrete structures
L.O.3	Understanding of basic probability and random variables
	L.O.3.1 – Define basic probability theory
	L.O.3.2 – Explain discrete random variables
L.O.4	Compute quantities of discrete structures and probabilities
	L.O.4.1 – Operate (compute/ optimize) on discrete structures
	L.O.4.2 – Compute probabilities of various events, conditional ones, Bayes theorem

Example

- In games: playing card, gambling, dices,...
- How many allowable passwords on a computer system?
- How many ways to choose a starting line-up for a football match?

- **Combinatorics** (*tổ hợp*) is the study of arrangements of objects
- Counting of objects with certain properties is an important part of combinatorics



Applications of Combinatorics

- Number theory
- Probability
- Statistics
- Computer science
- Game theory
- Information theory
- ...

Counting

Huynh Tuong Nguyen,
Tran Tuan Anh, Nguyen
Ngoc Le



Contents

Introduction

Counting Techniques

Pigeonhole Principle

Permutations &
Combinations

Exercises

Problems

- Number of passwords a hacker should try if he wants to use brute force attack
- Number of possible outcomes in experiments
- Number of operations used by an algorithm

Counting

Huynh Tuong Nguyen,
Tran Tuan Anh, Nguyen
Ngoc Le



Contents

Introduction

Counting Techniques

Pigeonhole Principle

Permutations & Combinations

Exercises

Product Rule

Example

There are 32 routers in a computer center. Each router has 24 ports. How many different ports in the center?

Solution

There are two tasks to choose a port:

- ① *picking a router*
- ② *picking a port on this router*

Because there are 32 ways to choose the router and 24 ways to choose the port no matter which router has been selected, the number of ports are $32 \times 24 = 768$ ports.

Definition (Product Rule (Luật nhân))

Suppose that a procedure can be broken down into a **sequence of two tasks**. If there are n_1 ways to do the first task and for each of these ways of doing the first task, there are n_2 ways to do the second task, then there are $n_1 \times n_2$ ways to do the procedure.

Can be extended to T_1, T_2, \dots, T_m tasks in sequence.



More examples

Example (1)

Two new students arrive at the dorm and there are 12 rooms available. How many ways are there to assign **different** rooms to two students?

Example (2)

How many different bit strings of length seven are there?

Example (3)

How many one-to-one functions are there from a set with m elements to one with n elements?



Sum Rule

Example

A student can choose a project from one of three fields: Information system (32 projects), Software Engineering (12 projects) and Computer Science (15 projects). How many ways are there for a student to choose?

Solution: $32 + 12 + 15$

Definition (Sum Rule (Luật cộng))

If a task can be done **either** in one of n_1 ways or in one of n_2 ways, **there none of the set of n_1 ways is the same as any of the set of n_2 ways**, then there are $n_1 + n_2$ ways to do the task.

Can be extended to n_1, n_2, \dots, n_m disjoint ways.

Counting

Huynh Tuong Nguyen,
Tran Tuan Anh, Nguyen
Ngoc Le



Contents

Introduction

Counting Techniques

Pigeonhole Principle

Permutations &
Combinations

Exercises

Using Both Rules

Example

In a computer language, the name of a variable is a string of **one or two alphanumeric characters**, where uppercase and lowercase letters are not distinguished. Moreover, a variable name **must begin with a letter** and must be **different from** the five strings of two characters that are reserved for programming use. How many different variables names are there in this language?

Solution

Let V equal to the number of different variable names.

Let V_1 be the number of these that are one character long, V_2 be the number of these that are two characters long. Then, by sum rule, $V = V_1 + V_2$.

Note that $V_1 = 26$, because it must be a letter. Moreover, there are $26 \cdot 36$ strings of length two that begin with a letter and end with an alphanumeric character. However, five of these are excluded, so $V_2 = 26 \cdot 36 - 5 = 931$. Hence $V = V_1 + V_2 = 957$ different names for variables in this language.





Example

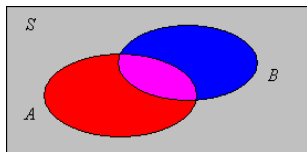
How many **bit strings of length eight** either start with a **1** bit **or** end with the two bits **00**?

