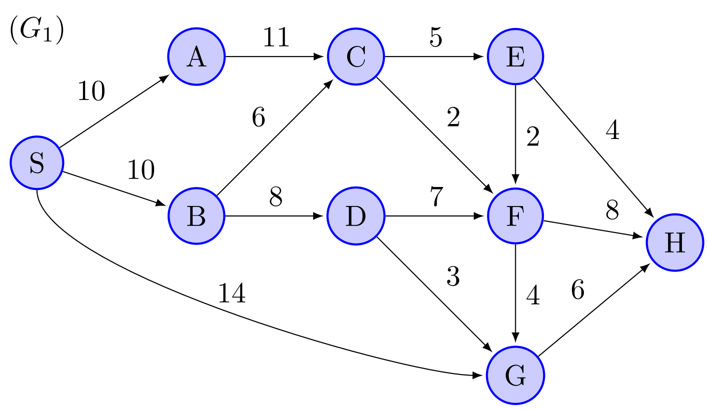
Bài tập chương 9
Đồ thị (phần hai)

1 Dẫn nhập

Trong bài tập dưới đây, chúng ta sẽ làm quen với các bài toán, giải thuật và ứng dụng của lý thuyết đồ thị. Sinh viên cần xem lại lý thuyết của Chương 9 trước khi thực hiện những bài tập này.

2 Bài tập mẫu

Đồ thị G_1 như hình bên dưới đây.



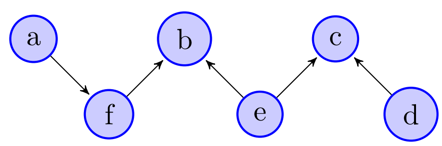
Câu 1.
Tìm đường đi ngắn nhất xuất phát từ S đến tất cả các đỉnh còn lại bằng giải thuật Dijkstra.
Lời giải. □

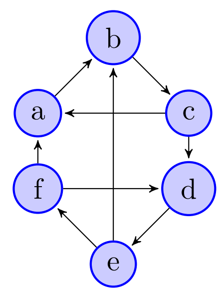
Câu 2.
Tìm đường đi ngắn nhất xuất phát từ S đến tất cả các đỉnh còn lại bằng giải thuật Bellman-Ford.
Lời giải. □

Câu 3.
Tìm đường đi ngắn nhất xuất phát từ S đến tất cả các đỉnh còn lại bằng giải thuật Floyd-Warshall.
Lời giải. □

3 Bài tập cần giải

Câu 4.
Xác định xem những đồ thị dưới đây có liên thông mạnh hay không, nếu không, thì nó có liên thông yếu hay không.





Lời giải.

a) Liên thông yếu

b) Liên thông mạnh

□

Câu 5.
Chứng minh rằng các đồ thị sau không có đỉnh cắt.

a) C_n với $n \geq 3$

b) W_n với $n \geq 3$

c) $K_{m,n}$ với $m \geq 2$ và $n \geq 2$

d) Q_n với $n \geq 2$

Lời giải.

a) *C_n với $n \geq 3$: Ta có các cạnh sau: $\{x_0, x_1\}, \{x_1, x_2\}, \ldots, \{x_{n-2}, x_{n-1}\}, \{x_{n-1}, x_0\}$.*
Giả sử ta bỏ đỉnh i ($0 \leq i \leq$ n-1). Đồ thị sẽ còn các cạnh như sau: $\{x_0, x_1\}, \{x_1, x_2\}, \ldots, \{x_{i-2}, x_{i-1}\}, \{x_{i+1}, x_{i+}$
Việc bỏ đi đỉnh i không làm tăng thành phần liên thông của đồ thị vì vẫn tồn tại đường đi từ các điểm còn lại. Vậy C_n không có đỉnh cắt.
(Hoặc đồ thị trên có chu trình Haminton. Việc loại 1 đỉnh sẽ vẫn tồn tại đường đi Haminton).

