Вычислительная математика. Приближение функций. Полиномиальная интерполяция.

МФТИ

Приближение функций

Приближение функций

Основная задача

Для функции f из класса F найти наилучшее *в некотором смысле* приближение $\phi \approx f$ из класса Φ «простых» функций.

Приближение функций

Основная задача

Для функции f из класса F найти наилучшее *в некотором смысле* приближение $\phi \approx f$ из класса Φ «простых» функций.

- построение эффективного алгоритма вычисления приближения

Приближение функций

Основная задача

Для функции f из класса F найти наилучшее *в некотором смысле* приближение $\phi \approx f$ из класса Φ «простых» функций.

- построение эффективного алгоритма вычисления приближения
- доказательство различных оценок ошибки в зависимости от свойств класса F (гладкость, величина производных и т.п.)

Приближение функций

Основная задача

Для функции f из класса F найти наилучшее *в некотором смысле* приближение $\phi \approx f$ из класса Φ «простых» функций.

- построение эффективного алгоритма вычисления приближения
- доказательство различных оценок ошибки в зависимости от свойств класса F (гладкость, величина производных и т.п.)
- Знакомые примеры:
  - Формула Тейлора
  - Ряды Фурье (в узком смысле, разложение по $\sin x, \cos x$)

Важная идея

Идея

Приблизим исследуемую функцию «простой» функцией, а для простой функции решим задачу точно.

Важная идея

Идея

Приблизим исследуемую функцию «простой» функцией, а для простой функции решим задачу точно.

Примеры:

- Численное дифференцирование

Важная идея

Идея

Приблизим исследуемую функцию «простой» функцией, а для простой функции решим задачу точно.

- Численное дифференцирование
- Численное интегрирование

Важная идея

Идея

Приблизим исследуемую функцию «простой» функцией, а для простой функции решим задачу точно.

- Численное дифференцирование
- Численное интегрирование
- Методы оптимизации

Важная идея

Идея

Приблизим исследуемую функцию «простой» функцией, а для простой функции решим задачу точно.

- Численное дифференцирование
- Численное интегрирование
- Методы оптимизации
- Численное решение дифференциальных уравнений

Общие подходы теории приближений

Общие подходы теории приближений

- F, Φ – часто векторные нормированные пространства

Общие подходы теории приближений

- F, Φ – часто векторные нормированные пространства

Два общих подхода:

Общие подходы теории приближений

- F, Φ – часто векторные нормированные пространства

Два общих подхода:

1. **Минимизационный подход**:
   Выбирается норма $\|\cdot\|$ на F и ищется функция
   $\phi \in \Phi \subset F$, минимизирующая $\|f - \phi\|$

Общие подходы теории приближений

- F, Φ – часто векторные нормированные пространства

Два общих подхода:

1. **Минимизационный подход**:
   Выбирается норма $\|\cdot\|$ на F и ищется функция $\phi \in \Phi \subset F$, минимизирующая $\|f - \phi\|$
2. **Интерполяционный подход**:
   Выбираются точки (узлы) $x_0, \ldots, x_n$ и ищется функция $\phi \in \Phi$, удовлетворяющая *интерполяционным условиям*:

$$\phi(x_i) = f(x_i),\ i = 0, 1, \ldots, n$$

Интерполяция обобщенным многочленом

Интерполяция обобщенным многочленом

- Рассмотрим базис в линейном подпространстве $\Phi_n \subset \Phi$: $\phi_0, \ldots, \phi_n$:

$$\phi = \sum_{k=0}^{n} c_k \phi_k$$

Интерполяция обобщенным многочленом

- Рассмотрим базис в линейном подпространстве $\Phi_n \subset \Phi$: $\phi_0, \ldots, \phi_n$:

$$\phi = \sum_{k=0}^{n} c_k \phi_k$$

- Интерполяционные условия образуют систему:

$$\begin{bmatrix} \phi_0(x_0) & \phi_1(x_0) & \ldots & \phi_n(x_0) \\ \phi_0(x_1) & \phi_1(x_1) & \ldots & \phi_n(x_1) \\ \ldots & \ldots & \ddots & \ldots \\ \phi_0(x_n) & \phi_1(x_n) & \ldots & \phi_n(x_n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(x_0) \\ f(x_1) \\ \vdots \\ f(x_n) \end{bmatrix}$$

