Вычислительная математика. Численные методы решения ОДУ, задача Коши.

МФТИ

Численные методы решения задачи Коши

Численные методы решения задачи Коши

- Задача Коши:

$$u_t(t) = f(t, u),\ t \in [0, T]$$
$$u(0) = u_0$$

Численные методы решения задачи Коши

- Задача Коши:

$$u_t(t) = f(t,u),\ t \in [0,T]$$
$$u(0) = u_0$$

- $t_n = nh$, $n = \overline{0,N}$, $h = T/N$, $U_n \approx u(t_n)$

Численные методы решения задачи Коши

- Задача Коши:

$$u_t(t) = f(t, u),\ t \in [0, T]$$
$$u(0) = u_0$$

- $t_n = nh$, $n = \overline{0, N}$, $h = T/N$, $U_n \approx u(t_n)$
- Заменим производную конечной-разностью:

$$\frac{1}{h}(U_{n+1} - U_n) = f(t_n, U_n),\ n = 0, N-1$$
$$U_0 = u_0$$

Численные методы решения задачи Коши

- Задача Коши:

$$u_t(t) = f(t,u),\ t \in [0,T]$$
$$u(0) = u_0$$

- $t_n = nh$, $n = \overline{0,N}$, $h = T/N$, $U_n \approx u(t_n)$
- Заменим производную конечной-разностью:

$$\frac{1}{h}(U_{n+1} - U_n) = f(t_n, U_n),\ n = 0, N-1$$
$$U_0 = u_0$$

- $U_{n+1} = U_n + h\,f(t_n, U_n)$ – устойчивость будет определяться свойствами метода на одном шаге .

Метод Эйлера

$$\begin{cases} u'(t) = \lambda u(t) + g(t) \\ u(t_0) = u_0 \end{cases}, \; u(t) = e^{\lambda(t-t_0)}u_0 + \int_{t_0}^{t} e^{\lambda(t-\tau)} g(\tau)\, d\tau$$

Метод Эйлера

$$\begin{aligned} u'(t) &= \lambda u(t) + g(t) \\ u(t_0) &= u_0 \end{aligned}\ , \ u(t) = e^{\lambda(t-t_0)}u_0 + \int_{t_0}^{t} e^{\lambda(t-\tau)} g(\tau)\, d\tau$$

- Метод Эйлера

$$U_{n+1} = U_n + h(\lambda U_n + g(t_n)) = (1 + h\lambda)U_n + hg(t_n)$$

Метод Эйлера

$$\begin{cases} u'(t) = \lambda u(t) + g(t) \\ u(t_0) = u_0 \end{cases}, \; u(t) = e^{\lambda(t-t_0)}u_0 + \int_{t_0}^{t} e^{\lambda(t-\tau)} g(\tau)\, d\tau$$

- Метод Эйлера

$$U_{n+1} = U_n + h(\lambda U_n + g(t_n)) = (1 + h\lambda)U_n + hg(t_n)$$

- Ошибка аппроксимации (невязка):

$$r_n = \left(\frac{u(t_{n+1}) - u(t_n)}{h}\right) - (\lambda u(t_n) + g(t_n)) =$$

Метод Эйлера

$$\begin{cases} u'(t) = \lambda u(t) + g(t) \\ u(t_0) = u_0 \end{cases}, \; u(t) = e^{\lambda(t-t_0)}u_0 + \int_{t_0}^{t} e^{\lambda(t-\tau)} g(\tau)\, d\tau$$

- Метод Эйлера

$$U_{n+1} = U_n + h(\lambda U_n + g(t_n)) = (1 + h\lambda)U_n + hg(t_n)$$

- Ошибка аппроксимации (невязка):

$$r_n = \left(\frac{u(t_{n+1}) - u(t_n)}{h}\right) - (\lambda u(t_n) + g(t_n)) =$$

$$\left(u'(t_n) + \frac{1}{2}hu''(t_n) + O(h^2)\right) - u'(t_n) =$$

Метод Эйлера

$$\begin{cases} u'(t) = \lambda u(t) + g(t) \\ u(t_0) = u_0 \end{cases}, \; u(t) = e^{\lambda(t-t_0)} u_0 + \int_{t_0}^{t} e^{\lambda(t-\tau)} g(\tau)\, d\tau$$

- Метод Эйлера

$$U_{n+1} = U_n + h(\lambda U_n + g(t_n)) = (1 + h\lambda) U_n + h g(t_n)$$

- Ошибка аппроксимации (невязка):

$$r_n = \left(\frac{u(t_{n+1}) - u(t_n)}{h} \right) - (\lambda u(t_n) + g(t_n)) =$$
$$\left(u'(t_n) + \frac{1}{2} h u''(t_n) + O(h^2) \right) - u'(t_n) =$$
$$\frac{1}{2} h u''(t_n) + O(h^2)$$

