Об авторах

А. А. Зайцев — канд. физ.-мат. наук, ст. науч. сотр., РГУ им. И. Канта.
П. В. Дидковский — асп., РГУ им. И. Канта, pavel_di@bk.ru

УДК 530.1

А. А. Зайцев, Д. А. Каргаполов

КОНСТРУИРОВАНИЕ БАРГМАНОВСКИХ ГАМИЛЬТОНИАНОВ МАТРИЧНОГО УРАВНЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА

Предложен способ построения баргмановских гамильтонианов матричного уравнения Шредингера и решения этого уравнения, основанный на свойствах характеристической функции. Его можно использовать для решения многих задач квантовой физики и теории солитонов.

In the paper method of construction of Bargman Hamiltonians of matrix Schrödinger equation and its solutions based on properties of characteristic function is stated. It can be used for solution of many problems of quantum physics and soliton theory.

Гамильтониан матричного уравнения Шредингера для m-уровневой квантовой системы во внешнем поле

$$i\hbar\dot{\psi} = H\psi\ ,\ H = JE + V\ ,\ diag V = 0\ , \tag{1}$$

$$J = diag(c_1,...,c_m),\ c_1 > c_2 > ... > c_m\ . \tag{2}$$

называется *баргмановским*, если уравнение (1) имеет решение вида

$$\psi = P(E,t)\exp(JEt / i\hbar)\ , \tag{3}$$

где $P(E,t)$ — многочлен от E с матричными коэффициентами, зависящими от t.

Если подставить (3) в (1), то получим следующее уравнение для многочлена $P(E,t)$:

$$i\hbar\dot{P} = E[J,P] + VP\ . \tag{4}$$

Можно показать, что для любого полиномиального решения этого уравнения старший коэффициент является постоянной матрицей.

Для конкретного баргмановского гамильтониана H существует бесконечно много решений, имеющих представление вида (3). Действительно, умножим решение (3) справа на произвольный матричный диагональный многочлен $P_0(E)$, не зависящий от t, тогда получим новое решение уравнения (1), так как экспонента в (3) — диагональная матрица, поэтому коммутирует с любой другой диагональной матрицей. После перестановки экспоненты вправо новое решение также будет иметь вид (3), но с заменой многочлена $P(E,t)$ на $P(E,t)P_0(E)$.

Укажем важнейшее свойство уравнения (4).

Теорема 1. Для любого решения *P(E,t)* уравнения (4) функция $\widetilde{P}(E,t) = S\overline{P}(E,t)S$, $S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, также будет решением этого уравнения.

Доказательство. Простым вычислением можно убедиться в справедливости соотношений $JS + SJ = StrJ$, $VS + S\overline{V} = 0$.

Используя их, получаем:

$$i\hbar\dot{\widetilde{P}} - E\left[J,\widetilde{P}\right] - V\widetilde{P} = i\hbar S\dot{\overline{P}}S - E\left[J,S\overline{P}S\right] - VS\overline{P}S =$$
$$= -ES\left[J,\overline{P}\right]S - S\overline{V}\overline{P}S - E\left[J,S\overline{P}S\right] - VS\overline{P}S =$$
$$= E\left(S\overline{P}(JS+SJ) - (JS+SJ)\overline{P}S\right) - \left(S\overline{V} + VS\right)\overline{P}S = EtrJ\left(S\overline{P}S - S\overline{P}S\right) = 0 .$$

Теорема доказана.

Многочлен *P(E,t)* называется *нормализованным*, если он имеет наименьшую степень и его старший коэффициент является единичной матрицей *I*.

Теорема 2. Для каждого баргмановского гамильтониана нормализованный многочлен единственен.

Доказательство. Действительно, пусть *P(E,t)* и $P_1(E,t)$ — два разных нормализованных многочлена. Тогда их старшие степени совпадают. Далее разность решений уравнения (1) снова будет решением этого уравнения, поэтому функция $\varphi = \left(P(E,t) - P_1(E,t)\right)\exp\left(JEt / i\hbar\right)$ есть решение уравнения (1). Она также имеет представление вида (3), в котором степень многочлена меньше степеней многочленов *P(E,t)* и $P_1(E,t)$, что противоречит определению нормализованных многочленов. Полученное противоречие доказывает справедливость утверждения о единственности нормализованного многочлена.

Степень нормализованного многочлена назовем *порядком* баргмановского гамильтониана.

Можно показать, что баргмановский гамильтониан порядка *n* выражается через второй по старшинству коэффициент нормализованного многочлена с помощью формулы

$$V(t) = -\left[J, P_{n-1}(t)\right]. \tag{5}$$

Ряд свойств баргмановского гамильтониана изложен в [1].

