Вычислительная математика. Методы приближения функций, основанные на минимизации нормы.

МФТИ

Подходы к приближению функций

Подходы к приближению функций

- Интерполяция: $\phi(x_k) = f(x_k)$
  - Интерполяция многочленами
  - Сплайн-интерполяция

Подходы к приближению функций

- Интерполяция: $\phi(x_k) = f(x_k)$
  - Интерполяция многочленами
  - Сплайн-интерполяция
- Минимизация нормы $\|\phi - f\| \to \min$

Подходы к приближению функций

- Интерполяция: $\phi(x_k) = f(x_k)$
    - Интерполяция многочленами
    - Сплайн-интерполяция
- Минимизация нормы $\|\phi - f\| \to \min$
    - Равномерное приближение $\|f\|_C = \sup\limits_x |f(x)|$

Подходы к приближению функций

- Интерполяция: $\phi(x_k) = f(x_k)$
  - Интерполяция многочленами
  - Сплайн-интерполяция
- Минимизация нормы $\|\phi - f\| \to \min$
  - Равномерное приближение $\|f\|_C = \sup\limits_x |f(x)|$
  - Приближение в гильбертовом пространстве $\|f\| = (f, f)^{1/2}$, например

$$\|f\| = \left(\int_a^b |f(x)|^2 \, dx\right)^{1/2}$$

Равномерное приближение, альтернанс

Равномерное приближение, альтернанс

Определение Альтернанс (equioscillation)

Альтернансом $g \in C[a, b]$ называется множество точек $a \leq x_1 < x_2 < \ldots < x_N \leq b$, такое что

1. $|g(x_k)| = \|g\|_{C[a,b]}$
2. $g(x_k)g(x_{k+1}) < 0$ (знаки чередуются)

Теорема об альтернансе

Теорема об альтернансе

Теорема Теорема об альтернансе

Для $f \in C[-1,1]$ существует единственное наилучшее приближение $p^* \in \mathcal{P}_n$.

$p \in \mathcal{P}_n$ является многочленом наилучшего приближения тогда и только тогда, когда $f - p$ имеет не меньше $n+2$ точек альтернанса на $[-1,1]$.

Теорема об альтернансе

Теорема Теорема об альтернансе

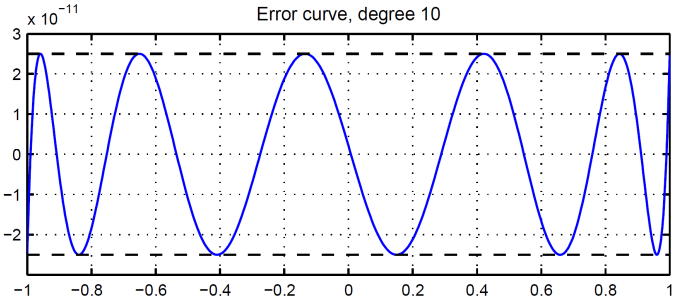
Для $f \in C[-1, 1]$ существует единственное наилучшее приближение $p^* \in \mathcal{P}_n$.
$p \in \mathcal{P}_n$ является многочленом наилучшего приближения тогда и только тогда, когда $f - p$ имеет не меньше $n + 2$ точек альтернанса на $[-1, 1]$.

Теорема об альтернансе

Теорема Теорема об альтернансе

Для $f \in C[-1,1]$ существует единственное наилучшее приближение $p^* \in \mathcal{P}_n$.

$p \in \mathcal{P}_n$ является многочленом наилучшего приближения тогда и только тогда, когда $f - p$ имеет не меньше $n+2$ точек альтернанса на $[-1,1]$.



Доказательство (1)

Существование:

Доказательство (1)

Существование:

- $\|f - p\|$ – непрерывный функционал от p

Доказательство (1)

Существование:

- $\|f - p\|$ – непрерывный функционал от p
- Наилучшее приближение лежит в шаре $\{p \in \mathcal{P}_n : \|f - p\| \leq \|f\|\}$

Доказательство (1)

Существование:

- $\|f-p\|$ – непрерывный функционал от p
- Наилучшее приближение лежит в шаре $\{p \in \mathcal{P}_n : \|f-p\| \leq \|f\|\}$
- По теореме Больцано-Вейерштрасса функционал достигает минимума $\square$

Доказательство (1)

Существование:

- $\|f - p\|$ – непрерывный функционал от p
- Наилучшее приближение лежит в шаре $\{p \in \mathcal{P}_n : \|f - p\| \leq \|f\|\}$
- По теореме Больцано-Вейерштрасса функционал достигает минимума $\square$

$\Leftarrow$ (из альтернанса следует оптимальность)

Доказательство (1)

Существование:

- $\|f-p\|$ – непрерывный функционал от p
- Наилучшее приближение лежит в шаре $\{p \in \mathcal{P}_n : \|f-p\| \leq \|f\|\}$
- По теореме Больцано-Вейерштрасса функционал достигает минимума $\square$

$\Leftarrow$ (из альтернанса следует оптимальность)

- Допустим что $\|f-q\| < \|f-p\|$

Доказательство (1)

Существование:

- $\|f - p\|$ – непрерывный функционал от p
- Наилучшее приближение лежит в шаре $\{p \in \mathcal{P}_n : \|f - p\| \leq \|f\|\}$
- По теореме Больцано-Вейерштрасса функционал достигает минимума $\square$

$\Leftarrow$ (из альтернанса следует оптимальность)

- Допустим что $\|f - q\| < \|f - p\|$
- Тогда $p - q$ принимает чередующиеся по знаку ненулевые значения в $x_0, \ldots, x_{n+1}$

Доказательство (1)

Существование:

- $\|f - p\|$ – непрерывный функционал от p
- Наилучшее приближение лежит в шаре $\{p \in \mathcal{P}_n : \|f - p\| \leq \|f\|\}$
- По теореме Больцано-Вейерштрасса функционал достигает минимума $\square$

$\Leftarrow$ (из альтернанса следует оптимальность)

- Допустим что $\|f - q\| < \|f - p\|$
- Тогда $p - q$ принимает чередующиеся по знаку ненулевые значения в $x_0, \ldots, x_{n+1}$
- $\Rightarrow p - q$ имеет хотя бы $n + 1$ ноль $\Rightarrow p - q = 0$ $\square$

Доказательство (2)

$\Rightarrow$ (из оптимальности следует альтернанс)

Доказательство (2)

$\Rightarrow$ (из оптимальности следует альтернанс)

- Предположим, что точек альтернанса $\leq n+1$, $E = \|f - p\|$

Доказательство (2)

$\Rightarrow$ (из оптимальности следует альтернанс)

- Предположим, что точек альтернанса $\leq n+1$, $E = \|f-p\|$
- Пусть самый левый экстремум $-E$

Доказательство (2)

$\Rightarrow$ (из оптимальности следует альтернанс)

- Предположим, что точек альтернанса $\leq n+1$, $E = \|f-p\|$
- Пусть самый левый экстремум $-E$
- Тогда можно выбрать $-1 < x_1 < \ldots < x_k < 1$, $k \leq n$, такие что:

$$(f-p)(x) < E \text{ при } x \in [-1, x_1] \cup [x_2, x_3] \cup [x_4, x_5] \ldots$$
$$(f-p)(x) > -E \text{ при } x \in [x_1, x_2] \cup [x_3, x_4] \cup \ldots$$

Доказательство (2)

$\Rightarrow$ (из оптимальности следует альтернанс)

- Предположим, что точек альтернанса $\leq n+1$, $E = \|f-p\|$
- Пусть самый левый экстремум $-E$
- Тогда можно выбрать $-1 < x_1 < \ldots < x_k < 1$, $k \leq n$, такие что:

$$(f-p)(x) < E \text{ при } x \in [-1, x_1] \cup [x_2, x_3] \cup [x_4, x_5] \ldots$$
$$(f-p)(x) > -E \text{ при } x \in [x_1, x_2] \cup [x_3, x_4] \cup \ldots$$

- $\delta p(x) = (x_1 - x)(x_2 - x) \cdots (x_k - x)$

Доказательство (2)

$\Rightarrow$ (из оптимальности следует альтернанс)

- Предположим, что точек альтернанса $\le n+1$, $E = \|f-p\|$
- Пусть самый левый экстремум $-E$
- Тогда можно выбрать $-1 < x_1 < \ldots < x_k < 1$, $k \le n$, такие что:

$$(f-p)(x) < E \text{ при } x \in [-1, x_1] \cup [x_2, x_3] \cup [x_4, x_5] \ldots$$
$$(f-p)(x) > -E \text{ при } x \in [x_1, x_2] \cup [x_3, x_4] \cup \ldots$$

- $\delta p(x) = (x_1 - x)(x_2 - x) \cdots (x_k - x)$
- $(p - \epsilon \delta p)(x)$ будет лучшим приближением при достаточно малом ϵ $\square$

Доказательство(3) (единственность)

Доказательство(3) (единственность)

- Пусть p – н. п., $x_0, x_1, \ldots, x_{n+1}$ – точки альтернанса

Доказательство(3) (единственность)

- Пусть p – н. п., $x_0, x_1, \ldots, x_{n+1}$ – точки альтернанса
- $\|f - q\| \leq \|f - p\|$, $q \in \mathcal{P}_n$

Доказательство(3) (единственность)

- Пусть p – н. п., $x_0, x_1, \dots, x_{n+1}$ – точки альтернанса
- $\|f - q\| \le \|f - p\|$, $q \in \mathcal{P}_n$
- $(p - q)(x) \le 0$ в $x_0, x_2, x_4, \dots$ и ≥ 0 в $x_1, x_3, \dots$

Доказательство(3) (единственность)

- Пусть p – н. п., $x_0, x_1, \ldots, x_{n+1}$ – точки альтернанса
- $\|f - q\| \leq \|f - p\|$, $q \in \mathcal{P}_n$
- $(p - q)(x) \leq 0$ в $x_0, x_2, x_4, \ldots$ и ≥ 0 в $x_1, x_3, \ldots$
- $\Rightarrow (p - q)$ имеет корни в каждом из $n + 1$ отрезков $[x_0, x_1], [x_1, x_2], \ldots, [x_n, x_{n+1}]$

Доказательство(3) (единственность)

- Пусть p – н. п., $x_0, x_1, \dots, x_{n+1}$ – точки альтернанса
- $\|f - q\| \leq \|f - p\|$, $q \in \mathcal{P}_n$
- $(p - q)(x) \leq 0$ в $x_0, x_2, x_4, \dots$ и ≥ 0 в $x_1, x_3, \dots$
- $\Rightarrow (p - q)$ имеет корни в каждом из $n + 1$ отрезков $[x_0, x_1], [x_1, x_2], \dots, [x_n, x_{n+1}]$
- Докажем, что $p - q$ имеет $\geq k$ корней на $[x_0, x_k]$

Доказательство(3) (единственность)