Устойчивость метода Эйлера

Устойчивость метода Эйлера

- Связь ошибки и невязки:

$$\begin{cases} U_{n+1} = (1 + h\lambda)U_n + hg(t_n) \\ u(t_{n+1}) = (1 + h\lambda)u(t_n) + hg(t_n) + hr_n \end{cases}$$

Устойчивость метода Эйлера

- Связь ошибки и невязки:

$$\begin{cases} U_{n+1} = (1 + h\lambda)U_n + hg(t_n) \\ u(t_{n+1}) = (1 + h\lambda)u(t_n) + hg(t_n) + hr_n \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad E_{n+1} = (1 + h\lambda)E_n - hr_n$$

$$E_n = (1 + h\lambda)^n E_0 - h \sum_{m=1}^{n} (1 + h\lambda)^{n-m} r_{m-1}$$

Устойчивость метода Эйлера

- Связь ошибки и невязки:

$$\begin{cases} U_{n+1} = (1+h\lambda)U_n + hg(t_n) \\ u(t_{n+1}) = (1+h\lambda)u(t_n) + hg(t_n) + hr_n \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad E_{n+1} = (1+h\lambda)E_n - hr_n$$

$$E_n = (1+h\lambda)^n E_0 - h\sum_{m=1}^{n}(1+h\lambda)^{n-m} r_{m-1}$$

$$|1+h\lambda| \le \exp(|\lambda|h) \Rightarrow (1+h\lambda)^{n-m} \le$$

Устойчивость метода Эйлера

- Связь ошибки и невязки:

$$\begin{cases} U_{n+1} = (1+h\lambda)U_n + hg(t_n) \\ u(t_{n+1}) = (1+h\lambda)u(t_n) + hg(t_n) + hr_n \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad E_{n+1} = (1+h\lambda)E_n - hr_n$$

$$E_n = (1+h\lambda)^n E_0 - h\sum_{m=1}^{n}(1+h\lambda)^{n-m} r_{m-1}$$

$$|1+h\lambda| \le \exp(|\lambda|h) \Rightarrow (1+h\lambda)^{n-m} \le$$
$$e^{(n-m)h|\lambda|} \le e^{nh|\lambda|} \le e^{|\lambda|T}, T = Nh$$

Устойчивость метода Эйлера

- Связь ошибки и невязки:

$$\begin{cases} U_{n+1} = (1+h\lambda)U_n + hg(t_n) \\ u(t_{n+1}) = (1+h\lambda)u(t_n) + hg(t_n) + hr_n \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad E_{n+1} = (1+h\lambda)E_n - hr_n$$

$$E_n = (1+h\lambda)^n E_0 - h\sum_{m=1}^{n}(1+h\lambda)^{n-m} r_{m-1}$$

$$|1+h\lambda| \le \exp(|\lambda|h) \Rightarrow (1+h\lambda)^{n-m} \le$$

$$e^{(n-m)h|\lambda|} \le e^{nh|\lambda|} \le e^{|\lambda|T}, T = Nh$$

$$|E_n| \le e^{|\lambda|T}\left(|E_0| + h\sum_{m=1}^{n}|r_{m-1}|\right) \le$$

Устойчивость метода Эйлера

- Связь ошибки и невязки:

$$\begin{cases} U_{n+1} = (1 + h\lambda)U_n + hg(t_n) \\ u(t_{n+1}) = (1 + h\lambda)u(t_n) + hg(t_n) + hr_n \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad E_{n+1} = (1 + h\lambda)E_n - hr_n$$

$$E_n = (1 + h\lambda)^n E_0 - h \sum_{m=1}^{n} (1 + h\lambda)^{n-m} r_{m-1}$$

$$|1 + h\lambda| \le \exp(|\lambda|h) \Rightarrow (1 + h\lambda)^{n-m} \le$$

$$e^{(n-m)h|\lambda|} \le e^{nh|\lambda|} \le e^{|\lambda|T}, T = Nh$$

$$|E_n| \le e^{|\lambda|T} \left(|E_0| + h \sum_{m=1}^{n} |r_{m-1}| \right) \le$$

$$e^{|\lambda|T} (|E_0| + nh\|r\|_\infty) = e^{|\lambda|T} (|E_0| + T\|r\|_\infty)$$

Матричная форма уравнений

Матричная форма уравнений

$$AU = F$$

Матричная форма уравнений

$$AU = F$$

$$A = \frac{1}{h}\begin{bmatrix} 1 & & & & \\ -(1+h\lambda) & 1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & -(1+h\lambda) & 1 & \\ & & & -(1+h\lambda) & 1 \end{bmatrix}$$

Матричная форма уравнений

$$AU = F$$

$$A = \frac{1}{h}\begin{bmatrix} 1 & & & & \\ -(1+h\lambda) & 1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & -(1+h\lambda) & 1 & \\ & & & -(1+h\lambda) & 1 \end{bmatrix}$$

$$U = \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \vdots \\ U_N \end{bmatrix}, \; F = \begin{bmatrix} (1/h+\lambda)U_0 + g(t_0) \\ g(t_1) \\ \vdots \\ g(t_{N-1}) \end{bmatrix}$$