Далее рассматривается случай двухуровневой квантовой системы, *n*=2.

Теорема 3. Нормализованный многочлен подчиняется тождеству

$$P(E,t) = -S\overline{P}(E,t)S . \tag{6}$$

Доказательство. Согласно теореме 1, обе части равенства (6) будут решениями уравнения (4). Старшим коэффициентом многочлена в правой части (6) будет матрица $-SIS = -S^2 = I$ (в справедливости равенства $S^2=I$ убеждаемся прямым вычислением). Следовательно, этот многочлен нормализованный и по теореме 2 совпадает с *P(E,t)*.

Следствием тождества (6) будет представление

$$P(E,t) = \begin{pmatrix} p_{11}(E,t) & p_{12}(E,t) \\ -\overline{p}_{12}(E,t) & \overline{p}_{11}(E,t) \end{pmatrix}. \tag{7}$$

Назовем матрицу

$$G(E) = \det P(E,t) \tag{8}$$

характеристическим многочленом баргмановского гамильтониана. Очевидно, что для баргмановского гамильтониана порядка n степень характеристического многочлена равна $2n$.

Теорема 4. Характеристический многочлен есть четная функция от E, его коэффициенты не зависят от t и являются действительными числами, причем старший коэффициент равен 1. Уравнение $G(E)=0$ не имеет действительных корней, все корни простые и распадаются на пары комплексно сопряженных чисел.

Доказательство. Воспользуемся следующими известными фактами: 1) пусть B — матрица, элементами которой являются алгебраические дополнения к матрице A, тогда $AB^T= B^TA=IdetA$,

2) если A и B зависят от t, $A=A(t)$, $B=B(t)$, то

$$\frac{d}{dt}\det A = tr\left(\dot{A}^T B\right) = tr\left(\dot{A} B^T\right),$$

3) для любых матриц A, B, C имеет место тождество $tr(ABC)=tr(CAB)$.

Тогда из уравнения (4) и равенства $trV=0$ (следствие (1)) получаем:

$$i\hbar\frac{d}{dt}\det P = i\hbar tr\left(\dot{P}B^T\right) = Etr\left(JPB^T - PJB^T\right) + tr\left(VPB^T\right) =$$
$$= Etr\left(JPB^T\right) - Etr\left(PJB^T\right) + tr(VI\det P) = Etr(JI\det P) - Etr\left(B^T PJ\right) + \det P trV =$$
$$= E\det P trJ - Etr(I\det PJ) = E\det P trJ - E\det P trJ = 0\,.$$

Поэтому

$$\dot{G} = \frac{d}{dt}\det P = 0 \;\rightarrow\; G(E) = const\,,$$

и первая часть теоремы доказана.

Далее, из представления (7) следует, что, действительно, характеристический многочлен является четной функцией от E и его старший коэффициент равен 1.

Допустим, что уравнение $G(E)=0$ имеет действительный корень $E=E_0$. Тогда

$$G(E_0) = \left|p_{11}(E_0,t)\right|^2 + \left|p_{12}(E_0,t)\right|^2 = 0\,,$$

откуда $p_{11}(E_0,t)=0$, $p_{12}(E_0,t)=0$. Это означает, что матричный многочлен $P(E_0,t)\equiv 0$. Тогда $P(E,t)$ можно представить в виде $P(E,t)=(E - E_0)Q(E,t)$. Отсюда следует, что уравнение (1) обладает решением вида (3) с заменой $P(E,t)$ на $Q(E,t)$. Но старший коэффициент $Q(E,t)$ есть I, значит, $Q(E,t)$ — нормализованный многочлен, и тогда $P(E,t)$ не нормализован, что противоречит условию теоремы. Следовательно, уравнение $G(E)=0$ действительных корней не имеет. Поскольку коэффициенты $G(E)$ действительные, то все корни распадаются на пары комплексно сопряженных чисел. Теорема доказана.

Теорема 5. Для каждого корня E_k характеристического многочлена $G(E)$ имеют место следующие представления:

$$P(E_k,t)=\begin{pmatrix}\xi_k(t) & R_k(t)\xi_k(t)\\ \eta_k(t) & R_k(t)\eta_k(t)\end{pmatrix},\ P(\overline{E}_k,t)=\begin{pmatrix}\xi_k^*(t) & R_k^*(t)\xi_k^*(t)\\ \eta_k^*(t) & R_k^*(t)\eta_k^*(t)\end{pmatrix}, \tag{9}$$

где

$$R_k(t)=\exp((c_1-c_2)E_k(t-t_k)/i\hbar),\ R_k^*(t)=\exp\left((c_1-c_2)\overline{E}_k\left(t-t_k^*\right)/i\hbar\right), \tag{10}$$