- Пусть p – н. п., $x_0, x_1, \dots, x_{n+1}$ – точки альтернанса
- $\|f - q\| \leq \|f - p\|$, $q \in \mathcal{P}_n$
- $(p - q)(x) \leq 0$ в $x_0, x_2, x_4, \dots$ и ≥ 0 в $x_1, x_3, \dots$
- $\Rightarrow (p - q)$ имеет корни в каждом из $n + 1$ отрезков $[x_0, x_1], [x_1, x_2], \dots, [x_n, x_{n+1}]$
- Докажем, что $p - q$ имеет $\geq k$ корней на $[x_0, x_k]$
- Допустим, $p - q$ имеет j корней на $[x_0, x_j]$, $j \leq k - 1$, но только $k - 1$ корень на $[x_0, x_k]$

Доказательство(3) (единственность)

- Пусть p – н. п., $x_0, x_1, \ldots, x_{n+1}$ – точки альтернанса
- $\|f - q\| \leq \|f - p\|$, $q \in \mathcal{P}_n$
- $(p - q)(x) \leq 0$ в $x_0, x_2, x_4, \ldots$ и ≥ 0 в $x_1, x_3, \ldots$
- $\Rightarrow$ $(p - q)$ имеет корни в каждом из $n + 1$ отрезков $[x_0, x_1], [x_1, x_2], \ldots, [x_n, x_{n+1}]$
- Докажем, что $p - q$ имеет $\geq k$ корней на $[x_0, x_k]$
- Допустим, $p - q$ имеет j корней на $[x_0, x_j]$, $j \leq k - 1$, но только $k - 1$ корень на $[x_0, x_k]$
- $\Rightarrow$ x_{k-1} – простой корень $\Rightarrow$ $x_{k-2}, \ldots x_1$ – п.к.

Доказательство(3) (единственность)

- Пусть p – н. п., $x_0, x_1, \ldots, x_{n+1}$ – точки альтернанса
- $\|f - q\| \le \|f - p\|$, $q \in \mathcal{P}_n$
- $(p-q)(x) \le 0$ в $x_0, x_2, x_4, \ldots$ и ≥ 0 в $x_1, x_3, \ldots$
- $\Rightarrow$ $(p-q)$ имеет корни в каждом из $n+1$ отрезков $[x_0, x_1], [x_1, x_2], \ldots, [x_n, x_{n+1}]$
- Докажем, что $p-q$ имеет $\ge k$ корней на $[x_0, x_k]$
- Допустим, $p-q$ имеет j корней на $[x_0, x_j]$, $j \le k-1$, но только $k-1$ корень на $[x_0, x_k]$
- $\Rightarrow$ x_{k-1} – простой корень $\Rightarrow$ $x_{k-2}, \ldots x_1$ – п.к.
- $p - q \neq 0$ в x_0, x_k, знаки совпадают для нечетных k, и отличаются для четных: противоречит условию альтернанса
$\square$

Многочлены наименее отклоняющиеся от нуля

Многочлены наименее отклоняющиеся от нуля

Определение Определение

Многочлен $p_n = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0$ называется наименее уклоняющимся от нуля на $[a, b]$, если он имеет наименьшую норму $C[a, b]$ среди всех многочленов такого вида.

Многочлены наименее отклоняющиеся от нуля

Определение Определение

Многочлен $p_n = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0$ называется наименее уклоняющимся от нуля на $[a, b]$, если он имеет наименьшую норму $C[a, b]$ среди всех многочленов такого вида.

- $\|q_n(x)\|_{C[a,b]} \leq \|x^n - p_{n-1}(x)\|_{C[a,b]} \; \forall p_{n-1} \in \mathcal{P}_{n-1}$

Многочлены наименее отклоняющиеся от нуля

Определение Определение

Многочлен $p_n = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0$ называется наименее уклоняющимся от нуля на $[a, b]$, если он имеет наименьшую норму $C[a, b]$ среди всех многочленов такого вида.

- $\|q_n(x)\|_{C[a,b]} \leq \|x^n - p_{n-1}(x)\|_{C[a,b]} \; \forall p_{n-1} \in \mathcal{P}_{n-1}$
- $\Rightarrow x^n - q_n(x)$ – наилучшее приближение к x^n

Многочлены наименее отклоняющиеся от нуля

Определение Определение

Многочлен $p_n = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0$ называется наименее уклоняющимся от нуля на $[a, b]$, если он имеет наименьшую норму $C[a, b]$ среди всех многочленов такого вида.

- $\|q_n(x)\|_{C[a,b]} \leq \|x^n - p_{n-1}(x)\|_{C[a,b]}\ \forall p_{n-1} \in \mathcal{P}_{n-1}$
- $\Rightarrow x^n - q_n(x)$ – наилучшее приближение к x^n
- По теореме об альтернансе: q_n наименее отклоняется от нуля $\iff$ $E = q_n$ имеет $(n-1) + 2 = n + 1$ точку альтернанса на $[a, b]$

Многочлены Чебышёва

Многочлены Чебышёва

- $T_0(x) = 1,\ T_1(x) = x,\ T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}$

Многочлены Чебышёва

- $T_0(x) = 1,\ T_1(x) = x,\ T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}$
- $T_n(x) = \cos(n \arccos(x)),\ x \in [-1, 1]$

Многочлены Чебышёва

- $T_0(x) = 1,\ T_1(x) = x,\ T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}$
- $T_n(x) = \cos(n \arccos(x)),\ x \in [-1, 1]$
- T_n имеет $n + 1$ точку альтернанса:

$$x_k = \cos(k\pi/n),\ k = 0, \ldots, n$$

Многочлены Чебышёва

- $T_0(x) = 1,\ T_1(x) = x,\ T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}$
- $T_n(x) = \cos(n \arccos(x)),\ x \in [-1, 1]$
- T_n имеет $n + 1$ точку альтернанса:

$$x_k = \cos(k\pi/n),\ k = 0, \ldots, n$$

- $\Rightarrow T_n/2^{n-1}$ – наименее уклоняющийся от нуля многочлен с $a_n = 1$

