Вычислительная математика. Численные методы решения ОДУ.

МФТИ

Основная задача

Основная задача

- Найти приближенное решение краевой задачи, например:

$$
\begin{aligned}
u_{xx}(x) &= f(x, u) \\
u(0) &= a \\
u(1) &= b
\end{aligned}
$$

Основная задача

- Найти приближенное решение краевой задачи, например:

$$\begin{aligned} u_{xx}(x) &= f(x,u) \\ u(0) &= a \\ u(1) &= b \end{aligned}$$

- Найти приближенное решение задачи Коши, например:

$$\begin{aligned} u_t &= f(t,u) \\ u(0) &= u_0 \end{aligned}$$

Пример численного метода

Пример численного метода

$$u_{xx}(x) = f(x)$$
$$u(0) = a, \; u(1) = b$$

Пример численного метода

$$u_{xx}(x) = f(x)$$
$$u(0) = a, \; u(1) = b$$

- Вместо непрерывной функции ищем $U_0, \ldots, U_{m+1}$, $U_j \approx u(x_j)$, $x_j = jh$, $h = 1/(m+1)$

Пример численного метода

$$u_{xx}(x) = f(x)$$
$$u(0) = a, \; u(1) = b$$

- Вместо непрерывной функции ищем $U_0, \dots, U_{m+1}$, $U_j \approx u(x_j)$, $x_j = jh$, $h = 1/(m+1)$
- Заменим 2-ю производную конечной разностью:

$$\frac{1}{h^2}\left(U_{j-1} - 2U_j + U_{j+1}\right) = f(x_j), \quad j = 1, 2, \dots, m$$

Пример численного метода

$$u_{xx}(x) = f(x)$$
$$u(0) = a, \; u(1) = b$$

- Вместо непрерывной функции ищем $U_0, \dots, U_{m+1}$, $U_j \approx u(x_j)$, $x_j = jh$, $h = 1/(m+1)$
- Заменим 2-ю производную конечной разностью:

$$\frac{1}{h^2}\left(U_{j-1} - 2U_j + U_{j+1}\right) = f(x_j), \quad j = 1, 2, \dots, m$$

- 1-е и m-е уравнения содержат известные значения $U_0 = a$, $U_{m+1} = b$

Пример численного метода (2)

Получим систему линейных уравнений вида $AU = F$

$$\underbrace{\frac{1}{h^2}\begin{bmatrix} -2 & 1 & & & & \\ 1 & -2 & 1 & & & \\ & 1 & -2 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & -2 & 1 \\ & & & & 1 & -2 \end{bmatrix}}_{A}, \quad \underbrace{\begin{bmatrix} f(x_1) - a/h^2 \\ f(x_2) \\ f(x_3) \\ \vdots \\ f(x_{m-1}) \\ f(x_m) - b/h^2 \end{bmatrix}}_{F}$$

Пример численного метода (2)

Получим систему линейных уравнений вида $AU = F$

$$\underbrace{\frac{1}{h^2}\begin{bmatrix} -2 & 1 & & & & \\ 1 & -2 & 1 & & & \\ & 1 & -2 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & -2 & 1 \\ & & & & 1 & -2 \end{bmatrix}}_{A}, \underbrace{\begin{bmatrix} f(x_1) - a/h^2 \\ f(x_2) \\ f(x_3) \\ \vdots \\ f(x_{m-1}) \\ f(x_m) - b/h^2 \end{bmatrix}}_{F}$$

- Насколько точно U приближает u?

Норма ошибки, сходимость

Норма ошибки, сходимость

- Вектор ошибки:

$$\hat{U} = \begin{bmatrix} u(x_1) \\ u(x_2) \\ \vdots \\ u(x_m) \end{bmatrix}, \quad E = U - \hat{U}$$

Норма ошибки, сходимость

- Вектор ошибки:

$$\hat{U} = \begin{bmatrix} u(x_1) \\ u(x_2) \\ \vdots \\ u(x_m) \end{bmatrix}, \quad E = U - \hat{U}$$

- Нужно оценить норму ошибки, например:

$$\|E\|_\infty = \max_j |E_j|, \quad \|E\|_1 = h \sum_{j=1}^{m} |E_j|$$

Норма ошибки, сходимость

- Вектор ошибки:

$$\hat{U} = \begin{bmatrix} u(x_1) \\ u(x_2) \\ \vdots \\ u(x_m) \end{bmatrix}, \quad E = U - \hat{U}$$

- Нужно оценить норму ошибки, например:

$$\|E\|_\infty = \max_j |E_j|, \quad \|E\|_1 = h \sum_{j=1}^{m} |E_j|$$

Определение 15.1 (сходимость)