комплексные константы t_k и t_k^* связаны соотношением $t_k^*-\bar{t}_k=\pi\hbar/(c_1-c_2)\overline{E}_k$, а пары $(\xi_k(t),\eta_k(t))$ и $(\xi_k^*(t),\eta_k^*(t))$ являются решениями систем уравнений

$$i\hbar\dot{\xi}_k(t)=\overline{v}(t)\eta_k(t),\ i\hbar\dot{\eta}_k(t)=-(c_1-c_2)E_k\eta_k(t)+v(t)\xi_k(t),$$
$$i\hbar\dot{\xi}_k^*(t)=\overline{v}(t)\eta_k^*(t),\ i\hbar\dot{\eta}_k^*(t)=-(c_1-c_2)\overline{E}_k\eta_k^*(t)+v(t)\xi_k^*(t),$$
$$\xi_k^*(t)=\overline{R_k(t)\eta_k(t)},\ \eta_k^*(t)=-\overline{R_k(t)\xi_k(t)};$$

здесь $v(t)$ и $\overline{v}(t)$ — недиагональные элементы матрицы V(t),

$$V(t)=\begin{pmatrix}0 & \overline{v}(t)\\ v(t) & 0\end{pmatrix}.$$

Доказательство. Пусть $E=E_k$ — комплексный корень характеристического многочлена. Поскольку $\det P(E_k,t)=G(E_k)=0$, то в определителе (7) при $E=E_k$ второй столбец пропорционален первому. Полагая $\xi_k(t)=p_{11}(E_k,t)$, $\eta_k(t)=-\overline{p}_{12}(E_k,t)$, будем иметь

$$p_{11}(E_k,t)=R_k(t)\xi_k(t),\ \overline{p}_{12}(E_k,t)=R_k(t)\eta_k(t),$$

где $R_k(t)$ — коэффициент пропорциональности. Записывая уравнение (4) покомпонентно и подставляя туда эти равенства, получаем формулы (9), (10) и остальные соотношения. Теорема доказана.

На основе теорем 3—5 предлагается следующий способ построения баргмановских гамильтонианов.

Многочлен $G(E)$ факторизуется следующим образом:

$$G(E)=G_+(E)G_-(E),\ G_-(E)=\overline{G}_+(E), \tag{11}$$

где корни $G_+(E)$ расположены в верхней полуплоскости, а корни $G_-(E)$ — в нижней. Обозначим $P_1(E,t)$ — первый столбец матричного многочлена $P(E,t)$. Тогда отношение $P_1(E,t)/G_-(E)$ разлагается по простейшим дробям

$$\frac{P_1(E,t)}{G_-(E)}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+\sum_{j=1}^{n}\frac{P_1(\overline{E}_j,t)}{G'_-(\overline{E}_j)(E-\overline{E}_j)}, \tag{12}$$

где $\{E_j\}$ — корни $G_+(E)$. Полагаем в разложении (12) $E=E_k$, тогда, учитывая, что $P_1(E_k,t)$ есть первый столбец матрицы (9), получаем систему

$$\begin{pmatrix}\xi_k(t)\\ \eta_k(t)\end{pmatrix}=G_-(E_k)\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+G_-(E_k)\sum_{j=1}^{n}\frac{\overline{R_j(t)}}{G'_-(\overline{E}_j)(E_k-\overline{E}_j)}\begin{pmatrix}\overline{\eta_j(t)}\\ -\overline{\xi}_j(t)\end{pmatrix},\ k=\overline{1,n}, \tag{13}$$

или

$$\xi_k(t)=G_-(E_k)+G_-(E_k)\sum_{j=1}^{n}\frac{\overline{R_j(t)}}{G'_-(\overline{E}_j)(E_k-\overline{E}_j)}\overline{\eta}_j(t), \tag{14}$$

$$\eta_k(t) = -G_-(E_k)\sum_{j=1}^{n}\frac{\overline{R_j(t)}}{G'_-(\overline{E}_j)(E_k - \overline{E}_j)}\overline{\xi}_j(t). \tag{15}$$

После подстановки (15) в (14) и некоторых преобразований, использующих второе из соотношений (11), получаем следующую линейную алгебраическую систему для $\xi_k(t) = p_{11}(E_k, t)$, $k = \overline{1,n}$:

$$\sum_{j=1}^{n} A_{kj}(t)\xi_j(t) = G_-(E_k),\ k = \overline{1,n}, \tag{16}$$

где

$$A_{kj}(t) = \delta_{kj} + G_+(\overline{E}_j)\overline{R}_j(t)\sum_{l=1}^{n}\frac{R_l(t)}{G'_+(E_l)(\overline{E}_j - E_l)}. \tag{17}$$

Она решается с помощью формул Крамера. Формулы (14) дают линейные выражения для элементов $p_{21}(E_k, t)$ через $\overline{p_{11}(E_k, t)}$. Это позволяет определить матричный многочлен $P(E,t)$, а затем с помощью формулы (5) сам гамильтониан матричного уравнения Шредингера.

