Вычислительная математика. Сходимость интерполяционного процесса. Сплайны.

МФТИ

Интерполяционный многочлен

Интерполяционный многочлен

- $L_n \in \mathcal{P}_n,\ L_n(x_k) = f(x_k),\ k = 0, \ldots, n$

Интерполяционный многочлен

- $L_n \in \mathcal{P}_n, \; L_n(x_k) = f(x_k), \; k = 0, \dots, n$
- Форма Лагранжа: $L_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} f_k l_k(x)$

Интерполяционный многочлен

- $L_n \in \mathcal{P}_n,\ L_n(x_k) = f(x_k),\ k = 0, \dots, n$
- Форма Лагранжа: $L_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k l_k(x)$
- Форма Ньютона:

$$\begin{aligned} L_n(x) = & f(x_0) + f(x_0; x_1)(x - x_0) + \dots \\ & + f(x_0; \dots; x_n)(x - x_0) \cdots (x - x_{n-1}) \end{aligned}$$

Интерполяционный многочлен

- $L_n \in \mathcal{P}_n,\ L_n(x_k) = f(x_k),\ k = 0, \dots, n$
- Форма Лагранжа: $L_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} f_k l_k(x)$
- Форма Ньютона:

$$\begin{aligned} L_n(x) =& f(x_0) + f(x_0; x_1)(x - x_0) + \dots \\ & + f(x_0; \dots; x_n)(x - x_0) \cdots (x - x_{n-1}) \end{aligned}$$

- Остаточный член интерполяции:

$$f(x) - L_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!}\omega(x),\ \omega(x) = \prod_{k=0}^{n}(x - x_k)$$

Сходимость интерполяционных многочленов

Сходимость интерполяционных многочленов

- $L_n(x) \overset{?}{\to} f(x),\ n \to \infty\ \forall x \in [a, b]$

Сходимость интерполяционных многочленов

- $L_n(x) \xrightarrow{?} f(x),\ n \to \infty\ \forall x \in [a, b]$
- $\sup\limits_{x \in [a,b]} |f(x) - L_n(x)| \xrightarrow{?} 0$

Сходимость интерполяционных многочленов

- $L_n(x) \xrightarrow{?} f(x), \; n \to \infty \; \forall x \in [a, b]$
- $\sup\limits_{x \in [a,b]} |f(x) - L_n(x)| \xrightarrow{?} 0$
- Как сходимость зависит от свойств функции?

Сходимость интерполяционных многочленов

- $L_n(x) \xrightarrow{?} f(x), \;\; n \to \infty \; \forall x \in [a, b]$
- $\sup\limits_{x \in [a,b]} |f(x) - L_n(x)| \xrightarrow{?} 0$
- Как сходимость зависит от свойств функции?
- Как сходимость зависит расположения узлов?

Простое достаточное условие

Теорема

Если $f \in C^\infty[a,b]$ и $\forall n : \sup_x |f^{(n)}(x)| \leq M^n$, то для любой последовательности узлов:

$$\|f(x) - L_n(x)\|_{C[a,b]} \leq \frac{(M(b-a))^{n+1}}{(n+1)!} \to 0$$

Простое достаточное условие

Теорема

Если $f \in C^\infty[a,b]$ и $\forall n : \sup_x |f^{(n)}(x)| \le M^n$, то для любой последовательности узлов:

$$\|f(x) - L_n(x)\|_{C[a,b]} \le \frac{(M(b-a))^{n+1}}{(n+1)!} \to 0$$

$$f(x) - L_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!} \prod_{k=0}^{n} (x - x_k) \le$$

Простое достаточное условие

Теорема

Если $f \in C^\infty[a,b]$ и $\forall n : \sup_x |f^{(n)}(x)| \le M^n$, то для любой последовательности узлов:

$$\|f(x) - L_n(x)\|_{C[a,b]} \le \frac{(M(b-a))^{n+1}}{(n+1)!} \to 0$$

$$f(x) - L_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!} \prod_{k=0}^{n} (x - x_k) \le$$

$$\frac{(M(b-a))^{n+1}}{(n+1)!} \approx \frac{(M(b-a))^{n+1}}{\sqrt{2\pi(n+1)}((n+1)/e)^{n+1}} \to 0 \quad \square$$

Расходимость на равномерной сетке (демо)

