

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО
ОБРАЗОВАНИЯ
«НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИТМО»

ФАКУЛЬТЕТ ТЕХНОЛОГИЙ ИСКУССТВЕННОГО ИНТЕЛЛЕКТА



Индивидуальное домашнее задание
по дисциплине “Математический анализ и основы вычислений”
Вариант № 33

Выполнил:
Студент группы J3111
Воробьев Андрей Павлович
ИСУ: 465440
Преподаватель:
Табиева А.В.

Санкт-Петербург
2025

б) докажем, что не равномерно непрерывна:

$$\exists \varepsilon > 0 \quad \forall \delta > 0 \quad \exists x_1, x_2 \in X \quad |x_1 - x_2| < \delta \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$$

возьмём $x_1 = 1 - \frac{1}{n} \quad x_2 = 1 - \frac{1}{n+1} \quad x_1, x_2 \in (0, 1)$

$$|x_1 - x_2| = \left| 1 - \frac{1}{n} - 1 + \frac{1}{n+1} \right| = \left| \frac{n - n - 1}{n(n+1)} \right| = \frac{1}{n(n+1)} < \delta \quad \text{при } n \rightarrow \infty, \text{ но}$$

$$|f(x_1) - f(x_2)| = \left| 2\left(1 - \frac{1}{n}\right) - \sqrt{1 - \frac{1}{n}} + \frac{1}{1 - \frac{1}{n} - 1} - 2\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) + \sqrt{1 - \frac{1}{n+1}} - \frac{1}{1 - \frac{1}{n+1} - 1} \right| =$$

$$= \left| \cancel{2} - \frac{2}{n} - \sqrt{1 - \frac{1}{n}} - \cancel{1} - \cancel{2} + \frac{2}{n+1} + \sqrt{1 - \frac{1}{n+1}} + \cancel{1} + 1 \right| =$$

$$= \left| -\frac{2}{n} - \sqrt{1 - \frac{1}{n}} + \frac{2}{n+1} + \sqrt{1 - \frac{1}{n+1}} + 1 \right|$$

$$\begin{array}{ccccc} \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 1 \end{array} \quad \text{при } n \rightarrow \infty$$

то есть выражение стремится к 1 при $n \rightarrow \infty$

$\exists \varepsilon = \frac{1}{2}$, тогда для $\forall \delta$ мы можем подобрать $x_1, x_2 < \delta$ и при этом $|f(x_1) - f(x_2)| > \frac{1}{2} \Rightarrow$ не равномерно непрерывно

Задание 2

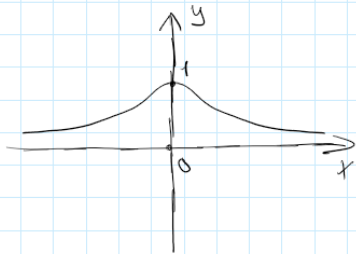
Преобразовать выражение к интегральной сумме, доказать существование соответствующего интеграла и найти предел.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n^2 + 1} + \frac{n}{n^2 + 4} + \dots + \frac{n}{n^2 + n^2} \right)$$

Решение:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n^2 + 1} + \frac{n}{n^2 + 4} + \dots + \frac{n}{n^2 + n^2} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^n \frac{n}{n^2 + k^2} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{1 + \frac{k^2}{n^2}} \cdot \frac{1}{n} \right),$$

то есть это предел нижней интегральной суммы Дирхле для $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ на отрезке $[0, 1]$, т.к. $f(x)$ убывает на отрезке $[0, 1]$



$f(x)$ — равномерно непрерывна \Rightarrow интегрируема.

$$\text{значит: } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n^2 + 1} + \dots + \frac{n}{n^2 + n^2} \right) = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx = \arctg(x) \Big|_0^1 =$$

$$= \arctg(1) - \arctg(0) = \frac{\pi}{4}$$

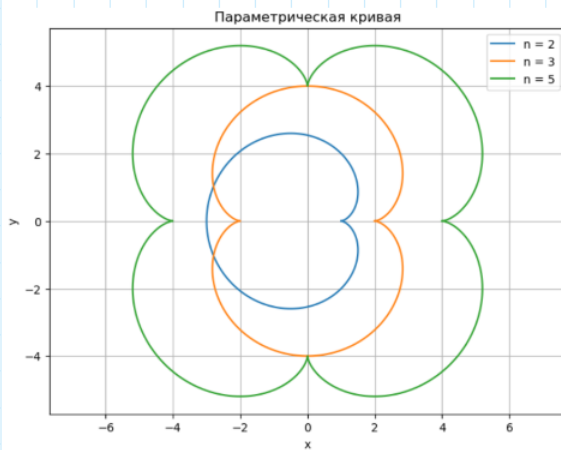
Задание 3

Найти площадь фигуры, ограниченной кривой, заданной параметрически. Сделать рисунок.

$$x = n \cos t - \cos(nt) \quad y = n \sin t - \sin(nt) \quad (n \in \mathbb{N})$$

Решение:

График кривой



Заметим, что график циклический, т.к.

