

Lawler's 3-colorability test

Иван Воронин

17 января 2024 г.

Вопрос раскрашиваемости графов в заданное число цветов является краеугольным камнем множества областей. В частности стоит отметить следующие

1. Составление расписаний
2. Решение Судоку
3. Назначение мобильных радиочастот
4. Распределением регистров в процессе компиляции
5. Раскраска карт, в конце-то концов

Рассмотрим частный случай: покраска вершин графа в 3 цвета так, чтобы никакие две смежные вершины не оказались одноцветными, называется правильной раскраской. Очевидно, проверить можно ли раскрасить вершины графа в 3 цвета можно за $O^*(3^n)$, где n — число вершин. Достаточно перебрать все возможно покраски и для каждой проверить является ли она правильной за полиномиальное от размера графа время. Первый неочевидный алгоритм решения данной задачи предложил в 1976 году Lawler.

Theorem (Lawler[1]). Вершины графа G можно правильно покрасить в 3 цвета $\iff \exists G \supseteq S$ — максимальное независимое множество : $G \setminus S$ — двудольный

Proof:

\Leftarrow :

Красим $G \setminus S$ в два цвета(в соответствии с долями), а S — в третий.

\Rightarrow :

Рассмотрим произвольную раскраску вершин графа G в 3 цвета, обозначим через A, B, C множества вершин, окрашенные в цвета 1, 2, 3 соответственно. Конечно, A, B, C — независимые множества. Если среди вершин множества B есть не инцидентные ни одной из вершин множества A , покрасим их в цвет 1, тем самым переместим их в множество A , не нарушая корректность раскраски. Аналогично поступим с вершинами из C . Теперь каждая вершина из $B \sqcup C$ смежна хотя бы с одной из вершин множества A , значит, теперь A — максимальное независимое множество, а раскраска всё так же корректная, и, конечно, $B \sqcup C$ — двудольный с долями B и C .

■

Проверка двудольности графа G , очевидно, осуществима за полиномиальное от размера графа время $O(|G|) \stackrel{def}{=} O(|V| + |E|)$, где V — множество вершин графа G , а E — множество его рёбер. Осталось только научиться эффективно перебирать все максимальные независимые множества графа — задача та же, что и перебирать все максимальные клики. Следующий рекурсивный алгоритм предложили голландские математики Coenraad Bron и Joer Kerbosch в 1973 году [2] и до сих пор он является одним из самых эффективных алгоритмов поиска клика.

BronKerbosch(R, P, X) получает на вход 3 попарно не пересекающихся множества вершин R, P и X , и находит максимальные клики, которые содержат все вершины из R , некоторые вершины из P , и ни одну из вершин множества X . При каждом вызове алгоритма P и X являются множествами, объединение которых состоит из тех вершин, которые соединены с каждой из вершин множества R . Когда P и X оба пусты, R оказывается максимальной кликой и алгоритм выводит R . Рекурсия иницируется пустыми множествами R и X , и $P = V(G)$ множество всех вершин графа G . При каждом вызове алгоритм проверяет является ли $P \sqcup X$ пустым множеством и если это верно, сообщает, что R — максимальная клика.

if ($P \sqcup X = \emptyset$)

report R as a maximal clique

В противном случае для каждой вершины v , множества P , сначала осуществляется вызов $BronKerbosch(R \cup \{v\}, P \cap N(v), X \cap N(v))$. Затем, вершина v перемещается из P в X , чтобы исключить её из рассмотрения в будущих проверках, и проверка продолжается со следующей вершины из P .

```
for (vertex  $v$  in  $P$ )
   $BronKerbosch(R \cup \{v\}, P \cap N(v), X \cap N(v))$ 
   $P := P \setminus \{v\}$ 
   $X := X \cup \{v\}$ 
```

Корректность такого алгоритма очевидна, а его временная сложность есть $O(3^{\frac{n}{3}})$. Это следует из того, что граф на n вершинах содержит не более $3^{\frac{n}{3}}$ максимальных клик, как показали Moon и Moser в 1965 году [3].

Итого, представленный алгоритм проверки 3-раскрашиваемости имеет временную сложность $O^*(3^{\frac{n}{3}}) \approx O^*(1,44225^n)$. О лучших на данный момент алгоритмах для проверки 3-раскрашиваемости графов можно почитать здесь [4].

Литература

1. E.L.Lawler, [A Note on the Complexity of the Chromatic Number Problem](#) (7 April 1976).
2. Coenraad Bron, Joep Kerbosch, [Bron–Kerbosch algorithm](#) (1973)
3. J.W.Moon, L.Moser [On cliques in graphs](#) (1965)
4. Lucas Meijer, [3-coloring in Time \$O^*\(1.3217^n\)\$](#) (February 28, 2023).