Интерполяция обобщенным многочленом

- Рассмотрим базис в линейном подпространстве $\Phi_n \subset \Phi$: $\phi_0, \dots, \phi_n$:

$$\phi = \sum_{k=0}^{n} c_k \phi_k$$

- Интерполяционные условия образуют систему:

$$\begin{bmatrix} \phi_0(x_0) & \phi_1(x_0) & \dots & \phi_n(x_0) \\ \phi_0(x_1) & \phi_1(x_1) & \dots & \phi_n(x_1) \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ \phi_0(x_n) & \phi_1(x_n) & \dots & \phi_n(x_n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(x_0) \\ f(x_1) \\ \vdots \\ f(x_n) \end{bmatrix}$$

- Если матрица невырожденная, то ϕ существует и единственен

Интерполяция алгебраическими многочленами

- Φ_n - пространство многочленов степени $\leq n$. Базис: $1, x^1, x^2, \ldots, x^n$:

Интерполяция алгебраическими многочленами

- Φ_n - пространство многочленов степени $\leq n$. Базис: $1, x^1, x^2, \ldots, x^n$:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \ldots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \ldots & x_1^n \\ \ldots & \ldots & \ddots & \ldots & \\ 1 & x_n & x_n^2 & \ldots & x_n^n \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(x_0) \\ f(x_1) \\ \vdots \\ f(x_n) \end{bmatrix}$$

Интерполяция алгебраическими многочленами

- Φ_n - пространство многочленов степени $\leq n$. Базис: $1, x^1, x^2, \dots, x^n$:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ \dots & \dots & \ddots & \dots & \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(x_0) \\ f(x_1) \\ \vdots \\ f(x_n) \end{bmatrix}$$

- A – матрица Вандермонда: $det(A) = \prod\limits_{0 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i)$

Интерполяция алгебраическими многочленами

- Φ_n - пространство многочленов степени $\leq n$. Базис: $1, x^1, x^2, \dots, x^n$:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ \dots & \dots & \ddots & \dots & \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(x_0) \\ f(x_1) \\ \vdots \\ f(x_n) \end{bmatrix}$$

- A – матрица Вандермонда: $det(A) = \prod\limits_{0 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i)$
- Если все узлы различны, то интерполяционный многочлен существует и единственен.

Обусловленность матрицы Вандермонда

Интерполяционный многочлен в форме Лагранжа

Интерполяционный многочлен в форме Лагранжа

Достаточно иметь способ вычисления значения многочлена в любой точке.

Интерполяционный многочлен в форме Лагранжа

Достаточно иметь способ вычисления значения многочлена в любой точке.

- возьмем многочлены степени n $l_0(x), \ldots, l_n(x)$:

$$l_j(x_i) = \begin{cases} 1, \; i = j \\ 0, \; i \neq j \end{cases}$$

Интерполяционный многочлен в форме Лагранжа

Достаточно иметь способ вычисления значения многочлена в любой точке.

- возьмем многочлены степени n $l_0(x), \ldots, l_n(x)$:

$$l_j(x_i) = \begin{cases} 1, \; i = j \\ 0, \; i \neq j \end{cases} \quad \text{Тогда } L_n(x) = \sum_{j=0}^{n} f(x_j) l_j(x)$$

Интерполяционный многочлен в форме Лагранжа

Достаточно иметь способ вычисления значения многочлена в любой точке.

- возьмем многочлены степени n $l_0(x), \ldots, l_n(x)$:

$$l_j(x_i) = \begin{cases} 1, \; i = j \\ 0, \; i \neq j \end{cases} \quad \text{Тогда } L_n(x) = \sum_{j=0}^{n} f(x_j) l_j(x)$$

- l_j – *элементарные многочлены Лагранжа*

$$l_j(x) = \prod_{k=0,\, k \neq j}^{n} \frac{x - x_k}{x_j - x_k}$$

Интерполяционный многочлен в форме Лагранжа

Достаточно иметь способ вычисления значения многочлена в любой точке.

- возьмем многочлены степени n $l_0(x), \dots, l_n(x)$:

$$l_j(x_i) = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \quad \text{Тогда } L_n(x) = \sum_{j=0}^{n} f(x_j) l_j(x)$$

- l_j – *элементарные многочлены Лагранжа*

$$l_j(x) = \prod_{k=0,\, k\neq j}^{n} \frac{x - x_k}{x_j - x_k} \underset{x \neq x_j}{=} \frac{\prod_{k=0}^{n}(x - x_k)}{(x - x_j) \prod\limits_{k=0, k\neq j} (x_j - x_k)}$$