Ф-ии $\sin x$ и $\cos x$ имеют общий период $x \in [0; 2\pi]$. Т.к. $n \in \mathbb{N}$, то период nt меньше периода от t .

Так как мы приближаемся

$$\text{справа налево} \Rightarrow S = - \int_0^{2\pi} y dx$$

$$= \oint y = \oint y(t) \cdot x'(t) \cdot dt =$$

$$= - \int_0^{2\pi} (n \cdot \sin t - \sin(nt)) \cdot (-n \cos t + n \sin(nt)) \cdot dt =$$

$$= - \int_0^{2\pi} (-n^2 \cdot \sin^2 t + n \sin(nt) \cdot \sin t + n^2 \cdot \sin t \cdot \sin nt - n \cdot \sin^2(nt)) \cdot dt =$$

$$= \left(n^2 \cdot \int_0^{2\pi} \sin^2 t \cdot dt - (n+n^2) \int_0^{2\pi} \sin(nt) \cdot \sin t \cdot dt + n \int_0^{2\pi} \sin^2(nt) \cdot dt \right) \in$$

①
②
③

$$\textcircled{1} \int_0^{2\pi} \sin^2 t \cdot dt = \int_0^{2\pi} \frac{1 - \cos 2t}{2} \cdot dt = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} dt - \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \cos 2t \cdot dt =$$

\hookrightarrow где полные окр-та $\Rightarrow 0$

$$= \pi$$

$$\textcircled{2} \int_0^{2\pi} \sin(nt) \cdot \sin t \cdot dt = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (\cos(nt-t) - \cos(nt+t)) \cdot dt =$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \cos((n-1)t) \cdot dt - \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \cos((n+1)t) \cdot dt$$

• $n=1$, то $\frac{1}{2} \left(\int_0^{2\pi} \cos(0) \cdot dt - \int_0^{2\pi} \cos 2t \cdot dt \right) =$

\hookrightarrow где полные окр-та $\Rightarrow 0$

$$= \frac{1}{2} \times \Big|_0^{2\pi} = \pi$$

• $n \neq 1$, то $\frac{1}{2} \left(\int_0^{2\pi} \sin((n-1)t) \cdot dt - \int_0^{2\pi} \sin((n+1)t) \cdot dt \right) = 0$

$\xrightarrow{n-1 \text{ полных круга}} \quad \xrightarrow{n+1 \text{ полных круга} \Rightarrow 0}$

$$\textcircled{3} \int_0^{2\pi} \sin^2(nt) \cdot dt = \int_0^{2\pi} \frac{1 - \cos 2nt}{2} \cdot dt = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} dt - \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \cos(2nt) \cdot dt = \pi$$

$\xrightarrow{2n \text{ полных кругов} \Rightarrow 0}$

$$\textcircled{=} n^2 \pi - \left[\begin{array}{l} 0, n \neq 1 \\ (n+n^2) \cdot \pi, n=1 \end{array} \right] + n \cdot \pi$$

$$n=1: 0$$

$$n=2: 6\pi$$

$$n=3: 12\pi$$

$$n=5: 30\pi$$

Задание 4

Кривая задана как пересечение поверхностей, заданных данными уравнениями в декартовых координатах. Задайте кривую параметрически и найдите длину кривой

$$x^6 + y^6 = a^2 x^2 y^2$$

Решение:

Рассмотрим полярную сис-му координат:

$$x = r \cdot \cos \varphi \quad y = r \cdot \sin \varphi$$

$$x^6 + y^6 = a^2 x^2 y^2$$

$$r^6 (\cos^6 \varphi + \sin^6 \varphi) = a^2 \cdot r^4 \cdot \cos^2 \varphi \cdot \sin^2 \varphi$$

$$r^2 = \frac{a^2 \cdot \cos^2 \varphi \cdot \sin^2 \varphi}{\cos^6 \varphi + \sin^6 \varphi}$$

$$S = \int_{\alpha}^{\beta} r^2 \cdot d\varphi = \int_0^{2\pi} \frac{a^2 \cdot \cos^2 \varphi \cdot \sin^2 \varphi}{\cos^6 \varphi + \sin^6 \varphi} d\varphi = \left[\begin{array}{l} \text{Функция симметрична с} \\ \text{периодом } \frac{\pi}{2}: \end{array} \right] =$$

