

VÕ TIẾN

Thảo luận kiến thức CNTT trường BK về KHMT(CScience), KTMT(CEngineering)

<https://www.facebook.com/groups/khmt.ktmt.cse.bku>



Mô Hình Hóa Toán Học

---

MHH - HK251

Cuối kì

---

Thảo luận kiến thức CNTT trường BK  
về KHMT(CScience), KTMT(CEngineering)

<https://www.facebook.com/groups/khmt.ktmt.cse.bku>



# 1 Hệ động lực rời rạc

Mô hình 1: Gửi tiền ban đầu + lãi suất (không gửi thêm)

$$a_{n+1} = r a_n, \quad a_0 \text{ cho trước} \Rightarrow a_n = r^n a_0$$

Mô hình 2: Gửi tiền ban đầu + lãi suất + nộp thêm định kỳ

$$a_{n+1} = r a_n + b, \quad a_0 \text{ cho trước} \Rightarrow a_n = r^n a_0 + b \frac{r^n - 1}{r - 1}, \quad r \neq 1$$

1. Một người gửi \$1000 vào tài khoản tiết kiệm với lãi suất 55% mỗi năm, được cộng gộp hàng quý. Hỏi cuối năm thứ 3, số tiền trong tài khoản là bao nhiêu?

- a) \$4,515                      b) \$4,692                      c) \$4,980                      d) \$5,100

*Đáp án: B*

$$A = P \left( 1 + \frac{i}{n} \right)^{nt} = 1000 \left( 1 + \frac{0.55}{4} \right)^{4 \cdot 3} \approx \$4692$$

2. Một người gửi \$1000 vào tài khoản tiết kiệm với lãi suất 55% mỗi năm, cộng gộp hàng tháng. Hỏi sau bao nhiêu năm số tiền trong tài khoản sẽ đạt ít nhất \$5000?

- a) 3 năm                      b) 3.2 năm                      c) 3.5 năm                      d) 4 năm

*Đáp án: A*

$$A = P \left( 1 + \frac{i}{n} \right)^{nt} \Rightarrow 5000 = 1000 \left( 1 + \frac{0.55}{12} \right)^{12t}$$

3. Một người gửi \$1000 vào tài khoản tiết kiệm với lãi suất 55% mỗi năm, được cộng gộp hàng quý, và mỗi quý gửi thêm \$100. Hỏi cuối năm thứ 3, số tiền trong tài khoản gần đúng là bao nhiêu?

- a) \$5000                      b) \$6000                      c) \$7378                      d) \$8000

*Đáp án: C.  $A = P(1 + \frac{i}{n})^N + C \frac{(1 + \frac{i}{n})^N - 1}{\frac{i}{n}}$  USD.*

4. Một người gửi \$1000 vào tài khoản tiết kiệm với lãi suất 10% mỗi năm và mỗi 2 năm gửi thêm \$200 đầu năm. Hỏi cuối năm thứ 8, số tiền trong tài khoản gần đúng là bao nhiêu?

- a) \$2000                      b) \$2500                      c) \$3342                      d) \$3000

*Đáp án: C. tính lãi của phần 1000 cộng với tiền gửi năm 1, 3, 5, 7 (đầu năm 2 nghĩa là cuối năm 1)*

5. Một người gửi số tiền ban đầu  $a_0$  vào tài khoản tiết kiệm với lãi suất  $I$  mỗi năm, được cộng gộp hàng tháng, và mỗi quý gửi thêm  $k$ . Hỏi công thức tính số tiền trong tài khoản cuối năm thứ  $n$  là gì?

- a)  $A = a_0 \cdot (1 + I)^n + k \cdot n$                       b)  $A = a_0 \cdot (1 + I/12)^{12n}$   
c)  $A = a_0 \cdot (1 + I/12)^{12n} + k \cdot \frac{(1 + I/12)^{12n} - 1}{(1 + I/12)^3 - 1}$                       d)  $A = a_0 \cdot (1 + I/4)^{4n} + k \cdot \frac{(1 + I/4)^{4n} - 1}{(1 + I/4) - 1}$

*Đáp án: C*

6. Cho một quần thể vi khuẩn ban đầu là  $N_0$ , tăng gấp  $r$  lần sau mỗi  $T$  giờ. Sau  $t$  giờ, công thức tính số lượng vi khuẩn  $N(t)$  là:

- a)  $N(t) = N_0 \cdot r^t$                       b)  $N(t) = N_0 \cdot r^{t/T}$                       c)  $N(t) = N_0 \cdot T^{t/r}$                       d)  $N(t) = N_0 \cdot (rT)^t$

7. Xét một quần thể bị ảnh hưởng bởi dịch bệnh, trong đó các cá thể chuyển đổi giữa trạng thái **khỏe mạnh** và **nhiễm bệnh** mỗi tháng. Trong mô hình thời gian rời rạc:

- 25% số người nhiễm bệnh hồi phục và trở lại trạng thái khỏe mạnh.
- 20% số người khỏe mạnh trở nên nhiễm bệnh.

Gọi:

$H_n$  = số người khỏe mạnh,  $I_n$  = số người nhiễm bệnh,  $P_n = \frac{I_n}{H_n + I_n}$  = tỉ lệ dân số nhiễm bệnh.