Графики многочленов Лагранжа

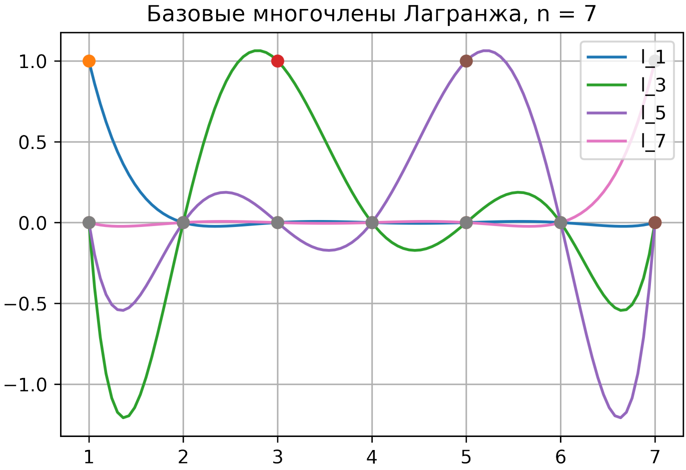

Рис. 1: Многочлены Лагранжа

Погрешность интерполяции

Погрешность интерполяции

Теорема 11.1 (погрешность интерполяции)

Пусть $x_0, \ldots, x_n \in [a, b]$ и $f \in C^{n+1}[a, b]$. Тогда

$$f(x) - L_n(x) = \frac{f^{(n+1)}\left(\xi(x)\right)}{(n+1)!}\omega(x),\ \omega(x) = \prod_{k=0}^{n}(x - x_k)$$

где $\xi(x) \in \big[\min\{x, x_0, \ldots, x_n\}, \max\{x, x_0, \ldots, x_n\}\big]$

Погрешность интерполяции (доказательство)

Погрешность интерполяции (доказательство)

- $x \neq x_k$, $\omega(x) \neq 0$. Рассмотрим:

$$g(t) \equiv f(t) - L_n(t) - c\omega(t), \quad c \equiv \frac{f(x) - L_n(x)}{\omega(x)}$$

Погрешность интерполяции (доказательство)

- $x \neq x_k$, $\omega(x) \neq 0$. Рассмотрим:

$$g(t) \equiv f(t) - L_n(t) - c\omega(t), \quad c \equiv \frac{f(x) - L_n(x)}{\omega(x)}$$

- $g(t)$ обращается в нуль при $t = x, x_0, \ldots, x_n$

Погрешность интерполяции (доказательство)

- $x \neq x_k$, $\omega(x) \neq 0$. Рассмотрим:

$$g(t) \equiv f(t) - L_n(t) - c\omega(t), \quad c \equiv \frac{f(x) - L_n(x)}{\omega(x)}$$

- $g(t)$ обращается в нуль при $t = x, x_0, \ldots, x_n$
- По теореме Ролля $g^{(1)}$ имеет хотя бы $n+1$ нуль

Погрешность интерполяции (доказательство)

- $x \neq x_k$, $\omega(x) \neq 0$. Рассмотрим:

$$g(t) \equiv f(t) - L_n(t) - c\omega(t), \quad c \equiv \frac{f(x) - L_n(x)}{\omega(x)}$$

- $g(t)$ обращается в нуль при $t = x, x_0, \ldots, x_n$
- По теореме Ролля $g^{(1)}$ имеет хотя бы $n+1$ нуль
- $\ldots$ g^{n+1} имеет хотя бы один ноль: $\exists \xi : g^{(n+1)}(\xi) = 0$

$$g^{(n+1)}(t) = f^{(n+1)}(t) - c(n+1)! \Rightarrow$$

$$f^{(n+1)}(\xi(x)) - \frac{f(x) - L_n(x)}{\omega(x)}(n+1)! = 0 \quad \square$$

Разделенные разности

Разделенные разности

- Значения $f(x_k)$ в узлах будем называть *разделенными разностями порядка 0*

Разделенные разности

- Значения $f(x_k)$ в узлах будем называть *разделенными разностями порядка 0*
- Для любой пары узлов x_l, x_m введем *разделенные разности порядка 1*:

$$f(x_l; x_m) = \frac{f(x_l) - f(x_m)}{x_l - x_m}$$

Разделенные разности

- Значения $f(x_k)$ в узлах будем называть *разделенными разностями порядка 0*
- Для любой пары узлов x_l, x_m введем *разделенные разности порядка 1*:

$$f(x_l; x_m) = \frac{f(x_l) - f(x_m)}{x_l - x_m}$$

- Реккурентно: разделенная разность порядка k:

$$f(x_0; \ldots; x_k) = \frac{f(x_1; \ldots; x_k) - f(x_0; \ldots; x_{k-1})}{x_k - x_0}$$