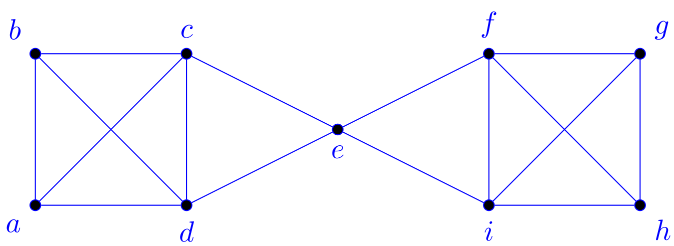
b) *W_n với $n \geq 3$: Là đồ thị thu được từ C_n, vì vậy đối với các điểm cũ trên C_n khi bỏ đi vẫn đảm bảo liên thông. Nếu bỏ điểm trung tâm thì nó trở lại thành C_n.*

c) *$K_{m,n}$ với $m \geq 2$ và $n \geq 2$: Ta chứng mình bỏ 1 đỉnh phía trái đồ thị vẫn liên thông, từ đó phía bên phải cũng tương tự. Dùng phương pháp quy nạp:*
Với $K_{2,n}$ $(n \geq 2)$ đồ khi bỏ đi 1 đỉnh phía trái đồ thị có dạng hình sao với 1 điểm nối với các đỉnh phía phải (liên thông)
Giả sử đúng với $m \geq 2$, ta cần chứng minh đúng với $m = m + 1$.
Thật vậy với $m = m + 1$, ta có đồ thị $K_{m+1,n}$. Lúc này nếu bỏ 1 điểm bên trái đồ thị trở về là $K_{m,n}$ (liên thông)
Vậy $K_{m,n}$ không có đỉnh cắt.

d) *Q_n với $n \geq 2$: Luôn chứa chu trình Haminton. Vì vậy khi bỏ 1 điểm khỏi đồ thị vẫn tồn tại đường đi Haminton, liên thông. Vậy Q_n không có đỉnh cắt.*

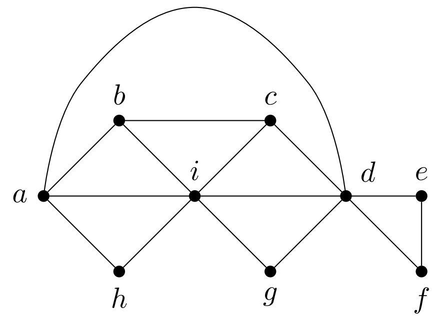
□

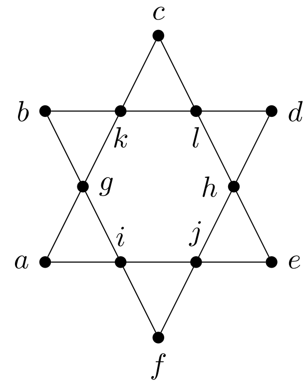
Câu 6.
Hãy vẽ một đồ thị G có $\kappa(G) = 1$, $\lambda(G) = 2$, và bậc nhỏ nhất của các đỉnh là 3.



Lời giải. □

Câu 7.
Xác định xem đồ thị sau có chu trình Euler hay không. Nếu có, hãy xác định. Nếu không, xác định xem nó có đường đi Euler hay không. Nếu có, vẽ đường đi Euler.





Lời giải.

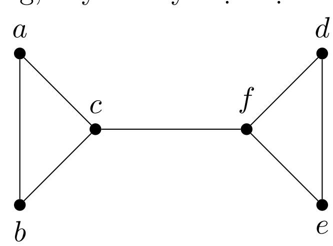
a) Không có chu trình Euler. Có đường đi Euler

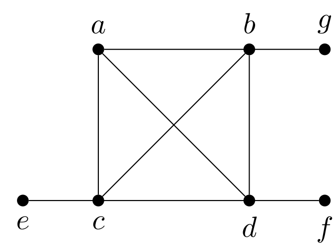
b) Có chu trình Euler

□

Câu 8.

Xác định xem đồ thị sau có chu trình Hamilton hay không. Nếu có, hãy xác định nó. Nếu không, hãy đưa lý luận tại sao không có.





