Lecturer:	*November 15th, 2024*	Approved by:	*November 15th, 2024*
Nguyễn An Khương			

TRƯỜNG ĐẠI HỌC BÁCH KHOA - ĐHQG-HCM KHOA KH&KT MÁY TÍNH	THI CUỐI KỲ		HK/NH	1	24-25
			Ngày thi	24/12/24	
	Môn học	Mô hình hóa Toán học			
	Course ID	CO2011			
	Thời lượng	80 phút	Mã đề	4111	

Ghi chú: - Sinh viên được phép sử dụng 01 tờ giấy A4 viết tay có chứa ghi chép cần thiết.
- SV phải ghi MSSV, họ và tên vào cuối trang này và nộp lại đề thi cùng với bài làm.
- Chọn phương án đúng nhất (chỉ chọn 1) cho mỗi câu hỏi.

KÝ HIỆU: Những từ viết tắt này có thể hữu ích trong kỳ thi.

- $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ lần lượt là tập hợp các số tự nhiên, số nguyên, số hữu tỉ và số thực.

1. (L.O.2.1) [Harmony question] Trong bài toán “2D Cut Stock Problem”, thuật ngữ “trim loss” chỉ cho điều gì?

A. Thời gian cần thiết để cắt vật liệu.
B. Chi phí cắt vật liệu.
C. Vật liệu thừa còn lại sau khi cắt.
D. Số lượng mảnh cắt không đúng.

2. (L.O.3.2) Xét vấn đề lập kế hoạch ngân sách trong $m > 1$ giai đoạn được mô tả bằng mô hình IP nhị phân

$$\begin{aligned} \textbf{Model BIP}: \quad & \max_{\boldsymbol{x}} \quad Z =^{T} \cdot \boldsymbol{x} \\ & \text{subject to} \quad A\boldsymbol{x} \le \boldsymbol{b} \\ & \boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3, \cdots, x_{n-1}, x_n)^T \in \{0,1\}^n = V \end{aligned}$$

trong đó ma trận ràng buộc $A = [a_{ij}]$ có kích thước $m \times n$ với tất cả các $a_{ij} \ge 0$. Đặt F là **tập giải pháp khả thi** của Mô hình BIP. Rõ ràng $F \subset V = \{0,1\}^n$, tập hợp đỉnh của siêu khối $H_n = (V, E)$.. Tập hợp cạnh $E = \{\{\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\} : d(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = 1; \text{ with } \boldsymbol{u} = (u_1, u_2, \cdots, u_n)^T, \boldsymbol{v} = (v_1, v_2, \cdots, v_n)^T \in V\}$, trong đó $d(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = \sum_{i=1}^{n} |u_i - v_i|$ là khoảng cách Hamming giữa hai đỉnh $\boldsymbol{u}$ và $\boldsymbol{v}$.

- Đối với bất kỳ hàng $i = 1, 2, \ldots, m$, ràng buộc thứ i của $A\boldsymbol{x} \le \boldsymbol{b}$ được gọi là 'hợp lệ' hoặc 'phù hợp' nếu và chỉ $b_i \ge \sum_{j=1}^{n} a_{ij}$. Nếu không, nó được gọi là 'không hợp lệ' (không phù hợp).
- Đặt $P = \{j_0 \in \{1, 2, \ldots, n\} : \exists\, i \in \{1, 2, \ldots, m\} : a_{ij_0} > b_i\}$. P có thể được sử dụng để giảm kích thước của mô hình BIP.

Tổng số cạnh $|E|$ trong $H_n = (V, E)$ và kích thước tối đa m_F của F lần lượt là

A. $|E| = n\ 2^{n-|P|}$ và $m_F = 2^{n-1}$.
B. $|E| = n\ 2^{n-1}$ và $m_F = 2^{n-|P|}$.
C. $|E| = n\ 2^{n-1}$ và $m_F = 2^{n-1}$.
D. $|E| = \ 2^{n-1}$ và $m_F = n\ 2^{n-|P|}$.

3. (L.O.3.2) Trong thành phố Tài Chính, An và Chí quyết định đầu tư tiền của họ vào các tài khoản tiết kiệm khác nhau do Ngân hàng Thịnh Vượng cung cấp. Cả hai bắt đầu với $1000, nhưng họ chọn các tài khoản với cấu trúc lãi suất khác nhau:

- **Tài khoản của An:**
  - Số tiền gửi ban đầu: $1000
  - Lãi suất: 55% hàng năm, cộng gộp hàng quý
  - Gửi thêm: $80 vào cuối mỗi năm
- **Tài khoản của Chí:**
  - Số tiền gửi ban đầu: $1000
  - Lãi suất: 55% hàng năm, cộng gộp hàng tháng

Ở cuối năm thứ mấy thì tổng tiền lãi của Chí vượt tổng tiền lãi của An lần đầu tiên?

A. 2 B. 3 C. 4 D. đáp án khác

4. (L.O.3.2) Trong thành phố Công Nghệ, có hai nhà khoa học là TS.Sáng Tạo và TS.Tiến Bộ. Hai ông này đang nghiên cứu các quần thể vi khuẩn khác nhau trong các phòng thí nghiệm công nghệ cao của họ. TS.Sáng Tạo bắt đầu với một quần thể 1000 vi khuẩn, số lượng này tăng gấp ba mỗi 6 giờ. Trong khi đó, TS.Tiến Bộ bắt đầu với một quần thể khác gồm 3375 vi khuẩn và số lượng này tăng gấp đôi mỗi 6 giờ.

Một ngày nọ, sau khi quan sát các quần thể, họ quyết định so sánh kết quả của mình. Mục tiêu của họ là xem quần thể vi khuẩn của ai đạt đến số lượng cao nhất trong một khung thời gian nhất định.
Dựa trên các quan sát của họ, phát biểu nào sau đây là đúng?

A. Sau 30 giờ, cả hai quần thể sẽ vượt mức 200000 vi khuẩn
B. Sau 18 giờ, quần thể của TS.Sáng Tạo đạt 27000 vi khuẩn, trong khi quần thể của TS.Tiến Bộ đạt 100000 vi khuẩn.
C. Quần thể của TS.Tiến Bộ vẫn lớn hơn quần thể của TS.Sáng Tạo sau 15 giờ.
D. Sau 18 giờ, cả hai quần thể sẽ bằng nhau ở mức 27000 vi khuẩn, và sau 24 giờ, quần thể của TS.Tiến Bộ sẽ đạt 81000 vi khuẩn.

5. (L.O.3.2) Tại vùng đất kỳ diệu Ecoville, nổi tiếng với cây cỏ xanh tươi và động vật hoang dã phong phú, một nhóm các nhà khoa học đã bắt tay vào một nhiệm vụ nghiên cứu các mô hình tăng trưởng của một loài thực vật hiếm. Loài thực vật đặc biệt này, được gọi là Hoa Lumina, đã thu hút sự tò mò của các nhà thực vật học vì tốc độ tăng trưởng nhanh của nó dưới các điều kiện môi trường khác nhau.
Các nhà khoa học quyết định theo dõi số lượng Hoa Lumina trong một khu vực được chỉ định trong khoảng thời gian 5 năm. Họ đã ghi nhận số lượng hoa vào cuối mỗi năm, và quan sát của họ như sau:

Time (t)	**Observed Population**
1	125
2	150
3	180
4	220
5	260

Bị cuốn hút bởi dữ liệu này, các nhà khoa học đã sử dụng các mô hình toán học khác nhau để mô tả sự tăng trưởng của hoa Lumina. Mô hình nào sau đây thể hiện tốt nhất (tổng sai số tuyệt đối bé nhất) dữ liệu quan sát của các nhà khoa học?

A. $P(t) = 100(1 + 0.22)^t$
B. $P(t) = 100(1 + 0.21)^t$
C. $P(t) = 100e^{0.21t}$
D. $P(t) = 100e^{0.20t}$

6. (L.O.3.2) Trong thuật toán Nhánh-Cận (Brand-and-Bound), tại một bài toán quy hoạch tuyến tính con tồn tại nghiệm, khi nào thì chúng ta thực hiện ngắt nhánh (pruning, hay còn gọi là hiện tượng "fathomed")?

A. Khi nghiệm của bài toán con không tốt hơn nghiệm tốt nhất đã tìm được.
B. Khi nghiệm của bài toán con tốt hơn nghiệm tốt nhất đã tìm được.
C. Khi nghiệm tìm được thoã mãn điều kiện nguyên.
D. Khi nghiệm tìm được không thoã mãn điều kiện nguyên.

7. (L.O.3.1) [Harmony question] TRong mô hình học tăng cường (reinforcement learning) để giải bài toán stock cutting problem thì thông tin nào cần có trong một hành động (action)?

A. Thông tin vật liệu.
B. Tất cả phương án đều đúng.
C. Thông tin sản phẩm.
D. Vị trí cắt.

8. (L.O.3.2) Xét một mô hình LP với các biến quyết định $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3, \cdots, x_{n-1}, x_n)^\top$ với m ràng buộc

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le b_i, \quad \text{for } i = 1, \cdots, m.$$

Đặt F là tập hợp khả thi của mô hình này. Gọi $\boldsymbol{x}_{opt}$ là một giải pháp tối ưu. Bạn kết luận rằng

A. F bị giới hạn (bounded) và không có ràng buộc nào được thỏa mãn cho $\boldsymbol{x}_{opt}$.
B. F không bị giới hạn (unbounded) và $\boldsymbol{x}_{opt}$ thỏa mãn mọi ràng buộc.
C. F là tập lồi và $\boldsymbol{x}_{opt}$ thỏa mãn một vài ràng buộc.
D. F là tập lồi và $\boldsymbol{x}_{opt}$ thỏa mãn mọi ràng buộc.

9. (L.O.3.2) TOM - một người hâm mộ hamburger ở thành phố New York - đến một cửa hàng McDonald để ăn trưa, chỉ có 34 đô la trong túi. Giả sử mỗi chiếc Mac nhỏ có giá 3 đô la, mỗi chiếc Mac vừa có giá 4 đô la và mỗi chiếc Big Mac có giá 5 đô la. Ký hiệu x_1, x_2, x_3 là số cái hamburger tương ứng với Mac nhỏ, Mac vừa và Big Mac mà anh ta có thể mua.
TOM tự hỏi, có lẽ kế hoạch của anh ta ít nhất phải thỏa mãn điều kiện $3x_1 + 5x_2 + 4x_3 \leq 34;\ x_i \in \mathbb{Z},\ \forall i = 1, 2, 3$, nhưng không chắc chắn!! Giả sử thêm rằng TOM rất đói vào ngày hôm đó, anh quyết định không ăn bánh hamburger Mac cỡ nhỏ và vừa, và chỉ thích ăn Big Mac.
Các ràng buộc đơn giản phù hợp và số lượng Big Mac tối đa K mà anh có thể gọi lần lượt là

A. $3x_1 + 4x_2 + 5x_3 \leq 34;\ x_i \in \mathbb{Z},\ \forall i = 1, 2, 3$, và $K = 5$.
B. $3x_1 + 4x_2 + 5x_3 \leq 34;\ x_i \in \mathbb{N},\ \exists i \in \{1, 2, 3\}$ và $K = 6$.
C. $3x_1 + 4x_2 + 5x_3 \leq 34;\ x_1, x_2, x_3 \geq 0$ và $K = 6$.
D. $3x_1 + 4x_2 + 5x_3 \leq 34;\ x_i \in \mathbb{N},\ \forall i \in \{1, 2, 3\}$ và $K = 6$.

10. (L.O.3.2) Trong khu vực bảo tồn thiên nhiên, số lượng thỏ phát triển với tỷ lệ tăng trưởng không đổi là 25% mỗi năm. Ban đầu, số lượng là 200 con thỏ. Các thợ săn được phép săn một số lượng thỏ nhất định hàng năm để duy trì số lượng thỏ gần mức ban đầu nhằm bảo vệ sự cân bằng sinh thái trong khu vực bảo tồn.
Số lượng thỏ mà các thợ săn được phép săn mỗi năm nên là bao nhiêu trong các lựa chọn sau để số lượng thỏ duy trì gần 200 con nhất sau 3 năm, giả sử những người thợ săn luôn đạt đến mức cho phép hằng năm?

A. 40 B. 50 C. 60 D. 70

11. (L.O.3.2) Tổng thống mới của quốc gia **V** đầu tư 15 triệu đô la Mỹ để xây dựng các trường cao đẳng khoa học mới với ngân sách x_1 và các trường kỹ thuật mới với ngân sách x_2 trong giai đoạn 2025-2028.
Kế hoạch chi ngân sách cho các trường cao đẳng và trường kỹ thuật như vậy đáp ứng điều kiện về tỷ lệ đầu tư là $4x_2 - x_1 - 15 \leq 0$. Với khoản đầu tư này, trong vòng 4 năm tới, chính quyền mới cho rằng lợi nhuận từ việc xây dựng các trường cao đẳng mới Z_C bằng 20% ngân sách đã tính, và lợi nhuận từ việc xây dựng các trường kỹ thuật mới Z_T bằng 40% ngân sách đã tính. Hàm lợi nhuận được đưa ra bởi $z = Z_C + Z_T$.
Hàm lợi nhuận, giải pháp tối ưu $\boldsymbol{x} = [x_1,\ x_2]$ và giá trị tối ưu z_{OPT} lần lượt là

A. $z = 0.2\ x_1 + 0.4\ x_2,\ \ x_1 = 9,\ x_2 = 6;\ z_{OPT} = 4.2$.
B. $z = 0.2\ x_1 + 0.4\ x_2,\ \ x_1 = 5,\ x_2 = 9;\ z_{OPT} = 4.2$.
C. $z = 0.2\ x_1 + 0.4\ x_2,\ \ x_1 = 11,\ x_2 = 4;\ z_{OPT} = 3.8$.
D. $z = 0.4\ x_1 + 0.2\ x_2,\ \ x_1 = 9,\ x_2 = 6;;\ z_{OPT} = 4$.

12. (L.O.3.1) [Harmony question] Mục tiêu tối ưu hóa của bài toán cutting stock problem là gì? Với $\mathcal{A}_t$ là tập hợp tất cả các hành động tại bước thời gian t và $f(s)$ là hàm để tính diện tích stock s.

A. $\arg\min_{a_{1:T} \in \mathcal{A}_{1:T}} \sum_{s_i \in \mathcal{S} \setminus \{s_t \in a_t\}} f(s_i)$
B. $\arg\max_{a_{1:T} \in \mathcal{A}_{1:T}} \sum_{s_i \in \mathcal{S} \setminus \{s_t \in a_t\}} f(s_i)$
C. $\arg\sup_{a_{1:T} \in \mathcal{A}_{1:T}} \sum_{s_i \in \mathcal{S} \setminus \{s_t \in a_t\}} f(s_i)$
D. $\arg\inf_{a_{1:T} \in \mathcal{A}_{1:T}} \sum_{s_i \in \mathcal{S} \setminus \{s_t \in a_t\}} f(s_i)$

13. (L.O.3.1) [Harmony question] Cho $\mathcal{P} = \{p\}$ là tập hợp những sản phẩm, $\mathcal{S} = \{s\}$ là tập hợp tấm nguyên liệu, $c(s, p) \in \{0, 1\}$ là chỉ số cho biết tấm nguyên liệu s có được sử dụng để cắt sản phẩm p hay không. Về mặt lý thuyết, kích thước chính xác của tập hợp hành động (action set) ở bước đầu tiên là bao nhiêu?

A. Một số hữu hạn rất lớn.
B. Vô cực (Infinity).
C. $|\mathcal{S}| \times |\mathcal{P}|$
D. Không có phương án nào đúng.

14. (L.O.3.2) Trong thuật toán Nhánh-Cận (Brand-and-Bound), tại một bước giải bài toán con, cận trên của hàm mục tiêu được định nghĩa là:

A. ∞.
B. 0.
C. Không xác định được.
D. Giá trị hàm mục tiêu của nghiệm tốt nhất từng tìm được.

Các CH từ 15– 17 dùng dữ kiện chung dưới đây.

Xét một quần thể bị ảnh hưởng bởi dịch bệnh, trong đó các cá thể chuyển đổi giữa trạng thái khỏe mạnh và nhiễm bệnh mỗi tháng. Trong mô hình thời gian rời rạc này, 25% số người nhiễm bệnh hồi phục và trở lại trạng thái khỏe mạnh, trong khi 20% số người khỏe mạnh trở nên nhiễm bệnh. Với mỗi tháng n, ta định nghĩa:

H_n = số người khoẻ mạnh

I_n = số người nhiễm bệnh

$P_n = \frac{I_n}{H_n+I_n}$ = tỉ lệ dân số nhiễmm bệnh.

Giả sử dân số không đổi:

$$H_{n+1} + I_{n+1} = H_n + I_n.$$

15. (L.O.3.2) Từ các dữ kiện đã cho, ta cố

A. $\begin{cases} I_{n+1} &= 0.2I_n + 0.75H_n \\ H_{n+1} &= 0.8I_n + 0.25H_n. \end{cases}$

B. $\begin{cases} I_{n+1} &= 0.75I_n + 0.2H_n \\ H_{n+1} &= 0.25I_n + 0.8H_n. \end{cases}$

C. $\begin{cases} I_{n+1} &= 0.25I_n + 0.8H_n \\ H_{n+1} &= 0.2I_n + 0.2H_n. \end{cases}$

D. $\begin{cases} I_{n+1} &= 0.25I_n + 0.2H_n \\ H_{n+1} &= 0.75I_n + 0.8H_n. \end{cases}$

16. (L.O.3.2) Lưu ý rằng hệ phương trình trong Câu hỏi **??** tương thích với giả định dân số không đổi ở trên. Khi đó

A. $P_{n+1} = 0.55 + 0.2 * P_n$.
B. $P_{n+1} = 0.25 + 0.75 * P_n$.
C. $P_{n+1} = 0.2 + 0.55 * P_n$.
D. $P_{n+1} = 0.2 + 0.75 * P_n$.

17. (L.O.3.2) Hệ động lực trong Câu hỏi 24 cho ta biết rằng trong dài hạn (khi $n \to \infty$) tỉ lệ dân số nhiễm bệnh sẽ là

A. 33.33%. B. 55.55%. C. 44.44%. D. 66.66%.

18. (L.O.3.2) Xét bảng đơn hình sau tại một bước lặp của phương pháp đơn hình

A_{1j}	4	2	5	1	0	0	80
A_{2j}	-2	-5	1	0	1	0	10
A_{3j}	7	3	-3	0	0	1	21
R_j	-9	-18	-12	0	0	0	0

Hàng nào sẽ được chọn để xác định phần tử trục (còn gọi là phần tử xoay - pivot)?

A. A_{1j}. B. A_{3j}. C. A_{2j}. D. r_j.

Các CH từ 19– 21 cùng xét chung mô hình tăng trưởng logistic dưới đây.

Một quần thể sinh vật phát triển theo mô hình tăng trưởng logistic với số lượng tối đa (sức chứa) là 25,000 cá thể trong một khu vực nhất định. Giả sử ban đầu có 1500 cá thể và sau 5 năm tăng lên 5000 cá thể.

19. (L.O.3.2) Sau bao lâu quần thể sẽ đạt 20,000 cá thể?

A. 15 năm. B. 16 năm. C. 15.2 năm. D. 15.5 năm.

20. (L.O.3.2) What is the logistic growth rate of the population?

A. 0.2. B. 0.25. C. 0.27. D. 0.3.

21. (L.O.3.1) [Harmony question] Một công ty cần cắt những miếng hình chữ nhật nhỏ hơn từ tấm kim loại lớn với kích thước của tấm kim loại là 13 *inches* $\times$ 10 *inches* và nhu cầu về số lượng sản phẩm được nêu trong bảng sau.

Sản phẩm thứ i	Chiều dài (inches)	Chiều rộng (inches)	Số lượng
1	2	1	5
2	4	2	5
3	5	3	2
4	7	4	3
5	8	5	2

Hỏi cần sử dụng ít nhất bao nhiêu tấm kim loại để đáp ứng nhu cầu trên?

A. 2. B. 3. C. 4. D. Phương án khác.

22. (L.O.3.2) Xét bài toán quy hoạch tuyến tính sau.

$$\begin{aligned} \max \quad & P = x + 4y - 2z \\ \text{subject to} \quad & \\ & x + 2y - 3z \le 4, \\ & 5x + 6y + 7z \le 8, \\ & 9x + 10y - 11z \le 12, \\ & 13x - 14y - 15z \le 16, \\ & x, y, z \ge 0. \end{aligned}$$

Cần bao nhiêu biến phụ (slack variable) được thêm vào mô hình trên để giải bằng phương pháp đơn hình?

A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

23. (L.O.3.2) Xét bảng đơn hình sau tại một bước lặp của phương pháp đơn hình giải bài toán quy hoạch tuyến tính dạng chuẩn tìm giá trị lớn nhất (standard maximization).

x	y	u	v	
$\frac{1}{2}$	1	0	$\frac{1}{2}$	11000
2	0	$\frac{2}{3}$	$-\frac{3}{4}$	16000
-1	0	0	3	2

Giá trị của (x, y) bằng bao nhiêu để hàm mục tiêu đạt giá trị lớn nhất?

A. $(8000, 7000)$. B. $(7000, 8000)$. C. $(11000, 16000)$. D. $(16000, 11000)$.

24. (L.O.3.2) Công ty khởi nghiệp của bạn có kế hoạch phát triển kinh doanh vào năm tới với tổng ngân sách là 10 triệu đô la Mỹ, để đầu tư vào hai lĩnh vực kinh tế: lĩnh vực **ICT** (có nghĩa là CNTT - Công nghệ thông tin và truyền thông) và lĩnh vực Sản xuất (**Manufacturing sector**).

- Ký hiệu hai biến x_1, x_2 [đơn vị 1 triệu đô la Mỹ] lần lượt là số tiền ngân sách chi cho lĩnh vực CNTT và chi cho lĩnh vực Sản xuất. Sau 1 năm đầu tư, lợi nhuận Z_1 thu được từ CNTT bằng 10% ngân sách đã chi, và lợi nhuận Z_2 thu được từ sản xuất bằng 30% ngân sách đã chi.

- Do đó, kế hoạch đầu tư của bạn có thể được xây dựng dưới dạng một mô hình tuyến tính với mục tiêu tối đa hóa hàm z (cung cấp lợi nhuận từ cả hai lĩnh vực), được đưa ra bởi:

$$\text{Maximize } z = Z_1 + Z_2.$$

Ngành CNTT thường có rủi ro cao hơn ngành Sản xuất, do đó chúng ta yêu cầu thêm rằng $-6 \le 3x_1 - 3x_2$. Giải pháp tối ưu là $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2)^\top$ và giá trị tối ưu z_{max} tương ứng là

A. $\boldsymbol{x} = (5,\ 5)^\top$ và $z_{max} = 2.8$.
B. $\boldsymbol{x} = (6,\ 4)^\top$ và $z_{max} = 2.2$.
C. $\boldsymbol{x} = (4,\ 6)^\top$ và $z_{max} = 2.2$.
D. $\boldsymbol{x} = (4,\ 6)^\top$ và $z_{max} = 2.8$.

25. (L.O.3.2) Có một khu rừng rộng lớn tên là Everwood, nơi mà các loài thú đang sinh sống và phát triển. Trong khu rừng này, có một loài đặc biệt là loài hươu đốm. Loài hươu đốm này có đặc điểm sinh học đặc biệt và được nghiên cứu để hiểu rõ hơn về sự phát triển và biến động dân số của chúng. TS.Eric nhận thấy rằng quần thể hươu đốm trong khu rừng Everwood đang có những biến động lớn và muốn hiểu rõ hơn về các yếu tố ảnh hưởng đến sự phát triển của chúng. Ông đã quan sát và xây dựng một mô hình toán học để mô phỏng sự thay đổi của quần thể hươu đốm theo thời gian như sau:

$$\frac{dP}{dt} = 0.5P\left(1 - \frac{P}{100}\right) - 0.1P$$

trong đó,

- $r = 0.5$: tốc độ tăng trưởng
- $K = 100$: sức chứa của môi trường
- $m = 0.1$: tỷ lệ di cư

Chọn câu trả lời gần đúng nhất (sai số nhỏ nhất) với điểm cân bằng của quần thể hươu đốm này, biết rằng hiện tại quần thể có 50 cá thể.

A. 75
B. 50
C. 150
D. 100

....HẾT BÀI THI..

Solution 4111

1. C.
2. B.
3. D.
4. C.
5. B.
6. A.
7. B.
8. D.
9. D.
10. D.
11. A.
12. B.
13. B.
14. D.
15. B.
16. C.
17. C.
18. B.
19. C.
20. C.
21. A.
22. D.
23. A.
24. C.
25. A.

