

Аппроксимация кривых векторными сплайнами с использованием свойств полиномов Чебышева

Илья Лейрих

6 октября 2009 г.

УДК 517.518.8

Предлагается алгоритм аппроксимации растровых кривых векторными кривыми с использованием свойств полиномов Чебышева. Приведенный ниже алгоритм для двумерного случая и кривых третьего порядка легко обобщается для пространства любой размерности, ровно как и для кривых любого порядка. Запишем уравнение кривой 3-ого порядка в векторном виде:

$$\vec{B}(z) = \sum_{i=0}^3 T_i(z) \vec{a}_i, z \in [-1, 1] \quad (1)$$

\vec{a}_i - некоторые коэффициенты, $T_i(z)$ - полиномы Чебышева [1]. Допустим, мы хотим аппроксимировать элемент границы ∂G некоторой области G растрового изображения (Рис. 1), представляющий из себя M подряд идущих пикселей. Предполагается, что координаты данных пикселей нам известны. Задача состоит в нахождении коэффициентов \vec{a}_i .

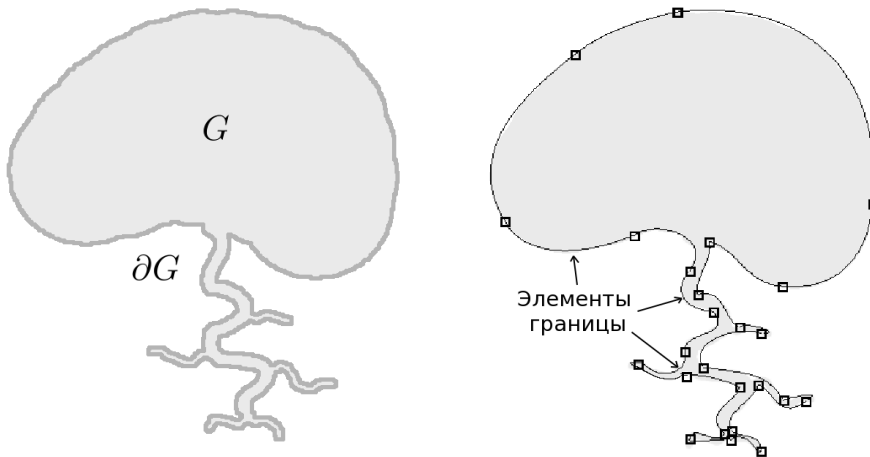


Рис. 1: Пример работы алгоритма

Чебышевской системой узлов порядка N [2] для дискретного случая будем называть

$$t_k^* = (t_{1,n}^*, t_{2,n}^*, t_{3,n}^*, \dots, t_{n,n}^*) \quad (2)$$

$$t_{n,k}^* = \lfloor \frac{M}{2} \cos \frac{(2k-1)\pi}{2n} + \frac{M}{2} \rfloor$$

Выбрав из множества пикселей размерности M те из них, которые находятся в узлах чебышева N -ого порядка 2 и выписав их координаты, получаем два вектора размерности N : \vec{x} , \vec{y} . Так как аппроксимирующий сплайн задается двумя параметрически заданными функциями $x(t)$ и $y(t)$, которые вычисляются независимо и аналогично; далее будем рассматривать только x координаты.

Подставим пары параметр-значение из столбцов \vec{r} и \vec{x} в 1, где вектор \vec{r} состоит из $r_j \in [-1, 1]$ - корней многочлена Чебышева N -ого порядка. Предполагая что каждый элемент кривой аппроксимирующий границу должен проходить через выбранные точки. Получаем переопределенную систему из N уравнений с 4 переменными.

$$x_j = \sum_{i=0}^3 T_i(r_j) a_i, j = \overline{1, N} \quad (3)$$

Это эквивалентно проведению кубической кривой через $n > 4$ опорных точек, взятых на произвольной гладкой кривой. Чтобы получить совместную систему относительно a_i , и в то же время сохранить больше информации о начальной кривой, воспользуемся следующим свойством ортогональности полиномов чебышева [3].