Lời giải.

a) Không có chu trình Hamilton vì liên thông cạnh $\lambda(G) = 1$

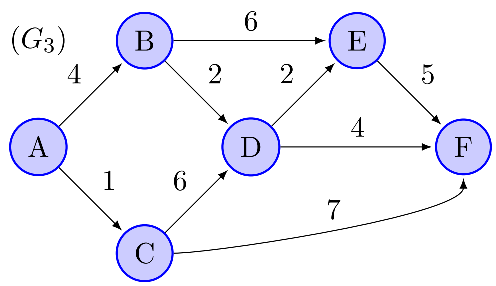
b) Không có chu trình Hamilton vì có 3 đỉnh deg(v)=1

□

Câu 9.

Hãy dùng giải thuật Dijsktra để tìm đường đi ngắn nhất của đỉnh A đến một đỉnh bất kỳ khác trong đồ thị G_3 như sau.

Lời giải. *Dựa theo giải thuật Dijkstra, chúng ta cần xây dựng bảng sau.*



i	A	B	C	D	E	F
$\pi(0)$	$\underline{0}$	4	1	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$\pi(1)$		4	$\underline{1}$	7	$+\infty$	8
$\pi(2)$		$\underline{4}$		6	10	8
$\pi(3)$				$\underline{6}$	8	8
$\pi(4)$					8	$\underline{8}$
$\pi(5)$					$\underline{8}$	

Từ bảng trên, ta có thể xác đinh đường đi ngắn nhất từ A đến các đỉnh còn lại.

- $A \to B$
- $A \to C$
- $A \to B \to D$
- $A \to B \to D \to E$
- $A \to C \to F$

□

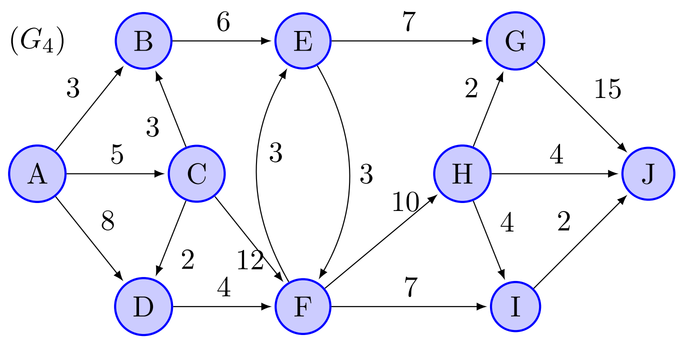
Câu 10.

Hãy dùng giải thuật Bellman-Ford để tìm đường đi ngắn nhất của đỉnh A đến một đỉnh bất kỳ khác trong đồ thị G_4 bên dưới.

Lời giải. *Dựa theo giải thuật Bellman-Ford, chúng ta xây dựng bảng sau.*

Step	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
0	0	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
1	0	3	5	8	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
2	0	3	5	7	9	12	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
3	0	3	5	7	9	12	16	22	19	$+\infty$
4	0	3	5	7	9	12	16	22	19	21
5	0	3	5	7	9	12	16	22	19	21

Stop since Step 5 = Step 4



Từ bảng trên, ta có thể xác đinh đường đi ngắn nhất từ A đến các đỉnh còn lại.

- $A \to B$
- $A \to C$
- $A \to C \to D$
- $A \to B \to E$
- $A \to C \to D \to F$
- $A \to B \to E \to G$
- $A \to C \to D \to F \to H$
- $A \to C \to D \to F \to H \to I$
- $A \to C \to D \to F \to H \to I \to J$

□

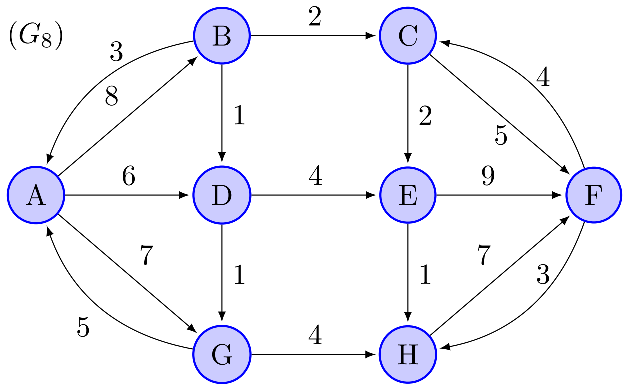
Câu 11.