Разделенные разности (2)

Теорема 11.2

$$f(x_0;\dots;x_k) = \sum_{j=0}^{k} \frac{f(x_j)}{\prod\limits_{\substack{l=0\\ l\neq j}}^{k} (x_j - x_l)}$$

Разделенные разности (2)

Теорема 11.2

$$f(x_0;\ldots;x_k) = \sum_{j=0}^{k} \frac{f(x_j)}{\prod\limits_{\substack{l=0\\ l\neq j}}^{k}(x_j - x_l)}$$

$$f(x_0;\ldots;x_k) = \frac{f(x_1;\ldots;x_k) - f(x_0;\ldots;x_{k-1})}{x_k - x_0} =$$

Разделенные разности (2)

Теорема 11.2

$$f(x_0; \ldots ; x_k) = \sum_{j=0}^{k} \frac{f(x_j)}{\prod\limits_{\substack{l=0 \\ l \neq j}}^{k} (x_j - x_l)}$$

$$f(x_0; \ldots ; x_k) = \frac{f(x_1; \ldots ; x_k) - f(x_0; \ldots ; x_{k-1})}{x_k - x_0} =$$

$$\sum_{j=1}^{k} \frac{f(x_j)}{\prod\limits_{l=1, l \neq j}^{k} (x_j - x_l)(x_k - x_0)} - \sum_{j=0}^{k-1} \frac{f(x_j)}{\prod\limits_{l=0, l \neq j}^{k-1} (x_j - x_l)(x_k - x_0)} =$$

Разделенные разности (3)

$$\sum_{j=1}^{k} \frac{f(x_j)}{\prod\limits_{l=1, l\neq j}^{k} (x_j - x_l)(x_k - x_0)} - \sum_{j=0}^{k-1} \frac{f(x_j)}{\prod\limits_{l=0, l\neq j}^{k-1} (x_j - x_l)(x_k - x_0)} =$$

Разделенные разности (3)

$$\sum_{j=1}^{k} \frac{f(x_j)}{\prod\limits_{l=1, l\neq j}^{k} (x_j - x_l)(x_k - x_0)} - \sum_{j=0}^{k-1} \frac{f(x_j)}{\prod\limits_{l=0, l\neq j}^{k-1} (x_j - x_l)(x_k - x_0)} =$$

$$f(x_0) / \prod_{l=0, l\neq 0}^{k} (x_0 - x_l) + f(x_k) / \prod_{l=0, l\neq k}^{k} (x_k - x_l) \quad +$$

Разделенные разности (3)

$$\sum_{j=1}^{k} \frac{f(x_j)}{\prod\limits_{l=1, l\neq j}^{k} (x_j - x_l)(x_k - x_0)} - \sum_{j=0}^{k-1} \frac{f(x_j)}{\prod\limits_{l=0, l\neq j}^{k-1} (x_j - x_l)(x_k - x_0)} =$$

$$f(x_0) / \prod_{l=0, l\neq 0}^{k} (x_0 - x_l) + f(x_k) / \prod_{l=0, l\neq k}^{k} (x_k - x_l) \quad +$$

$$\sum_{j=1}^{k-1} \frac{f(x_j)}{\prod_{l=1, l\neq j}^{k-1} (x_j - x_l)(x_k - x_0)} \left\{ \frac{1}{x_j - x_k} - \frac{1}{x_j - x_0} \right\} =$$

Разделенные разности (3)

$$\sum_{j=1}^{k} \frac{f(x_j)}{\prod\limits_{l=1, l\neq j}^{k} (x_j - x_l)(x_k - x_0)} - \sum_{j=0}^{k-1} \frac{f(x_j)}{\prod\limits_{l=0, l\neq j}^{k-1} (x_j - x_l)(x_k - x_0)} =$$

$$f(x_0) / \prod_{l=0, l\neq 0}^{k} (x_0 - x_l) + f(x_k) / \prod_{l=0, l\neq k}^{k} (x_k - x_l) \quad +$$

$$\sum_{j=1}^{k-1} \frac{f(x_j)}{\prod_{l=1, l\neq j}^{k-1} (x_j - x_l)(x_k - x_0)} \left\{ \frac{1}{x_j - x_k} - \frac{1}{x_j - x_0} \right\} =$$

$$= \frac{f(x_0)}{\prod\limits_{l=0, l\neq 0}^{k} (x_0 - x_l)} + \frac{f(x_k)}{\prod\limits_{l=0, l\neq k}^{k} (x_k - x_l)} + \sum_{j=1}^{k-1} \frac{f(x_j)}{\prod\limits_{l=0, l\neq j}^{k} (x_j - x_l)} \qquad \square$$