Численное решение *сходится* к точному с порядком p, если $\|E\| = O(h^p),\ h \to 0$

Невязка, аппроксимация

Невязка, аппроксимация

- КР формула имеет 2-й порядок аппроксимации:

$$\frac{1}{h^2}\left(u(x_{j-1}) - 2u(x_j) + u(x_{j+1})\right) - f(x_j) = r_j =$$
$$\frac{1}{12}h^2 u^{(4)}(x_j) + O(h^4) = O(h^2)$$

Невязка, аппроксимация

- КР формула имеет 2-й порядок аппроксимации:

$$\frac{1}{h^2}\left(u(x_{j-1}) - 2u(x_j) + u(x_{j+1})\right) - f(x_j) = r_j =$$
$$\frac{1}{12}h^2 u^{(4)}(x_j) + O(h^4) = O(h^2)$$

- Введем *вектор невязки* r с компонентами r_j:

$$r = A\hat{U} - F, \quad A\hat{U} = F + r, \quad \|r\| = O(h^2)$$

Невязка, аппроксимация

- КР формула имеет 2-й порядок аппроксимации:

$$\frac{1}{h^2}\left(u(x_{j-1}) - 2u(x_j) + u(x_{j+1})\right) - f(x_j) = r_j =$$
$$\frac{1}{12}h^2 u^{(4)}(x_j) + O(h^4) = O(h^2)$$

- Введем *вектор невязки* r с компонентами r_j:

$$r = A\hat{U} - F, \quad A\hat{U} = F + r, \quad \|r\| = O(h^2)$$

Определение 15.2 (аппроксимация)

Разностная задача *аппроксимирует* дифференциальную задачу с порядком p, если $\|r\| = O(h^p)$

Связь ошибки и невязки, устойчивость

Связь ошибки и невязки, устойчивость

$$\begin{cases} A_m U = F \\ A_m \hat{U} = F + r \end{cases}, \; A_m E = -r \;, E = A_m^{-1} r \;, \|E\| \leq \|A_m^{-1}\| \|r\|$$

Связь ошибки и невязки, устойчивость

$$\begin{cases} A_m U = F \\ A_m \hat{U} = F + r \end{cases}, \; A_m E = -r \, , E = A_m^{-1} r \, , \|E\| \leq \|A_m^{-1}\| \|r\|$$

- $h \to 0$, $m \to \infty$

Связь ошибки и невязки, устойчивость

$$\begin{cases} A_m U = F \\ A_m \hat{U} = F + r \end{cases}, \; A_m E = -r \;, E = A_m^{-1} r \;, \|E\| \leq \|A_m^{-1}\| \|r\|$$

- $h \to 0$, $m \to \infty$
- Если $\|A_m^{-1}\| \leq C \quad \forall m > m_0$:

$$\|E\| \leq \|A_m^{-1}\| \|r\| \leq C\|r\| = O(h^2)$$

Связь ошибки и невязки, устойчивость

$$\begin{cases} A_m U = F \\ A_m \hat{U} = F + r \end{cases}, \; A_m E = -r \;, E = A_m^{-1} r \;, \|E\| \leq \|A_m^{-1}\| \|r\|$$

- $h \to 0$, $m \to \infty$
- Если $\|A_m^{-1}\| \leq C \quad \forall m > m_0$:

$$\|E\| \leq \|A_m^{-1}\| \|r\| \leq C \|r\| = O(h^2)$$

Определение 15.3 (устойчивость)

Численный метод называется устойчивым, если $\exists m_0$: $\|A_m^{-1}\| \leq C \quad \forall m > m_0$, C не зависит от m.

Основная теорема

Основная теорема

Теорема 15.1 Лакса-Рябенького

Если численный метод *аппроксимирует* дифференциальную задачу с порядком p и является *устойчивым*, то численное решение *сходится* к точному решению с порядком p.

Основная теорема

Теорема 15.1 Лакса-Рябенького

Если численный метод *аппроксимирует* дифференциальную задачу с порядком p и является *устойчивым*, то численное решение *сходится* к точному решению с порядком p.

- Аппроксимация + Устойчивость $\Rightarrow$ Сходимость

Основная теорема

Теорема 15.1 Лакса-Рябенького

Если численный метод *аппроксимирует* дифференциальную задачу с порядком p и является *устойчивым*, то численное решение *сходится* к точному решению с порядком p.