Hãy dùng giải thuật Floyd-Warshall để tìm đường đi ngắn nhất của một đỉnh bất kỳ đến một đỉnh khác bất kỳ trong đồ thị G_8 như bên dưới.

Lời giải.

$$L^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 & 8 & \infty & 6 & \infty & \infty & 7 & \infty \\ 3 & 0 & 2 & 1 & \infty & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & 0 & \infty & 2 & 5 & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & 0 & 4 & \infty & 1 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 0 & 9 & \infty & 1 \\ \infty & \infty & 4 & \infty & \infty & 0 & \infty & 3 \\ 5 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 0 & 4 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 7 & \infty & 0 \end{pmatrix}$$

(G_8)



$$L^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 8 & \infty & 6 & \infty & \infty & 7 & \infty \\ 3 & 0 & 2 & 1 & \infty & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & 0 & \infty & 2 & 5 & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & 0 & 4 & \infty & 1 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 0 & 9 & \infty & 1 \\ \infty & \infty & 4 & \infty & \infty & 0 & \infty & 3 \\ 5 & 13 & \infty & 11 & \infty & \infty & 0 & 4 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 7 & \infty & 0 \end{pmatrix}$$

$$L^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & 8 & 10 & 6 & \infty & \infty & 7 & \infty \\ 3 & 0 & 2 & 1 & \infty & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & 0 & \infty & 2 & 5 & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & 0 & 4 & \infty & 1 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 0 & 9 & \infty & 1 \\ \infty & \infty & 4 & \infty & \infty & 0 & \infty & 3 \\ 5 & 13 & 15 & 11 & \infty & \infty & 0 & 4 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 7 & \infty & 0 \end{pmatrix}$$

$$L^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 & 8 & 10 & 6 & 12 & 15 & 7 & \infty \\ 3 & 0 & 2 & 1 & 4 & 7 & \infty & \infty \\ \infty & \infty & 0 & \infty & 2 & 5 & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & 0 & 4 & \infty & 1 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 0 & 9 & \infty & 1 \\ \infty & \infty & 4 & \infty & 6 & 0 & \infty & 3 \\ 5 & 13 & 15 & 11 & 17 & 20 & 0 & 4 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 7 & \infty & 0 \end{pmatrix}$$

$$L^{(4)} = \begin{pmatrix} 0 & 8 & 10 & 6 & 10 & 15 & 7 & \infty \\ 3 & 0 & 2 & 1 & 4 & 7 & 2 & \infty \\ \infty & \infty & 0 & \infty & 2 & 5 & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & 0 & 4 & \infty & 1 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 0 & 9 & \infty & 1 \\ \infty & \infty & 4 & \infty & 6 & 0 & \infty & 3 \\ 5 & 13 & 15 & 11 & 15 & 20 & 0 & 4 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 7 & \infty & 0 \end{pmatrix}$$

$$L^{(5)} = \begin{pmatrix} 0 & 8 & 10 & 6 & 10 & 15 & 7 & 11 \\ 3 & 0 & 2 & 1 & 4 & 7 & 2 & 5 \\ \infty & \infty & 0 & \infty & 2 & 5 & \infty & 3 \\ \infty & \infty & \infty & 0 & 4 & 13 & 1 & 5 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 0 & 9 & \infty & 1 \\ \infty & \infty & 4 & \infty & 6 & 0 & \infty & 3 \\ 5 & 13 & 15 & 11 & 15 & 20 & 0 & 4 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 7 & \infty & 0 \end{pmatrix}$$

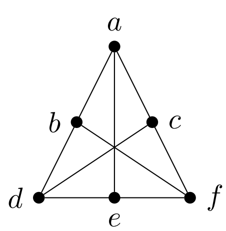
$$L^{(6)} = \begin{pmatrix} 0 & 8 & 10 & 6 & 10 & 15 & 7 & 11 \\ 3 & 0 & 2 & 1 & 4 & 7 & 2 & 5 \\ \infty & \infty & 0 & \infty & 2 & 5 & \infty & 3 \\ \infty & \infty & \infty & 0 & 4 & 13 & 1 & 5 \\ \infty & \infty & 13 & \infty & 0 & 9 & \infty & 1 \\ \infty & \infty & 4 & \infty & 6 & 0 & \infty & 3 \\ 5 & 13 & 15 & 11 & 15 & 20 & 0 & 4 \\ \infty & \infty & 11 & \infty & 13 & 7 & \infty & 0 \end{pmatrix}$$