Следствия леммы

$$f(x_0; \ldots; x_k) = \sum_{j=0}^{k} \frac{f(x_j)}{\prod_{\substack{l=0 \\ l \neq j}}^{k} (x_j - x_l)}$$

Следствия леммы

$$f(x_0; \ldots; x_k) = \sum_{j=0}^{k} \frac{f(x_j)}{\prod_{\substack{l=0 \\ l \neq j}}^{k} (x_j - x_l)}$$

- Значение не зависит от порядка узлов

Следствия леммы

$$f(x_0; \ldots; x_k) = \sum_{j=0}^{k} \frac{f(x_j)}{\prod_{\substack{l=0 \\ l \neq j}}^{k} (x_j - x_l)}$$

- Значение не зависит от порядка узлов
- $f(x) - L_n(x) = f(x; x_0; \ldots; x_n)\omega(x)$

Следствия леммы

$$f(x_0;\dots;x_k) = \sum_{j=0}^{k} \frac{f(x_j)}{\prod_{\substack{l=0\\ l\neq j}}^{k}(x_j - x_l)}$$

- Значение не зависит от порядка узлов
- $f(x) - L_n(x) = f(x;x_0;\dots;x_n)\omega(x)$

$$f(x) - L_n(x) = \omega(x)\left(\frac{f(x)}{\omega(x)} + \sum_{j=0}^{n} \frac{f(x_j)}{(x_j - x)\prod\limits_{k=0,k\neq j}^{n}(x_j - x_k)}\right) \quad \square$$

Следствия леммы

$$f(x_0;\ldots;x_k)=\sum_{j=0}^{k}\frac{f(x_j)}{\prod_{\substack{l=0\\l\neq j}}^{k}(x_j-x_l)}$$

- Значение не зависит от порядка узлов
- $f(x)-L_n(x)=f(x;x_0;\ldots;x_n)\omega(x)$

$$f(x)-L_n(x)=\omega(x)\left(\frac{f(x)}{\omega(x)}+\sum_{j=0}^{n}\frac{f(x_j)}{(x_j-x)\prod\limits_{k=0,k\neq j}^{n}(x_j-x_k)}\right)\qquad\square$$

- $f(x)-L_n(x)=\frac{f^{n+1}(\xi)}{(n+1)!}\omega(x)\Rightarrow f(x_0;\ldots;x_k)=\frac{f^{(k)}(\xi)}{k!}$

Форма Ньютона

Теорема 11.3 (многочлен в форме Ньютона)

$$\begin{aligned} L_n(x) = f(x_0) &+ f(x_0; x_1)(x - x_0) \\ &+ f(x_0; x_1; x_2)(x - x_0)(x - x_1) + \ldots \\ &+ f(x_0; x_1; \ldots; x_n)(x - x_0) \cdots (x - x_{n-1}) \end{aligned}$$

Форма Ньютона

Теорема 11.3 (многочлен в форме Ньютона)

$$\begin{aligned}L_n(x) = f(x_0) &+ f(x_0;x_1)(x-x_0)\\ &+ f(x_0;x_1;x_2)(x-x_0)(x-x_1)+\ldots\\ &+ f(x_0;x_1;\ldots;x_n)(x-x_0)\cdots(x-x_{n-1})\end{aligned}$$

- $L_n = L_0 + (L_1 - L_0) + (L_2 - L_1) + \ldots + (L_n - L_{n-1})$

Форма Ньютона

Теорема 11.3 (многочлен в форме Ньютона)

$$\begin{aligned} L_n(x) = f(x_0) &+ f(x_0;x_1)(x-x_0) \\ &+ f(x_0;x_1;x_2)(x-x_0)(x-x_1) + \ldots \\ &+ f(x_0;x_1;\ldots;x_n)(x-x_0)\cdots(x-x_{n-1}) \end{aligned}$$