Lecturer:	*November 15th, 2024*	Approved by:	*November 15th, 2024*
Nguyễn An Khương			

TRƯỜNG ĐẠI HỌC BÁCH KHOA - ĐHQG-HCM KHOA KH&KT MÁY TÍNH	THI CUỐI KỲ	HK/NH	1	24-25
		Ngày thi	24/12/24	
	Môn học	Mô hình hóa Toán học		
	Course ID	CO2011		
	Thời lượng	80 phút	Mã đề	4112

Ghi chú: - Sinh viên được phép sử dụng 01 tờ giấy A4 viết tay có chứa ghi chép cần thiết.
- SV phải ghi MSSV, họ và tên vào cuối trang này và nộp lại đề thi cùng với bài làm.
- Chọn phương án đúng nhất (chỉ chọn 1) cho mỗi câu hỏi.

KÝ HIỆU: Những từ viết tắt này có thể hữu ích trong kỳ thi.

- $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ lần lượt là tập hợp các số tự nhiên, số nguyên, số hữu tỉ và số thực.

1. (L.O.3.2) Trong thành phố Tài Chính, An và Chí quyết định đầu tư tiền của họ vào các tài khoản tiết kiệm khác nhau do Ngân hàng Thịnh Vượng cung cấp. Cả hai bắt đầu với \$1000, nhưng họ chọn các tài khoản với cấu trúc lãi suất khác nhau:

   - **Tài khoản của An:**
     - Số tiền gửi ban đầu: \$1000
     - Lãi suất: 55% hàng năm, cộng gộp hàng quý
     - Gửi thêm: \$80 vào cuối mỗi năm
   - **Tài khoản của Chí:**
     - Số tiền gửi ban đầu: \$1000
     - Lãi suất: 55% hàng năm, cộng gộp hàng tháng

   Ở cuối năm thứ mấy thì tổng tiền lãi của Chí vượt tổng tiền lãi của An lần đầu tiên?

A. đáp án khác B. 2 C. 3 D. 4

2. (L.O.3.2) Có một khu rừng rộng lớn tên là Everwood, nơi mà các loài thú đang sinh sống và phát triển. Trong khu rừng này, có một loài đặc biệt là loài hươu đốm. Loài hươu đốm này có đặc điểm sinh học đặc biệt và được nghiên cứu để hiểu rõ hơn về sự phát triển và biến động dân số của chúng. TS.Eric nhận thấy rằng quần thể hươu đốm trong khu rừng Everwood đang có những biến động lớn và muốn hiểu rõ hơn về các yếu tố ảnh hưởng đến sự phát triển của chúng. Ông đã quan sát và xây dựng một mô hình toán học để mô phỏng sự thay đổi của quần thể hươu đốm theo thời gian như sau:

$$\frac{dP}{dt} = 0.5P(1 - \frac{P}{100}) - 0.1P$$

trong đó,

- $r = 0.5$: tốc độ tăng trưởng
- $K = 100$: sức chứa của môi trường
- $m = 0.1$: tỷ lệ di cư

Chọn câu trả lời gần đúng nhất (sai số nhỏ nhất) với điểm cân bằng của quần thể hươu đốm này, biết rằng hiện tại quần thể có 50 cá thể.

A. 100 B. 75 C. 50 D. 150

3. (L.O.3.1) [Harmony question] Cho $\mathcal{P} = \{p\}$ là tập hợp những sản phẩm, $\mathcal{S} = \{s\}$ là tập hợp tấm nguyên liệu, $c(s, p) \in \{0, 1\}$ là chỉ số cho biết tấm nguyên liệu s có được sử dụng để cắt sản phẩm p hay không. Về mặt lý thuyết, kích thước chính xác của tập hợp hành động (action set) ở bước đầu tiên là bao nhiêu?

A. Không có phương án nào đúng. B. Một số hữu hạn rất lớn.
C. Vô cực (Infinity). D. $|\mathcal{S}| \times |\mathcal{P}|$

4. (L.O.3.2) Trong thuật toán Nhánh-Cận (Brand-and-Bound), tại một bài toán quy hoạch tuyến tính con tồn tại nghiệm, khi nào thì chúng ta thực hiện ngắt nhánh (pruning, hay còn gọi là hiện tượng "fathomed")?

A. Khi nghiệm tìm được không thoả mãn điều kiện nguyên.
B. Khi nghiệm của bài toán con không tốt hơn nghiệm tốt nhất đã tìm được.
C. Khi nghiệm của bài toán con tốt hơn nghiệm tốt nhất đã tìm được.
D. Khi nghiệm tìm được thoả mãn điều kiện nguyên.

5. (L.O.3.2) Xét bài toán quy hoạch tuyến tính sau.

$$\begin{aligned} \max \quad & P = x + 4y - 2z \\ \text{subject to} \quad & \\ & x + 2y - 3z \leq 4, \\ & 5x + 6y + 7z \leq 8, \\ & 9x + 10y - 11z \leq 12, \\ & 13x - 14y - 15z \leq 16, \\ & x, y, z \geq 0. \end{aligned}$$

Cần bao nhiêu biến phụ (slack variable) được thêm vào mô hình trên để giải bằng phương pháp đơn hình?

A. 4. B. 1. C. 2. D. 3.

6. (L.O.3.1) [Harmony question] TRong mô hình học tăng cường (reinforcement learning) để giải bài toán stock cutting problem thì thông tin nào cần có trong một hành động (action)?

A. Vị trí cắt. B. Thông tin vật liệu. C. Tất cả phương án đều đúng.
D. Thông tin sản phẩm.

7. (L.O.3.2) Xét bảng đơn hình sau tại một bước lặp của phương pháp đơn hình

A_{1j}	4	2	5	1	0	0	80
A_{2j}	-2	-5	1	0	1	0	10
A_{3j}	7	3	-3	0	0	1	21
R_j	-9	-18	-12	0	0	0	0

Hàng nào sẽ được chọn để xác định phần tử trục (còn gọi là phần tử xoay - pivot)?

A. r_j.
B. A_{1j}.
C. A_{3j}.
D. A_{2j}.

8. (L.O.3.2) Xét vấn đề lập kế hoạch ngân sách trong $m > 1$ giai đoạn được mô tả bằng mô hình IP nhị phân

$$\textbf{Model BIP}: \quad \max_{\boldsymbol{x}} \quad Z =^T \cdot \boldsymbol{x}$$
$$\text{subject to} \quad A\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}$$
$$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3, \cdots, x_{n-1}, x_n)^T \in \{0,1\}^n = V$$

trong đó ma trận ràng buộc $A = [a_{ij}]$ có kích thước $m \times n$ với tất cả các $a_{ij} \geq 0$. Đặt F là **tập giải pháp khả thi** của Mô hình BIP. Rõ ràng $F \subset V = \{0,1\}^n$, tập hợp đỉnh của siêu khối $H_n = (V, E)$.. Tập hợp cạnh $E = \{\{\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\} : d(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = 1; \text{ with } \boldsymbol{u} = (u_1, u_2, \cdots, u_n)^T, \ \boldsymbol{v} = (v_1, v_2, \cdots, v_n)^T \in V\}$, trong đó $d(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = \sum_{i=1}^{n} |u_i - v_i|$ là khoảng cách Hamming giữa hai đỉnh $\boldsymbol{u}$ và $\boldsymbol{v}$.

- Đối với bất kỳ hàng $i = 1, 2, \ldots, m$, ràng buộc thứ i của $A\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}$ được gọi là 'hợp lệ' hoặc 'phù hợp' nếu và chỉ $b_i \geq \sum_{j=1}^{n} a_{ij}$. Nếu không, nó được gọi là 'không hợp lệ' (không phù hợp).
- Đặt $P = \{j_0 \in \{1, 2, \ldots, n\} : \exists\, i \in \{1, 2, \ldots, m\} : a_{ij_0} > b_i\}$. P có thể được sử dụng để giảm kích thước của mô hình BIP.

Tổng số cạnh $|E|$ trong $H_n = (V, E)$ và kích thước tối đa m_F của F lần lượt là

A. $|E| = 2^{n-1}$ và $m_F = n\, 2^{n-|P|}$.
B. $|E| = n\, 2^{n-|P|}$ và $m_F = 2^{n-1}$.
C. $|E| = n\, 2^{n-1}$ và $m_F = 2^{n-|P|}$.
D. $|E| = n\, 2^{n-1}$ và $m_F = 2^{n-1}$.

9. (L.O.3.2) Trong khu vực bảo tồn thiên nhiên, số lượng thỏ phát triển với tỷ lệ tăng trưởng không đổi là 25% mỗi năm. Ban đầu, số lượng là 200 con thỏ. Các thợ săn được phép săn một số lượng thỏ nhất định hàng năm để duy trì số lượng thỏ gần mức ban đầu nhằm bảo vệ sự cân bằng sinh thái trong khu vực bảo tồn.
Số lượng thỏ mà các thợ săn được phép săn mỗi năm nên là bao nhiêu trong các lựa chọn sau để số lượng thỏ duy trì gần 200 con nhất sau 3 năm, giả sử những người thợ săn luôn đạt đến mức cho phép hằng năm?

A. 70
B. 40
C. 50
D. 60

10. (L.O.3.2) Tại vùng đất kỳ diệu Ecoville, nổi tiếng với cây cỏ xanh tươi và động vật hoang dã phong phú, một nhóm các nhà khoa học đã bắt tay vào một nhiệm vụ nghiên cứu các mô hình tăng trưởng của một loài thực vật hiếm. Loài thực vật đặc biệt này, được gọi là Hoa Lumina, đã thu hút sự tò mò của các nhà thực vật học vì tốc độ tăng trưởng nhanh của nó dưới các điều kiện môi trường khác nhau.
Các nhà khoa học quyết định theo dõi số lượng Hoa Lumina trong một khu vực được chỉ định trong khoảng thời gian 5 năm. Họ đã ghi nhận số lượng hoa vào cuối mỗi năm, và quan sát của họ như sau:

Time (t)	**Observed Population**
1	125
2	150
3	180
4	220
5	260

Bị cuốn hút bởi dữ liệu này, các nhà khoa học đã sử dụng các mô hình toán học khác nhau để mô tả sự tăng trưởng của hoa Lumina. Mô hình nào sau đây thể hiện tốt nhất (tổng sai số tuyệt đối bé nhất) dữ liệu quan sát của các nhà khoa học?

A. $P(t) = 100e^{0.20t}$
B. $P(t) = 100(1 + 0.22)^t$
C. $P(t) = 100(1 + 0.21)^t$
D. $P(t) = 100e^{0.21t}$

11. (L.O.3.1) [Harmony question] Mục tiêu tối ưu hóa của bài toán cutting stock problem là gì? Với $\mathcal{A}_t$ là tập hợp tất cả các hành động tại bước thời gian t và $f(s)$ là hàm để tính diện tích stock s.

A. $\arg\inf_{a_{1:T}\in\mathcal{A}_{1:T}} \sum_{s_i\in\mathcal{S}\setminus\{s_t\in a_t\}} f(s_i)$
B. $\arg\min_{a_{1:T}\in\mathcal{A}_{1:T}} \sum_{s_i\in\mathcal{S}\setminus\{s_t\in a_t\}} f(s_i)$
C. $\arg\max_{a_{1:T}\in\mathcal{A}_{1:T}} \sum_{s_i\in\mathcal{S}\setminus\{s_t\in a_t\}} f(s_i)$
D. $\arg\sup_{a_{1:T}\in\mathcal{A}_{1:T}} \sum_{s_i\in\mathcal{S}\setminus\{s_t\in a_t\}} f(s_i)$

12. (L.O.3.2) Trong thuật toán Nhánh-Cận (Brand-and-Bound), tại một bước giải bài toán con, cận trên của hàm mục tiêu được định nghĩa là:

A. Giá trị hàm mục tiêu của nghiệm tốt nhất từng tìm được.
B. ∞.
C. 0.
D. Không xác định được.

13. (L.O.3.2) Xét bảng đơn hình sau tại một bước lặp của phương pháp đơn hình giải bài toán quy hoạch tuyến tính dạng chuẩn tìm giá trị lớn nhất (standard maximization).

$$\begin{array}{cccc|c}
x & y & u & v & \\
\hline
\frac{1}{2} & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 11000 \\
2 & 0 & \frac{2}{3} & -\frac{3}{4} & 16000 \\
\hline
-1 & 0 & 0 & 3 & 2
\end{array}$$

Giá trị của (x, y) bằng bao nhiêu để hàm mục tiêu đạt giá trị lớn nhất?

A. $(16000, 11000)$.
B. $(8000, 7000)$.
C. $(7000, 8000)$.
D. $(11000, 16000)$.

14. (L.O.3.2) Tổng thống mới của quốc gia **V** đầu tư 15 triệu đô la Mỹ để xây dựng các trường cao đẳng khoa học mới với ngân sách x_1 và các trường kỹ thuật mới với ngân sách x_2 trong giai đoạn 2025-2028. Kế hoạch chi ngân sách cho các trường cao đẳng và trường kỹ thuật như vậy đáp ứng điều kiện về tỷ lệ đầu tư là $4x_2 - x_1 - 15 \leq 0$. Với khoản đầu tư này, trong vòng 4 năm tới, chính quyền mới cho rằng lợi nhuận từ việc xây dựng các trường cao đẳng mới Z_C bằng 20% ngân sách đã tính, và lợi nhuận từ việc xây dựng các trường kỹ thuật mới Z_T bằng 40% ngân sách đã tính. Hàm lợi nhuận được đưa ra bởi $z = Z_C + Z_T$.
Hàm lợi nhuận, giải pháp tối ưu $\boldsymbol{x} = [x_1,\ x_2]$ và giá trị tối ưu z_{OPT} lần lượt là

A. $z = 0.4\ x_1 + 0.2\ x_2,\ \ x_1 = 9,\ x_2 = 6;;\ z_{OPT} = 4.$
B. $z = 0.2\ x_1 + 0.4\ x_2,\ \ x_1 = 9,\ x_2 = 6;\ z_{OPT} = 4.2.$
C. $z = 0.2\ x_1 + 0.4\ x_2,\ \ x_1 = 5,\ x_2 = 9;\ z_{OPT} = 4.2.$
D. $z = 0.2\ x_1 + 0.4\ x_2,\ \ x_1 = 11,\ x_2 = 4;\ z_{OPT} = 3.8.$

15. (L.O.3.2) Trong thành phố Công Nghệ, có hai nhà khoa học là TS.Sáng Tạo và TS.Tiến Bộ. Hai ông này đang nghiên cứu các quần thể vi khuẩn khác nhau trong các phòng thí nghiệm công nghệ cao của họ. TS.Sáng Tạo bắt đầu với một quần thể 1000 vi khuẩn, số lượng này tăng gấp ba mỗi 6 giờ. Trong khi đó, TS.Tiến Bộ bắt đầu với một quần thể khác gồm 3375 vi khuẩn và số lượng này tăng gấp đôi mỗi 6 giờ.

Một ngày nọ, sau khi quan sát các quần thể, họ quyết định so sánh kết quả của mình. Mục tiêu của họ là xem quần thể vi khuẩn của ai đạt đến số lượng cao nhất trong một khung thời gian nhất định.
Dựa trên các quan sát của họ, phát biểu nào sau đây là đúng?

A. Sau 18 giờ, cả hai quần thể sẽ bằng nhau ở mức 27000 vi khuẩn, và sau 24 giờ, quần thể của TS.Tiến Bộ sẽ đạt 81000 vi khuẩn.
B. Sau 30 giờ, cả hai quần thể sẽ vượt mức 200000 vi khuẩn
C. Sau 18 giờ, quần thể của TS.Sáng Tạo đạt 27000 vi khuẩn, trong khi quần thể của TS.Tiến Bộ đạt 100000 vi khuẩn.
D. Quần thể của TS.Tiến Bộ vẫn lớn hơn quần thể của TS.Sáng Tạo sau 15 giờ.

16. (L.O.3.2) TOM - một người hâm mộ hamburger ở thành phố New York - đến một cửa hàng McDonald để ăn trưa, chỉ có 34 đô la trong túi. Giả sử mỗi chiếc Mac nhỏ có giá 3 đô la, mỗi chiếc Mac vừa có giá 4 đô la và mỗi chiếc Big Mac có giá 5 đô la. Ký hiệu x_1, x_2, x_3 là số cái hamburger tương ứng với Mac nhỏ, Mac vừa và Big Mac mà anh ta có thể mua.
TOM tự hỏi, có lẽ kế hoạch của anh ta ít nhất phải thỏa mãn điều kiện $3x_1 + 5x_2 + 4x_3 \leq 34;\ x_i \in \mathbb{Z},\ \forall i = 1, 2, 3$, nhưng không chắc chắn!! Giả sử thêm rằng TOM rất đói vào ngày hôm đó, anh quyết định không ăn bánh hamburger Mac cỡ nhỏ và vừa, và chỉ thích ăn Big Mac.
Các ràng buộc đơn giản phù hợp và số lượng Big Mac tối đa K mà anh có thể gọi lần lượt là

A. $3x_1 + 4x_2 + 5x_3 \leq 34;\ x_i \in \mathbb{N},\ \forall i \in \{1, 2, 3\}$ và $K = 6$.
B. $3x_1 + 4x_2 + 5x_3 \leq 34;\ x_i \in \mathbb{Z},\ \forall i = 1, 2, 3$, và $K = 5$.
C. $3x_1 + 4x_2 + 5x_3 \leq 34;\ x_i \in \mathbb{N},\ \exists i \in \{1, 2, 3\}$ và $K = 6$.
D. $3x_1 + 4x_2 + 5x_3 \leq 34;\ x_1, x_2, x_3 \geq 0$ và $K = 6$.

Các CH từ 17– 19 dùng dữ kiện chung dưới đây.

Xét một quần thể bị ảnh hưởng bởi dịch bệnh, trong đó các cá thể chuyển đổi giữa trạng thái khỏe mạnh và nhiễm bệnh mỗi tháng. Trong mô hình thời gian rời rạc này, 25% số người nhiễm bệnh hồi phục và trở lại trạng thái khỏe mạnh, trong khi 20% số người khỏe mạnh trở nên nhiễm bệnh. Với mỗi tháng n, ta định nghĩa:

H_n = số người khoẻ mạnh

I_n = số người nhiễm bệnh

$P_n = \frac{I_n}{H_n + I_n}$ = tỉ lệ dân số nhiễmm bệnh.
Giả sử dân số không đổi:

$$H_{n+1} + I_{n+1} = H_n + I_n.$$

17. (L.O.3.2) Từ các dữ kiện đã cho, ta cố

A. $\begin{cases} I_{n+1} &= 0.25I_n + 0.2H_n \\ H_{n+1} &= 0.75I_n + 0.8H_n. \end{cases}$
B. $\begin{cases} I_{n+1} &= 0.2I_n + 0.75H_n \\ H_{n+1} &= 0.8I_n + 0.25H_n. \end{cases}$
C. $\begin{cases} I_{n+1} &= 0.75I_n + 0.2H_n \\ H_{n+1} &= 0.25I_n + 0.8H_n. \end{cases}$
D. $\begin{cases} I_{n+1} &= 0.25I_n + 0.8H_n \\ H_{n+1} &= 0.2I_n + 0.2H_n. \end{cases}$

18. (L.O.3.2) Lưu ý rằng hệ phương trình trong Câu hỏi **??** tương thích với giả định dân số không đổi ở trên. Khi đó

A. $P_{n+1} = 0.2 + 0.75 * P_n$.
B. $P_{n+1} = 0.55 + 0.2 * P_n$.
C. $P_{n+1} = 0.25 + 0.75 * P_n$.
D. $P_{n+1} = 0.2 + 0.55 * P_n$.

19. (L.O.3.2) Hệ động lực trong Câu hỏi 24 cho ta biết rằng trong dài hạn (khi $n \to \infty$) tỉ lệ dân số nhiễm bệnh sẽ là

A. 66.66%. B. 33.33%. C. 55.55%. D. 44.44%.

20. (L.O.3.2) Xét một mô hình LP với các biến quyết định $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3, \cdots, x_{n-1}, x_n)^\top$ với m ràng buộc

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i, \quad \text{for } i = 1, \cdots, m.$$

Đặt F là tập hợp khả thi của mô hình này. Gọi $\boldsymbol{x}_{opt}$ là một giải pháp tối ưu. Bạn kết luận rằng

A. F là tập lồi và $\boldsymbol{x}_{opt}$ thỏa mãn mọi ràng buộc.
B. F bị giới hạn (bounded) và không có ràng buộc nào được thỏa mãn cho $\boldsymbol{x}_{opt}$.
C. F không bị giới hạn (unbounded) và $\boldsymbol{x}_{opt}$ thỏa mãn mọi ràng buộc.
D. F là tập lồi và $\boldsymbol{x}_{opt}$ thỏa mãn một vài ràng buộc.

Các CH từ 21– 23 cùng xét chung mô hình tăng trưởng logistic dưới đây.

Một quần thể sinh vật phát triển theo mô hình tăng trưởng logistic với số lượng tối đa (sức chứa) là 25,000 cá thể trong một khu vực nhất định. Giả sử ban đầu có 1500 cá thể và sau 5 năm tăng lên 5000 cá thể.

21. (L.O.3.2) Sau bao lâu quần thể sẽ đạt 20,000 cá thể?

A. 15.5 năm. B. 15 năm. C. 16 năm. D. 15.2 năm.

22. (L.O.3.2) What is the logistic growth rate of the population?

A. 0.3. B. 0.2. C. 0.25. D. 0.27.

23. (L.O.3.1) [Harmony question] Một công ty cần cắt những miếng hình chữ nhật nhỏ hơn từ tấm kim loại lớn với kích thước của tấm kim loại là 13 *inches* × 10 *inches* và nhu cầu về số lượng sản phẩm được nêu trong bảng sau.

Sản phẩm thứ i	Chiều dài (inches)	Chiều rộng (inches)	Số lượng
1	2	1	5
2	4	2	5
3	5	3	2
4	7	4	3
5	8	5	2

Hỏi cần sử dụng ít nhất bao nhiêu tấm kim loại để đáp ứng nhu cầu trên?

A. Phương án khác. B. 2. C. 3. D. 4.

24. (L.O.2.1) [Harmony question] Trong bài toán "2D Cut Stock Problem", thuật ngữ "trim loss" chỉ cho điều gì?

A. Số lượng mảnh cắt không đúng. B. Thời gian cần thiết để cắt vật liệu.
C. Chi phí cắt vật liệu. D. Vật liệu thừa còn lại sau khi cắt.

25. (L.O.3.2) Công ty khởi nghiệp của bạn có kế hoạch phát triển kinh doanh vào năm tới với tổng ngân sách là 10 triệu đô la Mỹ, để đầu tư vào hai lĩnh vực kinh tế: lĩnh vực **ICT** (có nghĩa là CNTT - Công nghệ thông tin và truyền thông) và lĩnh vực Sản xuất (**Manufacturing sector**).

- Ký hiệu hai biến x_1, x_2 [đơn vị 1 triệu đô la Mỹ] lần lượt là số tiền ngân sách chi cho lĩnh vực CNTT và chi cho lĩnh vực Sản xuất. Sau 1 năm đầu tư, lợi nhuận Z_1 thu được từ CNTT bằng 10% ngân sách đã chi, và lợi nhuận Z_2 thu được từ sản xuất bằng 30% ngân sách đã chi.
- Do đó, kế hoạch đầu tư của bạn có thể được xây dựng dưới dạng một mô hình tuyến tính với mục tiêu tối đa hóa hàm z (cung cấp lợi nhuận từ cả hai lĩnh vực), được đưa ra bởi:

$$\text{Maximize } z = Z_1 + Z_2.$$

Ngành CNTT thường có rủi ro cao hơn ngành Sản xuất, do đó chúng ta yêu cầu thêm rằng $-6 \leq 3x_1 - 3x_2$. Giải pháp tối ưu là $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2)^\top$ và giá trị tối ưu z_{max} tương ứng là

A. $\boldsymbol{x} = (4,\ 6)^\top$ và $z_{max} = 2.8$.
B. $\boldsymbol{x} = (5,\ 5)^\top$ và $z_{max} = 2.8$.
C. $\boldsymbol{x} = (6,\ 4)^\top$ và $z_{max} = 2.2$.
D. $\boldsymbol{x} = (4,\ 6)^\top$ và $z_{max} = 2.2$.

....HẾT BÀI THI..

Solution 4112

1. A.
2. B.
3. C.
4. B.
5. A.
6. C.
7. C.
8. C.
9. A.
10. C.
11. C.
12. A.
13. B.
14. B.
15. D.
16. A.
17. C.
18. D.
19. D.
20. A.
21. D.
22. D.
23. B.
24. D.
25. D.