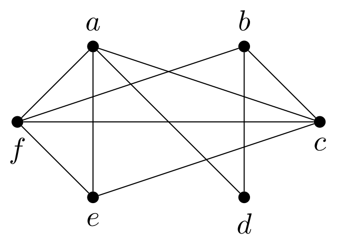
$$L^{(7)} = \begin{pmatrix} 0 & 8 & 10 & 6 & 10 & 15 & 7 & 11 \\ 3 & 0 & 2 & 1 & 4 & 7 & 2 & 5 \\ \infty & \infty & 0 & \infty & 2 & 5 & \infty & 3 \\ 6 & 14 & 16 & 0 & 4 & 13 & 1 & 5 \\ \infty & \infty & 13 & \infty & 0 & 9 & \infty & 1 \\ \infty & \infty & 4 & \infty & 6 & 0 & \infty & 3 \\ 5 & 13 & 15 & 11 & 15 & 20 & 0 & 4 \\ \infty & \infty & 11 & \infty & 13 & 7 & \infty & 0 \end{pmatrix}$$

$$L^{(8)} = \begin{pmatrix} 0 & 8 & 10 & 6 & 10 & 15 & 7 & 11 \\ 3 & 0 & 2 & 1 & 4 & 7 & 2 & 5 \\ \infty & \infty & 0 & \infty & 2 & 5 & \infty & 3 \\ 6 & 14 & 16 & 0 & 4 & 12 & 1 & 5 \\ \infty & \infty & 12 & \infty & 0 & 8 & \infty & 1 \\ \infty & \infty & 4 & \infty & 6 & 0 & \infty & 3 \\ 5 & 13 & 15 & 11 & 15 & 11 & 0 & 4 \\ \infty & \infty & 11 & \infty & 13 & 7 & \infty & 0 \end{pmatrix}$$

$\square$

Câu 12.
Xác định xem các đồ thị sau có phẳng hay không. Nếu có, hãy vẽ lại đồ thị sao cho không có cạnh nào giao nhau.

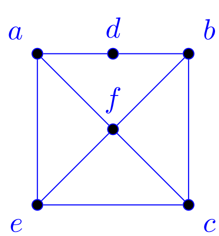




Lời giải.

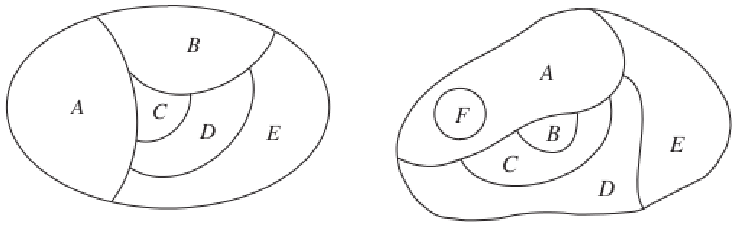
a) *Không, vì nó là* $K_{3,3}$

b) *Phẳng:*

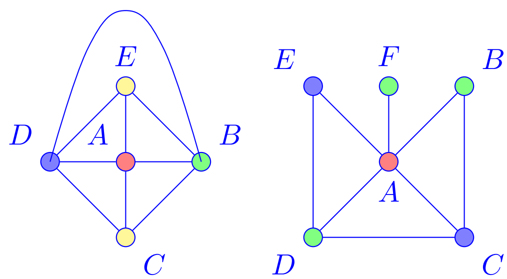


$\square$

Câu 13.
Vẽ đồ thị đối ngẫu của các bản đồ sa, sau đó tìm số màu cần thiết để tô bản đồ sao cho các vùng kế nhau không cùng màu với nhau.



Lời giải.



□

4 Bài tập làm thêm

Câu 14.