Solution

- *Bit string of length eight that begins with a 1 is $2^7 = 128$ ways*
- *Bit string of length eight that ends with 00 is $2^6 = 64$ ways*
- *Bit string of length eight that begins with 1 **and** ends with 00: $2^5 = 32$ ways*

Number of satisfied bit strings are $2^7 + 2^6 - 2^5 = 160$ ways.

Inclusion-Exclusion



$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

Counting

Huynh Tuong Nguyen,
Tran Tuan Anh, Nguyen
Ngoc Le



Contents

Introduction

Counting Techniques

Pigeonhole Principle

Permutations &
Combinations

Exercises

Inclusion-Exclusion



$$|A \cup B \cup C| = ???$$

Counting

Huynh Tuong Nguyen,
Tran Tuan Anh, Nguyen
Ngoc Le



Contents

Introduction

Counting Techniques

Pigeonhole Principle

Permutations &
Combinations

Exercises

Example

In a certain survey of a group of students, 87 students indicated they liked Arsenal, 91 indicated that they liked Chelsea and 91 indicated that they liked MU. Of the students surveyed, 9 liked only Arsenal, 10 liked only Chelsea, 12 liked only MU and 40 liked all three clubs. How many of the student surveyed liked both MU and Chelsea but not Arsenal?

Counting

Huynh Tuong Nguyen,
Tran Tuan Anh, Nguyen
Ngoc Le



[Contents](#)

[Introduction](#)

[Counting Techniques](#)

[Pigeonhole Principle](#)

[Permutations &
Combinations](#)

[Exercises](#)

Pigeonhole Principle



Counting

Huynh Tuong Nguyen,
Tran Tuan Anh, Nguyen
Ngoc Le



Contents

Introduction

Counting Techniques

Pigeonhole Principle

Permutations & Combinations

Exercises

Examples

Example (1)

Among any group of **367** people, there must be at least two with the **same birthday**.

Because there are only 366 possible birthdays.

Example (2)

In any group of **27** English words, there must be at least two that begin with the **same letter**.

Because there are 26 letters in the English alphabet.



Counting

Huynh Tuong Nguyen,
Tran Tuan Anh, Nguyen
Ngoc Le



Contents

Introduction

Counting Techniques

Pigeonhole Principle

Permutations &
Combinations

Exercises

Exercise

Example

Prove that if seven distinct numbers are selected from $\{1, 2, \dots, 11\}$, then some two of these numbers sum to 12.

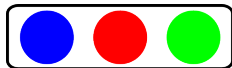
Solution

- ① **Pigeons:** *seven numbers from $\{1, 2, \dots, 11\}$*
- ② **Pigeonholes:** *corresponding to six sets, $\{1, 11\}$, $\{2, 10\}$, $\{3, 9\}$, $\{4, 8\}$, $\{5, 7\}$, $\{6\}$*
- ③ **Assigning rule:** *selected number gets placed into the pigeonhole corresponding to the set that contains it.*
- ④ **Apply the pigeon hole:** *seven numbers are selected and placed in six pigeonholes, some pigeonhole contains two numbers.*



Examples – Permutations

How many ways can we arrange three students to stand in line for a picture?



Number of choices: $6 = 3!$





Definition

A **permutation** (*hoán vị*) of a set of distinct objects is an **ordered arrangement** of these objects.

An ordered arrangement of r elements of a set is called an **r -permutation** (*hoán vị chập r*).

$$P(n, r) = \frac{n!}{(n - r)!}$$

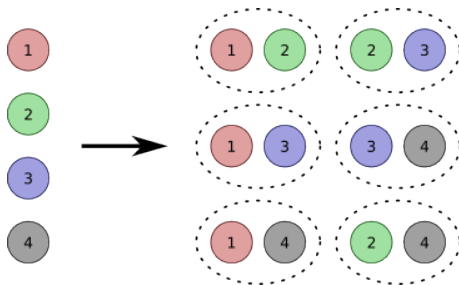
Example

How many ways are there to select a **first-prize** winner, a **second-prize** winner, and a **third-prize** winner from 100 different people who have entered a contest?

$$P(100, 3) = 100 \cdot 99 \cdot 98 = 970,200$$

Examples – Combinations

How many ways to choose two students from a group of four to offer scholarship?