Lecturer:	*November 15th, 2024*	**Approved by:**	*November 15th, 2024*
Nguyễn An Khương			

TRƯỜNG ĐẠI HỌC BÁCH KHOA - ĐHQG-HCM **KHOA KH&KT MÁY TÍNH**	**THI CUỐI KỲ**	HK/NH	1	24-25
		Ngày thi	24/12/24	
	Môn học	Mô hình hóa Toán học		
	Course ID	CO2011		
	Thời lượng	80 phút	Mã đề	4113

Ghi chú: - Sinh viên được phép sử dụng 01 tờ giấy A4 viết tay có chứa ghi chép cần thiết.
- SV phải ghi MSSV, họ và tên vào cuối trang này và nộp lại đề thi cùng với bài làm.
- Chọn phương án đúng nhất (chỉ chọn 1) cho mỗi câu hỏi.

KÝ HIỆU: Những từ viết tắt này có thể hữu ích trong kỳ thi.

- $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ lần lượt là tập hợp các số tự nhiên, số nguyên, số hữu tỉ và số thực.

1. (L.O.3.2) Tổng thống mới của quốc gia **V** đầu tư 15 triệu đô la Mỹ để xây dựng các trường cao đẳng khoa học mới với ngân sách x_1 và các trường kỹ thuật mới với ngân sách x_2 trong giai đoạn 2025-2028. Kế hoạch chi ngân sách cho các trường cao đẳng và trường kỹ thuật như vậy đáp ứng điều kiện về tỷ lệ đầu tư là $4x_2 - x_1 - 15 \leq 0$. Với khoản đầu tư này, trong vòng 4 năm tới, chính quyền mới cho rằng lợi nhuận từ việc xây dựng các trường cao đẳng mới Z_C bằng 20% ngân sách đã tính, và lợi nhuận từ việc xây dựng các trường kỹ thuật mới Z_T bằng 40% ngân sách đã tính. Hàm lợi nhuận được đưa ra bởi $z = Z_C + Z_T$.
Hàm lợi nhuận, giải pháp tối ưu $\boldsymbol{x} = [x_1,\ x_2]$ và giá trị tối ưu z_{OPT} lần lượt là

A. $z = 0.2\ x_1 + 0.4\ x_2,\ \ x_1 = 9,\ x_2 = 6;\ z_{OPT} = 4.2.$
B. $z = 0.4\ x_1 + 0.2\ x_2,\ \ x_1 = 9,\ x_2 = 6;;\ z_{OPT} = 4.$
C. $z = 0.2\ x_1 + 0.4\ x_2,\ \ x_1 = 5,\ x_2 = 9;\ z_{OPT} = 4.2.$
D. $z = 0.2\ x_1 + 0.4\ x_2,\ \ x_1 = 11,\ x_2 = 4;\ z_{OPT} = 3.8.$

2. (L.O.3.2) Trong thuật toán Nhánh-Cận (Brand-and-Bound), tại một bài toán quy hoạch tuyến tính con tồn tại nghiệm, khi nào thì chúng ta thực hiện ngắt nhánh (pruning, hay còn gọi là hiện tượng "fathomed")?

A. Khi nghiệm của bài toán con không tốt hơn nghiệm tốt nhất đã tìm được.
B. Khi nghiệm tìm được không thoả mãn điều kiện nguyên.
C. Khi nghiệm của bài toán con tốt hơn nghiệm tốt nhất đã tìm được.
D. Khi nghiệm tìm được thoả mãn điều kiện nguyên.

3. (L.O.3.1) [Harmony question] Cho $\mathcal{P} = \{p\}$ là tập hợp những sản phẩm, $\mathcal{S} = \{s\}$ là tập hợp tấm nguyên liệu, $c(s, p) \in \{0, 1\}$ là chỉ số cho biết tấm nguyên liệu s có được sử dụng để cắt sản phẩm p hay không. Về mặt lý thuyết, kích thước chính xác của tập hợp hành động (action set) ở bước đầu tiên là bao nhiêu?

A. Một số hữu hạn rất lớn.
B. Không có phương án nào đúng.
C. Vô cực (Infinity).
D. $|\mathcal{S}| \times |\mathcal{P}|$

4. (L.O.2.1) [Harmony question] Trong bài toán "2D Cut Stock Problem", thuật ngữ "trim loss" chỉ cho điều gì?

A. Thời gian cần thiết để cắt vật liệu.
B. Số lượng mảnh cắt không đúng.
C. Chi phí cắt vật liệu.
D. Vật liệu thừa còn lại sau khi cắt.

5. (L.O.3.1) [Harmony question] Một công ty cần cắt những miếng hình chữ nhật nhỏ hơn từ tấm kim loại lớn với kích thước của tấm kim loại là 13 *inches* × 10 *inches* và nhu cầu về số lượng sản phẩm được nêu trong bảng sau.

Sản phẩm thứ i	Chiều dài (inches)	Chiều rộng (inches)	Số lượng
1	2	1	5
2	4	2	5
3	5	3	2
4	7	4	3
5	8	5	2

Hỏi cần sử dụng ít nhất bao nhiêu tấm kim loại để đáp ứng nhu cầu trên?

A. 2. B. Phương án khác. C. 3. D. 4.

6. (L.O.3.2) Trong khu vực bảo tồn thiên nhiên, số lượng thỏ phát triển với tỷ lệ tăng trưởng không đổi là 25% mỗi năm. Ban đầu, số lượng là 200 con thỏ. Các thợ săn được phép săn một số lượng thỏ nhất định hàng năm để duy trì số lượng thỏ gần mức ban đầu nhằm bảo vệ sự cân bằng sinh thái trong khu vực bảo tồn.
Số lượng thỏ mà các thợ săn được phép săn mỗi năm nên là bao nhiêu trong các lựa chọn sau để số lượng thỏ duy trì gần 200 con nhất sau 3 năm, giả sử những người thợ săn luôn đạt đến mức cho phép hằng năm?

A. 40 B. 70 C. 50 D. 60

7. (L.O.3.1) [Harmony question] Mục tiêu tối ưu hóa của bài toán cutting stock problem là gì? Với $\mathcal{A}_t$ là tập hợp tất cả các hành động tại bước thời gian t và $f(s)$ là hàm để tính diện tích stock s.

A. $\arg\min_{a_{1:T}\in\mathcal{A}_{1:T}} \sum_{s_i\in\mathcal{S}\setminus\{s_t\in a_t\}} f(s_i)$
B. $\arg\inf_{a_{1:T}\in\mathcal{A}_{1:T}} \sum_{s_i\in\mathcal{S}\setminus\{s_t\in a_t\}} f(s_i)$
C. $\arg\max_{a_{1:T}\in\mathcal{A}_{1:T}} \sum_{s_i\in\mathcal{S}\setminus\{s_t\in a_t\}} f(s_i)$
D. $\arg\sup_{a_{1:T}\in\mathcal{A}_{1:T}} \sum_{s_i\in\mathcal{S}\setminus\{s_t\in a_t\}} f(s_i)$

8. (L.O.3.2) Trong thuật toán Nhánh-Cận (Brand-and-Bound), tại một bước giải bài toán con, cận trên của hàm mục tiêu được định nghĩa là:

A. ∞.
B. Giá trị hàm mục tiêu của nghiệm tốt nhất từng tìm được.
C. 0.
D. Không xác định được.

9. (L.O.3.2) Xét vấn đề lập kế hoạch ngân sách trong $m > 1$ giai đoạn được mô tả bằng mô hình IP nhị phân

$$\textbf{Model BIP}: \quad \max_{\boldsymbol{x}} \quad Z =^T \cdot \boldsymbol{x}$$
$$\text{subject to} \quad A\boldsymbol{x} \le \boldsymbol{b}$$
$$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3, \cdots, x_{n-1}, x_n)^T \in \{0,1\}^n = V$$

trong đó ma trận ràng buộc $A = [a_{ij}]$ có kích thước $m \times n$ với tất cả các $a_{ij} \ge 0$. Đặt F là **tập giải pháp khả thi** của Mô hình BIP. Rõ ràng $F \subset V = \{0,1\}^n$, tập hợp đỉnh của siêu khối $H_n = (V, E)$.. Tập hợp cạnh $E = \{\{\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\} : \ d(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = 1; \text{ with } \ \boldsymbol{u} = (u_1, u_2, \cdots, u_n)^T, \ \boldsymbol{v} = (v_1, v_2, \cdots, v_n)^T \in V\}$, trong đó $d(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = \sum_{i=1}^{n} |u_i - v_i|$ là khoảng cách Hamming giữa hai đỉnh $\boldsymbol{u}$ và $\boldsymbol{v}$.

- Đối với bất kỳ hàng $i = 1, 2, \ldots, m$, ràng buộc thứ i của $A\boldsymbol{x} \le \boldsymbol{b}$ được gọi là 'hợp lệ' hoặc 'phù hợp' nếu và chỉ $b_i \ge \sum_{j=1}^{n} a_{ij}$. Nếu không, nó được gọi là 'không hợp lệ' (không phù hợp).
- Đặt $P = \{j_0 \in \{1, 2, \ldots, n\} : \ \exists\, i \in \{1, 2, \ldots, m\} : a_{ij_0} > b_i\}$. P có thể được sử dụng để giảm kích thước của mô hình BIP.

Tổng số cạnh $|E|$ trong $H_n = (V, E)$ và kích thước tối đa m_F của F lần lượt là

A. $|E| = n\ 2^{n-|P|}$ và $m_F = 2^{n-1}$.
B. $|E| = \ 2^{n-1}$ và $m_F = n\ 2^{n-|P|}$.
C. $|E| = n\ 2^{n-1}$ và $m_F = 2^{n-|P|}$.
D. $|E| = n\ 2^{n-1}$ và $m_F = 2^{n-1}$.

10. (L.O.3.2) Xét một mô hình LP với các biến quyết định $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3, \cdots, x_{n-1}, x_n)^\top$ với m ràng buộc

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i, \quad \text{for } i = 1, \cdots, m.$$

Đặt F là tập hợp khả thi của mô hình này. Gọi $\boldsymbol{x}_{opt}$ là một giải pháp tối ưu. Bạn kết luận rằng

A. F bị giới hạn (bounded) và không có ràng buộc nào được thỏa mãn cho $\boldsymbol{x}_{opt}$.
B. F là tập lồi và $\boldsymbol{x}_{opt}$ thỏa mãn mọi ràng buộc.
C. F không bị giới hạn (unbounded) và $\boldsymbol{x}_{opt}$ thỏa mãn mọi ràng buộc.
D. F là tập lồi và $\boldsymbol{x}_{opt}$ thỏa mãn một vài ràng buộc.

11. (L.O.3.2) Tại vùng đất kỳ diệu Ecoville, nổi tiếng với cây cỏ xanh tươi và động vật hoang dã phong phú, một nhóm các nhà khoa học đã bắt tay vào một nhiệm vụ nghiên cứu các mô hình tăng trưởng của một loài thực vật hiếm. Loài thực vật đặc biệt này, được gọi là Hoa Lumina, đã thu hút sự tò mò của các nhà thực vật học vì tốc độ tăng trưởng nhanh của nó dưới các điều kiện môi trường khác nhau.
Các nhà khoa học quyết định theo dõi số lượng Hoa Lumina trong một khu vực được chỉ định trong khoảng thời gian 5 năm. Họ đã ghi nhận số lượng hoa vào cuối mỗi năm, và quan sát của họ như sau:

Time (t)	**Observed Population**
1	125
2	150
3	180
4	220
5	260

Bị cuốn hút bởi dữ liệu này, các nhà khoa học đã sử dụng các mô hình toán học khác nhau để mô tả sự tăng trưởng của hoa Lumina. Mô hình nào sau đây thể hiện tốt nhất (tổng sai số tuyệt đối bé nhất) dữ liệu quan sát của các nhà khoa học?

A. $P(t) = 100(1 + 0.22)^t$
B. $P(t) = 100e^{0.20t}$
C. $P(t) = 100(1 + 0.21)^t$
D. $P(t) = 100e^{0.21t}$

12. (L.O.3.2) Trong thành phố Công Nghệ, có hai nhà khoa học là TS.Sáng Tạo và TS.Tiến Bộ. Hai ông này đang nghiên cứu các quần thể vi khuẩn khác nhau trong các phòng thí nghiệm công nghệ cao của họ. TS.Sáng Tạo bắt đầu với một quần thể 1000 vi khuẩn, số lượng này tăng gấp ba mỗi 6 giờ. Trong khi đó, TS.Tiến Bộ bắt đầu với một quần thể khác gồm 3375 vi khuẩn và số lượng này tăng gấp đôi mỗi 6 giờ.

Một ngày nọ, sau khi quan sát các quần thể, họ quyết định so sánh kết quả của mình. Mục tiêu của họ là xem quần thể vi khuẩn của ai đạt đến số lượng cao nhất trong một khung thời gian nhất định.
Dựa trên các quan sát của họ, phát biểu nào sau đây là đúng?

A. Sau 30 giờ, cả hai quần thể sẽ vượt mức 200000 vi khuẩn
B. Sau 18 giờ, cả hai quần thể sẽ bằng nhau ở mức 27000 vi khuẩn, và sau 24 giờ, quần thể của TS.Tiến Bộ sẽ đạt 81000 vi khuẩn.
C. Sau 18 giờ, quần thể của TS.Sáng Tạo đạt 27000 vi khuẩn, trong khi quần thể của TS.Tiến Bộ đạt 100000 vi khuẩn.
D. Quần thể của TS.Tiến Bộ vẫn lớn hơn quần thể của TS.Sáng Tạo sau 15 giờ.

13. (L.O.3.2) Xét bài toán quy hoạch tuyến tính sau.

$$\begin{aligned} \max \quad & P = x + 4y - 2z \\ \text{subject to} \quad & \\ & x + 2y - 3z \le 4, \\ & 5x + 6y + 7z \le 8, \\ & 9x + 10y - 11z \le 12, \\ & 13x - 14y - 15z \le 16, \\ & x, y, z \ge 0. \end{aligned}$$

Cần bao nhiêu biến phụ (slack variable) được thêm vào mô hình trên để giải bằng phương pháp đơn hình?

A. 1. B. 4. C. 2. D. 3.

Các CH từ 14– 16 cùng xét chung mô hình tăng trưởng logistic dưới đây.

Một quần thể sinh vật phát triển theo mô hình tăng trưởng logistic với số lượng tối đa (sức chứa) là

25,000 cá thể trong một khu vực nhất định. Giả sử ban đầu có 1500 cá thể và sau 5 năm tăng lên 5000 cá thể.

14. (L.O.3.2) Sau bao lâu quần thể sẽ đạt 20,000 cá thể?

A. 15 năm. B. 15.5 năm. C. 16 năm. D. 15.2 năm.

15. (L.O.3.2) What is the logistic growth rate of the population?

A. 0.2. B. 0.3. C. 0.25. D. 0.27.

16. (L.O.3.2) Xét bảng đơn hình sau tại một bước lặp của phương pháp đơn hình giải bài toán quy hoạch tuyến tính dạng chuẩn tìm giá trị lớn nhất (standard maximization).

x	y	u	v	
$\frac{1}{2}$	1	0	$\frac{1}{2}$	11000
2	0	$\frac{2}{3}$	$-\frac{3}{4}$	16000
-1	0	0	3	2

Giá trị của (x, y) bằng bao nhiêu để hàm mục tiêu đạt giá trị lớn nhất?

A. $(8000, 7000)$. B. $(16000, 11000)$. C. $(7000, 8000)$. D. $(11000, 16000)$.

17. (L.O.3.2) Xét bảng đơn hình sau tại một bước lặp của phương pháp đơn hình

A_{1j}	4	2	5	1	0	0	80
A_{2j}	-2	-5	1	0	1	0	10
A_{3j}	7	3	-3	0	0	1	21
R_j	-9	-18	-12	0	0	0	0

Hàng nào sẽ được chọn để xác định phần tử trục (còn gọi là phần tử xoay - pivot)?

A. A_{1j}. B. r_j. C. A_{3j}. D. A_{2j}.

Các CH từ 18– 20 dùng dữ kiện chung dưới đây.

Xét một quần thể bị ảnh hưởng bởi dịch bệnh, trong đó các cá thể chuyển đổi giữa trạng thái khỏe mạnh và nhiễm bệnh mỗi tháng. Trong mô hình thời gian rời rạc này, 25% số người nhiễm bệnh hồi phục và trở lại trạng thái khỏe mạnh, trong khi 20% số người khỏe mạnh trở nên nhiễm bệnh. Với mỗi tháng n, ta định nghĩa:

H_n = số người khoẻ mạnh

I_n = số người nhiễm bệnh

$P_n = \frac{I_n}{H_n+I_n}$ = tỉ lệ dân số nhiễmm bệnh.

Giả sử dân số không đổi:

$$H_{n+1} + I_{n+1} = H_n + I_n.$$

18. (L.O.3.2) Từ các dữ kiện đã cho, ta cố

A. $\begin{cases} I_{n+1} &= 0.2I_n + 0.75H_n \\ H_{n+1} &= 0.8I_n + 0.25H_n. \end{cases}$ B. $\begin{cases} I_{n+1} &= 0.25I_n + 0.2H_n \\ H_{n+1} &= 0.75I_n + 0.8H_n. \end{cases}$

C. $\begin{cases} I_{n+1} &= 0.75I_n + 0.2H_n \\ H_{n+1} &= 0.25I_n + 0.8H_n. \end{cases}$ D. $\begin{cases} I_{n+1} &= 0.25I_n + 0.8H_n \\ H_{n+1} &= 0.2I_n + 0.2H_n. \end{cases}$

19. (L.O.3.2) Lưu ý rằng hệ phương trình trong Câu hỏi **??** tương thích với giả định dân số không đổi ở trên. Khi đó

A. $P_{n+1} = 0.55 + 0.2 * P_n$. B. $P_{n+1} = 0.2 + 0.75 * P_n$.

C. $P_{n+1} = 0.25 + 0.75 * P_n$. D. $P_{n+1} = 0.2 + 0.55 * P_n$.

20. (L.O.3.2) Hệ động lực trong Câu hỏi 24 cho ta biết rằng trong dài hạn (khi $n \to \infty$) tỉ lệ dân số nhiễm bệnh sẽ là

A. 33.33%. B. 66.66%. C. 55.55%. D. 44.44%.

21. (L.O.3.2) Trong thành phố Tài Chính, An và Chí quyết định đầu tư tiền của họ vào các tài khoản tiết kiệm khác nhau do Ngân hàng Thịnh Vượng cung cấp. Cả hai bắt đầu với \$1000, nhưng họ chọn các tài khoản với cấu trúc lãi suất khác nhau:

- **Tài khoản của An:**
  - Số tiền gửi ban đầu: \$1000
  - Lãi suất: 55% hàng năm, cộng gộp hàng quý
  - Gửi thêm: \$80 vào cuối mỗi năm
- **Tài khoản của Chí:**
  - Số tiền gửi ban đầu: \$1000
  - Lãi suất: 55% hàng năm, cộng gộp hàng tháng

Ở cuối năm thứ mấy thì tổng tiền lãi của Chí vượt tổng tiền lãi của An lần đầu tiên?

A. 2 B. đáp án khác C. 3 D. 4

22. (L.O.3.2) TOM - một người hâm mộ hamburger ở thành phố New York - đến một cửa hàng McDonald để ăn trưa, chỉ có 34 đô la trong túi. Giả sử mỗi chiếc Mac nhỏ có giá 3 đô la, mỗi chiếc Mac vừa có giá 4 đô la và mỗi chiếc Big Mac có giá 5 đô la. Ký hiệu x_1, x_2, x_3 là số cái hamburger tương ứng với Mac nhỏ, Mac vừa và Big Mac mà anh ta có thể mua.
TOM tự hỏi, có lẽ kế hoạch của anh ta ít nhất phải thỏa mãn điều kiện $3x_1 + 5x_2 + 4x_3 \leq 34;\ x_i \in \mathbb{Z},\ \forall i = 1, 2, 3$, nhưng không chắc chắn!! Giả sử thêm rằng TOM rất đói vào ngày hôm đó, anh quyết định không ăn bánh hamburger Mac cỡ nhỏ và vừa, và chỉ thích ăn Big Mac.
Các ràng buộc đơn giản phù hợp và số lượng Big Mac tối đa K mà anh có thể gọi lần lượt là

A. $3x_1 + 4x_2 + 5x_3 \leq 34;\ x_i \in \mathbb{Z},\ \forall i = 1, 2, 3$, và $K = 5$.
B. $3x_1 + 4x_2 + 5x_3 \leq 34;\ x_i \in \mathbb{N},\ \forall i \in \{1, 2, 3\}$ và $K = 6$.
C. $3x_1 + 4x_2 + 5x_3 \leq 34;\ x_i \in \mathbb{N},\ \exists i \in \{1, 2, 3\}$ và $K = 6$.
D. $3x_1 + 4x_2 + 5x_3 \leq 34;\ x_1, x_2, x_3 \geq 0$ và $K = 6$.

23. (L.O.3.2) Có một khu rừng rộng lớn tên là Everwood, nơi mà các loài thú đang sinh sống và phát triển. Trong khu rừng này, có một loài đặc biệt là loài hươu đốm. Loài hươu đốm này có đặc điểm sinh học đặc biệt và được nghiên cứu để hiểu rõ hơn về sự phát triển và biến động dân số của chúng. TS.Eric nhận thấy rằng quần thể hươu đốm trong khu rừng Everwood đang có những biến động lớn và muốn hiểu rõ hơn về các yếu tố ảnh hưởng đến sự phát triển của chúng. Ông đã quan sát và xây dựng một mô hình toán học để mô phỏng sự thay đổi của quần thể hươu đốm theo thời gian như sau:

$$\frac{dP}{dt} = 0.5P\left(1 - \frac{P}{100}\right) - 0.1P$$

trong đó,

- $r = 0.5$: tốc độ tăng trưởng
- $K = 100$: sức chứa của môi trường
- $m = 0.1$: tỷ lệ di cư

Chọn câu trả lời gần đúng nhất (sai số nhỏ nhất) với điểm cân bằng của quần thể hươu đốm này, biết rằng hiện tại quần thể có 50 cá thể.

A. 75 B. 100 C. 50 D. 150

24. (L.O.3.1) [Harmony question] TRong mô hình học tăng cường (reinforcement learning) để giải bài toán stock cutting problem thì thông tin nào cần có trong một hành động (action)?

A. Thông tin vật liệu. B. Vị trí cắt. C. Tất cả phương án đều đúng.
D. Thông tin sản phẩm.

25. (L.O.3.2) Công ty khởi nghiệp của bạn có kế hoạch phát triển kinh doanh vào năm tới với tổng ngân sách là 10 triệu đô la Mỹ, để đầu tư vào hai lĩnh vực kinh tế: lĩnh vực **ICT** (có nghĩa là CNTT - Công nghệ thông tin và truyền thông) và lĩnh vực Sản xuất (**Manufacturing sector**).

- Ký hiệu hai biến x_1, x_2 [đơn vị 1 triệu đô la Mỹ] lần lượt là số tiền ngân sách chi cho lĩnh vực CNTT và chi cho lĩnh vực Sản xuất. Sau 1 năm đầu tư, lợi nhuận Z_1 thu được từ CNTT bằng 10% ngân sách đã chi, và lợi nhuận Z_2 thu được từ sản xuất bằng 30% ngân sách đã chi.

- Do đó, kế hoạch đầu tư của bạn có thể được xây dựng dưới dạng một mô hình tuyến tính với mục tiêu tối đa hóa hàm z (cung cấp lợi nhuận từ cả hai lĩnh vực), được đưa ra bởi:

$$\text{Maximize } z = Z_1 + Z_2.$$

Ngành CNTT thường có rủi ro cao hơn ngành Sản xuất, do đó chúng ta yêu cầu thêm rằng $-6 \leq 3x_1 - 3x_2$. Giải pháp tối ưu là $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2)^\top$ và giá trị tối ưu z_{max} tương ứng là

A. $\boldsymbol{x} = (5,\ 5)^\top$ và $z_{max} = 2.8$. B. $\boldsymbol{x} = (4,\ 6)^\top$ và $z_{max} = 2.8$.
C. $\boldsymbol{x} = (6,\ 4)^\top$ và $z_{max} = 2.2$. D. $\boldsymbol{x} = (4,\ 6)^\top$ và $z_{max} = 2.2$.

.... HẾT BÀI THI ....

Solution 4113

1. A.
2. A.
3. C.
4. D.
5. A.
6. B.
7. C.
8. B.
9. C.
10. B.
11. C.
12. D.
13. B.
14. D.
15. D.
16. A.
17. C.
18. C.
19. D.
20. D.
21. B.
22. B.
23. A.
24. C.
25. D.