Cho đồ thị $G = (V, E)$ là một đồ thị có hướng. Đỉnh $w \in V$ được gọi là **đến được** từ đỉnh $v \in V$ nếu có một đường đi có hướng từ v sang w. Hai đỉnh v và w được gọi là **đến được nhau** nếu tồn tại đường đi có hướng từ v đến w và đường đi có hướng từ w đến v trong G. Chứng minh rằng nếu $G = (V, E)$ là đồ thị có hướng và u, v, và w là các đỉnh thuộc V trong đó u và v là đến được nhau và v và w là đến được nhau, thì u và w cũng đến được nhau.

Câu 15.

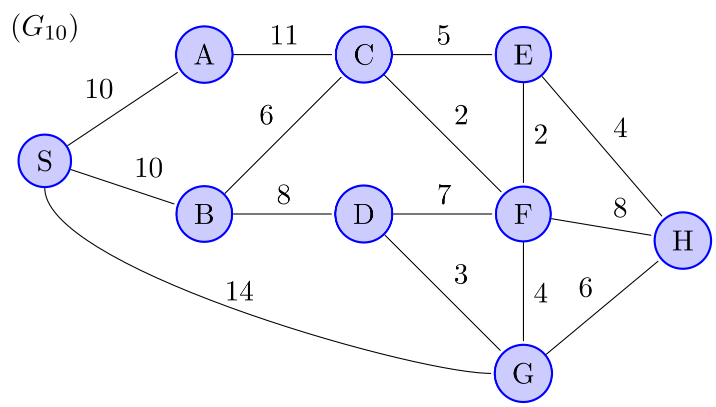
Chứng minh rằng một đồ thị liên thông có n đỉnh phải có ít nhất $n - 1$ cạnh.

Câu 16.

a) Bạn được trao một cái bình 3 lít và một cái bình 5 lít. Bạn có thể làm một trong ba hành động, đổ nước đầy mỗi bình, đổ nước hoàn toàn ra khỏi mỗi bình, và đổ nước qua lại mỗi bình. Hãy sử dụng một đường đi trong đồ thị có hướng để cho thấy bạn thể làm cho một bình có chứa đúng 1 lít nước.

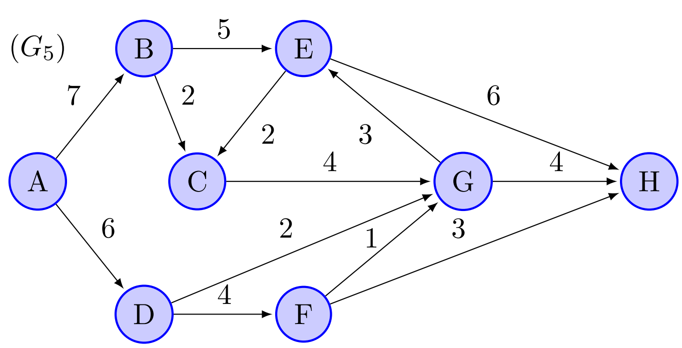
b) Có hai cặp vợ chồng muốn qua sông. Họ chỉ có một chiếc thuyền duy nhất có thể chở một lần một hoặc hai người từ bờ này sang bờ bên kia. Vấn đề ở chỗ hai ông chồng có tính ghen tuông tới múc không muốn để vợ mình lại với người đàn ông kia, dù trên thuyền hay trên bờ. Làm cách nào để bốn này qua được bờ bên kia?

Câu 17.
Hãy xác định xem các đồ thị vô hướng sau có chứa đường đi/chu trình Euler và Hamilton không ? Nếu có, hãy vẽ ra.

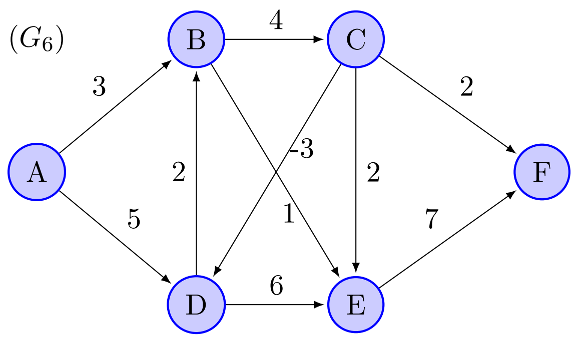


Câu 18.
Một cuộc họp có ít nhất ba đại biểu đến dự. Mỗi người quen ít nhất hai đại biểu khác.Hãy tìm cách để sắp xếp chỗ ngồi của các đại biểu chung quanh một bàn tròn, sao cho mỗi người ngồi giữa hai người mà đại biểu đó quen.