Матричная форма уравнений

$$AU = F$$

$$A = \frac{1}{h}\begin{bmatrix} 1 & & & & \\ -(1+h\lambda) & 1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & -(1+h\lambda) & 1 & \\ & & & -(1+h\lambda) & 1 \end{bmatrix}$$

$$U = \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \vdots \\ U_N \end{bmatrix}, \; F = \begin{bmatrix} (1/h+\lambda)U_0 + g(t_0) \\ g(t_1) \\ \vdots \\ g(t_{N-1}) \end{bmatrix}$$

- $AE = -r$, $\|A^{-1}\| \overset{?}{<} C$

Обратная матрица

$$\underbrace{h\begin{bmatrix} 1 & & & & \\ (1+h\lambda) & 1 & & & \\ (1+h\lambda)^2 & (1+h\lambda) & 1 & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ (1+h\lambda)^{N-1} & (1+h\lambda)^{N-2} & \cdots & (1+h\lambda) & 1 \end{bmatrix}}_{A^{-1}}$$

Обратная матрица

$$\underbrace{h\begin{bmatrix} 1 & & & & \\ (1+h\lambda) & 1 & & & \\ (1+h\lambda)^2 & (1+h\lambda) & 1 & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ (1+h\lambda)^{N-1} & (1+h\lambda)^{N-2} & \cdots & (1+h\lambda) & 1 \end{bmatrix}}_{A^{-1}}$$

- $\|A^{-1}\|_\infty = h\displaystyle\sum_{m=1}^{N} |(1+h\lambda)^{N-m}|$

Обратная матрица

$$\underbrace{h\begin{bmatrix} 1 & & & & \\ (1+h\lambda) & 1 & & & \\ (1+h\lambda)^2 & (1+h\lambda) & 1 & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ (1+h\lambda)^{N-1} & (1+h\lambda)^{N-2} & \cdots & (1+h\lambda) & 1 \end{bmatrix}}_{A^{-1}}$$

- $\|A^{-1}\|_\infty = h\sum_{m=1}^{N} |(1+h\lambda)^{N-m}|$
- $\|A^{-1}\| \leq hNe^{|\lambda|T} = Te^{|\lambda|T}$

Пример неустойчивой схемы

Пример неустойчивой схемы

- $u'(t) = \lambda u, u(0) = b,\ t \in [0, 1]$

Пример неустойчивой схемы

- $u'(t) = \lambda u, u(0) = b,\ t \in [0, 1]$
- Разностная схема:

$$4\frac{U_{n+1} - U_{n-1}}{2h} - 3\frac{U_{n+1} - U_n}{h} = \lambda U_n,\ \ n = 1, \dots, N-1$$

$$U_0 = b$$

$$U_1 = be^{\lambda h}$$

Пример неустойчивой схемы

- $u'(t) = \lambda u, u(0) = b,\ t \in [0,1]$
- Разностная схема:

$$4\frac{U_{n+1} - U_{n-1}}{2h} - 3\frac{U_{n+1} - U_n}{h} = \lambda U_n,\ \ n = 1, \ldots, N-1$$
$$U_0 = b$$
$$U_1 = be^{\lambda h}$$

- 1-й порядок аппроксимации

Пример неустойчивой схемы

- $u'(t) = \lambda u, u(0) = b,\ t \in [0, 1]$
- Разностная схема:

$$4\frac{U_{n+1} - U_{n-1}}{2h} - 3\frac{U_{n+1} - U_n}{h} = \lambda U_n,\ \ n = 1, \ldots, N-1$$
$$U_0 = b$$
$$U_1 = be^{\lambda h}$$

- 1-й порядок аппроксимации
- Общее решение разностного ур-я: $U_n = c_1 q_1^n + c_2 q_2^n$

Пример неустойчивой схемы

- $u'(t) = \lambda u, u(0) = b,\ t \in [0,1]$
- Разностная схема:

$$4\frac{U_{n+1} - U_{n-1}}{2h} - 3\frac{U_{n+1} - U_n}{h} = \lambda U_n,\ \ n = 1, \ldots, N-1$$
$$U_0 = b$$
$$U_1 = be^{\lambda h}$$

- 1-й порядок аппроксимации
- Общее решение разностного ур-я: $U_n = c_1 q_1^n + c_2 q_2^n$
- q_1, q_2 - корни уравнения $q^2 + (\lambda h - 3)q + 2 = 0$

Пример неустойчивой схемы

- $u'(t) = \lambda u, u(0) = b,\ t \in [0, 1]$
- Разностная схема:

$$4\frac{U_{n+1} - U_{n-1}}{2h} - 3\frac{U_{n+1} - U_n}{h} = \lambda U_n,\ \ n = 1, \ldots, N-1$$
$$U_0 = b$$
$$U_1 = be^{\lambda h}$$

