ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ «НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИТМО»

ФАКУЛЬТЕТ ТЕХНОЛОГИЙ ИСКУССТВЕННОГО ИНТЕЛЛЕКТА

Индивидуальное домашнее задание

по дисциплине “Математический анализ и основы вычислений”

Вариант № 33

Выполнил:
Студент группы J3111
Воробьев Андрей Павлович
ИСУ: 465440
Преподаватель:
Табиева А.В.

Санкт-Петербург
2025

Задание 1

Исследовать данную функцию на равномерную непрерывность на данном множестве пользуясь определением.

$$f(x) = 2x - \sqrt{x} + \frac{1}{x-1},\ a)X = [2, +\infty),\ b)X = (0, 1)$$

Решение:

равномерная непрерывность:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \forall x_1, x_2 \in X \quad : |x_1 - x_2| < \delta \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \delta$$

$$a) \quad |f(x_1) - f(x_2)| = \left| 2x_1 - \sqrt{x_1} + \frac{1}{x_1 - 1} - 2x_2 + \sqrt{x_2} - \frac{1}{x_2 - 1} \right| \leq$$

$$\leq |2(x_1 - x_2)| + |\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2}| + \left| \frac{1}{x_1 - 1} - \frac{1}{x_2 - 1} \right| =$$

$$= |2(x_1 - x_2)| + \left| \frac{x_1 - x_2}{\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}} \right| + \left| \frac{x_2 - 1 - x_1 + 1}{(x_1 - 1)(x_2 - 1)} \right| = |2(x_1 - x_2)| +$$

$$+ \left| \frac{x_1 - x_2}{\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}} \right| + \left| \frac{x_1 - x_2}{(x_1 - 1)(x_2 - 1)} \right| < \left[\begin{array}{l} x_1, x_2 \geq 2 \Rightarrow x_1 - 1 \geq 1, \ x_2 - 1 \geq 1 \\ \Rightarrow \sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} \geq 2\sqrt{2} \end{array} \right] <$$

$$< 2|x_1 - x_2| + |x_1 - x_2| + |x_1 - x_2| < 4\delta = \varepsilon \Rightarrow \delta = \varepsilon/4 \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ равномерно непрерывна

б) докажем, что не равномерно непрерывна:

$\exists \varepsilon_0 > 0 \quad \forall \delta > 0 \quad \exists x_1, x_2 \in X \quad |x_1 - x_2| < \delta \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon_0$

возьмём $x_1 = 1 - \frac{1}{n}$ $\quad x_2 = 1 - \frac{1}{n+1}$ $\quad x_1, x_2 \in (0, 1)$

$|x_1 - x_2| = |1 - \frac{1}{n} - 1 + \frac{1}{n+1}| = |\frac{n - n - 1}{n(n+1)}| = \frac{1}{n(n+1)} < \delta$ при $n \to \infty$, но

$|f(x_1) - f(x_2)| = |2(1 - \frac{1}{n}) - \sqrt{1 - \frac{1}{n}} + \frac{1}{1 - \frac{1}{n} - 1} - 2(1 - \frac{1}{n+1}) + \sqrt{1 - \frac{1}{n+1}} - \frac{1}{1 - \frac{1}{n+1} - 1}| =$

$= |\cancel{2} - \frac{2}{n} - \sqrt{1 - \frac{1}{n}} - \cancel{n} - \cancel{2} + \frac{2}{n+1} + \sqrt{1 - \frac{1}{n+1}} + \cancel{n} + 1| =$

$= |-\frac{2}{n} - \sqrt{1 - \frac{1}{n}} + \frac{2}{n+1} + \sqrt{1 - \frac{1}{n+1}} + 1|$

$\downarrow 0 \quad \downarrow -1 \quad \downarrow 0 \quad \downarrow 1 \quad \downarrow 1$ при $n \to \infty$

то есть выражение стремится к 1 при $n \to \infty$

$\exists\ \varepsilon = \frac{1}{2}$, тогда для $\forall \delta$ мы можем подобрать $x_1, x_2 < \delta$ и при этом $|f(x_1) - f(x_2)| > \frac{1}{2} \Rightarrow$ не равномерно непрерывно

Задание 2

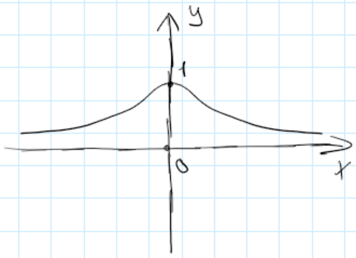
Преобразовать выражение к интегральной сумме, доказать существование соответствующего интеграла и найти предел.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n^2+1}+\frac{n}{n^2+4}+\dots+\frac{n}{n^2+n^2}\right)$$

Решение:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n^2+1}+\frac{n}{n^2+4}+\dots+\frac{n}{n^2+n^2}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{n^2+k^2}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\left(1+\frac{k^2}{n^2}\right)}\cdot\frac{1}{n}\right),$$

то есть это предел нижней интегральной суммы Дарбу для $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$ на отрезке $[0,1]$, т.к. $f(x)$ убывает на отрезке $[0,1]$



$f(x)$ – равномерно непрерывна $\Rightarrow$ интегрируема.