Number of choices: 6





Definition (Combinations)

An **r -combination** (*tổ hợp chập r*) of elements of a set is an **unordered selection** of r elements from the set. Thus, an r -combination is simply a subset of the set with r elements.

$$C(n, r) = \binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

Example

How many ways are there to select eleven players from a 22-member football team to start up?

$$C(22, 11) = \frac{22!}{11!11!} = 705432$$

Exercises – Permutations with Repetition

- 1 Suppose that a salesman has to visit eight different cities. She must begin her trip in a specified city, but she can visit the other seven cities in any order she wishes. How many possible orders can the salesman use when visiting these cities?
- 2 Suppose that there are 9 faculty members in CS department and 11 in CE department. How many ways are there to select a defend committee if the committee is to consist of three faculty members from the CS and four from the CE department?



Permutations with Repetition

Example

How many strings of length r can be formed from the English alphabet?

By product rule, we see that there are 26^r strings of length r .

Theorem

The number of r -permutations of a set of n objects with repetition allowed is n^r .

Counting

Huynh Tuong Nguyen,
Tran Tuan Anh, Nguyen
Ngoc Le



[Contents](#)

[Introduction](#)

[Counting Techniques](#)

[Pigeonhole Principle](#)

[Permutations &
Combinations](#)

[Exercises](#)

Example

Question: How many ways we can choose 3 students from the faculties of Computer Science, Electrical Engineering and Mechanical Engineering?

Counting

Huynh Tuong Nguyen,
Tran Tuan Anh, Nguyen
Ngoc Le



Contents

Introduction

Counting Techniques

Pigeonhole Principle

Permutations &
Combinations

Exercises

Example

CCC	CEM
CCE	EEE
CCM	EEM
CEE	EMM
CMM	MMM

Counting

Huynh Tuong Nguyen,
Tran Tuan Anh, Nguyen
Ngoc Le



Contents

Introduction

Counting Techniques

Pigeonhole Principle

Permutations &
Combinations

Exercises

Example

CCC	CEM	★ ★ ★	★ ★ ★
CCE	EEE	★ ★ ★	★ ★ ★
CCM	EEM	★ ★ ★	★ ★ ★
CEE	EMM	★ ★ ★	???
CMM	MMM	★ ★ ★	★ ★ ★

How many ways to put ★ and | ???



Combinations with Repetition

Counting

Huynh Tuong Nguyen,
Tran Tuan Anh, Nguyen
Ngoc Le



[Contents](#)

[Introduction](#)

[Counting Techniques](#)

[Pigeonhole Principle](#)

[Permutations &
Combinations](#)

[Exercises](#)

Theorem

There are $C(n + r - 1, r)$ r -combinations from a set with n elements when repetition of elements is allowed.

Example

How many solutions does the equation

$$x_1 + x_2 + x_3 = 11$$

have, where x_1, x_2 , and x_3 are nonnegative integers?

Examples

Question: How many permutations are there of **MISSISSIPPI**?

MISSISSIPPI \equiv **MISSISSIPPI**

Counting

Huynh Tuong Nguyen,
Tran Tuan Anh, Nguyen
Ngoc Le



Contents

Introduction

Counting Techniques

Pigeonhole Principle

Permutations &
Combinations

Exercises

Permutations with Indistinguishable Objects

Counting

Huynh Tuong Nguyen,
Tran Tuan Anh, Nguyen
Ngoc Le



[Contents](#)

[Introduction](#)

[Counting Techniques](#)

[Pigeonhole Principle](#)

[Permutations &
Combinations](#)

[Exercises](#)

Theorem

The number of different permutations of n objects, where there are n_1 indistinguishable objects of type 1, n_2 indistinguishable objects of type 2, \dots , and n_k indistinguishable objects of type k , is

$$\frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_k!}$$

Example

How many permutations are there of MISSISSIPPI?

Hãng hàng không

Ba hãng hàng không có tuyến từ Hà Nội đến TP.HCM và hai hãng có tuyến từ TP.HCM đến Phú Quốc. Hỏi có tất cả bao nhiêu cặp hãng hàng không khi mua vé một lộ trình đi từ Hà Nội đến Phú Quốc mà quá cảnh tại TP.HCM ?