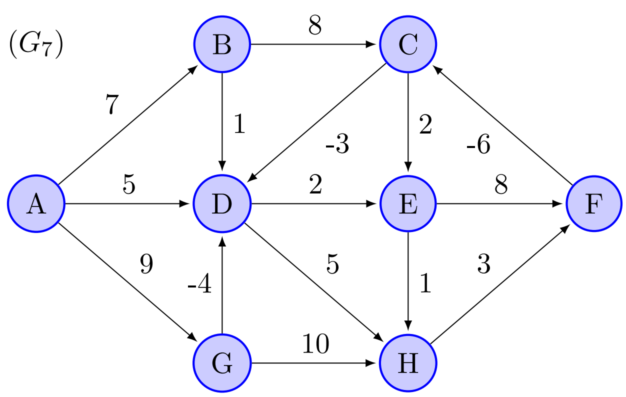
Câu 19.
Hãy dùng giải thuật Dijsktra và giải thuật Ford để tìm đường đi ngắn nhất của đỉnh A đến một đỉnh bất kỳ khác trong đồ thị G_5 như bên dưới.



Câu 20.
Hãy dùng giải thuật Bellman-Ford để tìm đường đi ngắn nhất của đỉnh A đến một đỉnh bất kỳ khác trong đồ thị G_6 như bên dưới.



Câu 21.
Hãy dùng giải thuật Bellman-Ford để tìm đường đi ngắn nhất của đỉnh A đến một đỉnh bất kỳ khác trong đồ thị G_7 như bên dưới.



Câu 22.
Liệu có thể dùng giải thuật Dijsktra để giải bài toán tìm đường đi ngắn nhất xuất phát từ một đỉnh bất kỳ đến một đỉnh bất kỳ khác không ? Nếu có hãy minh họa bằng áp dụng vào các đồ thị từ G_5 đến G_8.

Câu 23.
Hãy thiết kế một giải thuật để đếm số đường đi ngắn nhất trong một đồ thị cho sẵn.

Câu 24.

a) Làm thế nào đếm được số đường đi khác nhau xuất phát từ một đỉnh u và đến một đỉnh v trong một đồ thị G cho trước?

b) Hãy vẽ một đồ thị và minh họa việc đếm.

c) Liệu có tồn tại giải thuật đếm số đường đi có thể có từ u đến v không?

Câu 25.

Liệu có tồn tại giải thuật xác định một cách nhanh chóng sự tồn tại của chu trình trong một đồ thị cho trước không? Nếu có hãy viết giải thuật đó.

Câu 26.

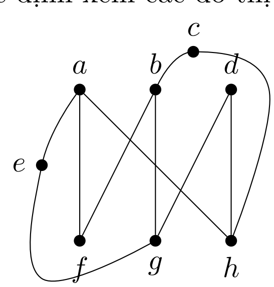
Gọi Π^* là đường đi ngắn nhất trong một đồ thị. Nếu trọng số của tất cả các cạnh đều tăng lên một giá trị hằng số nào đó thì liệu Π^* có vẫn là đường đi ngắn nhất trong đồ thị mới không?

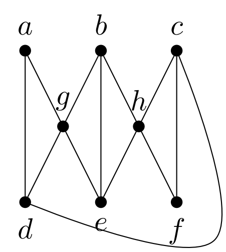
Câu 27.

Tìm đường đi ngắn nhất của một đỉnh bất kỳ đến một đỉnh bất kỳ khác trong đồ thị G_9 sau.

Câu 28.

