Lawler's 3-colorability test

Иван Воронин

Вопрос раскрашиваемости графов в заданное число цветов является краеугольным камнем множества областей. В частности стоит отметить следующие

1. Составление расписаний
2. Решение Судоку
3. Назначение мобильных радиочастот
4. Распределением регистров в процессе компиляции
5. Раскраска карт, в конце-то концов

Рассмотрим частный случай: покраска вершин графа в 3 цвета так, чтобы никакие две смежные вершины не оказались одноцветными, называется правильной раскраской. Очевидно, проверить можно ли раскрасить вершины графа в 3 цвета можно за $O^*(3^n)$, где n – число вершин. Достаточно перебрать все возможно покраски и для каждой проверить является ли она правильной за полиномиальное от размера графа время. Первый неочевидный алгоритм решения данной задачи предложил 1976 году Lawler.

Theorem (Lawler[1])**.** Вершины графа G можно правильно покрасить в 3 цвета $\iff \exists\, G \supseteq S$ – максимальное независимое множество : $G \backslash S$ – двудольный

Proof:
$\Longleftarrow$:
Красим $G \backslash S$ в два цвета(в соответствии с долями), а S – в третий.

$\Longrightarrow$:
Рассмотрим произвольную раскраску вершин графа G в 3 цвета, обозначим через A, B, C множества вершин, окрашенные в цвета $1, 2, 3$ соответственно. Конечно, A, B, C – независимые множества. Если среди вершин множества B есть не инцидентные ни одной из вершин множества A, покрасим их в цвет 1, тем самым переместим их в множество A, не нарушая корректность раскраски. Аналогично поступим с вершинами из C. Теперь каждая вершина из $B \sqcup C$ смежна хотя бы с одной из вершин множества A, значит, теперь A – максимальное независимое множество, а раскраска всё так же корректная, и, конечно, $B \sqcup C$ – двудольный с долями B и C.

■

Проверка двудольности графа G, очевидно, осуществима за полиномиальное от размера графа время $O(|G|) \stackrel{def}{=} O(|V| + |E|)$, где V – множество вершин графа G, а E – множество его рёбер. Осталось только научиться эффективно перебирать все максимальные независимые множества графа – задача та же, что и перебирать все максимальные клики. Следующий рекурсивный алгоритм предложили голландские математики Coenraad Bron и Joep Kerbosch в 1973 году [2] и до сих пор он является одним из самых эффективных алгоритмов поиска клик.

$BronKerbosch(R, P, X)$ получает на вход 3 попарно не пересекающихся множества вершин R, P и X, и находит максимальные клики, которые содержат все вершины из R, некоторые вершины из P, и ни одну из вершин множества X. При каждом вызове алгоритма P и X являются множествами, объединение которых состоит из тех вершин, которые соединены с каждой из вершин множества R. Когда P и X оба пусты, R оказывается максимальной кликой и алгоритм выводит R. Рекурсия инициируется пустыми множествами R и X , и $P = V(G)$ множество всех вершин графа G. При каждом вызове алгоритм проверяет является ли $P \sqcup X$ пустым множеством и если это верно, сообщает, что R – максимальная клика.

if $(P \sqcup X = \varnothing)$
    report R as a maximal clique

В противном случае для каждой вершины v, множества P, сначала осуществляется вызов $BronKerbosch(R \cup \{v\}, P \cap N(v), X \cap N(v))$. Затем, вершина v перемещается из P в X, чтобы исключить её из рассмотрения в будущих проверках, и проверка продолжается со следующей вершины из P.

for (vertex v in P)
  $BronKerbosch(R \cup \{v\}, P \cap N(v), X \cap N(v))$
  $P := P \setminus \{v\}$
  $X := X \cup \{v\}$

Корректность такого алгоритма очевидна, а его временная сложность есть $O(3^{\frac{n}{3}})$. Это следует из того, что граф на n вершинах содержит не более $3^{\frac{n}{3}}$ максимальных клик, как показали Moon и Moser в 1965 году [3].

Итого, представленный алгоритм проверки 3-раскрашиваемости имеет временную сложность $O^*(3^{\frac{n}{3}}) \approx O^*(1,44225^n)$ О лучших на данный момент алгоритмах для проверки 3-раскрашиваемости графов можно почитать здесь [4].

Литература

1. E.L.Lawler, A Note on the Complexity of the Chromatic Number Problem (7 April 1976).
2. Coenraad Bron, Joep Kerbosch, Bron–Kerbosch algorithm (1973)
3. J.W.Moon, L.Moser On cliques in graphs (1965)
4. Lucas Meijer, 3-coloring in Time $O^*(1.3217^n)$ (February 28, 2023).