$$\frac{2}{N} \sum_{j=1}^N \tilde{T}_m\left(\frac{\pi(2j-1)}{2N}\right) \tilde{T}_n\left(\frac{\pi(2j-1)}{2N}\right) = \delta_n^m, \quad 0 \leq m, n < N-1 \quad (4)$$

Умножаем каждое уравнение из 3 на $T_i(r_j)$, складываем их и, воспользовавшись 4, получаем выражение для искоемых коэффициентов:

$$\begin{cases} a_0 = \frac{\sum_{j=1}^N x_j}{N} \\ a_i = \frac{2 \sum_{j=1}^N x_j T_i(x_j)}{N}, i = \overline{1, 3} \end{cases} \quad (5)$$

На основе изложенного выше создан адаптивный алгоритм аппроксимации кривых, заданных в виде растрового изображения. Используется функ-

ция ошибки $q(F, N) = \frac{\sum_{i=1}^N \|f(t_{N,i}^*) - F(t_{N,i})\|_1}{N}$, характеризующая степень отклонения аппроксимирующей кривой F , заданной уравнением 1, от элемента который она приближает f , представленного в виде параметризованного списка координат пикселей. Используется метрика $\|t\|_1 := \sum_{i=1}^n |t_i|$, где n - размерность пространства, t_i координаты точки [4]. При этом чебышевская система узлов 2 определяется на количестве точек, равному количеству

точек аппроксимируемого участка кривой. Результатом работы алгоритма является множество элементов - параметризованных кривых третьего порядка, в совокупности аппроксимирующих кривую границы. На каждом из таких элементов ошибка q не превышает заданного максимума (Рис. 1).

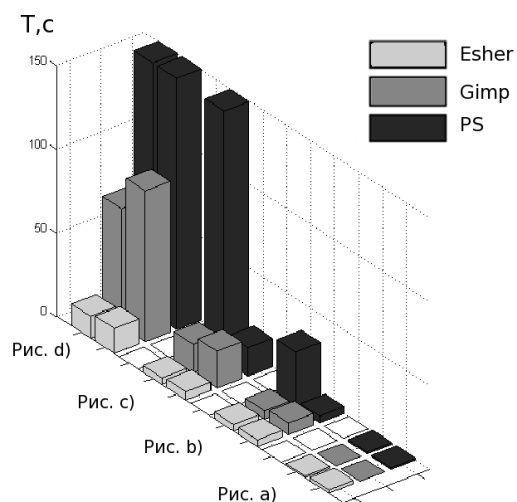


Рис. 2: Сравнение времени, затрачиваемого алгоритмами.

Проведено сравнение скорости работы разработанного алгоритма аппроксимации с аналогичными по функциональности алгоритмами представленными в широко известных графических пакетах (Photo Shop, Gimp). В качестве тестовых изображений выбраны сложные фрактальные фигуры, с сильно меняющейся кривизной вдоль границы, на которых проявляется адаптивность алгоритма. Результаты сравнения для разных по сложности тестовых рисунков приведены на гистограмме (Рис. 2). Эстетические качества полученных приближающих кривых одинаковы для всех трех программ. Время затрачиваемое предложенным алгоритмом на аппроксимацию линейно зависит от длины контура. Для других сравниваемых пакетов наблюдается нелинейная зависимость.

Список литературы

- [1] Stewart, Gilbert W. (1996), Afternotes on Numerical Analysis, SIAM, ISBN 978-0-89871-362-6.
- [2] Шокуров А.В. Теоретические основы методов вычислений. Конспект лекций. М., ИСП РАН. 2008
- [3] Бахвалов Н. С., Жидков Н. П., Кобельков Г. М., Численные методы. — М.: Наука, 2003.
- [4] Eugene F. Krause (1987). Taxicab Geometry. Dover. ISBN 0-486-25202-7.