- Аппроксимация $+$ Устойчивость $\Rightarrow$ Сходимость
- **Аппроксимацию и устойчивость можно проверить, не зная точное решение**

Пример исследования устойчивости

Пример исследования устойчивости

- $A = A^T$, $\|A\|_2 = \max_p |\lambda_p|$, $\|A^{-1}\| = (\min |\lambda_p|)^{-1}$

Пример исследования устойчивости

- $A = A^T$, $\|A\|_2 = \max_p |\lambda_p|$, $\|A^{-1}\| = \left(\min |\lambda_p|\right)^{-1}$

$$\lambda_p = \frac{2}{h^2}\left(\cos(p\pi h) - 1\right), \; u_j^p = \sin(p\pi j h), \; j = \overline{1, m}$$

Пример исследования устойчивости

- $A = A^T$, $\|A\|_2 = \max_p |\lambda_p|$, $\|A^{-1}\| = (\min |\lambda_p|)^{-1}$

$$\lambda_p = \frac{2}{h^2}\left(\cos(p\pi h) - 1\right), \; u_j^p = \sin(p\pi jh), \; j = \overline{1, m}$$

$$(Au^p)_j = \frac{1}{h^2}(u_{j-1}^p - 2u_j^p + u_{j+1}^p) =$$

Пример исследования устойчивости

- $A = A^T$, $\|A\|_2 = \max_p |\lambda_p|$, $\|A^{-1}\| = (\min |\lambda_p|)^{-1}$

$$\lambda_p = \frac{2}{h^2}\left(\cos(p\pi h) - 1\right), \; u_j^p = \sin(p\pi jh), \; j = \overline{1, m}$$

$$(Au^p)_j = \frac{1}{h^2}(u_{j-1}^p - 2u_j^p + u_{j+1}^p) =$$

$$= \frac{1}{h^2}(\sin(p\pi(j-1)h) - 2\sin(p\pi jh) + \sin(p\pi(j+1)h)) =$$

Пример исследования устойчивости

- $A = A^T$, $\|A\|_2 = \max_p |\lambda_p|$, $\|A^{-1}\| = (\min |\lambda_p|)^{-1}$

$$\lambda_p = \frac{2}{h^2}\left(\cos(p\pi h) - 1\right),\ u_j^p = \sin(p\pi jh),\ j = \overline{1, m}$$

$$(Au^p)_j = \frac{1}{h^2}(u_{j-1}^p - 2u_j^p + u_{j+1}^p) =$$

$$= \frac{1}{h^2}(\sin(p\pi(j-1)h) - 2\sin(p\pi jh) + \sin(p\pi(j+1)h)) =$$

$$//\sin(a \pm b) = \sin a \cos b \pm \cos a \sin b//$$

Пример исследования устойчивости

- $A = A^T$, $\|A\|_2 = \max_p |\lambda_p|$, $\|A^{-1}\| = (\min |\lambda_p|)^{-1}$

$$\lambda_p = \frac{2}{h^2}\left(\cos(p\pi h) - 1\right), \; u_j^p = \sin(p\pi jh), \; j = \overline{1, m}$$

$$(Au^p)_j = \frac{1}{h^2}(u_{j-1}^p - 2u_j^p + u_{j+1}^p) =$$

$$= \frac{1}{h^2}(\sin(p\pi(j-1)h) - 2\sin(p\pi jh) + \sin(p\pi(j+1)h)) =$$

$$// \sin(a \pm b) = \sin a \cos b \pm \cos a \sin b //$$

$$= \frac{1}{h^2}(2\sin(p\pi jh)\cos(p\pi h) - 2\sin(p\pi jh)) = \lambda_p u_j^p$$

Пример исследования устойчивости

- $A = A^T$, $\|A\|_2 = \max_p |\lambda_p|$, $\|A^{-1}\| = (\min |\lambda_p|)^{-1}$

$$\lambda_p = \frac{2}{h^2}\left(\cos(p\pi h) - 1\right), \; u_j^p = \sin(p\pi jh), \; j = \overline{1, m}$$

$$(Au^p)_j = \frac{1}{h^2}(u_{j-1}^p - 2u_j^p + u_{j+1}^p) =$$

$$= \frac{1}{h^2}(\sin(p\pi(j-1)h) - 2\sin(p\pi jh) + \sin(p\pi(j+1)h)) =$$

$$// \sin(a \pm b) = \sin a \cos b \pm \cos a \sin b //$$

$$= \frac{1}{h^2}(2\sin(p\pi jh)\cos(p\pi h) - 2\sin(p\pi jh)) = \lambda_p u_j^p$$

$$\lambda_1 = \tfrac{2}{h^2}(\cos(\pi h) - 1) = \tfrac{2}{h^2}(-\tfrac{1}{2}\pi^2 h^2 + O(h^4)) = -\pi^2 + O(h^2)$$