- 1-й порядок аппроксимации
- Общее решение разностного ур-я: $U_n = c_1 q_1^n + c_2 q_2^n$
- q_1, q_2 - корни уравнения $q^2 + (\lambda h - 3)q + 2 = 0$
- $U_n = \dfrac{U_0}{q_2 - q_1}\left(q_2 q_1^n - q_1 q_2^n\right) + \dfrac{U_1}{q_2 - q_1}(-q_1^n + q_2^n)$

Пример неустойчивой схемы

- $u'(t) = \lambda u, u(0) = b,\ t \in [0,1]$
- Разностная схема:

$$4\frac{U_{n+1} - U_{n-1}}{2h} - 3\frac{U_{n+1} - U_n}{h} = \lambda U_n,\ \ n = 1, \dots, N-1$$
$$U_0 = b$$
$$U_1 = be^{\lambda h}$$

- 1-й порядок аппроксимации
- Общее решение разностного ур-я: $U_n = c_1 q_1^n + c_2 q_2^n$
- q_1, q_2 - корни уравнения $q^2 + (\lambda h - 3)q + 2 = 0$
- $U_n = \dfrac{U_0}{q_2 - q_1}\left(q_2 q_1^n - q_1 q_2^n\right) + \dfrac{U_1}{q_2 - q_1}(-q_1^n + q_2^n)$
- $\max|U_n| \to \infty$ при $h \to 0$

Многошаговые методы (Методы Адамса)

$$\begin{cases} y' = f\left(x, y\right), x \in [0, 1] \\ y\left(0\right) = \tilde{y} \end{cases}$$

$$\int\limits_{x_l}^{x_{l+1}} y' dx = y_{l+1} - y_l = \int\limits_{x_l}^{x_{l+1}} f\left(x, y\right) dx$$

Заменим $f\left(x, y\right)$ интерполяционным многочленом в форме Ньютона по узлам $x_{l-3}, x_{l-2}, x_{l-1}, x_l$:

$$\begin{aligned} f\left(x, y\right) \approx f_l + \left(f_l - f_{l-1}\right) \frac{\left(x - x_l\right)}{h} + \\ + \left(f_l - 2f_{l-1} + f_{l-2}\right) \frac{\left(x - x_l\right)\left(x - x_{l-1}\right)}{2h^2} + \\ + \left(f_l - 3f_{l-1} + 3f_{l-2} - f_{l-3}\right) \frac{\left(x - x_l\right)\left(x - x_{l-1}\right)\left(x - x_{l-2}\right)}{6h^3} \end{aligned}$$

Многошаговые методы (Методы Адамса)

Пусть

$$\begin{aligned}
\Delta f_{l-1} &= f_l - f_{l-1} \\
\Delta^2 f_{l-2} &= f_l - 2f_{l-1} + f_{l-2} \\
\Delta^3 f_{l-3} &= f_l - 3f_{l-1} + 3f_{l-2} - f_{l-3}
\end{aligned}$$

Тогда

$$f\left(x,y\right) \approx f_l + \Delta f_{l-1}\frac{\left(x-x_l\right)}{h} + \Delta^2 f_{l-2}\frac{\left(x-x_l\right)\left(x-x_{l-1}\right)}{2h^2} + \\ + \Delta^3 f_{l-3}\frac{\left(x-x_l\right)\left(x-x_{l-1}\right)\left(x-x_{l-2}\right)}{6h^3}$$

Экстраполяционная формула Адамса четвертого порядка

$$y_{l+1} = y_l + h\left(f_l + \frac{1}{2}\Delta f_{l-1} + \frac{5}{12}\Delta^2 f_{l-2} + \frac{3}{8}\Delta^3 f_{l-3}\right),$$

$$l = 3, 4, \ldots, L-1$$

Многошаговые методы (Методы Адамса)

Экстраполяционная формула Адамса четвертого порядка

$$y_{l+1} = y_l + h\left(f_l + \frac{1}{2}\Delta f_{l-1} + \frac{5}{12}\Delta^2 f_{l-2} + \frac{3}{8}\Delta^3 f_{l-3}\right)$$

$$\int\limits_{x_l}^{x_{l+1}} y' dx = y_{l+1} - y_l = \int\limits_{x_l}^{x_{l+1}} f\left(x, y\right) dx$$

Заменим $f\left(x, y\right)$ интерполяционным многочленом в форме Ньютона по узлам $x_{l-2}, x_{l-1}, x_l, x_{l+1}$ и получим **интерполяционную** формулу Адамса четвертого порядка

$$y_{l+1} = y_l + h\left(f_{l+1} - \frac{1}{2}\Delta f_l - \frac{1}{12}\Delta^2 f_{l-1} - \frac{1}{24}\Delta^3 f_{l-2}\right),$$

$$l = 2, 3, \ldots, L-1$$

$$y_0 = ? \quad y_1 = ? \quad y_2 = ? \quad y_3 = ?$$

Многошаговые методы (Методы Адамса)

$$y_0 = ? \quad y_1 = ? \quad y_2 = ? \quad y_3 = ?$$

- Разложение следа дифференциальной задачи в ряд Тэйлора

$$y_l \approx [y(x)]_l = [y(lh)]_0 =$$
$$= [y]_0 + lh\,[y']_0 + \frac{(lh)^2}{2}[y'']_0 + \frac{(lh)^3}{6}[y''']_0 + O\left(h^4\right)$$

$$l = 0, 1, 2, 3 \ll L, \quad lh \xrightarrow[h \to 0]{} 0$$

- Вычисляем y_1, y_2, y_3 методом Рунге-Кутты имеющим порядок не ниже четвертого.