$$= 4a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 \varphi \cdot \sin^2 \varphi}{\cos^6 \varphi + \sin^6 \varphi} d\varphi =$$

$$= \left[\begin{array}{l} t = \tan \varphi \\ \cos^2 \varphi = \frac{1}{1+t^2} \quad d\varphi = \frac{dt}{1+t^2} \\ \sin^2 \varphi = \frac{t^2}{1+t^2} \end{array} \right] =$$

$$= 4a^2 \int_0^{\infty} \frac{t^2}{(1+t^2)^2 \left(\frac{1}{(1+t^2)^3} + \frac{t^6}{(1+t^2)^3} \right)} \cdot \frac{dt}{1+t^2} =$$

$$\left[\begin{array}{l} \frac{\cos^2(\varphi + \frac{\pi}{2}) \cdot \sin^2(\varphi + \frac{\pi}{2})}{\cos^6(\varphi + \frac{\pi}{2}) + \sin^6(\varphi + \frac{\pi}{2})} = \\ = \frac{\cos^2 \varphi \cdot \sin^2 \varphi}{\cos^6 \varphi + \sin^6 \varphi} \end{array} \right]$$

$$= 4a^2 \int_0^{\infty} \frac{t^2}{(1+t^6)} dt = \left[\begin{array}{l} t^3 = u \quad t = u^{1/3} \\ dt = \frac{1}{3} u^{-2/3} du \end{array} \right] =$$

$$= 4a^2 \int_0^{\infty} \frac{u^{2/3}}{1+u^2} \cdot \frac{1}{3} u^{-2/3} du = \frac{4a^2}{3} \int_0^{\infty} \frac{1}{1+u^2} du =$$

$$= \frac{4a^2}{3} \left(\arctan u \Big|_0^{\infty} \right) = \frac{4a^2}{3} \frac{\pi}{2} = \frac{a^2 \pi}{3}$$

Задание 5

Найти длину кривой, заданной параметрически. Сделать рисунок.

$$x^2 + y^2 + z^2 = 9, |z| = y$$

Решение:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 9 \\ |z| = y \end{cases}$$

① $z = y$

$$x^2 + y^2 + y^2 = 9$$

$$\frac{x^2}{9} + \frac{2y^2}{9} = 1 \quad \text{— эллипс} \quad \text{будем} \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \begin{cases} x = a \cos \varphi \\ y = b \sin \varphi \end{cases} \quad \varphi \in [0; 2\pi]$$

$$\begin{cases} x(\varphi) = 3 \cos \varphi & x'(\varphi) = -3 \sin \varphi \\ y(\varphi) = \frac{3}{\sqrt{2}} \sin \varphi & y'(\varphi) = \frac{3}{\sqrt{2}} \cos \varphi \\ z(\varphi) = \frac{3}{\sqrt{2}} \sin \varphi & z'(\varphi) = \frac{3}{\sqrt{2}} \cos \varphi \end{cases}$$

$$\begin{aligned} S(L) &= \int_0^{2\pi} \sqrt{(x'(\varphi))^2 + (y'(\varphi))^2 + (z'(\varphi))^2} d\varphi = \\ &= \int_0^{2\pi} \sqrt{9 \sin^2 \varphi + \frac{9}{2} \cos^2 \varphi + \frac{9}{2} \cos^2 \varphi} d\varphi = \int_0^{2\pi} 3 d\varphi = 6\pi \end{aligned}$$

② $z = -y$

Аналогично ① $S(L) = 6\pi$

Итого: 12π

Задание 6

Исследовать интеграл на сходимость в каждой особой точке. Если функция меняет знак - на абсолютную и условную сходимость.

$$\int_1^{\infty} \frac{\cos x}{x} \left(\frac{x+1}{x} \right)^x dx$$

Решение:

Особая точка: ∞

$$\int_1^{\infty} \frac{\cos x}{x} \cdot \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x dx, \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \underset{x \rightarrow \infty}{\sim} e \Rightarrow \text{нужно}$$

исследовать на сходимость $\int_1^{\infty} \frac{\cos x}{x} dx$

■ Абсолютная сходимость: $\frac{|\cos x|}{x} \geq \frac{\cos^2 x}{x} = \frac{1 + \cos 2x}{2x} = \frac{1}{2x} + \frac{\cos 2x}{2x}$