Сходимость операторов

- $F = C[a,b]$ - банахово пространство с нормой

$$\|f\|_{C[a,b]} \equiv \max_{x\in[a,b]} |f(x)|$$

Сходимость операторов

- $F = C[a,b]$ - банахово пространство с нормой

$$\|f\|_{C[a,b]} \equiv \max_{x\in[a,b]} |f(x)|$$

- Π_n - пространство полиномов степени $\leq n$. Введем оператор P_n:

$$P_n : F \to \Pi_n, \quad P_n f = L_n$$

Сходимость операторов

- $F = C[a, b]$ - банахово пространство с нормой
$$\|f\|_{C[a,b]} \equiv \max_{x \in [a,b]} |f(x)|$$
- Π_n - пространство полиномов степени $\leq n$. Введем оператор P_n:
$$P_n : F \to \Pi_n, \quad P_n f = L_n$$
- Оператор P_n
  - линейный: $P_n(f_1 + f_2) = P_n f_1 + P_n f_2$
  - непрерывный (ограниченный)
  - является проектором: $P_n^2 = P_n$

Сходимость операторов

- $F = C[a,b]$ - банахово пространство с нормой
$$\|f\|_{C[a,b]} \equiv \max_{x\in[a,b]} |f(x)|$$
- Π_n - пространство полиномов степени $\leq n$. Введем оператор P_n:
$$P_n : F \to \Pi_n, \quad P_n f = L_n$$
- Оператор P_n
  - линейный: $P_n(f_1 + f_2) = P_n f_1 + P_n f_2$
  - непрерывный (ограниченный)
  - является проектором: $P_n^2 = P_n$

При каких условиях $P_n f \to f \quad \forall f \in F$?

Принцип равномерной ограниченности

Принцип равномерной ограниченности

Теорема Принцип равномерной ограниченности

Для любой последовательности непрерывных линейных операторов $\{P_n\}$ верно

$$\sup_n \|P_n f\| \leq c(f) < +\infty \; \forall f \in F \Leftrightarrow \sup_n \|P_n\| < +\infty$$

Принцип равномерной ограниченности

Теорема Принцип равномерной ограниченности

Для любой последовательности непрерывных линейных операторов $\{P_n\}$ верно

$$\sup_n \|P_n f\| \leq c(f) < +\infty \ \forall f \in F \Leftrightarrow \sup_n \|P_n\| < +\infty$$

Теорема 12.1 Банаха-Штейнгауза

Последовательность $\{P_n f\}$ сходится для всех $f \in F \Leftrightarrow$

1. $\sup_n \|P_n\| \leq M < +\infty$
2. $P_n f$ сходится при $n \to \infty$ на подмножестве $\tilde{F}$, всюду плотном в F

Доказательство теоремы Б-Ш

Доказательство теоремы Б-Ш

- ($\Rightarrow$) - из принципа равномерной ограниченности

Доказательство теоремы Б-Ш

- $(\Rightarrow)$ - из принципа равномерной ограниченности
- $(\Leftarrow)$ возьмем $f \in F$ и ε-приближение $f_\varepsilon \in \tilde{F}$:

$$\|f - f_\varepsilon\| \leq \varepsilon : \|P_n f - P_m f\| \leq$$
$$\|P_n f - P_n f_\varepsilon\| + \|P_n f_\varepsilon - P_m f_\varepsilon\| + \|P_m f_\varepsilon - P_m f\| \leq$$
$$M\varepsilon + \varepsilon + M\varepsilon$$

Доказательство теоремы Б-Ш

- ($\Rightarrow$) - из принципа равномерной ограниченности
- ($\Leftarrow$) возьмем $f \in F$ и ε-приближение $f_\varepsilon \in \tilde{F}$:

$$\|f - f_\varepsilon\| \leq \varepsilon : \|P_n f - P_m f\| \leq$$
$$\|P_n f - P_n f_\varepsilon\| + \|P_n f_\varepsilon - P_m f_\varepsilon\| + \|P_m f_\varepsilon - P_m f\| \leq$$
$$M\varepsilon + \varepsilon + M\varepsilon$$

- $\Rightarrow \{P_n f\}$ фундаментальная $\Rightarrow$ сходится $\square$

Применение т. Б-Ш к интерполяции

Теорема Теорема Банаха-Штейнгауза

Последовательность функций $P_n f$ сходится для всех $f \in F \Leftrightarrow$

1. $\sup_n \|P_n\| \leq M < +\infty$
2. $P_n f$ сходится при $n \to \infty$ на подмножестве $\tilde{F}$, всюду плотном в F