Lecturer:	*November 15th, 2024*	**Approved by:**	*November 15th, 2024*
Nguyễn An Khương			

TRƯỜNG ĐẠI HỌC BÁCH KHOA - ĐHQG-HCM KHOA KH&KT MÁY TÍNH	THI CUỐI KỲ	HK/NH	1	24-25
		Ngày thi	24/12/24	
	Môn học	Mô hình hóa Toán học		
	Course ID	CO2011		
	Thời lượng	80 phút	Mã đề	4114

Ghi chú: - Sinh viên được phép sử dụng 01 tờ giấy A4 viết tay có chứa ghi chép cần thiết.
- SV phải ghi MSSV, họ và tên vào cuối trang này và nộp lại đề thi cùng với bài làm.
- Chọn phương án đúng nhất (chỉ chọn 1) cho mỗi câu hỏi.

KÝ HIỆU: Những từ viết tắt này có thể hữu ích trong kỳ thi.

- $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ lần lượt là tập hợp các số tự nhiên, số nguyên, số hữu tỉ và số thực.

1. (L.O.3.2) Xét vấn đề lập kế hoạch ngân sách trong $m > 1$ giai đoạn được mô tả bằng mô hình IP nhị phân

$$\textbf{Model BIP}: \quad \max_{\boldsymbol{x}} \quad Z =^T \cdot \boldsymbol{x}$$
$$\text{subject to} \quad A\boldsymbol{x} \le \boldsymbol{b}$$
$$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3, \cdots, x_{n-1}, x_n)^T \in \{0,1\}^n = V$$

trong đó ma trận ràng buộc $A = [a_{ij}]$ có kích thước $m \times n$ với tất cả các $a_{ij} \ge 0$. Đặt F là **tập giải pháp khả thi** của Mô hình BIP. Rõ ràng $F \subset V = \{0,1\}^n$, tập hợp đỉnh của siêu khối $H_n = (V, E)$.. Tập hợp cạnh $E = \{\{\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\} : d(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = 1;$ with $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, \cdots, u_n)^T, \ \boldsymbol{v} = (v_1, v_2, \cdots, v_n)^T \in V\}$, trong đó $d(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = \sum_{i=1}^{n} |u_i - v_i|$ là khoảng cách Hamming giữa hai đỉnh $\boldsymbol{u}$ và $\boldsymbol{v}$.

- Đối với bất kỳ hàng $i = 1, 2, \ldots, m$, ràng buộc thứ i của $A\boldsymbol{x} \le \boldsymbol{b}$ được gọi là 'hợp lệ' hoặc 'phù hợp' nếu và chỉ $b_i \ge \sum_{j=1}^{n} a_{ij}$. Nếu không, nó được gọi là 'không hợp lệ' (không phù hợp).
- Đặt $P = \{j_0 \in \{1, 2, \ldots, n\} : \exists\, i \in \{1, 2, \ldots, m\} : a_{ij_0} > b_i\}$. P có thể được sử dụng để giảm kích thước của mô hình BIP.

Tổng số cạnh $|E|$ trong $H_n = (V, E)$ và kích thước tối đa m_F của F lần lượt là

A. $|E| = n\ 2^{n-|P|}$ và $m_F = 2^{n-1}$.
B. $|E| = n\ 2^{n-1}$ và $m_F = 2^{n-1}$.
C. $|E| = n\ 2^{n-1}$ và $m_F = 2^{n-|P|}$.
D. $|E| = \ 2^{n-1}$ và $m_F = n\ 2^{n-|P|}$.

2. (L.O.3.2) Xét bài toán quy hoạch tuyến tính sau.

$$\begin{aligned}
\max \quad & P = x + 4y - 2z \\
\text{subject to} \quad & \\
& x + 2y - 3z \leq 4, \\
& 5x + 6y + 7z \leq 8, \\
& 9x + 10y - 11z \leq 12, \\
& 13x - 14y - 15z \leq 16, \\
& x, y, z \geq 0.
\end{aligned}$$

Cần bao nhiêu biến phụ (slack variable) được thêm vào mô hình trên để giải bằng phương pháp đơn hình?

A. 1. B. 3. C. 2. D. 4.

3. (L.O.3.2) Trong khu vực bảo tồn thiên nhiên, số lượng thỏ phát triển với tỷ lệ tăng trưởng không đổi là 25% mỗi năm. Ban đầu, số lượng là 200 con thỏ. Các thợ săn được phép săn một số lượng thỏ nhất định hàng năm để duy trì số lượng thỏ gần mức ban đầu nhằm bảo vệ sự cân bằng sinh thái trong khu vực bảo tồn.
Số lượng thỏ mà các thợ săn được phép săn mỗi năm nên là bao nhiêu trong các lựa chọn sau để số lượng thỏ duy trì gần 200 con nhất sau 3 năm, giả sử những người thợ săn luôn đạt đến mức cho phép hằng năm?

A. 40 B. 60 C. 50 D. 70

4. (L.O.3.1) [Harmony question] Mục tiêu tối ưu hóa của bài toán cutting stock problem là gì? Với $\mathcal{A}_t$ là tập hợp tất cả các hành động tại bước thời gian t và $f(s)$ là hàm để tính diện tích stock s.

A. $\arg\min_{a_{1:T} \in \mathcal{A}_{1:T}} \sum_{s_i \in \mathcal{S} \setminus \{s_t \in a_t\}} f(s_i)$ B. $\arg\sup_{a_{1:T} \in \mathcal{A}_{1:T}} \sum_{s_i \in \mathcal{S} \setminus \{s_t \in a_t\}} f(s_i)$
C. $\arg\max_{a_{1:T} \in \mathcal{A}_{1:T}} \sum_{s_i \in \mathcal{S} \setminus \{s_t \in a_t\}} f(s_i)$ D. $\arg\inf_{a_{1:T} \in \mathcal{A}_{1:T}} \sum_{s_i \in \mathcal{S} \setminus \{s_t \in a_t\}} f(s_i)$

Các CH từ 5– 7 cùng xét chung mô hình tăng trưởng logistic dưới đây.

Một quần thể sinh vật phát triển theo mô hình tăng trưởng logistic với số lượng tối đa (sức chứa) là 25,000 cá thể trong một khu vực nhất định. Giả sử ban đầu có 1500 cá thể và sau 5 năm tăng lên 5000 cá thể.

5. (L.O.3.2) Sau bao lâu quần thể sẽ đạt 20,000 cá thể?

A. 15 năm. B. 15.2 năm. C. 16 năm. D. 15.5 năm.

6. (L.O.3.2) What is the logistic growth rate of the population?

A. 0.2. B. 0.27. C. 0.25. D. 0.3.

7. (L.O.3.2) Trong thuật toán Nhánh-Cận (Brand-and-Bound), tại một bài toán quy hoạch tuyến tính con tồn tại nghiệm, khi nào thì chúng ta thực hiện ngắt nhánh (pruning, hay còn gọi là hiện tượng "fathomed")?

A. Khi nghiệm của bài toán con không tốt hơn nghiệm tốt nhất đã tìm được.
B. Khi nghiệm tìm được thoả mãn điều kiện nguyên.
C. Khi nghiệm của bài toán con tốt hơn nghiệm tốt nhất đã tìm được.
D. Khi nghiệm tìm được không thoả mãn điều kiện nguyên.

8. (L.O.3.2) Xét một mô hình LP với các biến quyết định $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3, \cdots, x_{n-1}, x_n)^\top$ với m ràng buộc

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leq b_i, \quad \text{for } i = 1, \cdots, m.$$

Đặt F là tập hợp khả thi của mô hình này. Gọi $\boldsymbol{x}_{opt}$ là một giải pháp tối ưu. Bạn kết luận rằng

A. F bị giới hạn (bounded) và không có ràng buộc nào được thỏa mãn cho $\boldsymbol{x}_{opt}$.
B. F là tập lồi và $\boldsymbol{x}_{opt}$ thỏa mãn một vài ràng buộc.
C. F không bị giới hạn (unbounded) và $\boldsymbol{x}_{opt}$ thỏa mãn mọi ràng buộc.
D. F là tập lồi và $\boldsymbol{x}_{opt}$ thỏa mãn mọi ràng buộc.

9. (L.O.3.2) Công ty khởi nghiệp của bạn có kế hoạch phát triển kinh doanh vào năm tới với tổng ngân sách là 10 triệu đô la Mỹ, để đầu tư vào hai lĩnh vực kinh tế: lĩnh vực **ICT** (có nghĩa là CNTT - Công nghệ thông tin và truyền thông) và lĩnh vực Sản xuất (**Manufacturing sector**).

- Ký hiệu hai biến x_1, x_2 [đơn vị 1 triệu đô la Mỹ] lần lượt là số tiền ngân sách chi cho lĩnh vực CNTT và chi cho lĩnh vực Sản xuất. Sau 1 năm đầu tư, lợi nhuận Z_1 thu được từ CNTT bằng 10% ngân sách đã chi, và lợi nhuận Z_2 thu được từ sản xuất bằng 30% ngân sách đã chi.

- Do đó, kế hoạch đầu tư của bạn có thể được xây dựng dưới dạng một mô hình tuyến tính với mục tiêu tối đa hóa hàm z (cung cấp lợi nhuận từ cả hai lĩnh vực), được đưa ra bởi:

$$\text{Maximize } z = Z_1 + Z_2.$$

Ngành CNTT thường có rủi ro cao hơn ngành Sản xuất, do đó chúng ta yêu cầu thêm rằng $-6 \leq 3x_1 - 3x_2$. Giải pháp tối ưu là $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2)^\top$ và giá trị tối ưu z_{max} tương ứng là

A. $\boldsymbol{x} = (5,\ 5)^\top$ và $z_{max} = 2.8$.
B. $\boldsymbol{x} = (4,\ 6)^\top$ và $z_{max} = 2.2$.
C. $\boldsymbol{x} = (6,\ 4)^\top$ và $z_{max} = 2.2$.
D. $\boldsymbol{x} = (4,\ 6)^\top$ và $z_{max} = 2.8$.

10. (L.O.3.2) Trong thuật toán Nhánh-Cận (Brand-and-Bound), tại một bước giải bài toán con, cận trên của hàm mục tiêu được định nghĩa là:

A. ∞.
B. Không xác định được.
C. 0.
D. Giá trị hàm mục tiêu của nghiệm tốt nhất từng tìm được.

11. (L.O.3.2) Xét bảng đơn hình sau tại một bước lặp của phương pháp đơn hình

A_{1j}	4	2	5	1	0	0	80
A_{2j}	-2	-5	1	0	1	0	10
A_{3j}	7	3	-3	0	0	1	21
R_j	-9	-18	-12	0	0	0	0

Hàng nào sẽ được chọn để xác định phần tử trục (còn gọi là phần tử xoay - pivot)?

A. A_{1j}.
B. A_{2j}.
C. A_{3j}.
D. r_j.

12. (L.O.3.2) Trong thành phố Công Nghệ, có hai nhà khoa học là TS.Sáng Tạo và TS.Tiến Bộ. Hai ông này đang nghiên cứu các quần thể vi khuẩn khác nhau trong các phòng thí nghiệm công nghệ cao của họ. TS.Sáng Tạo bắt đầu với một quần thể 1000 vi khuẩn, số lượng này tăng gấp ba mỗi 6 giờ. Trong khi đó, TS.Tiến Bộ bắt đầu với một quần thể khác gồm 3375 vi khuẩn và số lượng này tăng gấp đôi mỗi 6 giờ.

 Một ngày nọ, sau khi quan sát các quần thể, họ quyết định so sánh kết quả của mình. Mục tiêu của họ là xem quần thể vi khuẩn của ai đạt đến số lượng cao nhất trong một khung thời gian nhất định. Dựa trên các quan sát của họ, phát biểu nào sau đây là đúng?

A. Sau 30 giờ, cả hai quần thể sẽ vượt mức 200000 vi khuẩn

B. Quần thể của TS.Tiến Bộ vẫn lớn hơn quần thể của TS.Sáng Tạo sau 15 giờ.

C. Sau 18 giờ, quần thể của TS.Sáng Tạo đạt 27000 vi khuẩn, trong khi quần thể của TS.Tiến Bộ đạt 100000 vi khuẩn.

D. Sau 18 giờ, cả hai quần thể sẽ bằng nhau ở mức 27000 vi khuẩn, và sau 24 giờ, quần thể của TS.Tiến Bộ sẽ đạt 81000 vi khuẩn.

13. (L.O.3.1) [Harmony question] Cho $\mathcal{P} = \{p\}$ là tập hợp những sản phẩm, $\mathcal{S} = \{s\}$ là tập hợp tấm nguyên liệu, $c(s, p) \in \{0, 1\}$ là chỉ số cho biết tấm nguyên liệu s có được sử dụng để cắt sản phẩm p hay không. Về mặt lý thuyết, kích thước chính xác của tập hợp hành động (action set) ở bước đầu tiên là bao nhiêu?

A. Một số hữu hạn rất lớn.

B. $|\mathcal{S}| \times |\mathcal{P}|$

C. Vô cực (Infinity).

D. Không có phương án nào đúng.

14. (L.O.3.2) Có một khu rừng rộng lớn tên là Everwood, nơi mà các loài thú đang sinh sống và phát triển. Trong khu rừng này, có một loài đặc biệt là loài hươu đốm. Loài hươu đốm này có đặc điểm sinh học đặc biệt và được nghiên cứu để hiểu rõ hơn về sự phát triển và biến động dân số của chúng. TS.Eric nhận thấy rằng quần thể hươu đốm trong khu rừng Everwood đang có những biến động lớn và muốn hiểu rõ hơn về các yếu tố ảnh hưởng đến sự phát triển của chúng. Ông đã quan sát và xây dựng một mô hình toán học để mô phỏng sự thay đổi của quần thể hươu đốm theo thời gian như sau:

$$\frac{dP}{dt} = 0.5P(1 - \frac{P}{100}) - 0.1P$$

 trong đó,

- $r = 0.5$: tốc độ tăng trưởng
- $K = 100$: sức chứa của môi trường
- $m = 0.1$: tỷ lệ di cư

 Chọn câu trả lời gần đúng nhất (sai số nhỏ nhất) với điểm cân bằng của quần thể hươu đốm này, biết rằng hiện tại quần thể có 50 cá thể.

A. 75

B. 150

C. 50

D. 100

15. (L.O.3.2) Tại vùng đất kỳ diệu Ecoville, nổi tiếng với cây cỏ xanh tươi và động vật hoang dã phong phú, một nhóm các nhà khoa học đã bắt tay vào một nhiệm vụ nghiên cứu các mô hình tăng trưởng của một loài thực vật hiếm. Loài thực vật đặc biệt này, được gọi là Hoa Lumina, đã thu hút sự tò mò của các nhà thực vật học vì tốc độ tăng trưởng nhanh của nó dưới các điều kiện môi trường khác nhau.
Các nhà khoa học quyết định theo dõi số lượng Hoa Lumina trong một khu vực được chỉ định trong khoảng thời gian 5 năm. Họ đã ghi nhận số lượng hoa vào cuối mỗi năm, và quan sát của họ như sau:

Time (t)	**Observed Population**
1	125
2	150
3	180
4	220
5	260

Bị cuốn hút bởi dữ liệu này, các nhà khoa học đã sử dụng các mô hình toán học khác nhau để mô tả sự tăng trưởng của hoa Lumina. Mô hình nào sau đây thể hiện tốt nhất (tổng sai số tuyệt đối bé nhất) dữ liệu quan sát của các nhà khoa học?

A. $P(t) = 100(1 + 0.22)^t$
B. $P(t) = 100e^{0.21t}$
C. $P(t) = 100(1 + 0.21)^t$
D. $P(t) = 100e^{0.20t}$

16. (L.O.3.2) Tổng thống mới của quốc gia **V** đầu tư 15 triệu đô la Mỹ để xây dựng các trường cao đẳng khoa học mới với ngân sách x_1 và các trường kỹ thuật mới với ngân sách x_2 trong giai đoạn 2025-2028. Kế hoạch chi ngân sách cho các trường cao đẳng và trường kỹ thuật như vậy đáp ứng điều kiện về tỷ lệ đầu tư là $4x_2 - x_1 - 15 \leq 0$. Với khoản đầu tư này, trong vòng 4 năm tới, chính quyền mới cho rằng lợi nhuận từ việc xây dựng các trường cao đẳng mới Z_C bằng 20% ngân sách đã tính, và lợi nhuận từ việc xây dựng các trường kỹ thuật mới Z_T bằng 40% ngân sách đã tính. Hàm lợi nhuận được đưa ra bởi $z = Z_C + Z_T$.
Hàm lợi nhuận, giải pháp tối ưu $\boldsymbol{x} = [x_1,\ x_2]$ và giá trị tối ưu z_{OPT} lần lượt là

A. $z = 0.2\,x_1 + 0.4\,x_2,\ \ x_1 = 9,\ x_2 = 6;\ z_{OPT} = 4.2.$
B. $z = 0.2\,x_1 + 0.4\,x_2,\ \ x_1 = 11,\ x_2 = 4;\ z_{OPT} = 3.8.$
C. $z = 0.2\,x_1 + 0.4\,x_2,\ \ x_1 = 5,\ x_2 = 9;\ z_{OPT} = 4.2.$
D. $z = 0.4\,x_1 + 0.2\,x_2,\ \ x_1 = 9,\ x_2 = 6;;\ z_{OPT} = 4.$

17. (L.O.3.2) Xét bảng đơn hình sau tại một bước lặp của phương pháp đơn hình giải bài toán quy hoạch tuyến tính dạng chuẩn tìm giá trị lớn nhất (standard maximization).

$$\begin{array}{cccc|c}
x & y & u & v & \\
\hline
\frac{1}{2} & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 11000 \\
2 & 0 & \frac{2}{3} & -\frac{3}{4} & 16000 \\
\hline
-1 & 0 & 0 & 3 & 2
\end{array}$$

Giá trị của (x, y) bằng bao nhiêu để hàm mục tiêu đạt giá trị lớn nhất?

A. $(8000, 7000)$.
B. $(11000, 16000)$.
C. $(7000, 8000)$.
D. $(16000, 11000)$.

18. (L.O.3.2) Trong thành phố Tài Chính, An và Chí quyết định đầu tư tiền của họ vào các tài khoản tiết kiệm khác nhau do Ngân hàng Thịnh Vượng cung cấp. Cả hai bắt đầu với \$1000, nhưng họ chọn các tài khoản với cấu trúc lãi suất khác nhau:

- **Tài khoản của An:**
  - Số tiền gửi ban đầu: \$1000
  - Lãi suất: 55% hàng năm, cộng gộp hàng quý
  - Gửi thêm: \$80 vào cuối mỗi năm
- **Tài khoản của Chí:**
  - Số tiền gửi ban đầu: \$1000
  - Lãi suất: 55% hàng năm, cộng gộp hàng tháng

Ở cuối năm thứ mấy thì tổng tiền lãi của Chí vượt tổng tiền lãi của An lần đầu tiên?

A. 2 B. 4 C. 3 D. đáp án khác

19. (L.O.3.2) TOM - một người hâm mộ hamburger ở thành phố New York - đến một cửa hàng McDonald để ăn trưa, chỉ có 34 đô la trong túi. Giả sử mỗi chiếc Mac nhỏ có giá 3 đô la, mỗi chiếc Mac vừa có giá 4 đô la và mỗi chiếc Big Mac có giá 5 đô la. Ký hiệu x_1, x_2, x_3 là số cái hamburger tương ứng với Mac nhỏ, Mac vừa và Big Mac mà anh ta có thể mua.
TOM tự hỏi, có lẽ kế hoạch của anh ta ít nhất phải thỏa mãn điều kiện $3x_1 + 5x_2 + 4x_3 \leq 34;\ x_i \in \mathbb{Z},\ \forall i = 1, 2, 3$, nhưng không chắc chắn!! Giả sử thêm rằng TOM rất đói vào ngày hôm đó, anh quyết định không ăn bánh hamburger Mac cỡ nhỏ và vừa, và chỉ thích ăn Big Mac.
Các ràng buộc đơn giản phù hợp và số lượng Big Mac tối đa K mà anh có thể gọi lần lượt là

A. $3x_1 + 4x_2 + 5x_3 \leq 34;\ x_i \in \mathbb{Z},\ \forall i = 1, 2, 3$, và $K = 5$.
B. $3x_1 + 4x_2 + 5x_3 \leq 34;\ x_1, x_2, x_3 \geq 0$ và $K = 6$.
C. $3x_1 + 4x_2 + 5x_3 \leq 34;\ x_i \in \mathbb{N},\ \exists i \in \{1, 2, 3\}$ và $K = 6$.
D. $3x_1 + 4x_2 + 5x_3 \leq 34;\ x_i \in \mathbb{N},\ \forall i \in \{1, 2, 3\}$ và $K = 6$.

20. (L.O.2.1) [Harmony question] Trong bài toán “2D Cut Stock Problem”, thuật ngữ “trim loss” chỉ cho điều gì?

A. Thời gian cần thiết để cắt vật liệu. B. Vật liệu thừa còn lại sau khi cắt.
C. Chi phí cắt vật liệu. D. Số lượng mảnh cắt không đúng.

21. (L.O.3.1) [Harmony question] TRong mô hình học tăng cường (reinforcement learning) để giải bài toán stock cutting problem thì thông tin nào cần có trong một hành động (action)?

A. Thông tin vật liệu. B. Thông tin sản phẩm. C. Tất cả phương án đều đúng.
D. Vị trí cắt.

22. (L.O.3.1) [Harmony question] Một công ty cần cắt những miếng hình chữ nhật nhỏ hơn từ tấm kim loại lớn với kích thước của tấm kim loại là 13 *inches* × 10 *inches* và nhu cầu về số lượng sản phẩm được nêu trong bảng sau.

Sản phẩm thứ i	Chiều dài (inches)	Chiều rộng (inches)	Số lượng
1	2	1	5
2	4	2	5
3	5	3	2
4	7	4	3
5	8	5	2

Hỏi cần sử dụng ít nhất bao nhiêu tấm kim loại để đáp ứng nhu cầu trên?

A. 2. B. 4. C. 3. D. Phương án khác.

Các CH từ 23– 25 dùng dữ kiện chung dưới đây.

Xét một quần thể bị ảnh hưởng bởi dịch bệnh, trong đó các cá thể chuyển đổi giữa trạng thái khỏe mạnh và nhiễm bệnh mỗi tháng. Trong mô hình thời gian rời rạc này, 25% số người nhiễm bệnh hồi phục và trở lại trạng thái khỏe mạnh, trong khi 20% số người khỏe mạnh trở nên nhiễm bệnh. Với mỗi tháng n, ta định nghĩa:

H_n = số người khoẻ mạnh

I_n = số người nhiễm bệnh

$P_n = \frac{I_n}{H_n+I_n}$ = tỉ lệ dân số nhiễmm bệnh.

Giả sử dân số không đổi:

$$H_{n+1} + I_{n+1} = H_n + I_n.$$

23. (L.O.3.2) Từ các dữ kiện đã cho, ta cố

A. $\begin{cases} I_{n+1} &= 0.2I_n + 0.75H_n \\ H_{n+1} &= 0.8I_n + 0.25H_n. \end{cases}$

B. $\begin{cases} I_{n+1} &= 0.25I_n + 0.8H_n \\ H_{n+1} &= 0.2I_n + 0.2H_n. \end{cases}$

C. $\begin{cases} I_{n+1} &= 0.75I_n + 0.2H_n \\ H_{n+1} &= 0.25I_n + 0.8H_n. \end{cases}$

D. $\begin{cases} I_{n+1} &= 0.25I_n + 0.2H_n \\ H_{n+1} &= 0.75I_n + 0.8H_n. \end{cases}$

24. (L.O.3.2) Lưu ý rằng hệ phương trình trong Câu hỏi **??** tương thích với giả định dân số không đổi ở trên. Khi đó

A. $P_{n+1} = 0.55 + 0.2 * P_n$.

B. $P_{n+1} = 0.2 + 0.55 * P_n$.

C. $P_{n+1} = 0.25 + 0.75 * P_n$.

D. $P_{n+1} = 0.2 + 0.75 * P_n$.

25. (L.O.3.2) Hệ động lực trong Câu hỏi 24 cho ta biết rằng trong dài hạn (khi $n \to \infty$) tỉ lệ dân số nhiễm bệnh sẽ là

A. 33.33%.

B. 44.44%.

C. 55.55%.

D. 66.66%.

.... HẾT BÀI THI ....