- $L_n = L_0 + (L_1 - L_0) + (L_2 - L_1) + \ldots + (L_n - L_{n-1})$
- L_{k-1} интерполирует L_k в узлах $x_0, \ldots, x_{k-1}$

$$L_k(x) - L_{k-1}(x) = L_k(x;x_0;\ldots;x_{k-1})(x-x_0)\ldots(x-x_{k-1})$$

Форма Ньютона

Теорема 11.3 (многочлен в форме Ньютона)

$$
\begin{aligned}
L_n(x) = f(x_0) &+ f(x_0;x_1)(x-x_0)\\
&+ f(x_0;x_1;x_2)(x-x_0)(x-x_1)+\ldots\\
&+ f(x_0;x_1;\ldots;x_n)(x-x_0)\cdots(x-x_{n-1})
\end{aligned}
$$

- $L_n = L_0 + (L_1 - L_0) + (L_2 - L_1) + \ldots + (L_n - L_{n-1})$
- L_{k-1} интерполирует L_k в узлах $x_0, \ldots, x_{k-1}$

$$L_k(x) - L_{k-1}(x) = L_k(x;x_0;\ldots;x_{k-1})(x-x_0)\ldots(x-x_{k-1})$$

- $L_k(x;x_0;\ldots;x_{k-1}) = L_k^{(k)}(\xi)/k! = a_k,\ L_k = a_k x^k + \ldots$

Форма Ньютона

Теорема 11.3 (многочлен в форме Ньютона)

$$
\begin{aligned}
L_n(x) = f(x_0) &+ f(x_0;x_1)(x-x_0)\\
&+ f(x_0;x_1;x_2)(x-x_0)(x-x_1) + \ldots\\
&+ f(x_0;x_1;\ldots;x_n)(x-x_0)\cdots(x-x_{n-1})
\end{aligned}
$$

- $L_n = L_0 + (L_1 - L_0) + (L_2 - L_1) + \ldots + (L_n - L_{n-1})$
- L_{k-1} интерполирует L_k в узлах $x_0, \ldots, x_{k-1}$

$$L_k(x) - L_{k-1}(x) = L_k(x;x_0;\ldots;x_{k-1})(x-x_0)\ldots(x-x_{k-1})$$

- $L_k(x;x_0;\ldots;x_{k-1}) = L_k^{(k)}(\xi)/k! = a_k,\ L_k = a_k x^k + \ldots$
- Возьмем $x = x_k$: $L_k(x_k;x_0;\ldots;x_{k-1}) = f(x_0;\ldots;x_k)$ $\square$

Таблица разделенных разностей

Для вычисления значений многочлена в форме Ньютона удобно использовать таблицу:

$$
\begin{array}{ccccccc}
f(x_0) & & & & & & \\
 & \ddots & & & & & \\
f(x_1) & \ldots & f(x_0;x_1) & & & & \\
 & \ddots & & \ddots & & & \\
f(x_2) & \ldots & f(x_1;x_2) & \ldots & f(x_0;x_1;x_2) & & \\
 & \ddots & & \ddots & & \ddots & \\
f(x_3) & \ldots & f(x_2;x_3) & \ldots & f(x_1;x_2;x_3) & \ldots & f(x_0;x_1;x_2;x_3)
\end{array}
$$

Связь разных форм с базисом

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \phi_0(x_0) & \phi_1(x_0) & \dots & \phi_n(x_0) \\ \phi_0(x_1) & \phi_1(x_1) & \dots & \phi_n(x_1) \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ \phi_0(x_n) & \phi_1(x_n) & \dots & \phi_n(x_n) \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(x_0) \\ f(x_1) \\ \vdots \\ f(x_n) \end{bmatrix}$$

Связь разных форм с базисом

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \phi_0(x_0) & \phi_1(x_0) & \dots & \phi_n(x_0) \\ \phi_0(x_1) & \phi_1(x_1) & \dots & \phi_n(x_1) \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ \phi_0(x_n) & \phi_1(x_n) & \dots & \phi_n(x_n) \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(x_0) \\ f(x_1) \\ \vdots \\ f(x_n) \end{bmatrix}$$

- $\phi_k(x) = x^k$: A - матрица Вандермонда

Связь разных форм с базисом

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \phi_0(x_0) & \phi_1(x_0) & \dots & \phi_n(x_0) \\ \phi_0(x_1) & \phi_1(x_1) & \dots & \phi_n(x_1) \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ \phi_0(x_n) & \phi_1(x_n) & \dots & \phi_n(x_n) \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(x_0) \\ f(x_1) \\ \vdots \\ f(x_n) \end{bmatrix}$$

- $\phi_k(x) = x^k$: A - матрица Вандермонда
- $\phi_k(x) = l_k(x)$: $A = I$

Связь разных форм с базисом

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \phi_0(x_0) & \phi_1(x_0) & \dots & \phi_n(x_0) \\ \phi_0(x_1) & \phi_1(x_1) & \dots & \phi_n(x_1) \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ \phi_0(x_n) & \phi_1(x_n) & \dots & \phi_n(x_n) \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(x_0) \\ f(x_1) \\ \vdots \\ f(x_n) \end{bmatrix}$$

