ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ «НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИТМО»

ФАКУЛЬТЕТ ТЕХНОЛОГИЙ ИСКУССТВЕННОГО ИНТЕЛЛЕКТА

Расчётно-графическая работа № 1
по дисциплине «Теория вероятностей и продвинутая математическая статистика»

Выполнили студенты группы J3211:

Воробьев А.П.

ИСУ: 465440

Шакина А.С.

ИСУ: 465472

Преподаватель практики:

Кононов И.А.

Санкт-Петербург

2025

Задача 1

Постановка задачи

Требуется аналитически решить задачу. Помимо этого нужно написать программу, которая будет считать данные вероятности приблизительно с помощью метода Монте-Карло. Особо любознательные могут задаться поиском (аналитическим) оптимального количества итераций, которых будет достаточно для получения ответа с достаточно «разумной» точностью. При решении задач могут быть полезны принципы произведения вероятностей и включений-исключений.

Условие варианта 2

В городе живут $n + 1$ людей. Человек, условный «прародитель», пишет два письма случайно выбранным адресатам, которые образуют «первое» поколение. Те делают то же самое, в результате чего образуется «второе поколение». В общем, на каждое полученное письмо горожанин готовит два ответа и отправляет двум случайным жителям. Найти вероятность того, что прародитель не входит ни в одно из поколений с номерами $1 \dots r$.

Аналитическое решение

Обозначения и допущения

Обозначения:

- $n + 1$ - количество жителей города.
- r - количество поколений, которые мы рассматриваем.
- S_i - число входящих писем в поколении i.
- A - событие, что прародитель не является адресатом письма

Допущение: Отправитель письма не может быть его адресатом.

Решение

Рассмотрим i-е поколение. Каждое входящее письмо порождает два исходящих, которые отправляются двум случайным жителям города (кроме самого отправителя). Так как в первом поколении - $S_1 = 2$ письма, то во втором поколении будет $S_2 = 2 \cdot S_1 = 4$ и так далее. Таким образом, количество писем в i-м поколении можно выразить формулой:

$$S_i = 2 \cdot S_{i-1} = 2^i$$

Заметим, что в первом поколении не может быть прародителя, поэтому количество писем за r поколений, адресатом для которого может быть прародитель, равно:

$$M = \sum_{i=2}^{r} S_i = \sum_{i=2}^{r} 2^i = 2^{r+1} - 4$$

Теперь найдем вероятность $P(A)$, что прародитель не является адресатом одного письма. Так как отправитель не может быть адресатом, то для каждого письма есть n возможных адресатов, из которых $n-1$ не являются прародителем. Значит:

$$P(A) = \frac{n-1}{n}$$

Так как все адресаты выбираются независимо, то вероятность $P(A_M)$, что прародитель не является адресатом ни одного из M писем:

$$P(A_M) = P(A)^M = \left(\frac{n-1}{n}\right)^{2^{r+1}-4}$$

Ответ

Таким образом, искомая вероятность, что прародитель не входит ни в одно из поколений с номерами $1 \ldots r$, равна:

$$\boxed{P(A_M) = \left(\frac{n-1}{n}\right)^{2^{r+1}-4}}$$

Приближённое решение методом Монте-Карло

Решение методом Монте-Карло реализовано в блокноте 1.ipynb.

Задача 3

Постановка задачи

Требуется аналитически решить задачу.

Условие варианта 2

Введём события $A_i = \{X = i\}, B_i = \{Y = i\}, i \geq 0$. Известно, что для любых $i \geq 0, j \geq 0$ события A_i и B_j – независимы, при этом

$$P(X = i) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^i}{i!}, \lambda > 0, i \geq 0,$$

$$P(Y = j) = e^{-\mu}\frac{\mu^j}{j!}, \mu > 0, i \geq 0.$$

Требуется найти $P(X = i|X + Y = j)$.

Решение

Для нахождения вероятности $P(X = i|X + Y = j)$ используем формулу условной вероятности:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)},$$

причём $A = \{X = i\}, B = \{X + Y = j\}$.

Найдём $P(A \cap B)$. Пересечение событий означает, что что X должно быть равно i, и одновременно $X + Y$ должно быть равно j. Это возможно только если $Y = j - i$.

Таким образом, событие $\{X = i \cap X + Y = j\}$ эквивалентно событию $\{X = i \cap Y = j - i\}$. Подставим в формулу:

$$P(A \cap B) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^i}{i!} \cdot e^{-\mu}\frac{\mu^{j-i}}{(j-i)!} = e^{-(\lambda+\mu)} \cdot \frac{\lambda^i \mu^{j-i}}{i!(j-i)!}$$

Найдём $P(B) = P(X + Y = j)$. Запишем событие $\{X + Y = j\}$ как $\{X = k \cap Y = j - k\} \quad \forall k \in 1, \ldots, j$. Так как события несовместны и независимы:

$$P(X+Y=j)=\sum_{k=0}^{j}P(X=k\cap Y=j-k)=\sum_{k=0}^{j}P(X=k)P(Y=j-k)$$

По условию:

$$P(X=k)=e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!},\ P(Y=j-k)=e^{-\mu}\frac{\mu^{j-k}}{(j-k)!},$$

тогда

$$P(X+Y=j)=e^{-(\lambda+\mu)}\sum_{k=0}^{j}\frac{\lambda^k\mu^{j-k}}{k!(j-k)!}$$

Воспользуемся биномом Ньютона:

$$(\lambda+\mu)^j=\sum_{k=0}^{j}\frac{j!}{k!(j-k)!}\lambda^k\mu^{j-k}$$

Следовательно:

$$P(X+Y=j)=e^{-(\lambda+\mu)}\frac{(\lambda+\mu)^j}{j!}.$$

Подставим полученные выражения в формулу условной вероятности:

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{e^{-(\lambda+\mu)}\frac{\lambda^i\mu^{j-i}}{i!(j-i)!}}{e^{-(\lambda+\mu)}\frac{(\lambda+\mu)^j}{j!}}=\frac{j!}{i!(j-i)!}\cdot\frac{\lambda^i\mu^{j-i}}{(\lambda+\mu)^j}=$$

$$=C_j^i\cdot(\frac{\lambda}{\lambda+\mu})^i\cdot(\frac{\mu}{\lambda+\mu})^{j-i}$$

Ответ

Таким образом, искомая вероятность равна:

$$\boxed{C_j^i\cdot(\frac{\lambda}{\lambda+\mu})^i\cdot(\frac{\mu}{\lambda+\mu})^{j-i}}$$