значит: $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n^2+1}+\dots+\frac{n}{n^2+n^2}\right)=\int_0^1\frac{1}{1+x^2}dx=arctg(x)\Big|_0^1=$

$=arctg(1)-arctg(0)=\pi/4$

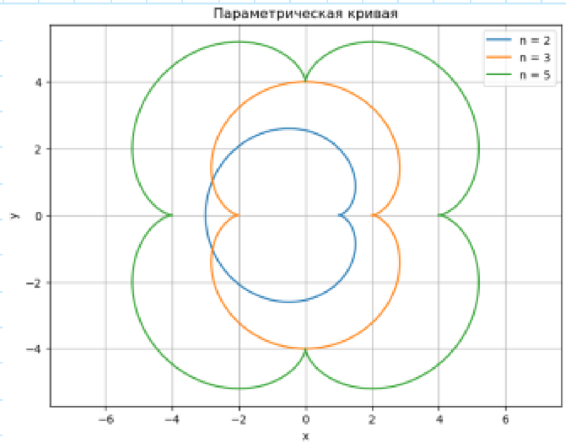
Задание 3

Найти площадь фигуры, ограниченной кривой, заданной параметрически. Сделать рисунок.

$$x = n\cos t - \cos(nt) \quad y = n\sin t - \sin(nt) \quad (n \in \mathbb{N})$$

Решение:

График кривой



Заметим, что график цикличен, т.к. ф-ии $\sin x$ и $\cos x$ имеют общий период $t \in [0; 2\pi]$. Т.к. $n \in \mathbb{N}$, то период nt меньше периода от t. Так как мы движемся справа налево $\Rightarrow S = -\int y\,dx$

$$S = -\int y\,dx = -\int_0^{2\pi} y(t)\cdot x'(t)\cdot dt =$$

$$= -\int_0^{2\pi} (n\cdot\sin t - \sin(nt))\cdot(-n\sin t + n\sin(nt))\cdot dt =$$

$$= -\int_0^{2\pi} \left(-n^2\cdot\sin^2 t + n\sin(nt)\cdot\sin t + n^2\cdot\sin t\cdot\sin nt - n\cdot\sin^2(nt)\right)\cdot dt =$$

$$= \left(n^2\cdot\underbrace{\int_0^{2\pi}\sin^2 t\cdot dt}_{1} - (n+n^2)\underbrace{\int_0^{2\pi}\sin(nt)\cdot\sin t\cdot dt}_{2} + n\underbrace{\int_0^{2\pi}\sin^2(nt)\cdot dt}_{3}\right) =$$

① $\int_0^{2\pi} \sin^2 t \cdot dt = \int_0^{2\pi} \frac{1-\cos 2t}{2} \cdot dt = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} dt - \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \cos 2t \, dt =$

↳ две полные ок-ти $\Rightarrow 0$

$= \pi$

② $\int_0^{2\pi} \sin(nt) \cdot \sin t \cdot dt = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \left(\cos(nt-t) - \cos(nt+t)\right) \cdot dt =$

$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \cos((n-1)t) \cdot dt - \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \cos((n+1)t) \cdot dt$

• $n=1$, то $\frac{1}{2}\left(\int_0^{2\pi} \cos(0) \cdot dt - \int_0^{2\pi} \cos 2t \cdot dt\right) =$

↳ две полные ок-ти $\Rightarrow 0$

$= \frac{1}{2} x \Big|_0^{2\pi} = \pi$

→ $n-1$ полных круга

→ $n+1$ полных круга $\Rightarrow 0$

• $n \neq 1$, то $\frac{1}{2}\left(\int_0^{2\pi} \sin((n-1) \cdot t)\, dt - \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \sin((n+1)t) \cdot dt\right) = 0$

→ $2n$ полных кругов $\Rightarrow 0$

③ $\int_0^{2\pi} \sin^2(nt) \cdot dt = \int_0^{2\pi} \frac{1-\cos 2nt}{2} \cdot dt = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} dt - \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \cos(2nt) = \pi$