Solution 4114

1. C.
2. D.
3. D.
4. C.
5. B.
6. B.
7. A.
8. D.
9. B.
10. D.
11. C.
12. B.
13. C.
14. A.
15. C.
16. A.
17. A.
18. D.
19. D.
20. B.
21. C.
22. A.
23. C.
24. B.
25. B.

Lecturer:	November 15th, 2024	Approved by:	November 15th, 2024
Nguyễn An Khương			

TRƯỜNG ĐẠI HỌC BÁCH KHOA - ĐHQG-HCM KHOA KH&KT MÁY TÍNH	THI CUỐI KỲ		HK/NH	1	24-25
			Ngày thi	24/12/24	
	Môn học	Mô hình hóa Toán học			
	Course ID	CO2011			
	Thời lượng	80 phút	Mã đề	4115	

Ghi chú: - Sinh viên được phép sử dụng 01 tờ giấy A4 viết tay có chứa ghi chép cần thiết.
- SV phải ghi MSSV, họ và tên vào cuối trang này và nộp lại đề thi cùng với bài làm.
- Chọn phương án đúng nhất (chỉ chọn 1) cho mỗi câu hỏi.

KÝ HIỆU: Những từ viết tắt này có thể hữu ích trong kỳ thi.

- $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ lần lượt là tập hợp các số tự nhiên, số nguyên, số hữu tỉ và số thực.

1. (L.O.3.1) [Harmony question] Mục tiêu tối ưu hóa của bài toán cutting stock problem là gì? Với $\mathcal{A}_t$ là tập hợp tất cả các hành động tại bước thời gian t và $f(s)$ là hàm để tính diện tích stock s.

A. $\arg\inf_{a_{1:T}\in\mathcal{A}_{1:T}} \sum_{s_i\in\mathcal{S}\setminus\{s_t\in a_t\}} f(s_i)$
B. $\arg\min_{a_{1:T}\in\mathcal{A}_{1:T}} \sum_{s_i\in\mathcal{S}\setminus\{s_t\in a_t\}} f(s_i)$
C. $\arg\sup_{a_{1:T}\in\mathcal{A}_{1:T}} \sum_{s_i\in\mathcal{S}\setminus\{s_t\in a_t\}} f(s_i)$
D. $\arg\max_{a_{1:T}\in\mathcal{A}_{1:T}} \sum_{s_i\in\mathcal{S}\setminus\{s_t\in a_t\}} f(s_i)$

2. (L.O.3.1) [Harmony question] Một công ty cần cắt những miếng hình chữ nhật nhỏ hơn từ tấm kim loại lớn với kích thước của tấm kim loại là 13 *inches* $\times$ 10 *inches* và nhu cầu về số lượng sản phẩm được nêu trong bảng sau.

Sản phẩm thứ i	Chiều dài (inches)	Chiều rộng (inches)	Số lượng
1	2	1	5
2	4	2	5
3	5	3	2
4	7	4	3
5	8	5	2

Hỏi cần sử dụng ít nhất bao nhiêu tấm kim loại để đáp ứng nhu cầu trên?

A. Phương án khác. B. 2. C. 4. D. 3.

3. (L.O.3.2) Tổng thống mới của quốc gia **V** đầu tư 15 triệu đô la Mỹ để xây dựng các trường cao đẳng khoa học mới với ngân sách x_1 và các trường kỹ thuật mới với ngân sách x_2 trong giai đoạn 2025-2028. Kế hoạch chi ngân sách cho các trường cao đẳng và trường kỹ thuật như vậy đáp ứng điều kiện về tỷ lệ đầu tư là $4x_2 - x_1 - 15 \leq 0$. Với khoản đầu tư này, trong vòng 4 năm tới, chính quyền mới cho rằng lợi nhuận từ việc xây dựng các trường cao đẳng mới Z_C bằng 20% ngân sách đã tính, và lợi nhuận từ việc xây dựng các trường kỹ thuật mới Z_T bằng 40% ngân sách đã tính. Hàm lợi nhuận được đưa ra bởi $z = Z_C + Z_T$.
Hàm lợi nhuận, giải pháp tối ưu $\boldsymbol{x} = [x_1,\ x_2]$ và giá trị tối ưu z_{OPT} lần lượt là

A. $z = 0.4\,x_1 + 0.2\,x_2,\ \ x_1 = 9,\ x_2 = 6;;\ z_{OPT} = 4.$
B. $z = 0.2\,x_1 + 0.4\,x_2,\ \ x_1 = 9,\ x_2 = 6;\ z_{OPT} = 4.2.$
C. $z = 0.2\,x_1 + 0.4\,x_2,\ \ x_1 = 11,\ x_2 = 4;\ z_{OPT} = 3.8.$
D. $z = 0.2\,x_1 + 0.4\,x_2,\ \ x_1 = 5,\ x_2 = 9;\ z_{OPT} = 4.2.$

Các CH từ 4– 6 cùng xét chung mô hình tăng trưởng logistic dưới đây.

Một quần thể sinh vật phát triển theo mô hình tăng trưởng logistic với số lượng tối đa (sức chứa) là 25,000 cá thể trong một khu vực nhất định. Giả sử ban đầu có 1500 cá thể và sau 5 năm tăng lên 5000 cá thể.

4. (L.O.3.2) Sau bao lâu quần thể sẽ đạt 20,000 cá thể?

A. 15.5 năm. B. 15 năm. C. 15.2 năm. D. 16 năm.

5. (L.O.3.2) What is the logistic growth rate of the population?

A. 0.3. B. 0.2. C. 0.27. D. 0.25.

6. (L.O.3.1) [Harmony question] TRong mô hình học tăng cường (reinforcement learning) để giải bài toán stock cutting problem thì thông tin nào cần có trong một hành động (action)?

A. Vị trí cắt. B. Thông tin vật liệu. C. Thông tin sản phẩm.
D. Tất cả phương án đều đúng.

7. (L.O.2.1) [Harmony question] Trong bài toán "2D Cut Stock Problem", thuật ngữ "trim loss" chỉ cho điều gì?

A. Số lượng mảnh cắt không đúng. B. Thời gian cần thiết để cắt vật liệu.
C. Vật liệu thừa còn lại sau khi cắt. D. Chi phí cắt vật liệu.

8. (L.O.3.2) Xét bảng đơn hình sau tại một bước lặp của phương pháp đơn hình giải bài toán quy hoạch tuyến tính dạng chuẩn tìm giá trị lớn nhất (standard maximization).

x	y	u	v	
$\frac{1}{2}$	1	0	$\frac{1}{2}$	11000
2	0	$\frac{2}{3}$	$-\frac{3}{4}$	16000
-1	0	0	3	2

Giá trị của (x, y) bằng bao nhiêu để hàm mục tiêu đạt giá trị lớn nhất?

A. $(16000, 11000)$. B. $(8000, 7000)$. C. $(11000, 16000)$. D. $(7000, 8000)$.

9. (L.O.3.2) Xét bảng đơn hình sau tại một bước lặp của phương pháp đơn hình

A_{1j}	4	2	5	1	0	0	80
A_{2j}	-2	-5	1	0	1	0	10
A_{3j}	7	3	-3	0	0	1	21
R_j	-9	-18	-12	0	0	0	0

Hàng nào sẽ được chọn để xác định phần tử trục (còn gọi là phần tử xoay - pivot)?

A. r_j. B. A_{1j}. C. A_{2j}. D. A_{3j}.

10. (L.O.3.1) [Harmony question] Cho $\mathcal{P} = \{p\}$ là tập hợp những sản phẩm, $\mathcal{S} = \{s\}$ là tập hợp tấm nguyên liệu, $c(s, p) \in \{0, 1\}$ là chỉ số cho biết tấm nguyên liệu s có được sử dụng để cắt sản phẩm p hay không. Về mặt lý thuyết, kích thước chính xác của tập hợp hành động (action set) ở bước đầu tiên là bao nhiêu?

A. Không có phương án nào đúng. B. Một số hữu hạn rất lớn.
C. $|\mathcal{S}| \times |\mathcal{P}|$ D. Vô cực (Infinity).

11. (L.O.3.2) Xét bài toán quy hoạch tuyến tính sau.

$$\begin{aligned}
\max \quad & P = x + 4y - 2z \\
\text{subject to} \quad & \\
& x + 2y - 3z \leq 4, \\
& 5x + 6y + 7z \leq 8, \\
& 9x + 10y - 11z \leq 12, \\
& 13x - 14y - 15z \leq 16, \\
& x, y, z \geq 0.
\end{aligned}$$

Cần bao nhiêu biến phụ (slack variable) được thêm vào mô hình trên để giải bằng phương pháp đơn hình?

A. 4. B. 1. C. 3. D. 2.

12. (L.O.3.2) TOM - một người hâm mộ hamburger ở thành phố New York - đến một cửa hàng McDonald để ăn trưa, chỉ có 34 đô la trong túi. Giả sử mỗi chiếc Mac nhỏ có giá 3 đô la, mỗi chiếc Mac vừa có giá 4 đô la và mỗi chiếc Big Mac có giá 5 đô la. Ký hiệu x_1, x_2, x_3 là số cái hamburger tương ứng với Mac nhỏ, Mac vừa và Big Mac mà anh ta có thể mua.
TOM tự hỏi, có lẽ kế hoạch của anh ta ít nhất phải thỏa mãn điều kiện $3x_1 + 5x_2 + 4x_3 \leq 34$; $x_i \in \mathbb{Z}$, $\forall i = 1, 2, 3$, nhưng không chắc chắn!! Giả sử thêm rằng TOM rất đói vào ngày hôm đó, anh quyết định không ăn bánh hamburger Mac cỡ nhỏ và vừa, và chỉ thích ăn Big Mac.
Các ràng buộc đơn giản phù hợp và số lượng Big Mac tối đa K mà anh có thể gọi lần lượt là

A. $3x_1 + 4x_2 + 5x_3 \leq 34$; $x_i \in \mathbb{N}$, $\forall i \in \{1, 2, 3\}$ và $K = 6$.
B. $3x_1 + 4x_2 + 5x_3 \leq 34$; $x_i \in \mathbb{Z}$, $\forall i = 1, 2, 3$, và $K = 5$.
C. $3x_1 + 4x_2 + 5x_3 \leq 34$; $x_1, x_2, x_3 \geq 0$ và $K = 6$.
D. $3x_1 + 4x_2 + 5x_3 \leq 34$; $x_i \in \mathbb{N}$, $\exists i \in \{1, 2, 3\}$ và $K = 6$.

13. (L.O.3.2) Trong thành phố Tài Chính, An và Chí quyết định đầu tư tiền của họ vào các tài khoản tiết kiệm khác nhau do Ngân hàng Thịnh Vượng cung cấp. Cả hai bắt đầu với \$1000, nhưng họ chọn các tài khoản với cấu trúc lãi suất khác nhau:

- **Tài khoản của An:**
  - Số tiền gửi ban đầu: \$1000
  - Lãi suất: 55% hàng năm, cộng gộp hàng quý
  - Gửi thêm: \$80 vào cuối mỗi năm
- **Tài khoản của Chí:**
  - Số tiền gửi ban đầu: \$1000
  - Lãi suất: 55% hàng năm, cộng gộp hàng tháng

Ở cuối năm thứ mấy thì tổng tiền lãi của Chí vượt tổng tiền lãi của An lần đầu tiên?

A. đáp án khác B. 2 C. 4 D. 3

Các CH từ 14– 16 dùng dữ kiện chung dưới đây.

Xét một quần thể bị ảnh hưởng bởi dịch bệnh, trong đó các cá thể chuyển đổi giữa trạng thái khỏe mạnh và nhiễm bệnh mỗi tháng. Trong mô hình thời gian rời rạc này, 25% số người nhiễm bệnh hồi phục và trở lại trạng thái khỏe mạnh, trong khi 20% số người khỏe mạnh trở nên nhiễm bệnh. Với mỗi tháng n, ta định nghĩa:

H_n = số người khoẻ mạnh

I_n = số người nhiễm bệnh

$P_n = \frac{I_n}{H_n+I_n}$ = tỉ lệ dân số nhiễmm bệnh.
Giả sử dân số không đổi:

$$H_{n+1} + I_{n+1} = H_n + I_n.$$

14. (L.O.3.2) Từ các dữ kiện đã cho, ta cố

A. $\begin{cases} I_{n+1} &= 0.25I_n + 0.2H_n \\ H_{n+1} &= 0.75I_n + 0.8H_n. \end{cases}$

B. $\begin{cases} I_{n+1} &= 0.2I_n + 0.75H_n \\ H_{n+1} &= 0.8I_n + 0.25H_n. \end{cases}$

C. $\begin{cases} I_{n+1} &= 0.25I_n + 0.8H_n \\ H_{n+1} &= 0.2I_n + 0.2H_n. \end{cases}$

D. $\begin{cases} I_{n+1} &= 0.75I_n + 0.2H_n \\ H_{n+1} &= 0.25I_n + 0.8H_n. \end{cases}$

15. (L.O.3.2) Lưu ý rằng hệ phương trình trong Câu hỏi **??** tương thích với giả định dân số không đổi ở trên. Khi đó

A. $P_{n+1} = 0.2 + 0.75 * P_n$.

B. $P_{n+1} = 0.55 + 0.2 * P_n$.

C. $P_{n+1} = 0.2 + 0.55 * P_n$.

D. $P_{n+1} = 0.25 + 0.75 * P_n$.

16. (L.O.3.2) Hệ động lực trong Câu hỏi 24 cho ta biết rằng trong dài hạn (khi $n \to \infty$) tỉ lệ dân số nhiễm bệnh sẽ là

A. 66.66%.

B. 33.33%.

C. 44.44%.

D. 55.55%.

17. (L.O.3.2) Trong thuật toán Nhánh-Cận (Brand-and-Bound), tại một bước giải bài toán con, cận trên của hàm mục tiêu được định nghĩa là:

A. Giá trị hàm mục tiêu của nghiệm tốt nhất từng tìm được.

B. ∞.

C. Không xác định được.

D. 0.

18. (L.O.3.2) Có một khu rừng rộng lớn tên là Everwood, nơi mà các loài thú đang sinh sống và phát triển. Trong khu rừng này, có một loài đặc biệt là loài hươu đốm. Loài hươu đốm này có đặc điểm sinh học đặc biệt và được nghiên cứu để hiểu rõ hơn về sự phát triển và biến động dân số của chúng. TS.Eric nhận thấy rằng quần thể hươu đốm trong khu rừng Everwood đang có những biến động lớn và muốn hiểu rõ hơn về các yếu tố ảnh hưởng đến sự phát triển của chúng. Ông đã quan sát và xây dựng một mô hình toán học để mô phỏng sự thay đổi của quần thể hươu đốm theo thời gian như sau:

$$\frac{dP}{dt} = 0.5P(1 - \frac{P}{100}) - 0.1P$$

trong đó,

- $r = 0.5$: tốc độ tăng trưởng
- $K = 100$: sức chứa của môi trường
- $m = 0.1$: tỷ lệ di cư

Chọn câu trả lời gần đúng nhất (sai số nhỏ nhất) với điểm cân bằng của quần thể hươu đốm này, biết rằng hiện tại quần thể có 50 cá thể.

A. 100

B. 75

C. 150

D. 50

19. (L.O.3.2) Xét một mô hình LP với các biến quyết định $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3, \cdots, x_{n-1}, x_n)^\top$ với m ràng buộc

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leq b_i, \quad \text{for } i = 1, \cdots, m.$$

Đặt F là tập hợp khả thi của mô hình này. Gọi $\boldsymbol{x}_{opt}$ là một giải pháp tối ưu. Bạn kết luận rằng

A. F là tập lồi và $\boldsymbol{x}_{opt}$ thỏa mãn mọi ràng buộc.
B. F bị giới hạn (bounded) và không có ràng buộc nào được thỏa mãn cho $\boldsymbol{x}_{opt}$.
C. F là tập lồi và $\boldsymbol{x}_{opt}$ thỏa mãn một vài ràng buộc.
D. F không bị giới hạn (unbounded) và $\boldsymbol{x}_{opt}$ thỏa mãn mọi ràng buộc.

20. (L.O.3.2) Tại vùng đất kỳ diệu Ecoville, nổi tiếng với cây cỏ xanh tươi và động vật hoang dã phong phú, một nhóm các nhà khoa học đã bắt tay vào một nhiệm vụ nghiên cứu các mô hình tăng trưởng của một loài thực vật hiếm. Loài thực vật đặc biệt này, được gọi là Hoa Lumina, đã thu hút sự tò mò của các nhà thực vật học vì tốc độ tăng trưởng nhanh của nó dưới các điều kiện môi trường khác nhau.
Các nhà khoa học quyết định theo dõi số lượng Hoa Lumina trong một khu vực được chỉ định trong khoảng thời gian 5 năm. Họ đã ghi nhận số lượng hoa vào cuối mỗi năm, và quan sát của họ như sau:

Time (t)	**Observed Population**
1	125
2	150
3	180
4	220
5	260

Bị cuốn hút bởi dữ liệu này, các nhà khoa học đã sử dụng các mô hình toán học khác nhau để mô tả sự tăng trưởng của hoa Lumina. Mô hình nào sau đây thể hiện tốt nhất (tổng sai số tuyệt đối bé nhất) dữ liệu quan sát của các nhà khoa học?

A. $P(t) = 100e^{0.20t}$
B. $P(t) = 100(1 + 0.22)^t$
C. $P(t) = 100e^{0.21t}$
D. $P(t) = 100(1 + 0.21)^t$

21. (L.O.3.2) Trong khu vực bảo tồn thiên nhiên, số lượng thỏ phát triển với tỷ lệ tăng trưởng không đổi là 25% mỗi năm. Ban đầu, số lượng là 200 con thỏ. Các thợ săn được phép săn một số lượng thỏ nhất định hàng năm để duy trì số lượng thỏ gần mức ban đầu nhằm bảo vệ sự cân bằng sinh thái trong khu vực bảo tồn.
Số lượng thỏ mà các thợ săn được phép săn mỗi năm nên là bao nhiêu trong các lựa chọn sau để số lượng thỏ duy trì gần 200 con nhất sau 3 năm, giả sử những người thợ săn luôn đạt đến mức cho phép hằng năm?

A. 70
B. 40
C. 60
D. 50

22. (L.O.3.2) Công ty khởi nghiệp của bạn có kế hoạch phát triển kinh doanh vào năm tới với tổng ngân sách là 10 triệu đô la Mỹ, để đầu tư vào hai lĩnh vực kinh tế: lĩnh vực **ICT** (có nghĩa là CNTT - Công nghệ thông tin và truyền thông) và lĩnh vực Sản xuất (**Manufacturing sector**).

- Ký hiệu hai biến x_1, x_2 [đơn vị 1 triệu đô la Mỹ] lần lượt là số tiền ngân sách chi cho lĩnh vực CNTT và chi cho lĩnh vực Sản xuất. Sau 1 năm đầu tư, lợi nhuận Z_1 thu được từ CNTT bằng 10% ngân sách đã chi, và lợi nhuận Z_2 thu được từ sản xuất bằng 30% ngân sách đã chi.

- Do đó, kế hoạch đầu tư của bạn có thể được xây dựng dưới dạng một mô hình tuyến tính với mục tiêu tối đa hóa hàm z (cung cấp lợi nhuận từ cả hai lĩnh vực), được đưa ra bởi:

$$\text{Maximize } z = Z_1 + Z_2.$$

Ngành CNTT thường có rủi ro cao hơn ngành Sản xuất, do đó chúng ta yêu cầu thêm rằng $-6 \leq 3x_1 - 3x_2$. Giải pháp tối ưu là $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2)^\top$ và giá trị tối ưu z_{max} tương ứng là

A. $\boldsymbol{x} = (4,\ 6)^\top$ và $z_{max} = 2.8$.
B. $\boldsymbol{x} = (5,\ 5)^\top$ và $z_{max} = 2.8$.
C. $\boldsymbol{x} = (4,\ 6)^\top$ và $z_{max} = 2.2$.
D. $\boldsymbol{x} = (6,\ 4)^\top$ và $z_{max} = 2.2$.

23. (L.O.3.2) Xét vấn đề lập kế hoạch ngân sách trong $m > 1$ giai đoạn được mô tả bằng mô hình IP nhị phân

$$\textbf{Model BIP}: \quad \max_{\boldsymbol{x}} \quad Z =^T \cdot \boldsymbol{x}$$
$$\text{subject to} \quad A\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}$$
$$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3, \cdots, x_{n-1}, x_n)^T \in \{0,1\}^n = V$$

trong đó ma trận ràng buộc $A = [a_{ij}]$ có kích thước $m \times n$ với tất cả các $a_{ij} \geq 0$. Đặt F là **tập giải pháp khả thi** của Mô hình BIP. Rõ ràng $F \subset V = \{0,1\}^n$, tập hợp đỉnh của siêu khối $H_n = (V, E)$.. Tập hợp cạnh $E = \{\{\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\} : \ d(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = 1;$ with $\ \boldsymbol{u} = (u_1, u_2, \cdots, u_n)^T,\ \boldsymbol{v} = (v_1, v_2, \cdots, v_n)^T \in V\}$, trong đó $d(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = \sum_{i=1}^{n} |u_i - v_i|$ là khoảng cách Hamming giữa hai đỉnh $\boldsymbol{u}$ và $\boldsymbol{v}$.

- Đối với bất kỳ hàng $i = 1, 2, \ldots, m$, ràng buộc thứ i của $A\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}$ được gọi là 'hợp lệ' hoặc 'phù hợp' nếu và chỉ $b_i \geq \sum_{j=1}^{n} a_{ij}$. Nếu không, nó được gọi là 'không hợp lệ' (không phù hợp).

- Đặt $P = \{j_0 \in \{1, 2, \ldots, n\} : \ \exists\ i \in \{1, 2, \ldots, m\} : a_{ij_0} > b_i\}$. P có thể được sử dụng để giảm kích thước của mô hình BIP.

Tổng số cạnh $|E|$ trong $H_n = (V, E)$ và kích thước tối đa m_F của F lần lượt là

A. $|E| = \ 2^{n-1}$ và $m_F = n\ 2^{n-|P|}$.
B. $|E| = n\ 2^{n-|P|}$ và $m_F = 2^{n-1}$.
C. $|E| = n\ 2^{n-1}$ và $m_F = 2^{n-1}$.
D. $|E| = n\ 2^{n-1}$ và $m_F = 2^{n-|P|}$.

24. (L.O.3.2) Trong thuật toán Nhánh-Cận (Brand-and-Bound), tại một bài toán quy hoạch tuyến tính con tồn tại nghiệm, khi nào thì chúng ta thực hiện ngắt nhánh (pruning, hay còn gọi là hiện tượng "fathomed")?

A. Khi nghiệm tìm được không thoả mãn điều kiện nguyên.
B. Khi nghiệm của bài toán con không tốt hơn nghiệm tốt nhất đã tìm được.
C. Khi nghiệm tìm được thoả mãn điều kiện nguyên.
D. Khi nghiệm của bài toán con tốt hơn nghiệm tốt nhất đã tìm được.

25. (L.O.3.2) Trong thành phố Công Nghệ, có hai nhà khoa học là TS.Sáng Tạo và TS.Tiến Bộ. Hai ông này đang nghiên cứu các quần thể vi khuẩn khác nhau trong các phòng thí nghiệm công nghệ cao của họ. TS.Sáng Tạo bắt đầu với một quần thể 1000 vi khuẩn, số lượng này tăng gấp ba mỗi 6 giờ. Trong khi đó, TS.Tiến Bộ bắt đầu với một quần thể khác gồm 3375 vi khuẩn và số lượng này tăng gấp đôi mỗi 6 giờ.

Một ngày nọ, sau khi quan sát các quần thể, họ quyết định so sánh kết quả của mình. Mục tiêu của họ là xem quần thể vi khuẩn của ai đạt đến số lượng cao nhất trong một khung thời gian nhất định.
Dựa trên các quan sát của họ, phát biểu nào sau đây là đúng?

A. Sau 18 giờ, cả hai quần thể sẽ bằng nhau ở mức 27000 vi khuẩn, và sau 24 giờ, quần thể của TS.Tiến Bộ sẽ đạt 81000 vi khuẩn.
B. Sau 30 giờ, cả hai quần thể sẽ vượt mức 200000 vi khuẩn
C. Quần thể của TS.Tiến Bộ vẫn lớn hơn quần thể của TS.Sáng Tạo sau 15 giờ.
D. Sau 18 giờ, quần thể của TS.Sáng Tạo đạt 27000 vi khuẩn, trong khi quần thể của TS.Tiến Bộ đạt 100000 vi khuẩn.

....HẾT BÀI THI..