Многочлены Чебышёва

- $T_0(x) = 1,\ T_1(x) = x,\ T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}$
- $T_n(x) = \cos(n \arccos(x)),\ x \in [-1, 1]$
- T_n имеет $n+1$ точку альтернанса:

$$x_k = \cos(k\pi/n),\ k = 0, \dots, n$$

- $\Rightarrow T_n/2^{n-1}$ – наименее уклоняющийся от нуля многочлен с $a_n = 1$
- На произвольном отрезке $[a, b]$ с помощью замены

$$x = \frac{a+b}{2} + t\frac{b-a}{2},\ t = \frac{2x-a-b}{b-a}$$

Получаем многочлен

$$Q_n(x) = 2^{1-2n}(b-a)^n T_n\left(\frac{2x-a-b}{b-a}\right)$$

Интерполяция и равномерное приближение

Интерполяция и равномерное приближение

Теорема Теорема

Пусть $f \in C[-1,1]$, $E_n(f) = \min\limits_{\phi \in \mathcal{P}_n} \|f - \phi\|_{C[-1,1]}$. Тогда:
$\|f - L_n\|_C \leq (1 + \|P_n\|) E_n(f)$

Теорема Теорема

Пусть $f \in C[-1,1]$, $E_n(f) = \min\limits_{\phi \in \mathcal{P}_n} \|f - \phi\|_{C[-1,1]}$. Тогда: $\|f - L_n\|_C \le (1 + \|P_n\|)E_n(f)$

- $P_n \phi_n = \phi_n$

$$\|f - L_n\| \le \|f - \phi_n\| + \|P_n \phi_n - P_n f\| =$$
$$E_n(f) + \|P_n(\phi_n - f)\| \le (1 + \|P_n\|)E_n(f) \quad \square$$

Интерполяция и равномерное приближение

Теорема Теорема

Пусть $f \in C[-1,1]$, $E_n(f) = \min\limits_{\phi \in \mathcal{P}_n} \|f - \phi\|_{C[-1,1]}$. Тогда:
$\|f - L_n\|_C \le (1 + \|P_n\|) E_n(f)$

- $P_n \phi_n = \phi_n$

$$\|f - L_n\| \le \|f - \phi_n\| + \|P_n \phi_n - P_n f\| =$$
$$E_n(f) + \|P_n(\phi_n - f)\| \le (1 + \|P_n\|) E_n(f) \quad \square$$

- Для чебышёвских сеток: $\|f - L_n\| \le (1 + c \ln n) E_n(f)$

Алгоритм Ремеза

Алгоритм Ремеза

Возьмем $n+2$ точки $x_1, \ldots, x_{n+2}$

Алгоритм Ремеза

Возьмем $n+2$ точки $x_1, \ldots, x_{n+2}$

1. Решаем линейную систему:

$$c_0 + c_1 x_i + \ldots c_n x_i^n + (-1)^i E = f(x_i),\ i = 1, 2, \ldots, n+2$$

относительно неизвестных $c_0, \ldots, c_n, E$.

Алгоритм Ремеза

Возьмем $n+2$ точки $x_1, \ldots, x_{n+2}$

1. Решаем линейную систему:

$$c_0 + c_1 x_i + \ldots c_n x_i^n + (-1)^i E = f(x_i),\ i = 1, 2, \ldots, n+2$$

относительно неизвестных $c_0, \ldots, c_n, E$.

2. Находим точки локального максимума ошибки $|f(x) - p_n|$, $p_n = c_0 + c_1 x + \ldots + c_n x^n$. Если условие альтернанса выполнено с заданной точностью - останавливаемся, иначе

Алгоритм Ремеза

Возьмем $n+2$ точки $x_1, \ldots, x_{n+2}$

1. Решаем линейную систему:

$$c_0 + c_1 x_i + \ldots c_n x_i^n + (-1)^i E = f(x_i),\ i = 1, 2, \ldots, n+2$$

относительно неизвестных $c_0, \ldots, c_n, E$.

2. Находим точки локального максимума ошибки $|f(x) - p_n|$, $p_n = c_0 + c_1 x + \ldots + c_n x^n$. Если условие альтернанса выполнено с заданной точностью - останавливаемся, иначе
3. Заменяем часть точек на точки локального максимума, так чтобы знак $f - p_n$ чередовался. Переходим к (1)

Пример: аппроксимация $|x|$

Наилучшее приближение в $||\cdot||_\infty$

Наилучшее приближение в $|| \cdot ||_\infty$

- Для гладких функций интерполяция по чебышёвским узлам даёт близкую точность

Наилучшее приближение в $||\cdot||_\infty$

- Для гладких функций интерполяция по чебышёвским узлам даёт близкую точность
- Примеры использования равномерного приближения:
  - Аппроксимация специальных функций
  - Построение цифровых фильтров в обработке сигналов

Наилучшее приближение в $|| \cdot ||_\infty$

- Для гладких функций интерполяция по чебышёвским узлам даёт близкую точность
- Примеры использования равномерного приближения:
  - Аппроксимация специальных функций
  - Построение цифровых фильтров в обработке сигналов
- Свойство альтернанса используется для приближения рациональными функциями $\dfrac{p_n(x)}{q_m(x)}$