Постановка граничных условий

Постановка граничных условий

- Г.у. 2-го рода: $u'(0) = s, \; u(1) = b$

Постановка граничных условий

- Г.у. 2-го рода: $u'(0) = s, \; u(1) = b$
- $\dfrac{U_1 - U_0}{h} = s$ – снизит порядок до 1-го

Постановка граничных условий

- Г.у. 2-го рода: $u'(0) = s,\ u(1) = b$
- $\dfrac{U_1 - U_0}{h} = s$ – снизит порядок до 1-го
- Использование главного члена ошибки:

$$\frac{u_1 - u_0}{h} = u'(x_0) + \underline{\frac{h}{2}u''(x_0)} + O(h^2),\ u''(x_0) = f(x_0) \Rightarrow$$

Постановка граничных условий

- Г.у. 2-го рода: $u'(0) = s,\ u(1) = b$
- $\dfrac{U_1 - U_0}{h} = s$ – снизит порядок до 1-го
- Использование главного члена ошибки:

$$\frac{u_1 - u_0}{h} = u'(x_0) + \underline{\frac{h}{2}u''(x_0)} + O(h^2),\ u''(x_0) = f(x_0) \Rightarrow$$

$$\frac{U_1 - U_0}{h} = s + \frac{h}{2}f(x_0) \text{ – 2-й порядок}$$

Постановка граничных условий

- Г.у. 2-го рода: $u'(0) = s,\ u(1) = b$
- $\dfrac{U_1 - U_0}{h} = s$ – снизит порядок до 1-го
- Использование главного члена ошибки:

$$\frac{u_1 - u_0}{h} = u'(x_0) + \underline{\frac{h}{2}u''(x_0)} + O(h^2),\ u''(x_0) = f(x_0) \Rightarrow$$

$$\frac{U_1 - U_0}{h} = s + \frac{h}{2}f(x_0) \text{ – 2-й порядок}$$

- $\dfrac{3U_0 - 4U_1 + U_2}{2h} = s$

Постановка г.у., вид системы

$$\frac{1}{h^2}\begin{bmatrix} -h & h & 0 & & & \\ & 1 & -2 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & -2 & 1 \\ & & & & 0 & h^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} U_0 \\ U_1 \\ \vdots \\ U_m \\ U_{m+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s + \frac{f(x_0)}{2}h \\ f(x_1) \\ \vdots \\ f(x_m) \\ b \end{bmatrix}$$

Пример расчета

Нелинейные задачи

Нелинейные задачи

- $u_{xx}(x) = f(x, u(x)),\ u(0) = a,\ u(1) = b$

Нелинейные задачи

- $u_{xx}(x) = f(x, u(x)),\ u(0) = a,\ u(1) = b$
- После КР аппроксимации получается система *нелинейных* уравнений:

$$G(U) = 0,\ G : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$$

Нелинейные задачи

- $u_{xx}(x) = f(x, u(x)),\ u(0) = a,\ u(1) = b$
- После КР аппроксимации получается система *нелинейных* уравнений:

$$G(U) = 0,\ G : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$$

- Метод Ньютона:

$$U^{k+1} = U^k - [J(U^k)]^{-1} G(U^k),\ J_{ij}(U) = \frac{\partial}{\partial U_j} G_i(U)$$

Нелинейные задачи

- $u_{xx}(x) = f(x, u(x)),\ u(0) = a,\ u(1) = b$
- После КР аппроксимации получается система *нелинейных* уравнений:

$$G(U) = 0,\ G : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$$

- Метод Ньютона:

$$U^{k+1} = U^k - [J(U^k)]^{-1} G(U^k),\ J_{ij}(U) = \frac{\partial}{\partial U_j} G_i(U)$$

$$J = \frac{1}{h^2} \begin{bmatrix} (-2 - h^2 f_u(x_1, U_1)) & 1 & & \\ 1 & (-2 - h^2 f_u(x_2, U_2)) & 1 & \\ \ddots & \ddots & \ddots & \end{bmatrix}$$