Вариант алгоритма

- Первый шаг

$$\tilde{y}_{l+1} = y_l + h\left(f_l + \frac{1}{2}\Delta f_{l-1} + \frac{5}{12}\Delta^2 f_{l-2} + \frac{3}{8}\Delta^3 f_{l-3}\right)$$

- Второй шаг

$$y_{l+1} = y_l + h\left(\tilde{f}_{l+1} - \frac{1}{2}\Delta f_l - \frac{1}{12}\Delta^2 f_{l-1} - \frac{1}{24}\Delta^3 f_{l-2}\right),$$

$$\tilde{f}_{l+1} = f\left(x_{l+1}, \tilde{y}_{l+1}\right)$$

Методы высокого порядка

Методы высокого порядка

- *Многошаговые методы*, пример:

$$\frac{U_{n+1} - U_{n-1}}{2h} = f(t_n, U_n)$$

$$U_{n+1} = U_{n-1} + 2hf(t_n, U_n), n = 1, \dots, N$$

Методы высокого порядка

- *Многошаговые методы*, пример:

$$\frac{U_{n+1} - U_{n-1}}{2h} = f(t_n, U_n)$$
$$U_{n+1} = U_{n-1} + 2hf(t_n, U_n), n = 1, \dots, N$$

- Нужно задать дополнительное условие $U_1 = \dots$

Методы высокого порядка

- *Многошаговые методы*, пример:

$$\frac{U_{n+1} - U_{n-1}}{2h} = f(t_n, U_n)$$
$$U_{n+1} = U_{n-1} + 2hf(t_n, U_n), n = 1, \ldots, N$$

- Нужно задать дополнительное условие $U_1 = \ldots$
- *Одношаговые многостадийные методы (м-ды Рунге-Кутты)*, пример:

$$k_1 = f(t_n, U_n)$$
$$k_2 = f(t_n + \frac{h}{2}, U_n + \frac{h}{2}k_1)$$
$$U_{n+1} = U_n + hk_2$$

Методы Рунге-Кутты. Таблица Бутчера.

$$y_{l+1} = y_l + h \sum_{j=1}^{s} b_j f_j, \quad f_i = f\left(x_l + c_i h, y_l + h \sum_{j=1}^{s} a_{ij} f_j\right)$$

$$\begin{array}{c|cccc}
c_1 & a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1s} \\
c_2 & a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2s} \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
c_s & a_{s1} & a_{s2} & \dots & a_{ss} \\
\hline
 & b_1 & b_2 & \dots & b_s
\end{array}$$

$$\vec{y}_{l+1} = \vec{y}_l + h \sum_{j=1}^{s} b_j \vec{f}_j, \quad \vec{f}_i = f\left(x_l + c_i h, \vec{y}_l + h \sum_{j=1}^{s} a_{ij} \vec{f}_j\right),$$

$$i = 1, \dots, s$$

Полуявные и явные методы методы Р-К

Полуявные методы: $a_{ij} = 0, j > i$

$$
\begin{array}{c|cccccc}
c_1 & a_{11} & 0 & \dots & 0 & 0 \\
c_2 & a_{21} & a_{22} & \dots & 0 & 0 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
c_{s-1} & a_{s-11} & a_{s-12} & \dots & a_{s-1s-1} & 0 \\
c_s & a_{s1} & a_{s2} & \dots & a_{ss-1} & a_{ss} \\
\hline
 & b_1 & b_2 & \dots & b_{s-1} & b_s
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
f_1 &= f\left(x_l + c_1 h, y_l + a_{11} h f_1\right) \\
f_2 &= f\left(x_l + c_2 h, y_l + a_{21} h f_1 + a_{22} h f_2\right) \\
&\dots \\
f_s &= f\left(x_l + c_s h, y_l + h \sum_{j=1}^{s} a_{sj} f_j\right)
\end{aligned}
$$

Полуявные и явные методы методы Р-К

Явные методы: $a_{ij} = 0, j \geqslant i$

$$
\begin{array}{c|ccccc}
0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\
c_2 & a_{21} & 0 & \ldots & 0 & 0 \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
c_{s-1} & a_{s-11} & a_{s-12} & \ldots & 0 & 0 \\
c_s & a_{s1} & a_{s2} & \ldots & a_{ss-1} & 0 \\
\hline
 & b_1 & b_2 & \ldots & b_{s-1} & b_s
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
f_1 &= f\left(x_l, y_l\right) \\
f_2 &= f\left(x_l + c_2 h, y_l + a_{21} h f_1\right) \\
&\ldots \\
f_s &= f\left(x_l + c_s h, y_l + h \sum_{j=1}^{s-1} a_{sj} f_j\right)
\end{aligned}
$$