Приближение в гильбертовом пространстве

Приближение в гильбертовом пространстве

- $\forall f$ в гильбертовом пространстве F и любого замкнутого подпространства Φ существует единственное разложение:

$$f = u + \phi,\ \phi \in \Phi,\ u \perp \Phi$$

Приближение в гильбертовом пространстве

- $\forall f$ в гильбертовом пространстве F и любого замкнутого подпространства Φ существует единственное разложение:

$$f = u + \phi,\ \phi \in \Phi,\ u \perp \Phi$$

- $\Phi = \mathrm{span}\{v_1, \ldots, v_n\}$, $\phi = c_1 v_1 + \ldots + c_n v_n$:

$$\begin{bmatrix} (v_1, v_1) & \ldots & (v_1, v_n) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ (v_n, v_1) & \ldots & (v_n, v_n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (v_1, f) \\ \vdots \\ (v_n, f) \end{bmatrix}$$

Скалярное произведение

Скалярное произведение

- Для любой неотрицательной функции w с положительным интегралом по $[a, b]$ можно ввести:

$$(f, g) = \int_a^b f(x)g(x)w(x)\,dx$$

Скалярное произведение

- Для любой неотрицательной функции w с положительным интегралом по $[a, b]$ можно ввести:

$$(f, g) = \int_a^b f(x)g(x)w(x)\, dx$$

- Можно взять $\Phi = \mathcal{P}^n$ и провести ортогонализацию Грамма-Шмидта:

$$(L_i, L_j) = \delta_{ij}$$

Скалярное произведение

- Для любой неотрицательной функции w с положительным интегралом по $[a, b]$ можно ввести:

$$(f, g) = \int_a^b f(x)g(x)w(x)\,dx$$

- Можно взять $\Phi = \mathcal{P}^n$ и провести ортогонализацию Грамма-Шмидта:

$$(L_i, L_j) = \delta_{ij}$$

- Скалярное произведение определяет набор *ортогональных многочленов* с точностью до множителя ± 1

Трехчленное рекуррентное соотношение

Трехчленное рекуррентное соотношение

Теорема Теорема

Для любых ортогональных многочленов верно трехчленное рекуррентное соотношение:

$$xL_n(x) = \beta_{n-1}L_{n-1}(x) + \alpha_n L_n(x) + \beta_n L_{n+1}(x),\ n = 0, 1, \ldots$$

Трехчленное рекуррентное соотношение

Теорема Теорема

Для любых ортогональных многочленов верно трехчленное рекуррентное соотношение:

$$xL_n(x) = \beta_{n-1}L_{n-1}(x) + \alpha_n L_n(x) + \beta_n L_{n+1}(x), \; n = 0, 1, \ldots$$

- Разложим многочлен xL_n по базису:

$$xL_n(x) = s_{n0}L_0(x) + \ldots + s_{nn}L_n(x) + s_{nn+1}L_{n+1}(x)$$

Трехчленное рекуррентное соотношение

Теорема Теорема

Для любых ортогональных многочленов верно трехчленное рекуррентное соотношение:

$$xL_n(x) = \beta_{n-1}L_{n-1}(x) + \alpha_n L_n(x) + \beta_n L_{n+1}(x),\ n = 0, 1, \dots$$

- Разложим многочлен xL_n по базису:

$$xL_n(x) = s_{n0}L_0(x) + \dots + s_{nn}L_n(x) + s_{nn+1}L_{n+1}(x)$$

- $s_{nj} = (xL_n, L_j) = (L_n, xL_j) = 0$, при $j \leq n-2$

Трехчленное рекуррентное соотношение

Теорема Теорема

Для любых ортогональных многочленов верно трехчленное рекуррентное соотношение:

$$xL_n(x) = \beta_{n-1}L_{n-1}(x) + \alpha_n L_n(x) + \beta_n L_{n+1}(x),\ n = 0, 1, \dots$$

- Разложим многочлен xL_n по базису:

$$xL_n(x) = s_{n0}L_0(x) + \ldots + s_{nn}L_n(x) + s_{nn+1}L_{n+1}(x)$$

- $s_{nj} = (xL_n, L_j) = (L_n, xL_j) = 0,$ при $j \leq n-2$
- Обозначим $\alpha_n = s_{nn}, \beta_n = s_{n,n+1} = (xL_n, L_{n+1})$

Трехчленное рекуррентное соотношение

Теорема Теорема

Для любых ортогональных многочленов верно трехчленное рекуррентное соотношение:

$$xL_n(x) = \beta_{n-1}L_{n-1}(x) + \alpha_n L_n(x) + \beta_n L_{n+1}(x),\ n = 0, 1, \ldots$$

- Разложим многочлен xL_n по базису:

$$xL_n(x) = s_{n0}L_0(x) + \ldots + s_{nn}L_n(x) + s_{nn+1}L_{n+1}(x)$$

- $s_{nj} = (xL_n, L_j) = (L_n, xL_j) = 0,$ при $j \le n-2$
- Обозначим $\alpha_n = s_{nn}, \beta_n = s_{n,n+1} = (xL_n, L_{n+1})$
- $s_{n,n-1} = (xL_n, L_{n-1}) = (xL_{n-1}, L_n) = \beta_{n-1} \quad \square$

Следствия

Следствия

$$x\begin{bmatrix} L_0(x) \\ L_1(x) \\ \vdots \\ L_{n-1}(x) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \alpha_0 & \beta_1 & & \\ \beta_1 & \alpha_1 & \beta_2 & \\ & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & \beta_{n-1} & \alpha_{n-1} \end{bmatrix}}_{T_n} \begin{bmatrix} L_0(x) \\ L_1(x) \\ \vdots \\ L_{n-1}(x) \end{bmatrix} + \beta_n L_n(x) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

Следствия

$$x\begin{bmatrix} L_0(x) \\ L_1(x) \\ \vdots \\ L_{n-1}(x) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \alpha_0 & \beta_1 & & \\ \beta_1 & \alpha_1 & \beta_2 & \\ & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & \beta_{n-1} & \alpha_{n-1} \end{bmatrix}}_{T_n} \begin{bmatrix} L_0(x) \\ L_1(x) \\ \vdots \\ L_{n-1}(x) \end{bmatrix} + \beta_n L_n(x) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