- A) 2
- B) 4
- C) 5
- D) 6
- E) 7
- F) Các chọn lựa khác đều sai

Counting

Huynh Tuong Nguyen,
Tran Tuan Anh, Nguyen
Ngoc Le



Contents

Introduction

Counting Techniques

Pigeonhole Principle

Permutations & Combinations

Exercises

Hai tuyển thủ quần vợt nữ thi đấu cùng nhau trong tối đa 3 hiệp. Tuyển thủ nào thắng ít nhất hai trận thì sẽ thắng giải. Mỗi hiệp đấu không bao giờ xảy ra tình huống hai đội hòa nhau. Có bao nhiêu kịch bản thắng thua cho giải này?

- A) 4
- B) 5
- C) 6
- D) 7
- E) Các chọn lựa khác đều sai



Cần bao nhiêu byte để mã hóa n bit dữ liệu, với $n = 1001$

- A 2
- B 4
- C 10
- D 236
- E 1001
- F Các chọn lựa khác đều sai

Có bao nhiêu chuỗi bit có độ dài 100 với số bit 0 và bit 1 như nhau?

- A 2^{100}
- B $\binom{100}{50}$
- C 2^{50}
- D 1001
- E Các chọn lựa khác đều sai



Bút màu

Trong lúc đến trường, hai bạn An và Bảo đếm số lượng bút bi màu đem theo. Tổng cộng 10 cây viết gồm có hai màu: xanh (X) và tím (T).

Đặt X_A , T_A lần lượt biểu diễn số lượng bút xanh và tím của bạn An.

Và đặt X_B , T_B lần lượt biểu diễn số lượng bút xanh và bút tím của bạn Bảo.

Bạn An nhận thấy rằng số bút màu xanh của An lớn hơn hoặc bằng 2 lần số bút màu tím của anh ta. Bạn Bảo có số bút màu xanh lớn hơn hoặc bằng 2 lần số bút màu xanh của bạn An.

Hỏi có bao nhiêu trường hợp có thể có của bộ giá trị (X_A, T_A) ?

- A 2
- B 4
- C 6
- D 8
- E nhiều hơn 10
- F Các chọn lựa khác đều sai

Bạn Bảo không có bút màu tím. Hỏi có bao nhiêu trường hợp có thể có của bộ giá trị (X_A, T_A, X_B, T_B) ?

- A 2
- B 5



Một buổi tiệc nhỏ có 2 bàn tròn với số lượng khách là n ($n \geq 3$). Bàn thứ nhất có k ghế ngồi và bàn thứ hai có $n - k$ ghế ngồi ($k \geq 3, n - k \geq 3$). Các ghế ngồi đều được đánh số khác nhau từ $1, 2, \dots, n$. Trong n vị khách thì có 3 vị khách đặc biệt là X, Y, Z cần được sắp xếp ngồi cạnh nhau (theo một thứ tự nào đó). Hỏi có bao nhiêu cách sắp xếp hợp lệ các vị khách theo số ghế ?

- A $6k!(k-3)!(n-k)! + 6(n-k)(n-k-3)!k!$
- B $6(n-k)(n-k-3)!k!$
- C $6k!(k-3)!(n-k)!$
- D $6k!(n-k)!$
- E $6n(n-3)!$
- F Các chọn lựa khác đều sai



Một buổi tiệc nhỏ có 2 bàn tròn với số lượng khách là n ($n \geq 3$). Bàn thứ nhất có k ghế ngồi và bàn thứ hai có $n - k$ ghế ngồi ($k \geq 3, n - k \geq 3$). Các ghế ngồi đều được đánh số khác nhau từ $1, 2, \dots, n$. Trong n vị khách thì có 3 vị khách đặc biệt là X, Y, Z cần được sắp xếp ngồi cạnh nhau (theo một thứ tự nào đó). Hỏi có bao nhiêu cách sắp xếp hợp lệ các vị khách theo số ghế ?