Применение т. Б-Ш к интерполяции

Теорема Теорема Банаха-Штейнгауза

Последовательность функций $P_n f$ сходится для всех $f \in F \Leftrightarrow$

1. $\sup_n \|P_n\| \leq M < +\infty$
2. $P_n f$ сходится при $n \to \infty$ на подмножестве $\tilde{F}$, всюду плотном в F

- $P_n f \to f$, если f – многочлен ($f \in \mathcal{P}$)

Применение т. Б-Ш к интерполяции

Теорема Теорема Банаха-Штейнгауза

Последовательность функций $P_n f$ сходится для всех $f \in F \Leftrightarrow$

1. $\sup_n \|P_n\| \leq M < +\infty$
2. $P_n f$ сходится при $n \to \infty$ на подмножестве $\tilde{F}$, всюду плотном в F

- $P_n f \to f$, если f – многочлен ($f \in \mathcal{P}$)
- По теореме Вейерштрасса $\mathcal{P}$ – всюду плотное множество в $C[a, b]$

Применение т. Б-Ш к интерполяции

Теорема Теорема Банаха-Штейнгауза

Последовательность функций $P_n f$ сходится для всех $f \in F \Leftrightarrow$

1. $\sup_n \|P_n\| \leq M < +\infty$
2. $P_n f$ сходится при $n \to \infty$ на подмножестве $\tilde{F}$, всюду плотном в F

- $P_n f \to f$, если f – многочлен ($f \in \mathcal{P}$)
- По теореме Вейерштрасса $\mathcal{P}$ – всюду плотное множество в $C[a, b]$
- Сходимость зависисит от поведения $\|P_n\|$ при $n \to \infty$

Константы Лебега

Константы Лебега

$$|[P_n f](x)| = |\sum_j f_j l_j(x)| \le \sum_j |f_j||l_j(x)| \le$$

Константы Лебега

$$|[P_n f](x)| = |\sum_j f_j l_j(x)| \le \sum_j |f_j||l_j(x)| \le$$
$$\|f\|_{C[a,b]} \sum_j |l_j(x)| = \|f\| \Lambda(x)$$

Константы Лебега

$$|[P_n f](x)| = |\sum_j f_j l_j(x)| \leq \sum_j |f_j||l_j(x)| \leq$$

$$\|f\|_{C[a,b]} \sum_j |l_j(x)| = \|f\| \Lambda(x)$$

$$\|P_n f\|_{C[a,b]} \leq \|f\| \max_{x \in [a,b]} \sum_j |l_j(x)| = \|f\| \Lambda$$

Константы Лебега

$$|[P_n f](x)| = |\sum_j f_j l_j(x)| \leq \sum_j |f_j||l_j(x)| \leq$$

$$\|f\|_{C[a,b]} \sum_j |l_j(x)| = \|f\| \Lambda(x)$$

$$\|P_n f\|_{C[a,b]} \leq \|f\| \max_{x \in [a,b]} \sum_j |l_j(x)| = \|f\| \Lambda$$

- Неравенство достигается на $f_j = \text{sign } l_j(x^*)$

Константы Лебега

$$|[P_n f](x)| = |\sum_j f_j l_j(x)| \leq \sum_j |f_j||l_j(x)| \leq$$

$$\|f\|_{C[a,b]} \sum_j |l_j(x)| = \|f\|\Lambda(x)$$

$$\|P_n f\|_{C[a,b]} \leq \|f\| \max_{x\in[a,b]} \sum_j |l_j(x)| = \|f\|\Lambda$$

- Неравенство достигается на $f_j = \text{sign } l_j(x^*)$
- $\|P_n\| = \sup\limits_{f\neq 0} \dfrac{\|P_n f\|}{\|f\|} = \Lambda = \max\limits_{x\in[a,b]} \sum_j |l_j(x)|$

Обусловленность задачи интерполяции

Обусловленность задачи интерполяции

- Пусть значения в узлах заданы с ошибкой

$$\tilde{f}_j = f_j + \delta f_j,\ |\delta f_j| \le \delta_j \le \delta$$

Обусловленность задачи интерполяции

- Пусть значения в узлах заданы с ошибкой

$$\tilde{f}_j = f_j + \delta f_j, \ |\delta f_j| \leq \delta_j \leq \delta$$

- Погрешность в значении многочлена:

$$|L_n(x;\tilde{f}) - L_n(x;f)| = |L_n(x;\delta f)| =$$

Обусловленность задачи интерполяции

- Пусть значения в узлах заданы с ошибкой

$$\tilde{f}_j = f_j + \delta f_j, \ |\delta f_j| \leq \delta_j \leq \delta$$

- Погрешность в значении многочлена:

$$|L_n(x; \tilde{f}) - L_n(x; f)| = |L_n(x; \delta f)| =$$
$$|\sum_j \delta f_j \, l_j(x)| \leq \sum_j \delta_j |l_j(x)|$$