Методы Рунге-Кутты: порядок аппроксимации

$$c_i = \sum_{j=1}^{s} a_{ij}, i = 1, \ldots, s$$

$$p = 1: \ \sum_{i=1}^{s} b_i = 1,$$

$$p = 2: \ \sum_{i=1}^{s} b_i c_i = \frac{1}{2},$$

$$p = 3: \ \sum_{i=1}^{s} b_i c_i^2 = \frac{1}{3}, \sum_{i,j=1}^{s} b_i a_{ij} c_j = \frac{1}{6}$$

$$p = 4: \ \sum_{i=1}^{s} b_i c_i^3 = \frac{1}{4}, \sum_{i,j=1}^{s} b_i c_i a_{ij} c_j = \frac{1}{8}, \sum_{i,j=1}^{s} b_i a_{ij} c_j^2 = \frac{1}{12},$$

$$\sum_{i,j,k=1}^{s} b_i a_{ij} a_{jk} c_k = \frac{1}{24}$$

Методы Рунге-Кутты

Модифицированный метод Эйлера
2-ой порядок

$$\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \hline & 0 & 1 \end{array}$$

$$y_{l+1} = y_l + hf_2$$
$$f_1 = f\left(x_l, y_l\right)$$
$$f_2 = f\left(x_l + \frac{h}{2}, y_l + \frac{h}{2} f_1\right)$$

Метод Эйлера с пересчётом
2-ой порядок

$$\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ \hline & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}$$

$$y_{l+1} = y_l + \frac{h}{2}\left(f_1 + f_2\right)$$
$$f_1 = f\left(x_l, y_l\right)$$
$$f_2 = f\left(x_l + h, y_l + hf_1\right)$$

Метод Хойна (3-ий порядок)

$$\begin{array}{c|ccc}
0 & 0 & 0 & 0 \\
\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\
\frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{3} & 0 \\
\hline
 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4}
\end{array}$$

$$y_{l+1} = y_l + \frac{h}{4}\left(f_1 + 3f_3\right)$$

$$f_1 = f\left(x_l, y_l\right)$$

$$f_2 = f\left(x_l + \frac{h}{3}, y_l + \frac{h}{3} f_1\right)$$

$$f_3 = f\left(x_l + \frac{2h}{3}, y_l + \frac{2h}{3} f_2\right)$$

Методы Рунге-Кутты

(Классический) Метод 4-го порядка

$$
\begin{array}{c|cccc}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\
\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
\hline
 & \frac{1}{6} & \frac{2}{6} & \frac{2}{6} & \frac{1}{6}
\end{array}
$$

$$
y_{l+1} = y_l + \frac{h}{6}\left(f_1 + 2f_2 + 2f_3 + f_4\right)
$$

$$
f_1 = f\left(x_l, y_l\right), f_2 = f\left(x_l + \frac{h}{2}, y_l + \frac{h}{2} f_1\right)
$$

$$
f_3 = f\left(x_l + \frac{h}{2}, y_l + \frac{h}{2} f_2\right), f_4 = f\left(x_l + h, y_l + h f_3\right)
$$

Методы Рунге-Кутты: Барьеры Бутчера

Теорема: Первый барьер Бутчера

Среди явных методов Рунге-Кутты с числом стадий пять не существует методов пятого и более высокого порядка аппроксимации.

Теорема: Второй барьер Бутчера

Среди явных методов Рунге-Кутты с числом стадий семь не существует методов шестого и более высокого порядка аппроксимации.

Устойчивость методов Р-К

Устойчивость методов Р-К

- Пример: $(f(t,u) = f(u))$

Устойчивость методов Р-К

- Пример: $(f(t,u) = f(u))$

$$k_1 = f(U_n),\ k_2 = f(U_n + \frac{h}{2}k_1),\ U_{n+1} = U_n + hk_2$$

Устойчивость методов Р-К

- Пример: $(f(t,u) = f(u))$

$$k_1 = f(U_n),\ k_2 = f(U_n + \frac{h}{2}k_1),\ U_{n+1} = U_n + hk_2$$

$$U_{n+1} = U_n + h\Psi(U_n, t_n, h),\ \Psi(u,t,h) = f(u + \frac{1}{2}hf(u))$$

Устойчивость методов Р-К

- Пример: $(f(t,u) = f(u))$

$$k_1 = f(U_n),\ k_2 = f(U_n + \frac{h}{2}k_1),\ U_{n+1} = U_n + hk_2$$

$$U_{n+1} = U_n + h\Psi(U_n, t_n, h),\ \Psi(u,t,h) = f(u + \frac{1}{2}hf(u))$$

$$|\Psi(u_1,h) - \Psi(u_2,h)| \le L|u_1 + \frac{1}{2}hf(u_1) - u_2 - \frac{1}{2}hf(u_2)| \le$$