$\Rightarrow \; n^2\pi - \begin{bmatrix} 0, n \neq 1 \\ (n+n^2) \cdot \pi, n=1 \end{bmatrix} + n \cdot \pi$

$n=1: 0$ $\quad n=2: 6\pi$ $\quad n=3: 12\pi$ $\quad n=5: 30\pi$

Задание 4

Кривая задана как пересечение поверхностей, заданных данными у равнениями в декартовых координатах. Задайте кривую параметрически и найдите длину кривой

$$x^6 + y^6 = a^2x^2y^2$$

Решение:

$$2\cdot S = \int_{\alpha}^{\beta} r^2 \cdot d\varphi = \int_0^{2\pi} \frac{a^2 \cdot \cos^2\varphi \cdot \sin^2\varphi}{\cos^6\varphi + \sin^6\varphi}\, d\varphi = \left[\begin{array}{l} \text{Функция симметрична с} \\ \text{периодом } \frac{\pi}{2}: \\ \dfrac{\cos^2(\varphi+\frac{\pi}{2})\cdot \sin^2(\varphi+\frac{\pi}{2})}{\cos^6(\varphi+\frac{\pi}{2}) + \sin^6(\varphi+\frac{\pi}{2})} = \\ = \dfrac{\cos^2\varphi\cdot\sin^2\varphi}{\cos^6\varphi+\sin^6\varphi} \end{array} \right] =$$

$$= 4a^2 \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^2\varphi \cdot \sin^2\varphi}{\cos^6\varphi + \sin^6\varphi}\, d\varphi =$$

$$= \left[\begin{array}{ll} t = \tan\varphi & \\ \cos^2\varphi = \dfrac{1}{1+t^2} & d\varphi = \dfrac{dt}{1+t^2} \\ \sin^2\varphi = \dfrac{t^2}{1+t^2} & \end{array} \right] =$$

$$= 4a^2 \int_0^{\infty} \frac{t^2}{(1+t^2)^2\left(\frac{1}{(1+t^2)^3} + \frac{t^6}{(1+t^2)^3}\right)} \cdot \frac{dt}{1+t^2} =$$

$$= 4a^2 \int_0^{\infty} \frac{t^2}{(1+t^6)}\, dt = \left[\begin{array}{ll} t^3 = u & t = u^{1/3} \\ dt = \frac{1}{3}u^{-2/3}du & \end{array} \right] =$$

$$= 4a^2 \int_0^{\infty} \frac{u^{2/3}}{1+u^2} \frac{1}{3} u^{-2/3} du = \frac{4a^2}{3} \int_0^{\infty} \frac{1}{1+u^2}\, du =$$

$$= \frac{4a^2}{3} \left(\operatorname{arctg} u \Big|_0^{\infty} \right) = \frac{4a^2}{3}\frac{\pi}{2} = \frac{2a^2\pi}{3} \Rightarrow S = \frac{a^2\pi}{3}$$

Задание 5

Найти длину кривой, заданной параметрически. Сделать рисунок.

$$x^2 + y^2 + z^2 = 9, |z| = y$$

Решение:

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=9 \\ |z|=y \end{cases}$$

① $z=y$

$x^2+y^2+y^2=9$

$\frac{x^2}{9}+\frac{2y^2}{9}=1$ – эллипс вида $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \Rightarrow \begin{matrix} x=a\cos\varphi \\ y=b\sin\varphi \end{matrix}$ $\varphi\in[0;2\pi]$

$$\begin{cases} x(\varphi)=3\cos\varphi & x'(\varphi)=-3\sin\varphi \\ y(\varphi)=3/\sqrt{2}\cdot\sin\varphi & y'(\varphi)=3/\sqrt{2}\cdot\cos\varphi \\ z(\varphi)=3/\sqrt{2}\cdot\sin\varphi & z'(\varphi)=3/\sqrt{2}\cdot\cos\varphi \end{cases}$$

$$S(L)=\int_0^{2\pi}\sqrt{(x'(\varphi))^2+(y'(\varphi))^2+(z(\varphi))^2}\,d\varphi=$$

$$=\int_0^{2\pi}\sqrt{9\sin^2\varphi+\frac{9}{2}\cos^2\varphi+9/2\cdot\cos^2\varphi}\,d\varphi=\int_0^{2\pi}3\,d\varphi=6\pi$$

② $z=-y$

Аналогично ① $S(L)=6\pi$

Итог: 12π

Задание 6

Исследовать интеграл на сходимость в каждой особой точке. Если функция меняет знак - на абсолютную и условную сходимость.

$$\int_1^\infty \frac{\cos x}{x}\left(\frac{x+1}{x}\right)^x dx$$

Решение:

Особая точка: ∞

$\int_1^\infty \frac{\cos x}{x}\cdot\left(1+\frac{1}{x}\right)^x dx$, $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x \underset{x\to\infty}{\sim} e \Rightarrow$ нужно исследовать на сходимость $\int_1^\infty \frac{\cos x}{x}dx$

абсолютная сходимость: $\frac{|\cos x|}{x} \geq \frac{\cos^2 x}{x} = \frac{1+\cos 2x}{2x} = \frac{1}{2x} + \frac{\cos 2x}{2x}$

$\int_1^\infty \frac{1}{2x}dx$ — по 2-му пр-ку ср-я расходится

$\int_1^\infty \frac{\overset{f(x)}{\cos 2x}}{\underset{\frac{1}{g(x)}}{2x}}dx$ — 1) $\int_1 \frac{1}{2}\sin 2x\, dx$ — огр.

2) $\frac{1}{2x}$ — монотонно убывает; на $[1;\infty]$

3) $\frac{1}{2x} \underset{x\to\infty}{\longrightarrow} 0$; на $[1;\infty]$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow \int_1^\infty \frac{\cos 2x}{2x}dx$ — по признаку Дирихле сходится

Значит, не сходится абсолютно.

$\int_1^{\infty} \frac{\cos x}{x} dx$ - 1) $\int_1^{\infty} \sin x\, dx$ - огр.

2) $\frac{1}{x}$ - монотонно убывает; на $[1; \infty]$

3) $\frac{1}{x} \xrightarrow[x \to \infty]{} 0$; на $[1; \infty]$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow \int_1^{\infty} \frac{\cos x}{x} dx$ - по признаку Дирихле сходится

Значит, интеграл сходится условно.

Задание 7

Исследовать интеграл на сходимость в каждой особой точке. Если функция меняет знак - на абсолютную и условную сходимость.

$$\int_0^\infty \frac{\ln\left(1+x+x^2\right)+\ln\left(1-x+x^2\right)}{x^{3/2}(e^x+1)}\,dx$$

Решение:

Особые точки:

- 0 Проверим: $\ln(1+x+x^2)$, $D = 1-4<0$
- ∞ $\ln(1-x+x^2)$, $D = 1-4<0$ } нет особых точек

$$\int_0^\infty \frac{\ln(1+x+x^2)+\ln(1-x+x^2)}{x^{3/2}(e^x-1)}dx = \int_0^\infty \frac{\ln((1+x^2)^2-x^2)}{x^{3/2}(e^x-1)}dx = \int_0^\infty \frac{\ln(1+x^2+x^4)}{x^{3/2}(e^x-1)}dx$$

Заметим, что $\ln(1+x^2+x^4)\geq 0$, $x^{3/2}\geq 0$, $e^x-1\geq 0$ на $[0;\infty] \Rightarrow$ $\Rightarrow$ знакопост.

$\triangleright$ О.т. $= 0$

$\ln(1+x^2+x^4) \xrightarrow{x\to 0} \ln(1+x^2) \xrightarrow{x\to 0} x^2$

$e^x-1 \xrightarrow{x\to 0} x$

$$\frac{\ln(1+x^2+x^4)}{x^{3/2}(e^x-1)} \xrightarrow{x\to 0} \frac{x^2}{x^{3/2}\cdot x} = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

Рассмотрим:

$$\int_{0+}^{1}\frac{1}{x^{1/2}}dx,\ p>1 \Rightarrow \int_{0+}^{\infty}\frac{\ln(1+x^2+x^4)}{x^{3/2}(e^x-1)}dx$$ сходится по 2-му признаку сравнения

$$\left[\begin{array}{l} t=1/x \\ dx=-\frac{1}{t^2}dt\end{array}\right] = -\int_1^{\to\infty}\frac{1}{t^{3/2}}dt$$

$\triangleright$ О.Т. $= \infty$

$\ln(1+x^2+x^4) \xrightarrow{x\to\infty} \ln(x^4)$

$e^x - 1 \xrightarrow{x\to\infty} e^x$

} показательная растёт быстрее

степенной $\Rightarrow \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln(1+x^2+x^4)}{x^{3/2}(e^x-1)} = 0$

Значит $\displaystyle\int_0^{\to\infty} \frac{\ln(1+x^2+x^4)}{x^{3/2}(e^x-1)}\,dx$ сходится

Лабараторная работа 1. Аналитический этап.

$$f(x) = \sqrt{e^x} + 4x, \quad [a, b] = [0, 2]$$

1. Составить верхнюю и нижнюю суммы Дарбу, вычислить эти суммы. При необходимости, разбивать функцию на участки монотонности.