Обусловленность задачи интерполяции

- Пусть значения в узлах заданы с ошибкой

$$\tilde{f}_j = f_j + \delta f_j, \; |\delta f_j| \le \delta_j \le \delta$$

- Погрешность в значении многочлена:

$$|L_n(x;\tilde{f}) - L_n(x;f)| = |L_n(x;\delta f)| =$$

$$|\sum_j \delta f_j \, l_j(x)| \le \sum_j \delta_j |l_j(x)|$$

$$\|L_n(\tilde{f}) - L_n(f)\| \le \delta \max_{x\in[a,b]} \sum_j |l_j(x)| = \delta \, \Lambda$$

$\|P_n\|$ на равномерных сетках

$\|P_n\|$ на равномерных сетках

- Равномерные сетки:

$$t_j = -1 + \frac{2}{n}j, \; j = 0, \dots, n$$

$\|P_n\|$ на равномерных сетках

- Равномерные сетки:

$$t_j = -1 + \frac{2}{n} j,\ j = 0, \ldots, n$$
$$t = -1 + \frac{2}{n}\theta,\ 0 < \theta < 1:$$

$\|P_n\|$ на равномерных сетках

- Равномерные сетки:

$$t_j = -1 + \frac{2}{n} j,\ j = 0, \dots, n$$

$$t = -1 + \frac{2}{n} \theta,\ 0 < \theta < 1 :$$

$$\|P_n\| = \max_{t \in [-1,1]} \sum_{k=0}^{n} \left| \prod_{j=0, j \neq k}^{n} \frac{t - t_j}{t_k - t_j} \right| \geq$$

$\|P_n\|$ на равномерных сетках

- Равномерные сетки:

$$t_j = -1 + \frac{2}{n} j,\ j = 0, \dots, n$$

$$t = -1 + \frac{2}{n}\theta,\ 0 < \theta < 1 :$$

$$\|P_n\| = \max_{t \in [-1,1]} \sum_{k=0}^{n} \left| \prod_{j=0, j \neq k}^{n} \frac{t - t_j}{t_k - t_j} \right| \geq$$

$$\sum_{k=0}^{n} \left| \prod_{j=0, j \neq k}^{n} \frac{\theta - j}{k - j} \right| \geq \frac{\theta(1-\theta)}{n^2} \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} =$$

$\|P_n\|$ на равномерных сетках

- Равномерные сетки:

$$t_j = -1 + \frac{2}{n}j,\ j = 0, \dots, n$$

$$t = -1 + \frac{2}{n}\theta,\ 0 < \theta < 1:$$

$$\|P_n\| = \max_{t\in[-1,1]} \sum_{k=0}^{n} \left| \prod_{j=0, j\neq k}^{n} \frac{t - t_j}{t_k - t_j} \right| \geq$$

$$\sum_{k=0}^{n} \left| \prod_{j=0, j\neq k}^{n} \frac{\theta - j}{k - j} \right| \geq \frac{\theta(1-\theta)}{n^2} \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} =$$

$$\boxed{\frac{\theta(1-\theta)}{n^2} 2^n}$$

Теорема Бернштейна-Фабера

Теорема Бернштейна-Фабера

- Для любой последовательности сеток:

$$\|P_n\| \geq c \ln\ n \to \infty$$

Теорема Бернштейна-Фабера

- Для любой последовательности сеток:

$$\|P_n\| \geq c \ln\, n \to \infty$$

- Чебышёвские сетки асимптотически оптимальны:

$$\|P_n^{cheb}\| = O(\ln\, n)$$

Теорема Бернштейна-Фабера

- Для любой последовательности сеток:

$$\|P_n\| \geq c \ln\ n \to \infty$$

- Чебышёвские сетки асимптотически оптимальны:

$$\|P_n^{cheb}\| = O(\ln\ n)$$

Теорема 12.2 Бернштейна-Фабера

Для любой последовательности сеток на $[a, b]$ $\exists f \in C[a, b]$, для которой последовательность интерполяционных многочленов не сходится равномерно ни к какой непрерывной функции.