Устойчивость методов Р-К

- Пример: $(f(t,u) = f(u))$

$$k_1 = f(U_n),\ k_2 = f(U_n + \frac{h}{2}k_1),\ U_{n+1} = U_n + hk_2$$

$$U_{n+1} = U_n + h\Psi(U_n, t_n, h),\ \Psi(u,t,h) = f(u + \frac{1}{2}hf(u))$$

$$|\Psi(u_1,h) - \Psi(u_2,h)| \le L|u_1 + \frac{1}{2}hf(u_1) - u_2 - \frac{1}{2}hf(u_2)| \le$$

$$L|u_1 - u_2| + \frac{1}{2}hL^2|u_1 - u_2| = (L + \frac{1}{2}hL^2)|u_1 - u_2|$$

Устойчивость методов Р-К

- Пример: $(f(t,u) = f(u))$

$$k_1 = f(U_n),\ k_2 = f(U_n + \frac{h}{2}k_1),\ U_{n+1} = U_n + hk_2$$

$$U_{n+1} = U_n + h\Psi(U_n, t_n, h),\ \Psi(u,t,h) = f(u + \frac{1}{2}hf(u))$$

$$|\Psi(u_1,h) - \Psi(u_2,h)| \le L|u_1 + \frac{1}{2}hf(u_1) - u_2 - \frac{1}{2}hf(u_2)| \le$$

$$L|u_1 - u_2| + \frac{1}{2}hL^2|u_1 - u_2| = (L + \frac{1}{2}hL^2)|u_1 - u_2|$$

- $r_n = (u(t_{n+1}) - u(t_n))/h - \Psi(u(t_n), t_n, h)$

Устойчивость методов Р-К

- Пример: $(f(t,u) = f(u))$

$$k_1 = f(U_n),\ k_2 = f(U_n + \frac{h}{2}k_1),\ U_{n+1} = U_n + hk_2$$

$$U_{n+1} = U_n + h\Psi(U_n, t_n, h),\ \Psi(u,t,h) = f(u + \frac{1}{2}hf(u))$$

$$|\Psi(u_1,h) - \Psi(u_2,h)| \le L|u_1 + \frac{1}{2}hf(u_1) - u_2 - \frac{1}{2}hf(u_2)| \le$$

$$L|u_1 - u_2| + \frac{1}{2}hL^2|u_1 - u_2| = (L + \frac{1}{2}hL^2)|u_1 - u_2|$$

- $r_n = (u(t_{n+1}) - u(t_n))/h - \Psi(u(t_n), t_n, h)$
- $u(t_{n+1}) = u(t_n) + h\Psi(u(t_n), t_n, h) - hr_n$

Устойчивость методов Р-К

- Пример: $(f(t,u) = f(u))$

$$k_1 = f(U_n),\ k_2 = f(U_n + \frac{h}{2}k_1),\ U_{n+1} = U_n + hk_2$$

$$U_{n+1} = U_n + h\Psi(U_n, t_n, h),\ \Psi(u,t,h) = f(u + \frac{1}{2}hf(u))$$

$$|\Psi(u_1,h) - \Psi(u_2,h)| \le L|u_1 + \frac{1}{2}hf(u_1) - u_2 - \frac{1}{2}hf(u_2)| \le$$

$$L|u_1 - u_2| + \frac{1}{2}hL^2|u_1 - u_2| = (L + \frac{1}{2}hL^2)|u_1 - u_2|$$

- $r_n = (u(t_{n+1}) - u(t_n))/h - \Psi(u(t_n), t_n, h)$
- $u(t_{n+1}) = u(t_n) + h\Psi(u(t_n), t_n, h) - hr_n$
- $|E_{n+1}| = \left| E_n + h\Big(\Psi(U_n, t_n, h) - \Psi(u(t_n), t_n, h)\Big) - hr_n \right| \le$ $|E_n| + hL'|E_n| + hr_n$

Автоматический выбор шага

Автоматический выбор шага

- Для начальных данных U_0, t_0 сделаем:
    - Два шага длины h: U_1, U_2
    - Один шаг длины $2h$: $\widetilde{U}_2$

Автоматический выбор шага

- Для начальных данных U_0, t_0 сделаем:
  - Два шага длины h: U_1, U_2
  - Один шаг длины $2h$: $\widetilde{U}_2$
- Для метода порядка p:

$$e_2 = u(t_0 + 2h) - U_2 = 2Ch^{p+1} + O(h^{p+2})$$
$$\widetilde{e}_2 = u(t_0 + 2h) - \widetilde{U}_2 = C(2h)^{p+1} + O(h^{p+2})$$

Автоматический выбор шага

- Для начальных данных U_0, t_0 сделаем:
  - Два шага длины h: U_1, U_2
  - Один шаг длины $2h$: $\widetilde{U}_2$
- Для метода порядка p:

$$e_2 = u(t_0 + 2h) - U_2 = 2Ch^{p+1} + O(h^{p+2})$$
$$\widetilde{e}_2 = u(t_0 + 2h) - \widetilde{U}_2 = C(2h)^{p+1} + O(h^{p+2})$$