- A $6k!(k-3)!(n-k)! + 6(n-k)(n-k-3)!k!$
- B $6(n-k)(n-k-3)!k!$
- C $6k!(k-3)!(n-k)!$
- D $6k!(n-k)!$
- E $6n(n-3)!$
- F Các chọn lựa khác đều sai



Con rấn

Một phép hoán vị (x_1, x_2, \dots, x_n) của các số $\{1, 2, \dots, n\}$ được gọi là *con rấn* (có độ dài n) nếu $x_1 < x_2 > x_3 < x_4 \dots$

Ví dụ:

$$\begin{array}{ll} n = 2, & \text{ta chỉ có } 1 < 2 \}, \\ n = 3, & \left. \begin{array}{l} 1 < 3 > 2 \\ 2 < 3 > 1 \end{array} \right\}, \\ n = 4, & \left. \begin{array}{l} 1 < 3 > 2 < 4 \\ 1 < 4 > 2 < 3 \\ 2 < 3 > 1 < 4 \\ 2 < 4 > 1 < 3 \\ 3 < 4 > 1 < 2 \end{array} \right\}, \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{số con rấn là 1,} \\ \text{số con rấn là 2,} \\ \text{số con rấn là 5.} \end{array}$$

Tìm số con rấn có độ dài 5.

- A 12
- B 14
- C 16
- D 17
- E 20
- F Các chọn lựa khác đều sai



Một người sở hữu 6 Pokemon: Pikachu, Gengar, Meowth, Poliwag, Spinda và Ditto. Anh ta muốn xếp các Pokemon này trong hai bàn dài B_1, B_2 đặt đối diện nhau để dạy chúng nói tiếng Việt. Mỗi bàn ngồi được ba Pokemon. Hỏi có bao nhiêu cách sắp xếp chỗ ngồi sao cho Pikachu và Meowth không ngồi cạnh nhau và cũng không ngồi đối diện nhau?

- A) 720
- B) 522
- C) 480
- D) 384
- E) 120
- F) Các chọn lựa khác đều sai



Giải đấu vật

Trong một giải đấu đấu vật để xác định một nhà vô địch thế giới, 101 vận động viên từ khắp các nước đến tham dự. Hỏi cần tổ chức bao nhiêu trận đấu biết rằng mỗi trận đấu sẽ phân biệt thắng thua giữa hai vận động viên và người thua sẽ bị loại ngay khỏi giải đấu?

- A 1
- B 70
- C 100
- D 99
- E Không thể xác định con số chính xác
- F Các chọn lựa khác đều sai

Counting

Huynh Tuong Nguyen,
Tran Tuan Anh, Nguyen
Ngoc Le



Contents

Introduction

Counting Techniques

Pigeonhole Principle

Permutations & Combinations

Exercises

Lớp của bạn An có 17 học sinh nam và 19 học sinh nữ. Nhân dịp sinh nhật của bạn An, các bạn trong lớp đều chuẩn bị quà tặng. Mỗi bạn nam của lớp làm 4 mô hình giấy và mỗi bạn nữ xếp 3 hoặc 5 ngôi sao may mắn để tặng. Biết số mô hình giấy và số ngôi sao may mắn bằng nhau, hỏi bạn An là nam hay nữ?

- A Không thể xác định được giới tính
- B Không tồn tại đáp án
- C Nam
- D Nữ
- E Các chọn lựa khác đều sai



Chia quà

Xét bài toán chia k phần quà hoàn toàn giống nhau cho n sinh viên CSE-HCMUT sao cho mỗi sinh viên phải được ít nhất một phần quà và các phần quà phải được phân phối hết.

Với $k = 6$ và $n = 2$, hỏi có bao nhiêu cách chia phần quà?

- A) 3
- B) 4
- C) 5
- D) 6
- E) 7
- F) 20
- G) Các chọn lựa khác đều sai

Với $k = 13$ và $n = 3$, hỏi có bao nhiêu cách chia phần quà?

- A) 45
- B) 10
- C) 60
- D) 66
- E) 91
- F) 286
- G) Các chọn lựa khác đều sai



Việc lưu trữ tài khoản các đồng tiền mã hóa (crypto-currencies) ở một ví thường được quản lý bởi một cơ chế bảo mật Passphrase. Với người dùng, thay vì nhớ mã code hoặc mật khẩu của từng tài khoản, thì chỉ cần nhớ một passphrase riêng có thể truy xuất được bất kỳ tài khoản nào trong ví riêng của mình.

Nhìn góc độ hệ thống, từ mã passphrase, sẽ có một cơ chế xác định số tài khoản của người dùng. Và để đảm bảo đủ tính bảo mật, trên thực tế, người ta dùng passphrase bao gồm 12 từ tiếng Anh có nghĩa.

Hỏi có bao nhiêu khả năng xảy ra?