Теоремы для чебышёвских сеток [1]

1

[1] Lloyd N. Trefethen. *Approximation Theory and Approximation Practice*. Philadelphia, PA, USA: SIAM, 2012. ISBN: 1611972396, 9781611972399.

Теоремы для чебышёвских сеток [1]

- $E = \|f - L_n\|_C$:

Условия на f	Убывание ошибки
f - Липшиц непрерывная	$E \to 0$
$\nu \geq 1,\ f \in C^{\nu-1}$, $f^{(\nu)}$ имеет ограниченную вариацию V	$E \leq \dfrac{4V}{\pi\nu(n-\nu)^{\nu}}$ [1]
f – аналитическая на $[-1, 1]$	$E \leq C^{-n}, C > 1$

[1] Trefethen, *Approximation Theory and Approximation Practice*.

Примеры (демо)

Сплайны

Определение 12.1 Сплайн

Сплайн - это кусочно-многочленная функция S.

- $a = x_0, \ldots, x_n = b$, $S_{[x_{k-1}, x_k]}$ – многочлен.
- Максимальная степень m многочлена называется степенью сплайна.
- Если $S \in C^k[a, b]$, k называется гладкостью сплайна.
- Разность $n - k$ называется дефектом сплайна.

Кубический сплайн

Кубический сплайн

- $a = x_0, \ldots, x_n = b$, $f_k = f(x_k)$

$$\Phi = \{\phi \in C^2[a, b] : \phi(x_k) = f_k, k = 0, 1, \ldots, n\}$$

Кубический сплайн

- $a = x_0, \ldots, x_n = b$, $f_k = f(x_k)$

$$\Phi = \{\phi \in C^2[a,b] : \phi(x_k) = f_k, k = 0, 1, \ldots, n\}$$

- $S(x) \in \Phi$ называется *интерполяционным кубическим сплайном*, если $\forall\ [x_{k-1}, x_k], k = \overline{1, n}$, S - многочлен степени ≤ 3.

Кубический сплайн

- $a = x_0, \ldots, x_n = b$, $f_k = f(x_k)$

$$\Phi = \{\phi \in C^2[a,b] : \phi(x_k) = f_k, k = 0, 1, \ldots, n\}$$

- $S(x) \in \Phi$ называется *интерполяционным кубическим сплайном*, если $\forall\ [x_{k-1}, x_k], k = \overline{1, n}$, S - многочлен степени ≤ 3.
- $4n - 2$ уравнения для коэффициентов:
  1. $2 + 2(n-1) = 2n$ интерполяционных условия
  2. $(n-1)$ - непрерывность 1-й производной
  3. $(n-1)$ - непрерывность 2-й производной

Кубический сплайн

- $a = x_0, \dots, x_n = b$, $f_k = f(x_k)$

$$\Phi = \{\phi \in C^2[a,b] : \phi(x_k) = f_k, k = 0, 1, \dots, n\}$$

- $S(x) \in \Phi$ называется *интерполяционным кубическим сплайном*, если $\forall\ [x_{k-1}, x_k], k = \overline{1,n}$, S - многочлен степени ≤ 3.
- $4n - 2$ уравнения для коэффициентов:
  1. $2 + 2(n-1) = 2n$ интерполяционных условия
  2. $(n-1)$ - непрерывность 1-й производной
  3. $(n-1)$ - непрерывность 2-й производной
- Дополнительные граничные условия:
  - $S''(x_0) = S''(x_n) = 0$ - естественный сплайн
  - $S'(x_0) = f'(x_0)$, $S'(x_n) = f'(x_n)$
  - $S'(x_0) = S'(x_0), S''(x_0) = S''(x_n)$ - периодичность

Вариационное свойство е. с.

Теорема 12.3 (Вариационное свойство е. с.)

Естественный сплайн минимизирует *функционал энергии*:

$$E(\phi) = \int_a^b (\phi''(x))^2 \, dx, \;\; E(\phi) > E(S) \; \forall \phi \in \Phi, \phi \neq S$$

Доказательство

Доказательство

$$(\phi'')^2 - (S'')^2 = (\phi'' - S'')^2 + 2S''(\phi'' - S'') \Rightarrow$$

Доказательство

$$(\phi'')^2 - (S'')^2 = (\phi'' - S'')^2 + 2S''(\phi'' - S'') \Rightarrow$$

$$E(\phi) - E(S) = \underbrace{E(\phi - S)}_{>0} + 2\int_a^b S''(\phi'' - S'')\,dx$$