$\int_1^{\infty} \frac{1}{2x} dx$ - по 2-му ПКЗ ср-я расхоится

$$\int_1^{\infty} \frac{\cos 2x}{2x} dx - \left. \begin{array}{l} 1) \frac{1}{2} \sin 2x \cdot \text{огр.} : \in [-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}]; \text{ на } [1; \infty] \\ 2) \frac{1}{2x} - \text{монотонно убывает; на } [1; \infty] \\ 3) \frac{1}{2x} \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 0; \text{ на } [1; \infty] \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \int_1^{\infty} \frac{\cos 2x}{2x} dx$ - по признаку Дирихле сходится

Значит, не сходится абсолютно.

$$\boxed{\int_1^{\infty} \frac{\cos x}{x} dx} \quad \left. \begin{array}{l} 1) \sin x - \text{огр.: } \in [-1; 1]; \text{ на } [1; \infty] \\ 2) \frac{1}{x} - \text{монотонно убывает; на } [1; \infty] \\ 3) \frac{1}{x} \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 0; \text{ на } [1; \infty] \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \int_1^{\infty} \frac{\cos x}{x} dx$ - по признаку Дирихле сходится

Значит, интеграл сходится условно.

Задание 7

Исследовать интеграл на сходимость в каждой особой точке. Если функция меняет знак - на абсолютную и условную сходимость.

$$\int_0^{\infty} \frac{\ln(1+x+x^2) + \ln(1-x+x^2)}{x^{3/2}(e^x+1)} dx$$

Решение:

Особые точки:

• 0 Проверим: $\ln(1+x+x^2)$, $D: 1-4 < 0$
• ∞ $\ln(1-x+x^2)$, $D: 1-4 < 0$ } нет особых точек

$$\int_0^{\infty} \frac{\ln(1+x+x^2) + \ln(1-x+x^2)}{x^{3/2}(e^x-1)} = \int_0^{\infty} \frac{\ln((1+x^2)^2 - x^2)}{x^{3/2}(e^x-1)} = \int_0^{\infty} \frac{\ln(1+x^2+x^4)}{x^{3/2}(e^x-1)}$$

Заметим, что $\ln(1+x^2+x^4) \geq 0$, $x^{3/2} \geq 0$, $e^x - 1 \geq 0$ на $[0; \infty) \Rightarrow$
 \Rightarrow сразу получаем абсолютную сходимость

\triangleright О.Т. = 0

$$\ln(1+x^2+x^4) \xrightarrow{x \rightarrow 0} \ln(1+x^2) \xrightarrow{x \rightarrow 0} x^2$$

$$e^x - 1 \xrightarrow{x \rightarrow 0} x$$

$$\frac{\ln(1+x^2+x^4)}{x^{3/2}(e^x-1)} \xrightarrow{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x^{3/2} \cdot x} = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

Рассмотрим:

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{x^{1/2}}, p < 1 \Rightarrow \int_0^{\infty} \frac{\ln(1+x^2+x^4)}{x^{3/2}(e^x-1)} \text{ сходится абсолютно по 2-му признаку сравнения}$$

▷ О.т. = ∞

$$\left. \begin{array}{l} \ln(1+x^2+x^4) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} \ln(x^4) \\ e^x - 1 \xrightarrow{x \rightarrow \infty} e^x \end{array} \right\} \text{показательная растёт быстрее}$$

степенной $\Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(1+x^2+x^4)}{x^{3/2}(e^x-1)} = 0$

Значит $\int_0^{\infty} \frac{\ln(1+x^2+x^4)}{x^{3/2}(e^x-1)} dx$ абсолютно сходится

Лабораторная работа 1. Аналитический этап.

$$f(x) = \sqrt{e^x} + 4x, \quad [a, b] = [0, 2]$$

1. Составить верхнюю и нижнюю суммы Дарбу, вычислить эти суммы. При необходимости, разбивать функцию на участки монотонности.

$$f(x) = \sqrt{e^x} + 4 \cdot x, \quad [a, b] = [0, 2]$$

Функция определена на \mathbb{R} и монотонно возрастает.
Значит, для всех отрезков $[x_{i-1}; x_i] \subseteq [0; 2]$:

$$\inf = x_{i-1} \quad \sup = x_i$$

Верхняя сумма Дарбу:

$$\begin{aligned} U(f) &= \sum_{i=1}^n f(x_i) \cdot \frac{2}{n} = \sum_{i=1}^n \left(\sqrt{e^{\left(\frac{2}{n} \cdot i\right)}} + 4 \cdot \left(\frac{2}{n} \cdot i\right) \right) \cdot \frac{2}{n} = \\ &= \frac{2}{n} \cdot \sum_{i=1}^n \sqrt{e^{\left(\frac{2}{n} \cdot i\right)}} + \frac{8}{n} \cdot \sum_{i=1}^n \frac{2}{n} \cdot i = \frac{2}{n} \sum_{i=1}^n e^{\frac{i}{n}} + \frac{16}{n^2} \cdot \sum_{i=1}^n i \end{aligned}$$