Solution 4115

1. D.
2. B.
3. B.
4. C.
5. C.
6. D.
7. C.
8. B.
9. D.
10. D.
11. A.
12. A.
13. A.
14. D.
15. C.
16. C.
17. A.
18. B.
19. A.
20. D.
21. A.
22. C.
23. D.
24. B.
25. C.

Lecturer:	*November 15th, 2024*	Approved by:	*November 15th, 2024*
Nguyễn An Khương			

TRƯỜNG ĐẠI HỌC BÁCH KHOA - ĐHQG-HCM KHOA KH&KT MÁY TÍNH	THI CUỐI KỲ	HK/NH	1	24-25
		Ngày thi	24/12/24	
	Môn học	Mô hình hóa Toán học		
	Course ID	CO2011		
	Thời lượng	80 phút	Mã đề	4116

Ghi chú: - Sinh viên được phép sử dụng 01 tờ giấy A4 viết tay có chứa ghi chép cần thiết.
- SV phải ghi MSSV, họ và tên vào cuối trang này và nộp lại đề thi cùng với bài làm.
- Chọn phương án đúng nhất (chỉ chọn 1) cho mỗi câu hỏi.

KÝ HIỆU: Những từ viết tắt này có thể hữu ích trong kỳ thi.

- $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ lần lượt là tập hợp các số tự nhiên, số nguyên, số hữu tỉ và số thực.

1. (L.O.3.2) Trong thành phố Công Nghệ, có hai nhà khoa học là TS.Sáng Tạo và TS.Tiến Bộ. Hai ông này đang nghiên cứu các quần thể vi khuẩn khác nhau trong các phòng thí nghiệm công nghệ cao của họ. TS.Sáng Tạo bắt đầu với một quần thể 1000 vi khuẩn, số lượng này tăng gấp ba mỗi 6 giờ. Trong khi đó, TS.Tiến Bộ bắt đầu với một quần thể khác gồm 3375 vi khuẩn và số lượng này tăng gấp đôi mỗi 6 giờ.

   Một ngày nọ, sau khi quan sát các quần thể, họ quyết định so sánh kết quả của mình. Mục tiêu của họ là xem quần thể vi khuẩn của ai đạt đến số lượng cao nhất trong một khung thời gian nhất định. Dựa trên các quan sát của họ, phát biểu nào sau đây là đúng?

A. Sau 30 giờ, cả hai quần thể sẽ vượt mức 200000 vi khuẩn
B. Sau 18 giờ, cả hai quần thể sẽ bằng nhau ở mức 27000 vi khuẩn, và sau 24 giờ, quần thể của TS.Tiến Bộ sẽ đạt 81000 vi khuẩn.
C. Quần thể của TS.Tiến Bộ vẫn lớn hơn quần thể của TS.Sáng Tạo sau 15 giờ.
D. Sau 18 giờ, quần thể của TS.Sáng Tạo đạt 27000 vi khuẩn, trong khi quần thể của TS.Tiến Bộ đạt 100000 vi khuẩn.

Các CH từ 2– 4 cùng xét chung mô hình tăng trưởng logistic dưới đây.

Một quần thể sinh vật phát triển theo mô hình tăng trưởng logistic với số lượng tối đa (sức chứa) là 25,000 cá thể trong một khu vực nhất định. Giả sử ban đầu có 1500 cá thể và sau 5 năm tăng lên 5000 cá thể.

2. (L.O.3.2) Sau bao lâu quần thể sẽ đạt 20,000 cá thể?

A. 15 năm. B. 15.5 năm. C. 15.2 năm. D. 16 năm.

3. (L.O.3.2) What is the logistic growth rate of the population?

A. 0.2. B. 0.3. C. 0.27. D. 0.25.

4. (L.O.3.2) Trong thuật toán Nhánh-Cận (Brand-and-Bound), tại một bước giải bài toán con, cận trên của hàm mục tiêu được định nghĩa là:

A. ∞.
B. Giá trị hàm mục tiêu của nghiệm tốt nhất từng tìm được.
C. Không xác định được.
D. 0.

5. (L.O.2.1) [Harmony question] Trong bài toán "2D Cut Stock Problem", thuật ngữ "trim loss" chỉ cho điều gì?

A. Thời gian cần thiết để cắt vật liệu.
B. Số lượng mảnh cắt không đúng.
C. Vật liệu thừa còn lại sau khi cắt.
D. Chi phí cắt vật liệu.

6. (L.O.3.1) [Harmony question] Cho $\mathcal{P} = \{p\}$ là tập hợp những sản phẩm, $\mathcal{S} = \{s\}$ là tập hợp tấm nguyên liệu, $c(s,p) \in \{0,1\}$ là chỉ số cho biết tấm nguyên liệu s có được sử dụng để cắt sản phẩm p hay không. Về mặt lý thuyết, kích thước chính xác của tập hợp hành động (action set) ở bước đầu tiên là bao nhiêu?

A. Một số hữu hạn rất lớn.
B. Không có phương án nào đúng.
C. $|\mathcal{S}| \times |\mathcal{P}|$
D. Vô cực (Infinity).

7. (L.O.3.2) Công ty khởi nghiệp của bạn có kế hoạch phát triển kinh doanh vào năm tới với tổng ngân sách là 10 triệu đô la Mỹ, để đầu tư vào hai lĩnh vực kinh tế: lĩnh vực **ICT** (có nghĩa là CNTT - Công nghệ thông tin và truyền thông) và lĩnh vực Sản xuất (**Manufacturing sector**).

- Ký hiệu hai biến x_1, x_2 [đơn vị 1 triệu đô la Mỹ] lần lượt là số tiền ngân sách chi cho lĩnh vực CNTT và chi cho lĩnh vực Sản xuất. Sau 1 năm đầu tư, lợi nhuận Z_1 thu được từ CNTT bằng 10% ngân sách đã chi, và lợi nhuận Z_2 thu được từ sản xuất bằng 30% ngân sách đã chi.

- Do đó, kế hoạch đầu tư của bạn có thể được xây dựng dưới dạng một mô hình tuyến tính với mục tiêu tối đa hóa hàm z (cung cấp lợi nhuận từ cả hai lĩnh vực), được đưa ra bởi:

$$\text{Maximize } z = Z_1 + Z_2.$$

Ngành CNTT thường có rủi ro cao hơn ngành Sản xuất, do đó chúng ta yêu cầu thêm rằng $-6 \leq 3x_1 - 3x_2$. Giải pháp tối ưu là $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2)^\top$ và giá trị tối ưu z_{max} tương ứng là

A. $\boldsymbol{x} = (5,\ 5)^\top$ và $z_{max} = 2.8$.
B. $\boldsymbol{x} = (4,\ 6)^\top$ và $z_{max} = 2.8$.
C. $\boldsymbol{x} = (4,\ 6)^\top$ và $z_{max} = 2.2$.
D. $\boldsymbol{x} = (6,\ 4)^\top$ và $z_{max} = 2.2$.

8. (L.O.3.1) [Harmony question] TRong mô hình học tăng cường (reinforcement learning) để giải bài toán stock cutting problem thì thông tin nào cần có trong một hành động (action)?

A. Thông tin vật liệu.
B. Vị trí cắt.
C. Thông tin sản phẩm.
D. Tất cả phương án đều đúng.

Các CH từ 9– 11 dùng dữ kiện chung dưới đây.

Xét một quần thể bị ảnh hưởng bởi dịch bệnh, trong đó các cá thể chuyển đổi giữa trạng thái khỏe mạnh và nhiễm bệnh mỗi tháng. Trong mô hình thời gian rời rạc này, 25% số người nhiễm bệnh hồi phục và trở lại trạng thái khỏe mạnh, trong khi 20% số người khỏe mạnh trở nên nhiễm bệnh. Với mỗi tháng n, ta định nghĩa:

H_n = số người khoẻ mạnh

I_n = số người nhiễm bệnh

$P_n = \frac{I_n}{H_n + I_n}$ = tỉ lệ dân số nhiễmm bệnh.

Giả sử dân số không đổi:

$$H_{n+1} + I_{n+1} = H_n + I_n.$$

9. (L.O.3.2) Từ các dữ kiện đã cho, ta cố

A. $\begin{cases} I_{n+1} &= 0.2I_n + 0.75H_n \\ H_{n+1} &= 0.8I_n + 0.25H_n. \end{cases}$
B. $\begin{cases} I_{n+1} &= 0.25I_n + 0.2H_n \\ H_{n+1} &= 0.75I_n + 0.8H_n. \end{cases}$
C. $\begin{cases} I_{n+1} &= 0.25I_n + 0.8H_n \\ H_{n+1} &= 0.2I_n + 0.2H_n. \end{cases}$
D. $\begin{cases} I_{n+1} &= 0.75I_n + 0.2H_n \\ H_{n+1} &= 0.25I_n + 0.8H_n. \end{cases}$

10. (L.O.3.2) Lưu ý rằng hệ phương trình trong Câu hỏi **??** tương thích với giả định dân số không đổi ở trên. Khi đó

A. $P_{n+1} = 0.55 + 0.2 * P_n$.
B. $P_{n+1} = 0.2 + 0.75 * P_n$.
C. $P_{n+1} = 0.2 + 0.55 * P_n$.
D. $P_{n+1} = 0.25 + 0.75 * P_n$.

11. (L.O.3.2) Hệ động lực trong Câu hỏi 24 cho ta biết rằng trong dài hạn (khi $n \to \infty$) tỉ lệ dân số nhiễm bệnh sẽ là

A. 33.33%. B. 66.66%. C. 44.44%. D. 55.55%.

12. (L.O.3.2) Tổng thống mới của quốc gia **V** đầu tư 15 triệu đô la Mỹ để xây dựng các trường cao đẳng khoa học mới với ngân sách x_1 và các trường kỹ thuật mới với ngân sách x_2 trong giai đoạn 2025-2028. Kế hoạch chi ngân sách cho các trường cao đẳng và trường kỹ thuật như vậy đáp ứng điều kiện về tỷ lệ đầu tư là $4x_2 - x_1 - 15 \leq 0$. Với khoản đầu tư này, trong vòng 4 năm tới, chính quyền mới cho rằng lợi nhuận từ việc xây dựng các trường cao đẳng mới Z_C bằng 20% ngân sách đã tính, và lợi nhuận từ việc xây dựng các trường kỹ thuật mới Z_T bằng 40% ngân sách đã tính. Hàm lợi nhuận được đưa ra bởi $z = Z_C + Z_T$.

Hàm lợi nhuận, giải pháp tối ưu $\boldsymbol{x} = [x_1,\ x_2]$ và giá trị tối ưu z_{OPT} lần lượt là

A. $z = 0.2\ x_1 + 0.4\ x_2,\ \ x_1 = 9,\ x_2 = 6;\ z_{OPT} = 4.2.$
B. $z = 0.4\ x_1 + 0.2\ x_2,\ \ x_1 = 9,\ x_2 = 6;;\ z_{OPT} = 4.$
C. $z = 0.2\ x_1 + 0.4\ x_2,\ \ x_1 = 11,\ x_2 = 4;\ z_{OPT} = 3.8.$
D. $z = 0.2\ x_1 + 0.4\ x_2,\ \ x_1 = 5,\ x_2 = 9;\ z_{OPT} = 4.2.$

13. (L.O.3.1) [Harmony question] Mục tiêu tối ưu hóa của bài toán cutting stock problem là gì? Với $\mathcal{A}_t$ là tập hợp tất cả các hành động tại bước thời gian t và $f(s)$ là hàm để tính diện tích stock s.

A. $\arg\min_{a_{1:T} \in \mathcal{A}_{1:T}} \sum_{s_i \in \mathcal{S} \setminus \{s_t \in a_t\}} f(s_i)$
B. $\arg\inf_{a_{1:T} \in \mathcal{A}_{1:T}} \sum_{s_i \in \mathcal{S} \setminus \{s_t \in a_t\}} f(s_i)$
C. $\arg\sup_{a_{1:T} \in \mathcal{A}_{1:T}} \sum_{s_i \in \mathcal{S} \setminus \{s_t \in a_t\}} f(s_i)$
D. $\arg\max_{a_{1:T} \in \mathcal{A}_{1:T}} \sum_{s_i \in \mathcal{S} \setminus \{s_t \in a_t\}} f(s_i)$

14. (L.O.3.2) Trong khu vực bảo tồn thiên nhiên, số lượng thỏ phát triển với tỷ lệ tăng trưởng không đổi là 25% mỗi năm. Ban đầu, số lượng là 200 con thỏ. Các thợ săn được phép săn một số lượng thỏ nhất định hàng năm để duy trì số lượng thỏ gần mức ban đầu nhằm bảo vệ sự cân bằng sinh thái trong khu vực bảo tồn.

Số lượng thỏ mà các thợ săn được phép săn mỗi năm nên là bao nhiêu trong các lựa chọn sau để số lượng thỏ duy trì gần 200 con nhất sau 3 năm, giả sử những người thợ săn luôn đạt đến mức cho phép hằng năm?

A. 40 B. 70 C. 60 D. 50

15. (L.O.3.2) TOM - một người hâm mộ hamburger ở thành phố New York - đến một cửa hàng McDonald để ăn trưa, chỉ có 34 đô la trong túi. Giả sử mỗi chiếc Mac nhỏ có giá 3 đô la, mỗi chiếc Mac vừa có giá 4 đô la và mỗi chiếc Big Mac có giá 5 đô la. Ký hiệu x_1, x_2, x_3 là số cái hamburger tương ứng với Mac nhỏ, Mac vừa và Big Mac mà anh ta có thể mua.

TOM tự hỏi, có lẽ kế hoạch của anh ta ít nhất phải thỏa mãn điều kiện $3x_1 + 5x_2 + 4x_3 \leq 34;\ x_i \in \mathbb{Z},\ \forall i = 1, 2, 3$, nhưng không chắc chắn!! Giả sử thêm rằng TOM rất đói vào ngày hôm đó, anh quyết định không ăn bánh hamburger Mac cỡ nhỏ và vừa, và chỉ thích ăn Big Mac.

Các ràng buộc đơn giản phù hợp và số lượng Big Mac tối đa K mà anh có thể gọi lần lượt là

A. $3x_1 + 4x_2 + 5x_3 \leq 34;\ x_i \in \mathbb{Z},\ \forall i = 1, 2, 3$, và $K = 5$.
B. $3x_1 + 4x_2 + 5x_3 \leq 34;\ x_i \in \mathbb{N},\ \forall i \in \{1, 2, 3\}$ và $K = 6$.
C. $3x_1 + 4x_2 + 5x_3 \leq 34;\ x_1, x_2, x_3 \geq 0$ và $K = 6$.
D. $3x_1 + 4x_2 + 5x_3 \leq 34;\ x_i \in \mathbb{N},\ \exists i \in \{1, 2, 3\}$ và $K = 6$.

16. (L.O.3.2) Có một khu rừng rộng lớn tên là Everwood, nơi mà các loài thú đang sinh sống và phát triển. Trong khu rừng này, có một loài đặc biệt là loài hươu đốm. Loài hươu đốm này có đặc điểm sinh học đặc biệt và được nghiên cứu để hiểu rõ hơn về sự phát triển và biến động dân số của chúng. TS.Eric nhận thấy rằng quần thể hươu đốm trong khu rừng Everwood đang có những biến động lớn và muốn hiểu rõ hơn về các yếu tố ảnh hưởng đến sự phát triển của chúng. Ông đã quan sát và xây dựng một mô hình toán học để mô phỏng sự thay đổi của quần thể hươu đốm theo thời gian như sau:

$$\frac{dP}{dt} = 0.5P(1 - \frac{P}{100}) - 0.1P$$

trong đó,

- $r = 0.5$: tốc độ tăng trưởng
- $K = 100$: sức chứa của môi trường
- $m = 0.1$: tỷ lệ di cư

Chọn câu trả lời gần đúng nhất (sai số nhỏ nhất) với điểm cân bằng của quần thể hươu đốm này, biết rằng hiện tại quần thể có 50 cá thể.

A. 75 B. 100 C. 150 D. 50

17. (L.O.3.2) Xét một mô hình LP với các biến quyết định $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3, \cdots, x_{n-1}, x_n)^\top$ với m ràng buộc

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leq b_i, \quad \text{for } i = 1, \cdots, m.$$

Đặt F là tập hợp khả thi của mô hình này. Gọi $\boldsymbol{x}_{opt}$ là một giải pháp tối ưu. Bạn kết luận rằng

A. F bị giới hạn (bounded) và không có ràng buộc nào được thỏa mãn cho $\boldsymbol{x}_{opt}$.
B. F là tập lồi và $\boldsymbol{x}_{opt}$ thỏa mãn mọi ràng buộc.
C. F là tập lồi và $\boldsymbol{x}_{opt}$ thỏa mãn một vài ràng buộc.
D. F không bị giới hạn (unbounded) và $\boldsymbol{x}_{opt}$ thỏa mãn mọi ràng buộc.

18. (L.O.3.2) Trong thành phố Tài Chính, An và Chí quyết định đầu tư tiền của họ vào các tài khoản tiết kiệm khác nhau do Ngân hàng Thịnh Vượng cung cấp. Cả hai bắt đầu với \$1000, nhưng họ chọn các tài khoản với cấu trúc lãi suất khác nhau:

- **Tài khoản của An:**
  - Số tiền gửi ban đầu: \$1000
  - Lãi suất: 55% hàng năm, cộng gộp hàng quý
  - Gửi thêm: \$80 vào cuối mỗi năm
- **Tài khoản của Chí:**
  - Số tiền gửi ban đầu: \$1000
  - Lãi suất: 55% hàng năm, cộng gộp hàng tháng

Ở cuối năm thứ mấy thì tổng tiền lãi của Chí vượt tổng tiền lãi của An lần đầu tiên?

A. 2 B. đáp án khác C. 4 D. 3

19. (L.O.3.2) Tại vùng đất kỳ diệu Ecoville, nổi tiếng với cây cỏ xanh tươi và động vật hoang dã phong phú, một nhóm các nhà khoa học đã bắt tay vào một nhiệm vụ nghiên cứu các mô hình tăng trưởng của một loài thực vật hiếm. Loài thực vật đặc biệt này, được gọi là Hoa Lumina, đã thu hút sự tò mò của các nhà thực vật học vì tốc độ tăng trưởng nhanh của nó dưới các điều kiện môi trường khác nhau.
Các nhà khoa học quyết định theo dõi số lượng Hoa Lumina trong một khu vực được chỉ định trong khoảng thời gian 5 năm. Họ đã ghi nhận số lượng hoa vào cuối mỗi năm, và quan sát của họ như sau:

Time (t)	**Observed Population**
1	125
2	150
3	180
4	220
5	260

Bị cuốn hút bởi dữ liệu này, các nhà khoa học đã sử dụng các mô hình toán học khác nhau để mô tả sự tăng trưởng của hoa Lumina. Mô hình nào sau đây thể hiện tốt nhất (tổng sai số tuyệt đối bé nhất) dữ liệu quan sát của các nhà khoa học?

A. $P(t) = 100(1 + 0.22)^t$
B. $P(t) = 100e^{0.20t}$
C. $P(t) = 100e^{0.21t}$
D. $P(t) = 100(1 + 0.21)^t$

20. (L.O.3.2) Trong thuật toán Nhánh-Cận (Brand-and-Bound), tại một bài toán quy hoạch tuyến tính con tồn tại nghiệm, khi nào thì chúng ta thực hiện ngắt nhánh (pruning, hay còn gọi là hiện tượng "fathomed")?

A. Khi nghiệm của bài toán con không tốt hơn nghiệm tốt nhất đã tìm được.
B. Khi nghiệm tìm được không thoả mãn điều kiện nguyên.
C. Khi nghiệm tìm được thoả mãn điều kiện nguyên.
D. Khi nghiệm của bài toán con tốt hơn nghiệm tốt nhất đã tìm được.

21. (L.O.3.2) Xét bài toán quy hoạch tuyến tính sau.

$$\begin{aligned} \max \quad & P = x + 4y - 2z \\ \text{subject to} \quad & \\ & x + 2y - 3z \leq 4, \\ & 5x + 6y + 7z \leq 8, \\ & 9x + 10y - 11z \leq 12, \\ & 13x - 14y - 15z \leq 16, \\ & x, y, z \geq 0. \end{aligned}$$

Cần bao nhiêu biến phụ (slack variable) được thêm vào mô hình trên để giải bằng phương pháp đơn hình?

A. 1.
B. 4.
C. 3.
D. 2.

22. (L.O.3.2) Xét bảng đơn hình sau tại một bước lặp của phương pháp đơn hình giải bài toán quy hoạch tuyến tính dạng chuẩn tìm giá trị lớn nhất (standard maximization).

x	y	u	v	
$\frac{1}{2}$	1	0	$\frac{1}{2}$	11000
2	0	$\frac{2}{3}$	$-\frac{3}{4}$	16000
-1	0	0	3	2

Giá trị của (x, y) bằng bao nhiêu để hàm mục tiêu đạt giá trị lớn nhất?

A. $(8000, 7000)$.
B. $(16000, 11000)$.
C. $(11000, 16000)$.
D. $(7000, 8000)$.

23. (L.O.3.1) [Harmony question] Một công ty cần cắt những miếng hình chữ nhật nhỏ hơn từ tấm kim loại lớn với kích thước của tấm kim loại là 13 *inches* $\times$ 10 *inches* và nhu cầu về số lượng sản phẩm được nêu trong bảng sau.

Sản phẩm thứ i	Chiều dài (inches)	Chiều rộng (inches)	Số lượng
1	2	1	5
2	4	2	5
3	5	3	2
4	7	4	3
5	8	5	2

Hỏi cần sử dụng ít nhất bao nhiêu tấm kim loại để đáp ứng nhu cầu trên?

A. 2. B. Phương án khác. C. 4. D. 3.

24. (L.O.3.2) Xét vấn đề lập kế hoạch ngân sách trong $m > 1$ giai đoạn được mô tả bằng mô hình IP nhị phân

$$\textbf{Model BIP}: \quad \max_{\boldsymbol{x}} \quad Z =^T \cdot \boldsymbol{x}$$
$$\text{subject to} \quad A\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}$$
$$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3, \cdots, x_{n-1}, x_n)^T \in \{0,1\}^n = V$$

trong đó ma trận ràng buộc $A = [a_{ij}]$ có kích thước $m \times n$ với tất cả các $a_{ij} \geq 0$. Đặt F là **tập giải pháp khả thi** của Mô hình BIP. Rõ ràng $F \subset V = \{0,1\}^n$, tập hợp đỉnh của siêu khối $H_n = (V, E)$.. Tập hợp cạnh $E = \{\{\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\} : d(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = 1; \text{ with } \boldsymbol{u} = (u_1, u_2, \cdots, u_n)^T, \ \boldsymbol{v} = (v_1, v_2, \cdots, v_n)^T \in V\}$, trong đó $d(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = \sum_{i=1}^{n} |u_i - v_i|$ là khoảng cách Hamming giữa hai đỉnh $\boldsymbol{u}$ và $\boldsymbol{v}$.

- Đối với bất kỳ hàng $i = 1, 2, \ldots, m$, ràng buộc thứ i của $A\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}$ được gọi là 'hợp lệ' hoặc 'phù hợp' nếu và chỉ $b_i \geq \sum_{j=1}^{n} a_{ij}$. Nếu không, nó được gọi là 'không hợp lệ' (không phù hợp).
- Đặt $P = \{j_0 \in \{1, 2, \ldots, n\} : \exists\, i \in \{1, 2, \ldots, m\} : a_{ij_0} > b_i\}$. P có thể được sử dụng để giảm kích thước của mô hình BIP.

Tổng số cạnh $|E|$ trong $H_n = (V, E)$ và kích thước tối đa m_F của F lần lượt là

A. $|E| = n\ 2^{n-|P|}$ và $m_F = 2^{n-1}$.
B. $|E| = \ 2^{n-1}$ và $m_F = n\ 2^{n-|P|}$.
C. $|E| = n\ 2^{n-1}$ và $m_F = 2^{n-1}$.
D. $|E| = n\ 2^{n-1}$ và $m_F = 2^{n-|P|}$.

25. (L.O.3.2) Xét bảng đơn hình sau tại một bước lặp của phương pháp đơn hình

A_{1j}	4	2	5	1	0	0	80
A_{2j}	-2	-5	1	0	1	0	10
A_{3j}	7	3	-3	0	0	1	21
R_j	-9	-18	-12	0	0	0	0

Hàng nào sẽ được chọn để xác định phần tử trục (còn gọi là phần tử xoay - pivot)?

A. A_{1j}. B. r_j. C. A_{2j}. D. A_{3j}.

.... HẾT BÀI THI ....