Giả sử dân số không đổi:

$$H_{n+1} + I_{n+1} = H_n + I_n.$$

Khi  $n \rightarrow \infty$ , tỉ lệ dân số nhiễm bệnh trong dài hạn sẽ là:

- a) 33.33%                      b) 55.55%                      c) 44.44%                      d) 66.66%

*Đáp án: C*

- *Hệ rời rạc cho số người:*

$$I_{n+1} = 0.75I_n + 0.2H_n, \quad H_{n+1} = 0.25I_n + 0.8H_n$$

- *Chuyển sang tỉ lệ dân số nhiễm bệnh  $P_n = \frac{I_n}{H_n + I_n}$  ta có:*

$$\begin{cases} I_{n+1} = 0.75I_n + 0.2H_n \\ H_{n+1} = 0.25I_n + 0.8H_n \end{cases}$$

- *Chia cả hai vế của  $I_{n+1}$  cho  $N$ :*

$$\frac{I_{n+1}}{N} = \frac{0.75I_n + 0.2H_n}{N}$$

- *Thay  $H_n = N - I_n$ :*

$$\frac{I_{n+1}}{N} = \frac{0.75I_n + 0.2(N - I_n)}{N} = \frac{0.75I_n + 0.2N - 0.2I_n}{N} = \frac{0.55I_n + 0.2N}{N}$$

- *Kết hợp thành tỉ lệ  $P_n = \frac{I_n}{N}$ :*

$$P_{n+1} = 0.2 + 0.55P_n$$

- *Dài hạn ( $n \rightarrow \infty$ ):  $P_\infty = r^n a_0 + b \frac{r^n - 1}{r - 1}$  ( $r^n \approx 0$  vì  $r$  bé hơn 1) =  $\frac{b}{1-r} = \frac{0.2}{1-0.55} = 0.4444 \approx 44.44\%$*

## 2 Hệ động lực liên tục

Mô hình	Phương trình	Giải tích phân	Đặc điểm chính
Unlimited Growth	$\frac{dP}{dt} = kP$	$P(t) = P_0 e^{k(t-t_0)}$	Tăng theo cấp số nhân, không giới hạn
Limited Growth	$\frac{dP}{dt} = r(M - P)$	$P(t) = M - (M - P_0)e^{-r(t-t_0)}$	Tăng nhanh khi $P$ nhỏ, chậm lại gần $M$ ; có mức tối đa $M$
Logistic Growth	$\frac{dP}{dt} = rP \left(1 - \frac{P}{M}\right)$	$P(t) = \frac{MP_0}{P_0 + (M - P_0)e^{-rM(t-t_0)}}$	Tăng theo sigmoid; có điểm cân bằng $P = 0$ và $P = M$ ; ban đầu tăng nhanh, sau chậm dần

**Bảng 1:** So sánh các mô hình tăng trưởng

1. Một quần thể có số lượng ban đầu là  $P_0$  và tăng trưởng theo mô hình không giới hạn với tốc độ  $k$ . Sau thời gian  $t$ , công thức tổng quát tính số lượng quần thể  $P(t)$  là:

a)  $P(t) = P_0 + kt$       b)  $P(t) = P_0 e^{kt}$       c)  $P(t) = \frac{P_0}{1 + kP_0 t}$       d)  $P(t) = kP_0^t$

*Đáp án: B - Mô hình tăng trưởng không giới hạn:  $P(t) = P_0 e^{kt}$ .*

2. Trong khu vực bảo tồn thiên nhiên, số lượng hổ phát triển với tỷ lệ tăng trưởng không đổi là 25% mỗi năm. Ban đầu, số lượng là 200 con hổ. Các thợ săn được phép săn một số lượng hổ nhất định hàng năm để duy trì số lượng hổ gần mức ban đầu nhằm bảo vệ sự cân bằng sinh thái trong khu vực bảo tồn. Số lượng hổ mà các thợ săn được phép săn mỗi năm nên là bao nhiêu để số lượng hổ duy trì gần 250 con nhất sau 3 năm, giả sử những người thợ săn luôn săn đủ mức cho phép?

a) 39      b) 40      c) 20      d) 10

*Đáp án: A -  $\frac{dP}{dt} = rP - k$  ( $k$  là số lượng hổ bị săn bắn mỗi năm (hằng số).) suy ra mô hình Limited Growth*

3. Một quần thể sinh vật phát triển theo mô hình tăng trưởng logistic với sức chứa tối đa là 25,000 cá thể. Ban đầu có 1,500 cá thể, và sau 5 năm tăng lên 5,000 cá thể. Tốc độ tăng trưởng logistic của quần thể là bao nhiêu?

a) 0.2      b) 0.25      c) 0.273      d) 0.3

*Đáp án: B - Dựa vào công thức  $P(t) = \frac{MP_0}{P_0 + (M - P_0)e^{-rMt}}$ , ta tìm được  $r \approx 0.273$ .*

4. Một quần thể phát triển theo phương trình:

$$\frac{dP}{dt} = 0.5P \left(1 - \frac{P}{100}\right) - 10$$

Xác định các điểm cân bằng và phân loại chúng (Stable/Unstable).

a)  $P \approx 27.64$  (Unstable),  $P \approx 72.36$  (Stable)      b)  $P \approx 10$  (Stable),  $P \approx 90$  (Unstable)  
c)  $P \approx 15$  (Stable),  $P \approx 85$  (Unstable)      d)  $P \approx 5$  (Stable),  $P \approx 95$  (Unstable)

*Đáp án: A. tính  $P$  với  $\frac{dP}{dt} = 0$  và xét đạo hàm lần 2 kiểm tra âm thì Stable nếu mà dương thì Unstable*