$$f(x) = \sqrt{e^x} + 4\cdot x \quad , \quad [a,b] = [0,2]$$

Функция определена на $\mathbb{R}$ и монотонно возрастает. Значит, для всех отрезов $[x_{i-1}; x_i] \subseteq [0;2]$:

$$\inf = x_{i-1} \qquad \sup = x_i$$

Верхняя сумма Дарбу:

$$U(f) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\cdot\frac{2}{n} = \sum_{i=1}^{n}\left(\sqrt{e^{\left(\frac{2}{n}\cdot i\right)}} + 4\cdot\left(\frac{2}{n}\cdot i\right)\right)\cdot\frac{2}{n} =$$

$$= \frac{2}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n}\sqrt{e^{\left(\frac{2}{n}\cdot i\right)}} + \frac{8}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n}\frac{2}{n}\cdot i = \frac{2}{n}\underbrace{\sum_{i=1}^{n} e^{\frac{i}{n}}}_{(1)} + \frac{16}{n^2}\cdot\underbrace{\sum_{i=1}^{n} i}_{(2)}$$

(1) $\sum_{i=1}^{n} e^{\frac{i}{n}}$ - сумма геометрической прогрессии:

$$b_1 = e^{\frac{1}{n}} \qquad q = e^{\frac{1}{n}} \qquad S_n = \frac{b_1(1-q^n)}{1-q}$$

$$\sum_{i=1}^{n} e^{\frac{i}{n}} = \frac{e^{\frac{1}{n}}\left(1-\left(e^{\frac{1}{n}}\right)^n\right)}{1-e^{\frac{1}{n}}} = \frac{e^{\frac{1}{n}}(1-e)}{1-e^{\frac{1}{n}}}$$

(2) $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n+n^2}{2}$ - сумма ар. прогрессии

$$U(f) = \frac{2}{n} \frac{e^{1/n}(1-e)}{1-e^{1/n}} + \frac{16}{n^2} \cdot \frac{n+n^2}{2}$$

Нижняя сумма Дарбу:

$$L(f) = \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) \cdot \frac{2}{n} = \frac{2}{n} \left(\frac{e^{1/n}(1-e)}{(1-e^{1/n})} \right) + 8 \frac{n+n^2}{n^2}$$

2. Проверить критерий Римана интегрируемости функции.

Функция монотонна на отрезке $[0;2] \Rightarrow$

$\Rightarrow$ функция интегрируема по Риману.

3. Найти интегралы Дарбу и сделать вывод об интегрируемости функции, в том числе о значении интеграла

Верхний интеграл Дарбу:

$$I^* = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n}\, \underbrace{\frac{e^{1/n}(1-e)}{1-e^{1/n}}}_{(1)} + \underbrace{8\cdot\frac{n+n^2}{n^2}}_{(2)}$$

(1) $$\lim_{n\to\infty} \frac{2}{n}\,\frac{e^{1/n}(1-e)}{1-e^{1/n}} = \left[\begin{matrix} 1/n = x \\ n = 1/x \\ x\to 0 \end{matrix}\right] = \lim_{x\to 0} 2\cdot x\, \frac{e^x(1-e)}{1-e^x} \ominus$$

Разложение Маклорена: $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \bar{o}(x^3)$

$$\ominus \lim_{x\to 0} 2\, \frac{x\cdot(1+x+\frac{x^2}{2}+\bar{o}(x^2))(1-e)}{-(x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\bar{o}(x^3))} = \lim_{x\to 0} -2\, \frac{(1+x+\frac{x^2}{2}+\bar{o}(x^2))(1-e)}{(1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{6}+\bar{o}(x^2))} =$$

$$= -2\cdot(1-e) = 2e-2$$

(2) $$\lim_{n\to\infty} 8\,\frac{n+n^2}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{8}{n} + 8 = 8$$

$$I^* = 2e-2+8 = 2e+6$$

$I_* = 2e+6$ – нижний интеграл Дарбу

$$I^* = I_* \Rightarrow \exists\, I = 2e+6$$

4. Подобрать еще одно достаточное условие интегрируемости данной функции, отличное от упомянутых критериев и проверить его.

Критерий Лебега:

1) $f(x)$ - огр. на отрезке

D $\sqrt{e^x+4x}$ - непрерывна на отрезке $[0,2]$ =>

по т. Вейерштрасса ограничена на отрезке ◁

2) $f(x)$ - непрерывна п.в. на отрезке

D $\sqrt{e^x+4x}$ - непрерывна на отрезке ◁

Значит $\sqrt{e^x+4x}$ - интегрируема на $[a,b]$