Solution 4116

1. C.
2. C.
3. C.
4. B.
5. C.
6. D.
7. C.
8. D.
9. D.
10. C.
11. C.
12. A.
13. D.
14. B.
15. B.
16. A.
17. B.
18. B.
19. D.
20. A.
21. B.
22. A.
23. A.
24. D.
25. D.

Lecturer:	*November 15th, 2024*	**Approved by:**	*November 15th, 2024*
Nguyễn An Khương			

TRƯỜNG ĐẠI HỌC BÁCH KHOA - ĐHQG-HCM KHOA KH&KT MÁY TÍNH	THI CUỐI KỲ	HK/NH	1	24-25
		Ngày thi	24/12/24	
	Môn học	Mô hình hóa Toán học		
	Course ID	CO2011		
	Thời lượng	80 phút	Mã đề	4117

Ghi chú: - Sinh viên được phép sử dụng 01 tờ giấy A4 viết tay có chứa ghi chép cần thiết.
- SV phải ghi MSSV, họ và tên vào cuối trang này và nộp lại đề thi cùng với bài làm.
- Chọn phương án đúng nhất (chỉ chọn 1) cho mỗi câu hỏi.

KÝ HIỆU: Những từ viết tắt này có thể hữu ích trong kỳ thi.

- $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ lần lượt là tập hợp các số tự nhiên, số nguyên, số hữu tỉ và số thực.

1. (L.O.3.1) [Harmony question] Mục tiêu tối ưu hóa của bài toán cutting stock problem là gì? Với $\mathcal{A}_t$ là tập hợp tất cả các hành động tại bước thời gian t và $f(s)$ là hàm để tính diện tích stock s.

A. $\arg\min_{a_{1:T}\in\mathcal{A}_{1:T}} \sum_{s_i\in\mathcal{S}\setminus\{s_t\in a_t\}} f(s_i)$
B. $\arg\sup_{a_{1:T}\in\mathcal{A}_{1:T}} \sum_{s_i\in\mathcal{S}\setminus\{s_t\in a_t\}} f(s_i)$
C. $\arg\inf_{a_{1:T}\in\mathcal{A}_{1:T}} \sum_{s_i\in\mathcal{S}\setminus\{s_t\in a_t\}} f(s_i)$
D. $\arg\max_{a_{1:T}\in\mathcal{A}_{1:T}} \sum_{s_i\in\mathcal{S}\setminus\{s_t\in a_t\}} f(s_i)$

2. (L.O.3.2) Trong thuật toán Nhánh-Cận (Brand-and-Bound), tại một bước giải bài toán con, cận trên của hàm mục tiêu được định nghĩa là:

A. ∞.
B. Không xác định được.
C. Giá trị hàm mục tiêu của nghiệm tốt nhất từng tìm được.
D. 0.

3. (L.O.3.2) TOM - một người hâm mộ hamburger ở thành phố New York - đến một cửa hàng McDonald để ăn trưa, chỉ có 34 đô la trong túi. Giả sử mỗi chiếc Mac nhỏ có giá 3 đô la, mỗi chiếc Mac vừa có giá 4 đô la và mỗi chiếc Big Mac có giá 5 đô la. Ký hiệu x_1, x_2, x_3 là số cái hamburger tương ứng với Mac nhỏ, Mac vừa và Big Mac mà anh ta có thể mua.
TOM tự hỏi, có lẽ kế hoạch của anh ta ít nhất phải thỏa mãn điều kiện $3x_1 + 5x_2 + 4x_3 \leq 34;\ x_i \in \mathbb{Z},\ \forall i = 1, 2, 3$, nhưng không chắc chắn!! Giả sử thêm rằng TOM rất đói vào ngày hôm đó, anh quyết định không ăn bánh hamburger Mac cỡ nhỏ và vừa, và chỉ thích ăn Big Mac.
Các ràng buộc đơn giản phù hợp và số lượng Big Mac tối đa K mà anh có thể gọi lần lượt là

A. $3x_1 + 4x_2 + 5x_3 \leq 34;\ x_i \in \mathbb{Z},\ \forall i = 1, 2, 3$, và $K = 5$.
B. $3x_1 + 4x_2 + 5x_3 \leq 34;\ x_1, x_2, x_3 \geq 0$ và $K = 6$.
C. $3x_1 + 4x_2 + 5x_3 \leq 34;\ x_i \in \mathbb{N},\ \forall i \in \{1, 2, 3\}$ và $K = 6$.
D. $3x_1 + 4x_2 + 5x_3 \leq 34;\ x_i \in \mathbb{N},\ \exists i \in \{1, 2, 3\}$ và $K = 6$.

4. (L.O.2.1) [Harmony question] Trong bài toán "2D Cut Stock Problem", thuật ngữ "trim loss" chỉ cho điều gì?

A. Thời gian cần thiết để cắt vật liệu.
B. Vật liệu thừa còn lại sau khi cắt.
C. Số lượng mảnh cắt không đúng.
D. Chi phí cắt vật liệu.

5. (L.O.3.2) Tại vùng đất kỳ diệu Ecoville, nổi tiếng với cây cỏ xanh tươi và động vật hoang dã phong phú, một nhóm các nhà khoa học đã bắt tay vào một nhiệm vụ nghiên cứu các mô hình tăng trưởng của một loài thực vật hiếm. Loài thực vật đặc biệt này, được gọi là Hoa Lumina, đã thu hút sự tò mò của các nhà thực vật học vì tốc độ tăng trưởng nhanh của nó dưới các điều kiện môi trường khác nhau.
Các nhà khoa học quyết định theo dõi số lượng Hoa Lumina trong một khu vực được chỉ định trong khoảng thời gian 5 năm. Họ đã ghi nhận số lượng hoa vào cuối mỗi năm, và quan sát của họ như sau:

Time (t)	**Observed Population**
1	125
2	150
3	180
4	220
5	260

Bị cuốn hút bởi dữ liệu này, các nhà khoa học đã sử dụng các mô hình toán học khác nhau để mô tả sự tăng trưởng của hoa Lumina. Mô hình nào sau đây thể hiện tốt nhất (tổng sai số tuyệt đối bé nhất) dữ liệu quan sát của các nhà khoa học?

A. $P(t) = 100(1 + 0.22)^t$
B. $P(t) = 100e^{0.21t}$
C. $P(t) = 100e^{0.20t}$
D. $P(t) = 100(1 + 0.21)^t$

6. (L.O.3.1) [Harmony question] Cho $\mathcal{P} = \{p\}$ là tập hợp những sản phẩm, $\mathcal{S} = \{s\}$ là tập hợp tấm nguyên liệu, $c(s, p) \in \{0, 1\}$ là chỉ số cho biết tấm nguyên liệu s có được sử dụng để cắt sản phẩm p hay không. Về mặt lý thuyết, kích thước chính xác của tập hợp hành động (action set) ở bước đầu tiên là bao nhiêu?

A. Một số hữu hạn rất lớn.
B. $|\mathcal{S}| \times |\mathcal{P}|$
C. Không có phương án nào đúng.
D. Vô cực (Infinity).

Các CH từ 7– 9 dùng dữ kiện chung dưới đây.

Xét một quần thể bị ảnh hưởng bởi dịch bệnh, trong đó các cá thể chuyển đổi giữa trạng thái khỏe mạnh và nhiễm bệnh mỗi tháng. Trong mô hình thời gian rời rạc này, 25% số người nhiễm bệnh hồi phục và trở lại trạng thái khỏe mạnh, trong khi 20% số người khỏe mạnh trở nên nhiễm bệnh. Với mỗi tháng n, ta định nghĩa:

H_n = số người khoẻ mạnh

I_n = số người nhiễm bệnh

$P_n = \frac{I_n}{H_n+I_n}$ = tỉ lệ dân số nhiễmm bệnh.
Giả sử dân số không đổi:

$$H_{n+1} + I_{n+1} = H_n + I_n.$$

7. (L.O.3.2) Từ các dữ kiện đã cho, ta có

A. $\begin{cases} I_{n+1} &= 0.2I_n + 0.75H_n \\ H_{n+1} &= 0.8I_n + 0.25H_n. \end{cases}$
B. $\begin{cases} I_{n+1} &= 0.25I_n + 0.8H_n \\ H_{n+1} &= 0.2I_n + 0.2H_n. \end{cases}$
C. $\begin{cases} I_{n+1} &= 0.25I_n + 0.2H_n \\ H_{n+1} &= 0.75I_n + 0.8H_n. \end{cases}$
D. $\begin{cases} I_{n+1} &= 0.75I_n + 0.2H_n \\ H_{n+1} &= 0.25I_n + 0.8H_n. \end{cases}$

8. (L.O.3.2) Lưu ý rằng hệ phương trình trong Câu hỏi **??** tương thích với giả định dân số không đổi ở trên. Khi đó

A. $P_{n+1} = 0.55 + 0.2 * P_n$.
B. $P_{n+1} = 0.2 + 0.55 * P_n$.
C. $P_{n+1} = 0.2 + 0.75 * P_n$.
D. $P_{n+1} = 0.25 + 0.75 * P_n$.

9. (L.O.3.2) Hệ động lực trong Câu hỏi 24 cho ta biết rằng trong dài hạn (khi $n \to \infty$) tỉ lệ dân số nhiễm bệnh sẽ là

A. 33.33%. B. 44.44%. C. 66.66%. D. 55.55%.

10. (L.O.3.2) Trong khu vực bảo tồn thiên nhiên, số lượng thỏ phát triển với tỷ lệ tăng trưởng không đổi là 25% mỗi năm. Ban đầu, số lượng là 200 con thỏ. Các thợ săn được phép săn một số lượng thỏ nhất định hàng năm để duy trì số lượng thỏ gần mức ban đầu nhằm bảo vệ sự cân bằng sinh thái trong khu vực bảo tồn.
Số lượng thỏ mà các thợ săn được phép săn mỗi năm nên là bao nhiêu trong các lựa chọn sau để số lượng thỏ duy trì gần 200 con nhất sau 3 năm, giả sử những người thợ săn luôn đạt đến mức cho phép hằng năm?

A. 40 B. 60 C. 70 D. 50

11. (L.O.3.2) Công ty khởi nghiệp của bạn có kế hoạch phát triển kinh doanh vào năm tới với tổng ngân sách là 10 triệu đô la Mỹ, để đầu tư vào hai lĩnh vực kinh tế: lĩnh vực **ICT** (có nghĩa là CNTT - Công nghệ thông tin và truyền thông) và lĩnh vực Sản xuất (**Manufacturing sector**).

- Ký hiệu hai biến x_1, x_2 [đơn vị 1 triệu đô la Mỹ] lần lượt là số tiền ngân sách chi cho lĩnh vực CNTT và chi cho lĩnh vực Sản xuất. Sau 1 năm đầu tư, lợi nhuận Z_1 thu được từ CNTT bằng 10% ngân sách đã chi, và lợi nhuận Z_2 thu được từ sản xuất bằng 30% ngân sách đã chi.
- Do đó, kế hoạch đầu tư của bạn có thể được xây dựng dưới dạng một mô hình tuyến tính với mục tiêu tối đa hóa hàm z (cung cấp lợi nhuận từ cả hai lĩnh vực), được đưa ra bởi:

$$\text{Maximize } z = Z_1 + Z_2.$$

Ngành CNTT thường có rủi ro cao hơn ngành Sản xuất, do đó chúng ta yêu cầu thêm rằng $-6 \le 3x_1 - 3x_2$. Giải pháp tối ưu là $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2)^\top$ và giá trị tối ưu z_{max} tương ứng là

A. $\boldsymbol{x} = (5,\ 5)^\top$ và $z_{max} = 2.8$. B. $\boldsymbol{x} = (4,\ 6)^\top$ và $z_{max} = 2.2$.
C. $\boldsymbol{x} = (4,\ 6)^\top$ và $z_{max} = 2.8$. D. $\boldsymbol{x} = (6,\ 4)^\top$ và $z_{max} = 2.2$.

12. (L.O.3.2) Xét bài toán quy hoạch tuyến tính sau.

$$\begin{aligned} \max \quad & P = x + 4y - 2z \\ \text{subject to} \quad & \\ & x + 2y - 3z \le 4, \\ & 5x + 6y + 7z \le 8, \\ & 9x + 10y - 11z \le 12, \\ & 13x - 14y - 15z \le 16, \\ & x, y, z \ge 0. \end{aligned}$$

Cần bao nhiêu biến phụ (slack variable) được thêm vào mô hình trên để giải bằng phương pháp đơn hình?

A. 1. B. 3. C. 4. D. 2.

13. (L.O.3.2) Xét bảng đơn hình sau tại một bước lặp của phương pháp đơn hình

A_{1j}	4	2	5	1	0	0	80
A_{2j}	-2	-5	1	0	1	0	10
A_{3j}	7	3	-3	0	0	1	21
R_j	-9	-18	-12	0	0	0	0

Hàng nào sẽ được chọn để xác định phần tử trục (còn gọi là phần tử xoay - pivot)?

A. A_{1j}. B. A_{2j}. C. r_j. D. A_{3j}.

14. (L.O.3.2) Xét một mô hình LP với các biến quyết định $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3, \cdots, x_{n-1}, x_n)^\top$ với m ràng buộc

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leq b_i, \quad \text{for } i = 1, \cdots, m.$$

Đặt F là tập hợp khả thi của mô hình này. Gọi $\boldsymbol{x}_{opt}$ là một giải pháp tối ưu. Bạn kết luận rằng

A. F bị giới hạn (bounded) và không có ràng buộc nào được thỏa mãn cho $\boldsymbol{x}_{opt}$.
B. F là tập lồi và $\boldsymbol{x}_{opt}$ thỏa mãn một vài ràng buộc.
C. F là tập lồi và $\boldsymbol{x}_{opt}$ thỏa mãn mọi ràng buộc.
D. F không bị giới hạn (unbounded) và $\boldsymbol{x}_{opt}$ thỏa mãn mọi ràng buộc.

15. (L.O.3.1) [Harmony question] TRong mô hình học tăng cường (reinforcement learning) để giải bài toán stock cutting problem thì thông tin nào cần có trong một hành động (action)?

A. Thông tin vật liệu. B. Thông tin sản phẩm. C. Vị trí cắt.
D. Tất cả phương án đều đúng.

Các CH từ 16– 18 cùng xét chung mô hình tăng trưởng logistic dưới đây.

Một quần thể sinh vật phát triển theo mô hình tăng trưởng logistic với số lượng tối đa (sức chứa) là 25,000 cá thể trong một khu vực nhất định. Giả sử ban đầu có 1500 cá thể và sau 5 năm tăng lên 5000 cá thể.

16. (L.O.3.2) Sau bao lâu quần thể sẽ đạt 20,000 cá thể?

A. 15 năm. B. 15.2 năm. C. 15.5 năm. D. 16 năm.

17. (L.O.3.2) What is the logistic growth rate of the population?

A. 0.2. B. 0.27. C. 0.3. D. 0.25.

18. (L.O.3.2) Trong thuật toán Nhánh-Cận (Brand-and-Bound), tại một bài toán quy hoạch tuyến tính con tồn tại nghiệm, khi nào thì chúng ta thực hiện ngắt nhánh (pruning, hay còn gọi là hiện tượng "fathomed")?

A. Khi nghiệm của bài toán con không tốt hơn nghiệm tốt nhất đã tìm được.
B. Khi nghiệm tìm được thoả mãn điều kiện nguyên.
C. Khi nghiệm tìm được không thoả mãn điều kiện nguyên.
D. Khi nghiệm của bài toán con tốt hơn nghiệm tốt nhất đã tìm được.

19. (L.O.3.2) Trong thành phố Công Nghệ, có hai nhà khoa học là TS.Sáng Tạo và TS.Tiến Bộ. Hai ông này đang nghiên cứu các quần thể vi khuẩn khác nhau trong các phòng thí nghiệm công nghệ cao của họ. TS.Sáng Tạo bắt đầu với một quần thể 1000 vi khuẩn, số lượng này tăng gấp ba mỗi 6 giờ. Trong khi đó, TS.Tiến Bộ bắt đầu với một quần thể khác gồm 3375 vi khuẩn và số lượng này tăng gấp đôi mỗi 6 giờ.

Một ngày nọ, sau khi quan sát các quần thể, họ quyết định so sánh kết quả của mình. Mục tiêu của họ là xem quần thể vi khuẩn của ai đạt đến số lượng cao nhất trong một khung thời gian nhất định.
Dựa trên các quan sát của họ, phát biểu nào sau đây là đúng?

A. Sau 30 giờ, cả hai quần thể sẽ vượt mức 200000 vi khuẩn
B. Quần thể của TS.Tiến Bộ vẫn lớn hơn quần thể của TS.Sáng Tạo sau 15 giờ.
C. Sau 18 giờ, cả hai quần thể sẽ bằng nhau ở mức 27000 vi khuẩn, và sau 24 giờ, quần thể của TS.Tiến Bộ sẽ đạt 81000 vi khuẩn.
D. Sau 18 giờ, quần thể của TS.Sáng Tạo đạt 27000 vi khuẩn, trong khi quần thể của TS.Tiến Bộ đạt 100000 vi khuẩn.

20. (L.O.3.2) Xét vấn đề lập kế hoạch ngân sách trong $m > 1$ giai đoạn được mô tả bằng mô hình IP nhị phân

$$\textbf{Model BIP}: \quad \max_{\boldsymbol{x}} \quad Z =^T \cdot \boldsymbol{x}$$
$$\text{subject to} \quad A\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}$$
$$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3, \cdots, x_{n-1}, x_n)^T \in \{0,1\}^n = V$$

trong đó ma trận ràng buộc $A = [a_{ij}]$ có kích thước $m \times n$ với tất cả các $a_{ij} \geq 0$. Đặt F là **tập giải pháp khả thi** của Mô hình BIP. Rõ ràng $F \subset V = \{0,1\}^n$, tập hợp đỉnh của siêu khối $H_n = (V, E)$.. Tập hợp cạnh $E = \{\{\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\} : d(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = 1;$ with $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, \cdots, u_n)^T, \boldsymbol{v} = (v_1, v_2, \cdots, v_n)^T \in V\}$, trong đó $d(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = \sum_{i=1}^{n} |u_i - v_i|$ là khoảng cách Hamming giữa hai đỉnh $\boldsymbol{u}$ và $\boldsymbol{v}$.

- Đối với bất kỳ hàng $i = 1, 2, \ldots, m$, ràng buộc thứ i của $A\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}$ được gọi là 'hợp lệ' hoặc 'phù hợp' nếu và chỉ $b_i \geq \sum_{j=1}^{n} a_{ij}$. Nếu không, nó được gọi là 'không hợp lệ' (không phù hợp).
- Đặt $P = \{j_0 \in \{1, 2, \ldots, n\} : \exists\, i \in \{1, 2, \ldots, m\} : a_{ij_0} > b_i\}$. P có thể được sử dụng để giảm kích thước của mô hình BIP.

Tổng số cạnh $|E|$ trong $H_n = (V, E)$ và kích thước tối đa m_F của F lần lượt là

A. $|E| = n\ 2^{n-|P|}$ và $m_F = 2^{n-1}$.
B. $|E| = n\ 2^{n-1}$ và $m_F = 2^{n-1}$.
C. $|E| = \ 2^{n-1}$ và $m_F = n\ 2^{n-|P|}$.
D. $|E| = n\ 2^{n-1}$ và $m_F = 2^{n-|P|}$.

21. (L.O.3.1) [Harmony question] Một công ty cần cắt những miếng hình chữ nhật nhỏ hơn từ tấm kim loại lớn với kích thước của tấm kim loại là 13 *inches* $\times$ 10 *inches* và nhu cầu về số lượng sản phẩm được nêu trong bảng sau.

Sản phẩm thứ i	Chiều dài (inches)	Chiều rộng (inches)	Số lượng
1	2	1	5
2	4	2	5
3	5	3	2
4	7	4	3
5	8	5	2

Hỏi cần sử dụng ít nhất bao nhiêu tấm kim loại để đáp ứng nhu cầu trên?

A. 2. B. 4. C. Phương án khác. D. 3.

22. (L.O.3.2) Xét bảng đơn hình sau tại một bước lặp của phương pháp đơn hình giải bài toán quy hoạch tuyến tính dạng chuẩn tìm giá trị lớn nhất (standard maximization).

x	y	u	v	
$\frac{1}{2}$	1	0	$\frac{1}{2}$	11000
2	0	$\frac{2}{3}$	$-\frac{3}{4}$	16000
-1	0	0	3	2

Giá trị của (x, y) bằng bao nhiêu để hàm mục tiêu đạt giá trị lớn nhất?

A. $(8000, 7000)$. B. $(11000, 16000)$. C. $(16000, 11000)$. D. $(7000, 8000)$.

23. (L.O.3.2) Trong thành phố Tài Chính, An và Chí quyết định đầu tư tiền của họ vào các tài khoản tiết kiệm khác nhau do Ngân hàng Thịnh Vượng cung cấp. Cả hai bắt đầu với \$1000, nhưng họ chọn các tài khoản với cấu trúc lãi suất khác nhau:

- **Tài khoản của An:**
  - Số tiền gửi ban đầu: \$1000
  - Lãi suất: 55% hàng năm, cộng gộp hàng quý
  - Gửi thêm: \$80 vào cuối mỗi năm
- **Tài khoản của Chí:**
  - Số tiền gửi ban đầu: \$1000
  - Lãi suất: 55% hàng năm, cộng gộp hàng tháng

Ở cuối năm thứ mấy thì tổng tiền lãi của Chí vượt tổng tiền lãi của An lần đầu tiên?

A. 2 B. 4 C. đáp án khác D. 3

24. (L.O.3.2) Có một khu rừng rộng lớn tên là Everwood, nơi mà các loài thú đang sinh sống và phát triển. Trong khu rừng này, có một loài đặc biệt là loài hươu đốm. Loài hươu đốm này có đặc điểm sinh học đặc biệt và được nghiên cứu để hiểu rõ hơn về sự phát triển và biến động dân số của chúng. TS.Eric nhận thấy rằng quần thể hươu đốm trong khu rừng Everwood đang có những biến động lớn và muốn hiểu rõ hơn về các yếu tố ảnh hưởng đến sự phát triển của chúng. Ông đã quan sát và xây dựng một mô hình toán học để mô phỏng sự thay đổi của quần thể hươu đốm theo thời gian như sau:

$$\frac{dP}{dt} = 0.5P(1 - \frac{P}{100}) - 0.1P$$

trong đó,

- $r = 0.5$: tốc độ tăng trưởng
- $K = 100$: sức chứa của môi trường
- $m = 0.1$: tỷ lệ di cư

Chọn câu trả lời gần đúng nhất (sai số nhỏ nhất) với điểm cân bằng của quần thể hươu đốm này, biết rằng hiện tại quần thể có 50 cá thể.

A. 75 B. 150 C. 100 D. 50

25. (L.O.3.2) Tổng thống mới của quốc gia **V** đầu tư 15 triệu đô la Mỹ để xây dựng các trường cao đẳng khoa học mới với ngân sách x_1 và các trường kỹ thuật mới với ngân sách x_2 trong giai đoạn 2025-2028. Kế hoạch chi ngân sách cho các trường cao đẳng và trường kỹ thuật như vậy đáp ứng điều kiện về tỷ lệ đầu tư là $4x_2 - x_1 - 15 \leq 0$. Với khoản đầu tư này, trong vòng 4 năm tới, chính quyền mới cho rằng lợi nhuận từ việc xây dựng các trường cao đẳng mới Z_C bằng 20% ngân sách đã tính, và lợi nhuận từ việc xây dựng các trường kỹ thuật mới Z_T bằng 40% ngân sách đã tính. Hàm lợi nhuận được đưa ra bởi $z = Z_C + Z_T$.
Hàm lợi nhuận, giải pháp tối ưu $\boldsymbol{x} = [x_1,\ x_2]$ và giá trị tối ưu z_{OPT} lần lượt là

A. $z = 0.2\,x_1 + 0.4\,x_2,\ x_1 = 9,\ x_2 = 6;\ z_{OPT} = 4.2.$
B. $z = 0.2\,x_1 + 0.4\,x_2,\ x_1 = 11,\ x_2 = 4;\ z_{OPT} = 3.8.$
C. $z = 0.4\,x_1 + 0.2\,x_2,\ x_1 = 9,\ x_2 = 6;;\ z_{OPT} = 4.$
D. $z = 0.2\,x_1 + 0.4\,x_2,\ x_1 = 5,\ x_2 = 9;\ z_{OPT} = 4.2.$

....HẾT BÀI THI..

Solution 4117

1. D.
2. C.
3. C.
4. B.
5. D.
6. D.
7. D.
8. B.
9. B.
10. C.
11. B.
12. C.
13. D.
14. C.
15. D.
16. B.
17. B.
18. A.
19. B.
20. D.
21. A.
22. A.
23. C.
24. A.
25. A.