- $\phi_k(x) = x^k$: A - матрица Вандермонда
- $\phi_k(x) = l_k(x)$: $A = I$
- $1, (x - x_0), (x - x_0)(x - x_1), \dots$: A - нижнетреугольная

Выбор узлов интерполяции

Выбор узлов интерполяции

- Оценка ошибки:

$$\left|f(x) - L_n(x)\right| = \left|\frac{f^{(n+1)}\left(\xi(x)\right)}{(n+1)!}\prod_{k=0}^{n}(x - x_k)\right| \leq$$

Выбор узлов интерполяции

- Оценка ошибки:

$$|f(x) - L_n(x)| = \left| \frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!} \prod_{k=0}^{n} (x - x_k) \right| \leq$$

$$\frac{M_{n+1}}{(n+1)!} \boxed{\max_{[a,b]} \left| \prod_{k=0}^{n} (x - x_k) \right|}$$

Выбор узлов интерполяции

- Оценка ошибки:

$$|f(x) - L_n(x)| = \left| \frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!} \prod_{k=0}^{n} (x - x_k) \right| \leq$$

$$\frac{M_{n+1}}{(n+1)!} \boxed{\max_{[a,b]} \left| \prod_{k=0}^{n} (x - x_k) \right|}$$

- Оптимизационная задача:

$$\min_{\{x_0,\ldots,x_n\} \subset [a,b]} \max_{[a,b]} \left| \prod_{k=0}^{n} (x - x_k) \right|$$

Выбор узлов интерполяции

- Оценка ошибки:

$$|f(x) - L_n(x)| = \left| \frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!} \prod_{k=0}^{n} (x - x_k) \right| \leq$$

$$\frac{M_{n+1}}{(n+1)!} \boxed{\max_{[a,b]} \left| \prod_{k=0}^{n} (x - x_k) \right|}$$

- Оптимизационная задача:

$$\min_{\{x_0,\ldots,x_n\} \subset [a,b]} \max_{[a,b]} \left| \prod_{k=0}^{n} (x - x_k) \right|$$

- Решение: многочлены Чебышёва

Многочлены Чебышёва

Многочлены Чебышёва

- $T_n(t) = \cos(n \arccos t), \; t \in [-1, 1]$

Многочлены Чебышёва

- $T_n(t) = \cos(n \arccos t),\ t \in [-1, 1]$
- $T_0(t) = 1$, $T_1(t) = t$, при $n \geq 1$

$$T_{n+1}(t) = 2tT_n(t) - T_{n-1}(t), n = 1, 2, \ldots$$

Многочлены Чебышёва

- $T_n(t) = \cos(n \arccos t),\ t \in [-1, 1]$
- $T_0(t) = 1$, $T_1(t) = t$, при $n \geq 1$

$$T_{n+1}(t) = 2tT_n(t) - T_{n-1}(t), n = 1, 2, \ldots$$

- $T_n(t)$ — многочлен степени n со старшим коэффициентом 2^{n-1}: $T_2(t) = 2t^2 - 1$, $T_3(t) = 4t^3 - 3t$, $T_4(t) = 8t^4 - 8t^2 + 1$

Многочлены Чебышёва

- $T_n(t) = \cos(n \arccos t),\ t \in [-1, 1]$
- $T_0(t) = 1$, $T_1(t) = t$, при $n \geq 1$

$$T_{n+1}(t) = 2tT_n(t) - T_{n-1}(t), n = 1, 2, \ldots$$

- $T_n(t)$ — многочлен степени n со старшим коэффициентом 2^{n-1}: $T_2(t) = 2t^2 - 1$, $T_3(t) = 4t^3 - 3t$, $T_4(t) = 8t^4 - 8t^2 + 1$
- Корни

$$t_{nj} = \cos\left(\frac{\pi(2j+1)}{2n}\right),\ j = 0, \ldots, n-1$$

Многочлены Чебышёва

- $T_n(t) = \cos(n \arccos t),\ t \in [-1, 1]$
- $T_0(t) = 1$, $T_1(t) = t$, при $n \geq 1$