Теперь можно указать процедуру построения баргмановских гамильтонианов.

1. Следует взять два набора комплексных чисел $\{E_k\}$, $\{t_k\}$. Для первого набора $ImE_k>0$, а комплексные числа t_k — произвольные.

2. По набору $\{E_k\}$ строятся многочлены

$$G_+(E) = \prod_{k=1}^{n}(E - E_k),\ G_-(E) = \overline{G}_+(E),\ G(E) = G_+(E)G_-(E).$$

3. Для набора $\{t_k\}$ строятся функции

$$R_k(t) = \exp((c_1 - c_2)E_k(t - t_k)/i\hbar),\ k = \overline{1,n}.$$

4. Наборы $\{E_k\}$, $\{t_k\}$, $\{R_k(t)\}$ определяют систему линейных алгебраических уравнений для первого элемента матрицы $P(E_k,t)$ (система (16)).

5. Решается алгебраическая система (16) для $\xi_k(t)$, затем определяются $\eta_k(t)$ по формулам (15); результатом будет первый столбец матрицы $P(E_k,t)$.

6. По формулам (7), (9), (10) находится второй столбец матрицы $P(E_k,t)$.

7. С помощью разложения (12) восстанавливается матричный многочлен $P(E,t)$ для произвольного E.

8. По формуле (5) находится матрица V и, следовательно, баргмановский гамильтониан.

Стоит заметить, что предложенная схема напоминает схему интегрирования методом обратной задачи, но намного проще.

Заключение. Предложен способ построения баргмановских гамильтонианов матричного уравнения Шредингера и решения этого уравнения, основанный на свойствах характеристической функции. Преимуществами нового способа по сравнению с методом обратной задачи рассеяния и преобразованием Дарбу являются простота получения результата и бóльшая компактность представлений для гамильтониана и решений уравнения Шредингера (ср. соответствующие формулы для решения аналогичных задач в [2; 3]). Его можно использовать для решения многих задач квантовой физики и теории солитонов.

Список литературы

1. *Зайцев А.А., Каргаполов Д.А.* О точных решениях матричного уравнения Шредингера // Вестник РГУ им. И. Канта. Вып. 3: Сер. Физико-математические науки. Калининград: Изд-во РГУ им. И. Канта, 2007.
2. *Захаров В.Е., Манаков С.В., Новиков С.П., Пичаевский Л.П.* Теория солитонов: Метод обратной задачи. М., 1980.
3. *Тахтаджян Л.А., Фаддеев Л.Д.* Гамильтонов подход в теории солитонов. М., 1986.

Об авторах

А. А. Зайцев — канд. физ.-мат. наук, ст. науч. сотр., РГУ им. И. Канта.
Д. А. Каргаполов — асп., РГУ им. И. Канта, Dmitry_AK@mail.ru

УДК 551.465

В. А. Гриценко, А. Г. Зацепин, И. П. Чубаренко, С. С. Низов

О ГИДРАВЛИЧЕСКОМ СКАЧКЕ ПРИ РАССЛОЕНИИ ВДОЛЬСКЛОНОВОГО ГРАВИТАЦИОННОГО ТЕЧЕНИЯ

Анализ результатов численных и лабораторных экспериментов при изучении взаимодействия вдольсклоновых течений с пикноклином позволил идентифицировать возникновение внутреннего гидравлического скачка для течений с расслоением и смены режима с закритического на докритический.

Analysis of the results of numerical and laboratory experiments on interaction of down-slope currents with a pycno-cline has allowed to identify an occurrence of an internal hydraulic jump and a change of a regime of currents from supercritical to subcritical in the case of shearing.

Посылки. Эффект расслоения вдольсклонового гравитационного течения в вертикальной плоскости при его погружении в стратифицированную жидкость известен уже достаточно давно [7; 9] и был получен как в лабораторных [9; 10], так и в численных [1; 8] экспериментах. Вместе с тем из-за сложности регистрации в зоне контакта различных по плотности водных масс и на сегодняшний день отсутствует описание механизма их взаимодействия. Цель данной работы — исследование эффекта возникновения внутреннего гидравлического скачка при взаимодействии распространяющегося вдоль склона дна гравитационного течения с пикноклином.

В основе работы лежат результаты лабораторных экспериментов в гидролотке ИО РАН [1], позволившие предположить существование