- $e_2 \approx \dfrac{U_2 - \widetilde{U}_2}{2^p - 1}$

Автоматический выбор шага

- Для начальных данных U_0, t_0 сделаем:
  - Два шага длины h: U_1, U_2
  - Один шаг длины $2h$: $\widetilde{U}_2$
- Для метода порядка p:

$$e_2 = u(t_0 + 2h) - U_2 = 2Ch^{p+1} + O(h^{p+2})$$
$$\widetilde{e}_2 = u(t_0 + 2h) - \widetilde{U}_2 = C(2h)^{p+1} + O(h^{p+2})$$

- $e_2 \approx \dfrac{U_2 - \widetilde{U}_2}{2^p - 1}$
- Чтобы $e_2(h) < \epsilon$: $h_{new} = h\left(\dfrac{\epsilon}{e_2}\right)^{1/(p+1)}$

Жёсткие (stiff) задачи

Жёсткие (stiff) задачи

- Модельная задача: $u'(t) = \lambda u, \ u(0) = a, \ Re(\lambda) \leq 0$

Жёсткие (stiff) задачи

- Модельная задача: $u'(t) = \lambda u,\ u(0) = a,\ Re(\lambda) \leq 0$
- Явный метод Эйлера:

$$\frac{U_{n+1} - U_n}{h} = \lambda U_n \Rightarrow U_{n+1} = (1 + \lambda h)U_n = R(z)U_n$$

Жёсткие (stiff) задачи

- Модельная задача: $u'(t) = \lambda u,\ u(0) = a,\ Re(\lambda) \leq 0$
- Явный метод Эйлера:

$$\frac{U_{n+1} - U_n}{h} = \lambda U_n \Rightarrow U_{n+1} = (1 + \lambda h)U_n = R(z)U_n$$

- $z = \lambda h,\ R(z)$ - функция устойчивости

Жёсткие (stiff) задачи

- Модельная задача: $u'(t) = \lambda u,\ u(0) = a,\ Re(\lambda) \leq 0$
- Явный метод Эйлера:

$$\frac{U_{n+1} - U_n}{h} = \lambda U_n \Rightarrow U_{n+1} = (1 + \lambda h)U_n = R(z)U_n$$

- $z = \lambda h,\ R(z)$ - функция устойчивости
- Неявный метод Эйлера

$$\frac{U_{n+1} - U_n}{h} = \lambda {\color{red}U_{n+1}} \Rightarrow U_{n+1} = \frac{1}{(1 - \lambda h)}U_n$$

Жёсткие (stiff) задачи

- Модельная задача: $u'(t) = \lambda u,\ u(0) = a,\ Re(\lambda) \leq 0$
- Явный метод Эйлера:

$$\frac{U_{n+1} - U_n}{h} = \lambda U_n \Rightarrow U_{n+1} = (1 + \lambda h) U_n = R(z) U_n$$

- $z = \lambda h$, $R(z)$ - функция устойчивости
- Неявный метод Эйлера

$$\frac{U_{n+1} - U_n}{h} = \lambda {\color{red}U_{n+1}} \Rightarrow U_{n+1} = \frac{1}{(1 - \lambda h)} U_n$$

- При каких h $|U_n| \not\to \infty$ при $n \to \infty$?
  - Явный метод: $|R(z)| \leq 1 :\ |1 + z| \leq 1$
  - Неявный метод: $\left|\frac{1}{1-z}\right| \leq 1$ при любых $Re(z) \leq 0$

Функция устойчивости

Теорема

Если $p = s \leqslant 4$, то

$$\mathbf{R}\left(\mathbf{Z}\right) = \mathbf{1} + \mathbf{Z} + \frac{\mathbf{Z}^2}{2!} + \dots + \frac{\mathbf{Z}^s}{s!}$$

Неявный $s-$стадийный метод Рунге-Кутты

$$R\left(z\right) = 1 + z\left(\mathbf{E} - z\mathbf{A}\right)^{-1} \vec{e} \otimes \vec{b}^T$$

$$R\left(z\right) = \frac{\det\left(\mathbf{E} - z\mathbf{A} + z\vec{e} \otimes \vec{b}^T\right)}{\det\left(\mathbf{E} - z\mathbf{A}\right)}$$

Пример задачи

$$\begin{cases} u'(t) = v(t) \\ v'(t) = -u(t) \end{cases} \quad V = [u, v]^T, V(0) = [1, 0]^T$$

$$V' = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}}_{A} V, \; V(t) = [\cos(t), -\sin(t)]^T$$

- Явный метод Эйлера
- Неявный метод Эйлера
- Метод трапеций:

$$\frac{U_{n+1} - U_n}{h} = \frac{1}{2} A (U_n + U_{n+1})$$

Пример расчета