(1) (2)

(1) $\sum_{i=1}^n e^{\frac{i}{n}}$ - сумма геометрической прогрессии:

$$b_1 = e^{\frac{1}{n}} \quad q = e^{\frac{1}{n}} \quad S_n = \frac{b_1 (1 - q^n)}{1 - q}$$

$$\sum_{i=1}^n e^{\frac{i}{n}} = \frac{e^{\frac{1}{n}} (1 - (e^{\frac{1}{n}})^n)}{1 - e^{\frac{1}{n}}} = \frac{e^{\frac{1}{n}} (1 - e)}{1 - e^{\frac{1}{n}}}$$

(2) $\sum_{i=1}^n i = \frac{n + n^2}{2}$ - сумма арифметической прогрессии

$$U(f) = \frac{2}{n} \frac{e^{1/n} (1-e)}{1-e^{1/n}} + \frac{16}{n^2} \cdot \frac{n+n^2}{2}$$

Нижняя сумма Дарбу:

$$L(f) = \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) \cdot \frac{2}{n} = \frac{2}{n} \left(\frac{e^{1/n} (1-e)}{1-e^{1/n}} \right) + 8 \frac{n+n^2}{n^2}$$

2. Проверить критерий Римана интегрируемости функции.

Функция монотонна на отрезке $[0; 2] \Rightarrow$

\Rightarrow функция интегрируема по Риману.

3. Найти интегралы Дарбу и сделать вывод об интегрируемости функции, в том числе о значении интеграла

Верхний интеграл Дарбу:

$$\overline{I}^* = \lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{\frac{2}{n} \frac{e^{\frac{1}{n}}(1-e)}{1-e^{\frac{1}{n}}}}_{(1)} + \underbrace{8 \cdot \frac{n+n^2}{n^2}}_{(2)}$$

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n} \frac{e^{\frac{1}{n}}(1-e)}{1-e^{\frac{1}{n}}} = \left[\begin{array}{l} \frac{1}{n} = x \\ n = \frac{1}{x} \\ x \rightarrow 0 \end{array} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} 2 \cdot x \frac{e^x(1-e)}{1-e^x} \Leftrightarrow$$

Разложение Маклорена: $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)$

$$\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0} 2 \frac{x \cdot (1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2))(1-e)}{- (x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3))} = \lim_{x \rightarrow 0} -2 \frac{(1+x+\frac{x^2}{2}+o(x^2))(1-e)}{(1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{6}+o(x^2))} =$$

$$= -2 \cdot (1-e) = 2e - 2$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} 8 \frac{n+n^2}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{8}{n} + 8 = 8$$

$$\overline{I}^* = 2e - 2 + 8 = 2e + 6$$

$$\underline{I}_* = 2e + 6 - \text{нижний интеграл Дарбу}$$

$$\overline{I}^* = \underline{I}_* \Rightarrow \exists \overline{I} = 2e + 6$$

4. Подобрать еще одно достаточное условие интегрируемости данной функции, отличное от упомянутых критериев и проверить его.

Критерий Лебега:

1) $f(x)$ — о.г.р. на отрезке

$D \sqrt{e^x + 4x}$ — непрерывна на отрезке $[0, 2]$ \Rightarrow

по т. Вейерштрасса ограничена на отрезке Δ

2) $f(x)$ — непрерывна п.в. на отрезке

$D \sqrt{e^x + 4x}$ — непрерывна на отрезке Δ

Значит $\sqrt{e^x + 4x}$ — интегрируема на $[a, b]$

5. Сравнить найденное значение интеграла с ответом по формуле Ньютона-Лейбница.

$$\begin{aligned}\int_0^2 (\sqrt{e^x} + 4x) \cdot dx &= \int_0^2 e^{x/2} \cdot dx + \int_0^2 4x \cdot dx = 2 \int_0^2 e^{x/2} \cdot dx_{1/2} + 4 \int_0^2 x \cdot dx = \\ &= 2e^{x/2} \Big|_0^2 + 2x^2 \Big|_0^2 = 2e - 2 + 8 = 2e + 6 = \overline{I} = \overline{I}^* = \overline{I}_x\end{aligned}$$

Лабараторная работа 1. Практический этап.

Практическая часть задания выполнена в Jupiter Notebook. [Ссылка на GitHub репозиторий](#).