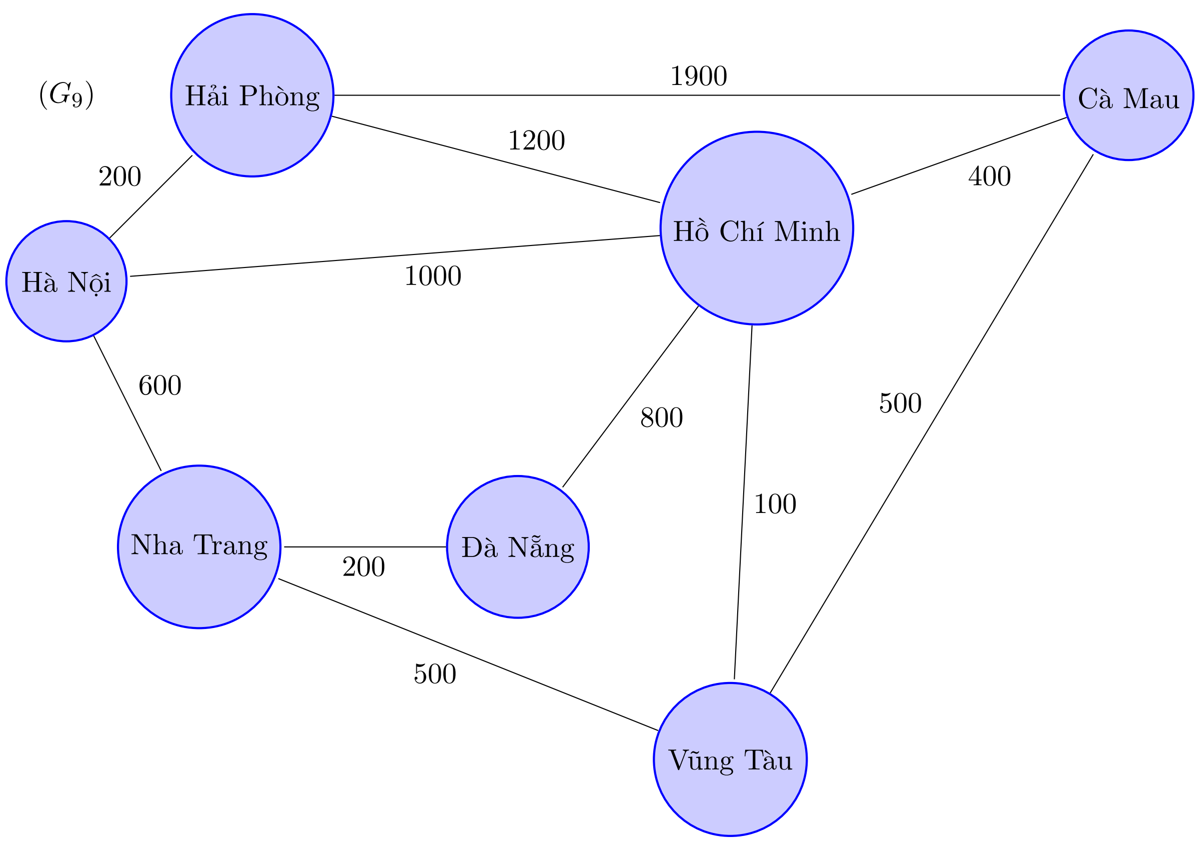
Xác định xem các đồ thị sau có đồng phôi với $K_{3,3}$ hay không.





Câu 29.

Một vườn thú muốn mở một số khu vực trưng bày thú. Tuy nhiên, một vài loài thú sẽ ăn thịt lẫn nhau nếu có cơ hội. Mô hình đồ thị và phương pháp tô màu sẽ giúp ích được gì


(G_9)
Hải Phòng
Cà Mau
Hồ Chí Minh
Hà Nội
Nha Trang
Đà Nẵng
Vũng Tàu
1900
1200
200
400
1000
600
800
500
100
200
500

trong việc xác định xem vườn thú cần mở bao nhiêu khu vực trưng bày và cách sắp đặt các con thú thế nào trong các khu vực này?

Câu 30.
Số màu của W_n là bao nhiêu?

5 Tổng kết

Thông qua các bài tập trong phần này, chúng ta đã làm quen với lý thuyết về đường đi và chu trình (tham khảo chi tiết lý thuyết trong chương 9). Và các bài tập này cũng đã giúp chúng ta phần nào hiểu thêm về các ý tưởng, các hướng giải thuật để giải được vài bài toán thực tế đơn giản chung quanh chúng ta.