$$T_{n+1}(t) = 2tT_n(t) - T_{n-1}(t), n = 1, 2, \ldots$$

- $T_n(t)$ — многочлен степени n со старшим коэффициентом 2^{n-1}: $T_2(t) = 2t^2 - 1$, $T_3(t) = 4t^3 - 3t$, $T_4(t) = 8t^4 - 8t^2 + 1$
- Корни

$$t_{nj} = \cos\left(\frac{\pi(2j+1)}{2n}\right),\ j = 0, \ldots, n-1$$

- Экстремумы

$$t_{nj} = \cos\left(\frac{\pi j}{n}\right),\ j = 0, \ldots, n$$

Многочлены Чебышёва

- $T_n(t) = \cos(n \arccos t),\ t \in [-1, 1]$
- $T_0(t) = 1$, $T_1(t) = t$, при $n \geq 1$

$$T_{n+1}(t) = 2tT_n(t) - T_{n-1}(t), n = 1, 2, \ldots$$

- $T_n(t)$ — многочлен степени n со старшим коэффициентом 2^{n-1}: $T_2(t) = 2t^2 - 1$, $T_3(t) = 4t^3 - 3t$, $T_4(t) = 8t^4 - 8t^2 + 1$
- Корни

$$t_{nj} = \cos\left(\frac{\pi(2j+1)}{2n}\right),\ j = 0, \ldots, n-1$$

- Экстремумы

$$t_{nj} = \cos\left(\frac{\pi j}{n}\right),\ j = 0, \ldots, n$$

- **Наименьшее отклонение от нуля**

$$\frac{1}{2^{n-1}} T_n = \arg \min_{p \in \mathcal{P}_n, a_n = 1} \max_{[-1, +1]} \left| p(x) \right|$$

Многочлены Чебышёва

Многочлены Чебышёва

- $T_n(t) = \cos(n \arccos t),\ t \in [-1, 1]$

Многочлены Чебышёва

- $T_n(t) = \cos(n \arccos t), \ t \in [-1, 1]$
- $T_0(t) = 1$, $T_1(t) = t$, при $n \geq 1$

$$T_{n+1}(t) = 2tT_n(t) - T_{n-1}(t), n = 1, 2, \ldots$$

Многочлены Чебышёва

- $T_n(t) = \cos(n \arccos t), \ t \in [-1, 1]$
- $T_0(t) = 1$, $T_1(t) = t$, при $n \geq 1$

$$T_{n+1}(t) = 2tT_n(t) - T_{n-1}(t), n = 1, 2, \ldots$$

- $2tT_n(t) - T_{n-1}(t) =$

$$= 2t\cos(n \arccos t) - \cos((n-1) \arccos t) =$$
$$= 2\cos(n \arccos t)\cos(\arccos t) - \cos(n \arccos t)\cos(\arccos t) -$$
$$- \sin(n \arccos t)\sin(\arccos t) =$$
$$= \cos(n \arccos t)\cos(\arccos t) - \sin(n \arccos t)\sin(\arccos t) =$$
$$= \cos((n+1) \arccos t) = T_{n+1}(t)$$

Многочлены Чебышёва, график

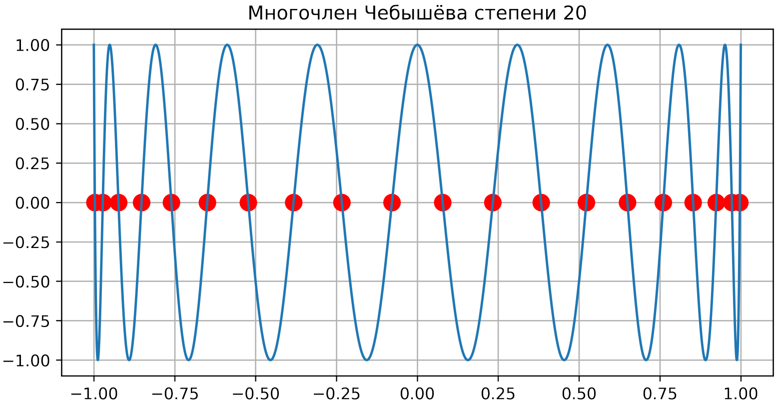

Рис. 2: Многочлен Чебышёва и его корни

Сходимость на разных сетках (демо)

Заключение

Заключение

- Интерполяционный подход

Заключение

- Интерполяционный подход
- Формы Лагранжа, Ньютона

Заключение

- Интерполяционный подход
- Формы Лагранжа, Ньютона
- Остаточный член интерполяции

Заключение

- Интерполяционный подход
- Формы Лагранжа, Ньютона
- Остаточный член интерполяции
- Выбор узлов интерполяции