Теорема Теорема

L_n имеет n простых вещественных корней $x_1, \ldots, x_n$, которые являются собственными числами матрицы T_n с собственными векторами:

$$[L_0(x_j), \ldots, L_{n-1}(x_j)]^T,\ 1 \leq j \leq n$$

Доказательство

$$x\begin{bmatrix} L_0(x) \\ L_1(x) \\ \vdots \\ L_{n-1}(x) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \alpha_0 & \beta_1 & & \\ \beta_1 & \alpha_1 & \beta_2 & \\ & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & \beta_{n-1} & \alpha_{n-1} \end{bmatrix}}_{T_n} \begin{bmatrix} L_0(x) \\ L_1(x) \\ \vdots \\ L_{n-1}(x) \end{bmatrix} + \beta_n L_n(x) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

Доказательство

$$x\begin{bmatrix} L_0(x) \\ L_1(x) \\ \vdots \\ L_{n-1}(x) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \alpha_0 & \beta_1 & & \\ \beta_1 & \alpha_1 & \beta_2 & \\ & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & \beta_{n-1} & \alpha_{n-1} \end{bmatrix}}_{T_n} \begin{bmatrix} L_0(x) \\ L_1(x) \\ \vdots \\ L_{n-1}(x) \end{bmatrix} + \beta_n L_n(x) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

- Если $L_n(\lambda) = 0$ – то λ - с.ч. T_n $(L_0(x) \neq 0)$

Доказательство

$$x\begin{bmatrix} L_0(x)\\ L_1(x)\\ \vdots\\ L_{n-1}(x)\end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \alpha_0 & \beta_1 & & \\ \beta_1 & \alpha_1 & \beta_2 & \\ & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & \beta_{n-1} & \alpha_{n-1}\end{bmatrix}}_{T_n}\begin{bmatrix} L_0(x)\\ L_1(x)\\ \vdots\\ L_{n-1}(x)\end{bmatrix} + \beta_n L_n(x)\begin{bmatrix} 0\\ 0\\ \vdots\\ 1\end{bmatrix}$$

- Если $L_n(\lambda) = 0$ – то λ - с.ч. T_n $(L_0(x) \neq 0)$
- Допустим, что λ - кратный корень: $L_n'(\lambda) = 0$:

$$T_n L'(\lambda) = \lambda L'(\lambda) + L(\lambda),\ T_n L(\lambda) = \lambda L(\lambda)$$

Доказательство

$$x \begin{bmatrix} L_0(x) \\ L_1(x) \\ \vdots \\ L_{n-1}(x) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \alpha_0 & \beta_1 & & \\ \beta_1 & \alpha_1 & \beta_2 & \\ & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & \beta_{n-1} & \alpha_{n-1} \end{bmatrix}}_{T_n} \begin{bmatrix} L_0(x) \\ L_1(x) \\ \vdots \\ L_{n-1}(x) \end{bmatrix} + \beta_n L_n(x) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

- Если $L_n(\lambda) = 0$ – то λ - с.ч. T_n $(L_0(x) \neq 0)$
- Допустим, что λ - кратный корень: $L_n'(\lambda) = 0$:

$$T_n L'(\lambda) = \lambda L'(\lambda) + L(\lambda),\ T_n L(\lambda) = \lambda L(\lambda)$$

- $(T_n - \lambda I)L' = L,\ (T_n - \lambda I)^2 L' = (T_n - \lambda I)L = 0$

Доказательство

$$x\begin{bmatrix} L_0(x) \\ L_1(x) \\ \vdots \\ L_{n-1}(x) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \alpha_0 & \beta_1 & & \\ \beta_1 & \alpha_1 & \beta_2 & \\ & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & \beta_{n-1} & \alpha_{n-1} \end{bmatrix}}_{T_n} \begin{bmatrix} L_0(x) \\ L_1(x) \\ \vdots \\ L_{n-1}(x) \end{bmatrix} + \beta_n L_n(x) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

- Если $L_n(\lambda) = 0$ – то λ - с.ч. T_n $(L_0(x) \neq 0)$
- Допустим, что λ - кратный корень: $L'_n(\lambda) = 0$:

$$T_n L'(\lambda) = \lambda L'(\lambda) + L(\lambda),\ T_n L(\lambda) = \lambda L(\lambda)$$

- $(T_n - \lambda I)L' = L,\ (T_n - \lambda I)^2 L' = (T_n - \lambda I)L = 0$
- $\Rightarrow L' \in ker(T_n - \lambda I)^2 = ker(T_n - \lambda I)$ (т.к. T_n - эрмитова $\Rightarrow$ нормальная)

Доказательство (2)

$$x\begin{bmatrix} L_0(x) \\ L_1(x) \\ \vdots \\ L_{n-1}(x) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \alpha_0 & \beta_1 & & \\ \beta_1 & \alpha_1 & \beta_2 & \\ & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & \beta_{n-1} & \alpha_{n-1} \end{bmatrix}}_{T_n} \begin{bmatrix} L_0(x) \\ L_1(x) \\ \vdots \\ L_{n-1}(x) \end{bmatrix} + \beta_n L_n(x) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

Доказательство (2)

$$x\begin{bmatrix} L_0(x) \\ L_1(x) \\ \vdots \\ L_{n-1}(x) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \alpha_0 & \beta_1 & & \\ \beta_1 & \alpha_1 & \beta_2 & \\ & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & \beta_{n-1} & \alpha_{n-1} \end{bmatrix}}_{T_n} \begin{bmatrix} L_0(x) \\ L_1(x) \\ \vdots \\ L_{n-1}(x) \end{bmatrix} + \beta_n L_n(x) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