Lecturer:	*November 15th, 2024*	Approved by:	*November 15th, 2024*
Nguyễn An Khương			

TRƯỜNG ĐẠI HỌC BÁCH KHOA - ĐHQG-HCM KHOA KH&KT MÁY TÍNH	THI CUỐI KỲ	HK/NH	1	24-25
		Ngày thi	24/12/24	
	Môn học	Mô hình hóa Toán học		
	Course ID	CO2011		
	Thời lượng	80 phút	Mã đề	4118

Ghi chú: - Sinh viên được phép sử dụng 01 tờ giấy A4 viết tay có chứa ghi chép cần thiết.
- SV phải ghi MSSV, họ và tên vào cuối trang này và nộp lại đề thi cùng với bài làm.
- Chọn phương án đúng nhất (chỉ chọn 1) cho mỗi câu hỏi.

KÝ HIỆU: Những từ viết tắt này có thể hữu ích trong kỳ thi.

- $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ lần lượt là tập hợp các số tự nhiên, số nguyên, số hữu tỉ và số thực.

1. (L.O.3.2) Trong thành phố Công Nghệ, có hai nhà khoa học là TS.Sáng Tạo và TS.Tiến Bộ. Hai ông này đang nghiên cứu các quần thể vi khuẩn khác nhau trong các phòng thí nghiệm công nghệ cao của họ. TS.Sáng Tạo bắt đầu với một quần thể 1000 vi khuẩn, số lượng này tăng gấp ba mỗi 6 giờ. Trong khi đó, TS.Tiến Bộ bắt đầu với một quần thể khác gồm 3375 vi khuẩn và số lượng này tăng gấp đôi mỗi 6 giờ.

   Một ngày nọ, sau khi quan sát các quần thể, họ quyết định so sánh kết quả của mình. Mục tiêu của họ là xem quần thể vi khuẩn của ai đạt đến số lượng cao nhất trong một khung thời gian nhất định.
   Dựa trên các quan sát của họ, phát biểu nào sau đây là đúng?

A. Sau 18 giờ, quần thể của TS.Sáng Tạo đạt 27000 vi khuẩn, trong khi quần thể của TS.Tiến Bộ đạt 100000 vi khuẩn.
B. Sau 30 giờ, cả hai quần thể sẽ vượt mức 200000 vi khuẩn
C. Quần thể của TS.Tiến Bộ vẫn lớn hơn quần thể của TS.Sáng Tạo sau 15 giờ.
D. Sau 18 giờ, cả hai quần thể sẽ bằng nhau ở mức 27000 vi khuẩn, và sau 24 giờ, quần thể của TS.Tiến Bộ sẽ đạt 81000 vi khuẩn.

2. (L.O.3.2) Trong khu vực bảo tồn thiên nhiên, số lượng thỏ phát triển với tỷ lệ tăng trưởng không đổi là 25% mỗi năm. Ban đầu, số lượng là 200 con thỏ. Các thợ săn được phép săn một số lượng thỏ nhất định hàng năm để duy trì số lượng thỏ gần mức ban đầu nhằm bảo vệ sự cân bằng sinh thái trong khu vực bảo tồn.
   Số lượng thỏ mà các thợ săn được phép săn mỗi năm nên là bao nhiêu trong các lựa chọn sau để số lượng thỏ duy trì gần 200 con nhất sau 3 năm, giả sử những người thợ săn luôn đạt đến mức cho phép hằng năm?

A. 50 B. 40 C. 60 D. 70

3. (L.O.3.2) Xét vấn đề lập kế hoạch ngân sách trong $m > 1$ giai đoạn được mô tả bằng mô hình IP nhị phân

$$\textbf{Model BIP}: \quad \max_{\boldsymbol{x}} \quad Z =^T \cdot \boldsymbol{x}$$
$$\text{subject to} \quad A\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}$$
$$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3, \cdots, x_{n-1}, x_n)^T \in \{0,1\}^n = V$$

trong đó ma trận ràng buộc $A = [a_{ij}]$ có kích thước $m \times n$ với tất cả các $a_{ij} \geq 0$. Đặt F là **tập giải pháp khả thi** của Mô hình BIP. Rõ ràng $F \subset V = \{0,1\}^n$, tập hợp đỉnh của siêu khối $H_n = (V, E)$.. Tập hợp cạnh $E = \{\{\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\} : \ d(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = 1; \text{ with } \ \boldsymbol{u} = (u_1, u_2, \cdots, u_n)^T, \ \boldsymbol{v} = (v_1, v_2, \cdots, v_n)^T \in V\}$, trong đó $d(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = \sum_{i=1}^{n} |u_i - v_i|$ là khoảng cách Hamming giữa hai đỉnh $\boldsymbol{u}$ và $\boldsymbol{v}$.

- Đối với bất kỳ hàng $i = 1, 2, \ldots, m$, ràng buộc thứ i của $A\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}$ được gọi là 'hợp lệ' hoặc 'phù hợp' nếu và chỉ $b_i \geq \sum_{j=1}^{n} a_{ij}$. Nếu không, nó được gọi là 'không hợp lệ' (không phù hợp).
- Đặt $P = \{j_0 \in \{1, 2, \ldots, n\} : \ \exists \ i \in \{1, 2, \ldots, m\} : a_{ij_0} > b_i\}$. P có thể được sử dụng để giảm kích thước của mô hình BIP.

Tổng số cạnh $|E|$ trong $H_n = (V, E)$ và kích thước tối đa m_F của F lần lượt là

A. $|E| = n\ 2^{n-1}$ và $m_F = 2^{n-|P|}$.
B. $|E| = n\ 2^{n-|P|}$ và $m_F = 2^{n-1}$.
C. $|E| = n\ 2^{n-1}$ và $m_F = 2^{n-1}$.
D. $|E| = \ 2^{n-1}$ và $m_F = n\ 2^{n-|P|}$.

4. (L.O.3.2) Tổng thống mới của quốc gia **V** đầu tư 15 triệu đô la Mỹ để xây dựng các trường cao đẳng khoa học mới với ngân sách x_1 và các trường kỹ thuật mới với ngân sách x_2 trong giai đoạn 2025-2028. Kế hoạch chi ngân sách cho các trường cao đẳng và trường kỹ thuật như vậy đáp ứng điều kiện về tỷ lệ đầu tư là $4x_2 - x_1 - 15 \leq 0$. Với khoản đầu tư này, trong vòng 4 năm tới, chính quyền mới cho rằng lợi nhuận từ việc xây dựng các trường cao đẳng mới Z_C bằng 20% ngân sách đã tính, và lợi nhuận từ việc xây dựng các trường kỹ thuật mới Z_T bằng 40% ngân sách đã tính. Hàm lợi nhuận được đưa ra bởi $z = Z_C + Z_T$.
Hàm lợi nhuận, giải pháp tối ưu $\boldsymbol{x} = [x_1, \ x_2]$ và giá trị tối ưu z_{OPT} lần lượt là

A. $z = 0.2\ x_1 + 0.4\ x_2, \ \ x_1 = 5, \ x_2 = 9; \ z_{OPT} = 4.2.$
B. $z = 0.2\ x_1 + 0.4\ x_2, \ \ x_1 = 9, \ x_2 = 6; \ z_{OPT} = 4.2.$
C. $z = 0.2\ x_1 + 0.4\ x_2, \ \ x_1 = 11, \ x_2 = 4; \ z_{OPT} = 3.8.$
D. $z = 0.4\ x_1 + 0.2\ x_2, \ \ x_1 = 9, \ x_2 = 6;; \ z_{OPT} = 4.$

5. (L.O.3.2) Trong thuật toán Nhánh-Cận (Brand-and-Bound), tại một bài toán quy hoạch tuyến tính con tồn tại nghiệm, khi nào thì chúng ta thực hiện ngắt nhánh (pruning, hay còn gọi là hiện tượng "fathomed")?

A. Khi nghiệm của bài toán con tốt hơn nghiệm tốt nhất đã tìm được.
B. Khi nghiệm của bài toán con không tốt hơn nghiệm tốt nhất đã tìm được.
C. Khi nghiệm tìm được thoã mãn điều kiện nguyên.
D. Khi nghiệm tìm được không thoã mãn điều kiện nguyên.

6. (L.O.3.2) Xét bảng đơn hình sau tại một bước lặp của phương pháp đơn hình giải bài toán quy hoạch tuyến tính dạng chuẩn tìm giá trị lớn nhất (standard maximization).

x	y	u	v	
$\frac{1}{2}$	1	0	$\frac{1}{2}$	11000
2	0	$\frac{2}{3}$	$-\frac{3}{4}$	16000
-1	0	0	3	2

Giá trị của (x, y) bằng bao nhiêu để hàm mục tiêu đạt giá trị lớn nhất?

A. $(7000, 8000)$. B. $(8000, 7000)$. C. $(11000, 16000)$. D. $(16000, 11000)$.

7. (L.O.3.2) Xét một mô hình LP với các biến quyết định $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3, \cdots, x_{n-1}, x_n)^\top$ với m ràng buộc

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le b_i, \quad \text{for } i = 1, \cdots, m.$$

Đặt F là tập hợp khả thi của mô hình này. Gọi $\boldsymbol{x}_{opt}$ là một giải pháp tối ưu. Bạn kết luận rằng

A. F không bị giới hạn (unbounded) và $\boldsymbol{x}_{opt}$ thỏa mãn mọi ràng buộc.
B. F bị giới hạn (bounded) và không có ràng buộc nào được thỏa mãn cho $\boldsymbol{x}_{opt}$.
C. F là tập lồi và $\boldsymbol{x}_{opt}$ thỏa mãn một vài ràng buộc.
D. F là tập lồi và $\boldsymbol{x}_{opt}$ thỏa mãn mọi ràng buộc.

8. (L.O.3.1) [Harmony question] Mục tiêu tối ưu hóa của bài toán cutting stock problem là gì? Với $\mathcal{A}_t$ là tập hợp tất cả các hành động tại bước thời gian t và $f(s)$ là hàm để tính diện tích stock s.

A. $\arg\max_{a_{1:T}\in\mathcal{A}_{1:T}} \sum_{s_i\in\mathcal{S}\setminus\{s_t\in a_t\}} f(s_i)$
B. $\arg\min_{a_{1:T}\in\mathcal{A}_{1:T}} \sum_{s_i\in\mathcal{S}\setminus\{s_t\in a_t\}} f(s_i)$
C. $\arg\sup_{a_{1:T}\in\mathcal{A}_{1:T}} \sum_{s_i\in\mathcal{S}\setminus\{s_t\in a_t\}} f(s_i)$
D. $\arg\inf_{a_{1:T}\in\mathcal{A}_{1:T}} \sum_{s_i\in\mathcal{S}\setminus\{s_t\in a_t\}} f(s_i)$

9. (L.O.2.1) [Harmony question] Trong bài toán "2D Cut Stock Problem", thuật ngữ "trim loss" chỉ cho điều gì?

A. Chi phí cắt vật liệu. B. Thời gian cần thiết để cắt vật liệu.
C. Vật liệu thừa còn lại sau khi cắt. D. Số lượng mảnh cắt không đúng.

10. (L.O.3.2) Công ty khởi nghiệp của bạn có kế hoạch phát triển kinh doanh vào năm tới với tổng ngân sách là 10 triệu đô la Mỹ, để đầu tư vào hai lĩnh vực kinh tế: lĩnh vực **ICT** (có nghĩa là CNTT - Công nghệ thông tin và truyền thông) và lĩnh vực Sản xuất (**Manufacturing sector**).

- Ký hiệu hai biến x_1, x_2 [đơn vị 1 triệu đô la Mỹ] lần lượt là số tiền ngân sách chi cho lĩnh vực CNTT và chi cho lĩnh vực Sản xuất. Sau 1 năm đầu tư, lợi nhuận Z_1 thu được từ CNTT bằng 10% ngân sách đã chi, và lợi nhuận Z_2 thu được từ sản xuất bằng 30% ngân sách đã chi.

- Do đó, kế hoạch đầu tư của bạn có thể được xây dựng dưới dạng một mô hình tuyến tính với mục tiêu tối đa hóa hàm z (cung cấp lợi nhuận từ cả hai lĩnh vực), được đưa ra bởi:

$$\text{Maximize } z = Z_1 + Z_2.$$

Ngành CNTT thường có rủi ro cao hơn ngành Sản xuất, do đó chúng ta yêu cầu thêm rằng $-6 \le 3x_1 - 3x_2$. Giải pháp tối ưu là $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2)^\top$ và giá trị tối ưu z_{max} tương ứng là

A. $\boldsymbol{x} = (6,\ 4)^\top$ và $z_{max} = 2.2$.
B. $\boldsymbol{x} = (5,\ 5)^\top$ và $z_{max} = 2.8$.
C. $\boldsymbol{x} = (4,\ 6)^\top$ và $z_{max} = 2.2$.
D. $\boldsymbol{x} = (4,\ 6)^\top$ và $z_{max} = 2.8$.

Các CH từ 11– 13 cùng xét chung mô hình tăng trưởng logistic dưới đây.

Một quần thể sinh vật phát triển theo mô hình tăng trưởng logistic với số lượng tối đa (sức chứa) là 25,000 cá thể trong một khu vực nhất định. Giả sử ban đầu có 1500 cá thể và sau 5 năm tăng lên 5000 cá thể.

11. (L.O.3.2) Sau bao lâu quần thể sẽ đạt 20,000 cá thể?

A. 16 năm. B. 15 năm. C. 15.2 năm. D. 15.5 năm.

12. (L.O.3.2) What is the logistic growth rate of the population?

A. 0.25. B. 0.2. C. 0.27. D. 0.3.

13. (L.O.3.1) [Harmony question] Cho $\mathcal{P} = \{p\}$ là tập hợp những sản phẩm, $\mathcal{S} = \{s\}$ là tập hợp tấm nguyên liệu, $c(s, p) \in \{0, 1\}$ là chỉ số cho biết tấm nguyên liệu s có được sử dụng để cắt sản phẩm p hay không. Về mặt lý thuyết, kích thước chính xác của tập hợp hành động (action set) ở bước đầu tiên là bao nhiêu?

A. Vô cực (Infinity). B. Một số hữu hạn rất lớn.
C. $|\mathcal{S}| \times |\mathcal{P}|$ D. Không có phương án nào đúng.

14. (L.O.3.2) Trong thành phố Tài Chính, An và Chí quyết định đầu tư tiền của họ vào các tài khoản tiết kiệm khác nhau do Ngân hàng Thịnh Vượng cung cấp. Cả hai bắt đầu với $1000, nhưng họ chọn các tài khoản với cấu trúc lãi suất khác nhau:

- **Tài khoản của An:**
  - Số tiền gửi ban đầu: $1000
  - Lãi suất: 55% hàng năm, cộng gộp hàng quý
  - Gửi thêm: $80 vào cuối mỗi năm
- **Tài khoản của Chí:**
  - Số tiền gửi ban đầu: $1000
  - Lãi suất: 55% hàng năm, cộng gộp hàng tháng

Ở cuối năm thứ mấy thì tổng tiền lãi của Chí vượt tổng tiền lãi của An lần đầu tiên?

A. 3 B. 2 C. 4 D. đáp án khác

15. (L.O.3.1) [Harmony question] TRong mô hình học tăng cường (reinforcement learning) để giải bài toán stock cutting problem thì thông tin nào cần có trong một hành động (action)?

A. Tất cả phương án đều đúng. B. Thông tin vật liệu. C. Thông tin sản phẩm.
D. Vị trí cắt.

16. (L.O.3.2) TOM - một người hâm mộ hamburger ở thành phố New York - đến một cửa hàng McDonald để ăn trưa, chỉ có 34 đô la trong túi. Giả sử mỗi chiếc Mac nhỏ có giá 3 đô la, mỗi chiếc Mac vừa có giá 4 đô la và mỗi chiếc Big Mac có giá 5 đô la. Ký hiệu x_1, x_2, x_3 là số cái hamburger tương ứng với Mac nhỏ, Mac vừa và Big Mac mà anh ta có thể mua.
TOM tự hỏi, có lẽ kế hoạch của anh ta ít nhất phải thỏa mãn điều kiện $3x_1 + 5x_2 + 4x_3 \leq 34;\ x_i \in \mathbb{Z},\ \forall i = 1, 2, 3$, nhưng không chắc chắn!! Giả sử thêm rằng TOM rất đói vào ngày hôm đó, anh quyết định không ăn bánh hamburger Mac cỡ nhỏ và vừa, và chỉ thích ăn Big Mac.
Các ràng buộc đơn giản phù hợp và số lượng Big Mac tối đa K mà anh có thể gọi lần lượt là

A. $3x_1 + 4x_2 + 5x_3 \leq 34;\ x_i \in \mathbb{N},\ \exists i \in \{1, 2, 3\}$ và $K = 6$.
B. $3x_1 + 4x_2 + 5x_3 \leq 34;\ x_i \in \mathbb{Z},\ \forall i = 1, 2, 3,$ và $K = 5$.
C. $3x_1 + 4x_2 + 5x_3 \leq 34;\ x_1, x_2, x_3 \geq 0$ và $K = 6$.
D. $3x_1 + 4x_2 + 5x_3 \leq 34;\ x_i \in \mathbb{N},\ \forall i \in \{1, 2, 3\}$ và $K = 6$.

17. (L.O.3.2) Xét bảng đơn hình sau tại một bước lặp của phương pháp đơn hình

A_{1j}	4	2	5	1	0	0	80
A_{2j}	-2	-5	1	0	1	0	10
A_{3j}	7	3	-3	0	0	1	21
R_j	-9	-18	-12	0	0	0	0

Hàng nào sẽ được chọn để xác định phần tử trục (còn gọi là phần tử xoay - pivot)?

A. A_{3j}.
B. A_{1j}.
C. A_{2j}.
D. r_j.

18. (L.O.3.1) [Harmony question] Một công ty cần cắt những miếng hình chữ nhật nhỏ hơn từ tấm kim loại lớn với kích thước của tấm kim loại là 13 *inches* $\times$ 10 *inches* và nhu cầu về số lượng sản phẩm được nêu trong bảng sau.

Sản phẩm thứ i	Chiều dài (inches)	Chiều rộng (inches)	Số lượng
1	2	1	5
2	4	2	5
3	5	3	2
4	7	4	3
5	8	5	2

Hỏi cần sử dụng ít nhất bao nhiêu tấm kim loại để đáp ứng nhu cầu trên?

A. 3.
B. 2.
C. 4.
D. Phương án khác.

19. (L.O.3.2) Có một khu rừng rộng lớn tên là Everwood, nơi mà các loài thú đang sinh sống và phát triển. Trong khu rừng này, có một loài đặc biệt là loài hươu đốm. Loài hươu đốm này có đặc điểm sinh học đặc biệt và được nghiên cứu để hiểu rõ hơn về sự phát triển và biến động dân số của chúng. TS.Eric nhận thấy rằng quần thể hươu đốm trong khu rừng Everwood đang có những biến động lớn và muốn hiểu rõ hơn về các yếu tố ảnh hưởng đến sự phát triển của chúng. Ông đã quan sát và xây dựng một mô hình toán học để mô phỏng sự thay đổi của quần thể hươu đốm theo thời gian như sau:

$$\frac{dP}{dt} = 0.5P(1 - \frac{P}{100}) - 0.1P$$

trong đó,

- $r = 0.5$: tốc độ tăng trưởng
- $K = 100$: sức chứa của môi trường
- $m = 0.1$: tỷ lệ di cư

Chọn câu trả lời gần đúng nhất (sai số nhỏ nhất) với điểm cân bằng của quần thể hươu đốm này, biết rằng hiện tại quần thể có 50 cá thể.

A. 50
B. 75
C. 150
D. 100

20. (L.O.3.2) Xét bài toán quy hoạch tuyến tính sau.

$$\begin{aligned} \max \quad & P = x + 4y - 2z \\ \text{subject to} \quad & \\ & x + 2y - 3z \leq 4, \\ & 5x + 6y + 7z \leq 8, \\ & 9x + 10y - 11z \leq 12, \\ & 13x - 14y - 15z \leq 16, \\ & x, y, z \geq 0. \end{aligned}$$

Cần bao nhiêu biến phụ (slack variable) được thêm vào mô hình trên để giải bằng phương pháp đơn hình?

A. 2. B. 1. C. 3. D. 4.

21. (L.O.3.2) Tại vùng đất kỳ diệu Ecoville, nổi tiếng với cây cỏ xanh tươi và động vật hoang dã phong phú, một nhóm các nhà khoa học đã bắt tay vào một nhiệm vụ nghiên cứu các mô hình tăng trưởng của một loài thực vật hiếm. Loài thực vật đặc biệt này, được gọi là Hoa Lumina, đã thu hút sự tò mò của các nhà thực vật học vì tốc độ tăng trưởng nhanh của nó dưới các điều kiện môi trường khác nhau.
Các nhà khoa học quyết định theo dõi số lượng Hoa Lumina trong một khu vực được chỉ định trong khoảng thời gian 5 năm. Họ đã ghi nhận số lượng hoa vào cuối mỗi năm, và quan sát của họ như sau:

Time (t)	**Observed Population**
1	125
2	150
3	180
4	220
5	260

Bị cuốn hút bởi dữ liệu này, các nhà khoa học đã sử dụng các mô hình toán học khác nhau để mô tả sự tăng trưởng của hoa Lumina. Mô hình nào sau đây thể hiện tốt nhất (tổng sai số tuyệt đối bé nhất) dữ liệu quan sát của các nhà khoa học?

A. $P(t) = 100(1 + 0.21)^t$ B. $P(t) = 100(1 + 0.22)^t$
C. $P(t) = 100e^{0.21t}$ D. $P(t) = 100e^{0.20t}$

22. (L.O.3.2) Trong thuật toán Nhánh-Cận (Brand-and-Bound), tại một bước giải bài toán con, cận trên của hàm mục tiêu được định nghĩa là:

A. 0. B. ∞.
C. Không xác định được. D. Giá trị hàm mục tiêu của nghiệm tốt nhất từng tìm được.

Các CH từ 23– 25 dùng dữ kiện chung dưới đây.

Xét một quần thể bị ảnh hưởng bởi dịch bệnh, trong đó các cá thể chuyển đổi giữa trạng thái khỏe mạnh và nhiễm bệnh mỗi tháng. Trong mô hình thời gian rời rạc này, 25% số người nhiễm bệnh hồi phục và trở lại trạng thái khỏe mạnh, trong khi 20% số người khỏe mạnh trở nên nhiễm bệnh. Với mỗi tháng n, ta định nghĩa:

H_n = số người khoẻ mạnh

I_n = số người nhiễm bệnh

$P_n = \frac{I_n}{H_n + I_n}$ = tỉ lệ dân số nhiễmm bệnh.
Giả sử dân số không đổi:

$$H_{n+1} + I_{n+1} = H_n + I_n.$$

23. (L.O.3.2) Từ các dữ kiện đã cho, ta cố

A. $\begin{cases} I_{n+1} &= 0.75I_n + 0.2H_n \\ H_{n+1} &= 0.25I_n + 0.8H_n. \end{cases}$

B. $\begin{cases} I_{n+1} &= 0.2I_n + 0.75H_n \\ H_{n+1} &= 0.8I_n + 0.25H_n. \end{cases}$

C. $\begin{cases} I_{n+1} &= 0.25I_n + 0.8H_n \\ H_{n+1} &= 0.2I_n + 0.2H_n. \end{cases}$

D. $\begin{cases} I_{n+1} &= 0.25I_n + 0.2H_n \\ H_{n+1} &= 0.75I_n + 0.8H_n. \end{cases}$

24. (L.O.3.2) Lưu ý rằng hệ phương trình trong Câu hỏi **??** tương thích với giả định dân số không đổi ở trên. Khi đó

A. $P_{n+1} = 0.25 + 0.75 * P_n$.

B. $P_{n+1} = 0.55 + 0.2 * P_n$.

C. $P_{n+1} = 0.2 + 0.55 * P_n$.

D. $P_{n+1} = 0.2 + 0.75 * P_n$.

25. (L.O.3.2) Hệ động lực trong Câu hỏi 24 cho ta biết rằng trong dài hạn (khi $n \to \infty$) tỉ lệ dân số nhiễm bệnh sẽ là

A. 55.55%.

B. 33.33%.

C. 44.44%.

D. 66.66%.

....HẾT BÀI THI..

Solution 4118

1. C.
2. D.
3. A.
4. B.
5. B.
6. B.
7. D.
8. A.
9. C.
10. C.
11. C.
12. C.
13. A.
14. D.
15. A.
16. D.
17. A.
18. B.
19. B.
20. D.
21. A.
22. D.
23. A.
24. C.
25. C.