Линеаризация исходной задачи

Линеаризация исходной задачи

- $u_{xx}(x) = f(x, u(x)),\ u(0) = a,\ u(1) = b$

Линеаризация исходной задачи

- $u_{xx}(x) = f(x, u(x)),\ u(0) = a,\ u(1) = b$
- Начальное приближение:

$$y^0(x) \approx u(x),\ y^0(0) = a, y^0(1) = b$$

Линеаризация исходной задачи

- $u_{xx}(x) = f(x, u(x)),\ u(0) = a,\ u(1) = b$
- Начальное приближение:

$$y^0(x) \approx u(x),\ y^0(0) = a, y^0(1) = b$$

- $u \approx y^k + \delta^k$:

$$y^k_{xx} + \delta^k_{xx} = f(x, y^k(x)) + f_u(x, y^k(x))\delta^k + \cancel{O\left((\delta^k)^2\right)}$$

Линеаризация исходной задачи

- $u_{xx}(x) = f(x, u(x)),\ u(0) = a,\ u(1) = b$
- Начальное приближение:

$$y^0(x) \approx u(x),\ y^0(0) = a, y^0(1) = b$$

- $u \approx y^k + \delta^k$:

$$y^k_{xx} + \delta^k_{xx} = f(x, y^k(x)) + f_u(x, y^k(x))\delta^k + \cancel{O\left((\delta^k)^2\right)}$$

- Получаем *линейную* задачу с нулевыми г.у. для δ^k:

$$\delta^k_{xx} = f_u(x, y^k)\delta^k + f(x, y^k) - y^k_{xx}$$

Устойчивость в нелинейном случае

Устойчивость в нелинейном случае

$$\left\{ \begin{array}{l} G(U) = 0 \\ G(\hat{U}) = r \end{array} \right. , \Rightarrow G(U) - G(\hat{U}) = -r$$

Устойчивость в нелинейном случае

$$\begin{cases} G(U) = 0 \\ G(\hat{U}) = r \end{cases}, \Rightarrow G(U) - G(\hat{U}) = -r$$

Определение 15.4 (устойчивость в нелинейном случае)

Метод называется устойчивым, если $\forall h < h_0$:

$$\|U - V\| \leq C\|r_1 - r_2\| \text{ при } G(U) = r_1, G(V) = r_2$$

Устойчивость в нелинейном случае

$$\begin{cases} G(U) = 0 \\ G(\hat{U}) = r \end{cases}, \Rightarrow G(U) - G(\hat{U}) = -r$$

Определение 15.4 (устойчивость в нелинейном случае)

Метод называется устойчивым, если $\forall h < h_0$:

$$\|U - V\| \leq C\|r_1 - r_2\| \text{ при } G(U) = r_1, G(V) = r_2$$

- $G(U) = G(\hat{U}) + J(\hat{U})E + O(\|E\|^2)$

Устойчивость в нелинейном случае

$$\begin{cases} G(U) = 0 \\ G(\hat{U}) = r \end{cases}, \Rightarrow G(U) - G(\hat{U}) = -r$$

Определение 15.4 (устойчивость в нелинейном случае)

Метод называется устойчивым, если $\forall h < h_0$:

$$\|U - V\| \leq C\|r_1 - r_2\| \text{ при } G(U) = r_1, G(V) = r_2$$

- $G(U) = G(\hat{U}) + J(\hat{U})E + O(\|E\|^2)$
- $J(\hat{U})E = -r + O(\|E\|)^2$

Устойчивость в нелинейном случае

$$\begin{cases} G(U) = 0 \\ G(\hat{U}) = r \end{cases}, \Rightarrow G(U) - G(\hat{U}) = -r$$

Определение 15.4 (устойчивость в нелинейном случае)

Метод называется устойчивым, если $\forall h < h_0$:

$$\|U - V\| \leq C\|r_1 - r_2\| \text{ при } G(U) = r_1, G(V) = r_2$$

- $G(U) = G(\hat{U}) + J(\hat{U})E + O(\|E\|^2)$
- $J(\hat{U})E = -r + O(\|E\|)^2$
- Аналогичное определение :$\|(\hat{J}^h)^{-1}\| \leq C, \ \forall h < h_0$

Заключение

Заключение

- Основные понятия
  - Сходимость
  - Аппроксимация
  - Устойчивость

Заключение

- Основные понятия
  - Сходимость
  - Аппроксимация
  - Устойчивость

Заключение

- Основные понятия
  - Сходимость
  - Аппроксимация
  - Устойчивость
- Пример КР метода

Заключение

- Основные понятия
  - Сходимость
  - Аппроксимация
  - Устойчивость
- Пример КР метода
- Постановка г.у. для краевой задачи

Заключение

- Основные понятия
  - Сходимость
  - Аппроксимация
  - Устойчивость
- Пример КР метода
- Постановка г.у. для краевой задачи
- Подходы к решению нелинейных уравнений