- $\beta_i \neq 0, \Rightarrow T_n - \lambda I$ имеет отличный от нуля минор порядка $n-1$ (в котором β_i – на диагонали)

Доказательство (2)

$$x\begin{bmatrix} L_0(x) \\ L_1(x) \\ \vdots \\ L_{n-1}(x) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \alpha_0 & \beta_1 & & \\ \beta_1 & \alpha_1 & \beta_2 & \\ & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & \beta_{n-1} & \alpha_{n-1} \end{bmatrix}}_{T_n} \begin{bmatrix} L_0(x) \\ L_1(x) \\ \vdots \\ L_{n-1}(x) \end{bmatrix} + \beta_n L_n(x) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

- $\beta_i \neq 0, \Rightarrow T_n - \lambda I$ имеет отличный от нуля минор порядка $n-1$ (в котором β_i – на диагонали)
- $\dim\ ker(T_n - \lambda I) = 1$, $\Rightarrow$ для некоторого a

$$\begin{bmatrix} L_0'(\lambda) \\ L_1'(\lambda) \\ \vdots \\ L_{n-1}'(\lambda) \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} L_0(\lambda) \\ L_1(\lambda) \\ \vdots \\ L_{n-1}(\lambda) \end{bmatrix}$$

Доказательство (2)

$$x\begin{bmatrix} L_0(x) \\ L_1(x) \\ \vdots \\ L_{n-1}(x) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \alpha_0 & \beta_1 & & \\ \beta_1 & \alpha_1 & \beta_2 & \\ & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & \beta_{n-1} & \alpha_{n-1} \end{bmatrix}}_{T_n} \begin{bmatrix} L_0(x) \\ L_1(x) \\ \vdots \\ L_{n-1}(x) \end{bmatrix} + \beta_n L_n(x) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

- $\beta_i \neq 0, \Rightarrow T_n - \lambda I$ имеет отличный от нуля минор порядка $n-1$ (в котором β_i – на диагонали)
- $\dim\ ker(T_n - \lambda I) = 1$, $\Rightarrow$ для некоторого a

$$\begin{bmatrix} L'_0(\lambda) \\ L'_1(\lambda) \\ \vdots \\ L'_{n-1}(\lambda) \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} L_0(\lambda) \\ L_1(\lambda) \\ \vdots \\ L_{n-1}(\lambda) \end{bmatrix}$$

- $L'_0(\lambda) = 0 \Rightarrow a = 0$, противоречие с $L'_1(\lambda) \neq 0$ $\square$

Расположение корней

Расположение корней

Теорема Теорема

При $n \geq 1$ все корни L_n вещественны, попарно различны и расположены внутри отрезка $[a, b]$

Расположение корней

Теорема Теорема

При $n \geq 1$ все корни L_n вещественны, попарно различны и расположены внутри отрезка $[a, b]$

- Пусть $z_1, \ldots, z_m$ - корни полинома L_n внутри $[a, b]$

Расположение корней

Теорема Теорема

При $n \geq 1$ все корни L_n вещественны, попарно различны и расположены внутри отрезка $[a, b]$

- Пусть $z_1, \ldots, z_m$ - корни полинома L_n внутри $[a, b]$
- $L_n(x) = (x - z_1) \cdots (x - z_m) p_{n-m}(x)$

Расположение корней

Теорема Теорема

При $n \geq 1$ все корни L_n вещественны, попарно различны и расположены внутри отрезка $[a, b]$

- Пусть $z_1, \ldots, z_m$ - корни полинома L_n внутри $[a, b]$
- $L_n(x) = (x - z_1) \cdots (x - z_m) p_{n-m}(x)$
- $p_{n-m}(x)$ имеет один и тот же знак на $[a, b]$

Расположение корней

Теорема Теорема

При $n \geq 1$ все корни L_n вещественны, попарно различны и расположены внутри отрезка $[a, b]$

- Пусть $z_1, \ldots, z_m$ - корни полинома L_n внутри $[a, b]$
- $L_n(x) = (x - z_1) \cdots (x - z_m) p_{n-m}(x)$
- $p_{n-m}(x)$ имеет один и тот же знак на $[a, b]$
- Если $m < n$, то $L_n \perp \prod_{k=1}^{m} (x - z_k)$:

$$\int_a^b (x - z_1)^2 \cdots (x - z_m)^2 p_{n-m}(x) w(x)\, dx = 0$$

Расположение корней

Теорема Теорема

При $n \geq 1$ все корни L_n вещественны, попарно различны и расположены внутри отрезка $[a, b]$

- Пусть $z_1, \ldots, z_m$ - корни полинома L_n внутри $[a, b]$
- $L_n(x) = (x - z_1) \cdots (x - z_m) p_{n-m}(x)$
- $p_{n-m}(x)$ имеет один и тот же знак на $[a, b]$
- Если $m < n$, то $L_n \perp \prod_{k=1}^{m}(x - z_k)$:

$$\int_a^b (x - z_1)^2 \cdots (x - z_m)^2 p_{n-m}(x) w(x)\, dx = 0$$

- Противоречие: $w(x) \geq 0$, p_{n-m} не меняет знак $\square$

Разложение интерполяционного многочлена

Теорема

$x_1, \dots, x_n$ - корни ортогонального многочлена L_n. Тогда матрица

$$Q_n = \begin{bmatrix} L_0(x_1) & \cdots & L_{n-1}(x_1) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ L_0(x_n) & \cdots & L_{n-1}(x_n) \end{bmatrix}$$

имеет ортогональные строки, а матрица $D_n^{-1} Q_n$

$$D_n = \text{diag }(d_1, \dots, d_n), \; d_j = \|Q_n(j,:)\|_2$$

является ортогональной.

Разложение интерполяционного многочлена (2)

Теорема

Интерполяционный многочлен p_{n-1}, построенный по корням $x_1, \ldots, x_n$ ортогонального многочлена L_n и значениям $f_1, \ldots, f_n$, представляется в виде

$$p_{n-1}(x) = c_1 L_0(x) + \ldots + c_n L_{n-1}(x)$$

$$\begin{bmatrix} c_1 \\ \cdots \\ c_n \end{bmatrix} = Q_n^T D_n^{-2} \begin{bmatrix} f_1 \\ \cdots \\ f_n \end{bmatrix}$$

Разложение интерполяционного многочлена (2)

Теорема

Интерполяционный многочлен p_{n-1}, построенный по корням $x_1, \ldots, x_n$ ортогонального многочлена L_n и значениям $f_1, \ldots, f_n$, представляется в виде

$$p_{n-1}(x) = c_1 L_0(x) + \ldots + c_n L_{n-1}(x)$$

$$\begin{bmatrix} c_1 \\ \cdots \\ c_n \end{bmatrix} = Q_n^T D_n^{-2} \begin{bmatrix} f_1 \\ \cdots \\ f_n \end{bmatrix}$$

$$Q_n c = f \Rightarrow D_n(D_n^{-1} Q_n) c = f \Rightarrow c = (D_n^{-1} Q_n)^T D_n^{-1} f = Q_n^T D_n^{-2} f \quad \square$$

Связь разных форм с базисом

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \phi_0(x_0) & \phi_1(x_0) & \dots & \phi_n(x_0) \\ \phi_0(x_1) & \phi_1(x_1) & \dots & \phi_n(x_1) \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ \phi_0(x_n) & \phi_1(x_n) & \dots & \phi_n(x_n) \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(x_0) \\ f(x_1) \\ \vdots \\ f(x_n) \end{bmatrix}$$

Связь разных форм с базисом

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \phi_0(x_0) & \phi_1(x_0) & \dots & \phi_n(x_0) \\ \phi_0(x_1) & \phi_1(x_1) & \dots & \phi_n(x_1) \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ \phi_0(x_n) & \phi_1(x_n) & \dots & \phi_n(x_n) \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(x_0) \\ f(x_1) \\ \vdots \\ f(x_n) \end{bmatrix}$$

- $\phi_k(x) = x^k$: A — матрица Вандермонда

Связь разных форм с базисом

$$
\underbrace{\begin{bmatrix} \phi_0(x_0) & \phi_1(x_0) & \dots & \phi_n(x_0) \\ \phi_0(x_1) & \phi_1(x_1) & \dots & \phi_n(x_1) \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ \phi_0(x_n) & \phi_1(x_n) & \dots & \phi_n(x_n) \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(x_0) \\ f(x_1) \\ \vdots \\ f(x_n) \end{bmatrix}
$$

- $\phi_k(x) = x^k$: A — матрица Вандермонда
- $\phi_k(x) = l_k(x)$: $A = I$

Связь разных форм с базисом

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \phi_0(x_0) & \phi_1(x_0) & \dots & \phi_n(x_0) \\ \phi_0(x_1) & \phi_1(x_1) & \dots & \phi_n(x_1) \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ \phi_0(x_n) & \phi_1(x_n) & \dots & \phi_n(x_n) \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(x_0) \\ f(x_1) \\ \vdots \\ f(x_n) \end{bmatrix}$$

- $\phi_k(x) = x^k$: A — матрица Вандермонда
- $\phi_k(x) = l_k(x)$: $A = I$
- $1, (x - x_0), (x - x_0)(x - x_1), \dots$: A — нижнетреугольная

Связь разных форм с базисом

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \phi_0(x_0) & \phi_1(x_0) & \dots & \phi_n(x_0) \\ \phi_0(x_1) & \phi_1(x_1) & \dots & \phi_n(x_1) \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ \phi_0(x_n) & \phi_1(x_n) & \dots & \phi_n(x_n) \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(x_0) \\ f(x_1) \\ \vdots \\ f(x_n) \end{bmatrix}$$

- $\phi_k(x) = x^k$: A — матрица Вандермонда
- $\phi_k(x) = l_k(x)$: $A = I$
- $1, (x - x_0), (x - x_0)(x - x_1), \dots$: A — нижнетреугольная
- $\phi_k(x) = L_k(x), L_{n+1}(x_j) = 0$: A — ортогональная

Примеры

- Многочлены Лежандра $(w(x) = 1)$

$$L_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} \left(x^2 - 1\right)^n$$

- Многочлены Чебышёва $\left(w(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}\right)$

$$L_n(x) = \cos(n \arccos x)$$

- Многочлены Эрмита $\left(w(x) = e^{-x^2}\right)$

$$L_n(x) = \sum_{j=0}^{[n/2]} (-1)^j \frac{n!}{j!(n-2j)!} (2x)^{n-2j}$$

Примеры

Заключение

Заключение

- Наилучшее приближение в $C[a, b]$

Заключение

- Наилучшее приближение в $C[a, b]$
- Условие альтернанса

Заключение

- Наилучшее приближение в $C[a,b]$
- Условие альтернанса
- Приближение в гильбертовом пространстве ($L_2[a,b]$)

Заключение

- Наилучшее приближение в $C[a,b]$
- Условие альтернанса
- Приближение в гильбертовом пространстве $(L_2[a,b])$
- Ортогональные многочлены