Доказательство

$$(\phi'')^2 - (S'')^2 = (\phi'' - S'')^2 + 2S''(\phi'' - S'') \Rightarrow$$

$$E(\phi) - E(S) = \underbrace{E(\phi - S)}_{>0} + 2\int_a^b S''(\phi'' - S'')\,dx$$

Возьмем интеграл по частям:

Доказательство

$$(\phi'')^2 - (S'')^2 = (\phi'' - S'')^2 + 2S''(\phi'' - S'') \Rightarrow$$

$$E(\phi) - E(S) = \underbrace{E(\phi - S)}_{>0} + 2\int_a^b S''(\phi'' - S'')\,dx$$

Возьмем интеграл по частям:

$$\int_a^b S''(\phi'' - S'')\,dx = \sum_{k=1}^{n} \int_{x_{k-1}}^{x_k} S''(\phi'' - S'')\,dx =$$

Доказательство

$$(\phi'')^2 - (S'')^2 = (\phi'' - S'')^2 + 2S''(\phi'' - S'') \Rightarrow$$

$$E(\phi) - E(S) = \underbrace{E(\phi - S)}_{>0} + 2\int_a^b S''(\phi'' - S'')\,dx$$

Возьмем интеграл по частям:

$$\int_a^b S''(\phi'' - S'')\,dx = \sum_{k=1}^{n} \int_{x_{k-1}}^{x_k} S''(\phi'' - S'')\,dx =$$

$$S''(\phi' - S')\Big|_a^b - \sum_{k=1}^{n} \int_{x_{k-1}}^{x_k} S^{(3)}(\phi' - S')\,dx =$$

Доказательство

$$(\phi'')^2 - (S'')^2 = (\phi'' - S'')^2 + 2S''(\phi'' - S'') \Rightarrow$$

$$E(\phi) - E(S) = \underbrace{E(\phi - S)}_{>0} + 2\int_a^b S''(\phi'' - S'')\,dx$$

Возьмем интеграл по частям:

$$\int_a^b S''(\phi'' - S'')\,dx = \sum_{k=1}^{n} \int_{x_{k-1}}^{x_k} S''(\phi'' - S'')\,dx =$$

$$S''(\phi' - S')\Big|_a^b - \sum_{k=1}^{n} \int_{x_{k-1}}^{x_k} S^{(3)}(\phi' - S')\,dx =$$

$$-\sum_{k=1}^{n} S^{(3)}(\phi - S)\Big|_{x_{k-1}}^{x_k} + \sum_{k=1}^{n} \int_{x_{k-1}}^{x_k} S^{(4)}(\phi - S)\,dx = 0 \quad \square$$

Вычисление сплайна

Вычисление сплайна

- Рассмотрим $S(x)$ на k-ом отрезке $[x_{k-1}, x_k]$:

$$u_k = S''(x_k),\ h_k = x_k - x_{k-1}, x = x_{k-1} + th_k$$

Вычисление сплайна

- Рассмотрим $S(x)$ на k-ом отрезке $[x_{k-1}, x_k]$:

$$u_k = S''(x_k),\ \ h_k = x_k - x_{k-1}, x = x_{k-1} + th_k$$

- Поскольку S - кубический многочлен при $x \in [x_{k-1}, x_k]$, находим:

$$S''(x) = (1-t)u_{k-1} + tu_k \Rightarrow$$

Вычисление сплайна

- Рассмотрим $S(x)$ на k-ом отрезке $[x_{k-1}, x_k]$:

$$u_k = S''(x_k),\ h_k = x_k - x_{k-1}, x = x_{k-1} + th_k$$

- Поскольку S - кубический многочлен при $x \in [x_{k-1}, x_k]$, находим:

$$S''(x) = (1-t)u_{k-1} + tu_k \Rightarrow$$
$$S'(x) = S'(x_{k-1}) + h_k \left(\frac{1}{2} - \frac{(1-t)^2}{2}\right) u_{k-1} + h_k \frac{t^2}{2} u_k$$

Вычисление сплайна

- Рассмотрим $S(x)$ на k-ом отрезке $[x_{k-1}, x_k]$:

$$u_k = S''(x_k),\ h_k = x_k - x_{k-1}, x = x_{k-1} + th_k$$

- Поскольку S - кубический многочлен при $x \in [x_{k-1}, x_k]$, находим:

$$S''(x) = (1-t)u_{k-1} + tu_k \Rightarrow$$

$$S'(x) = S'(x_{k-1}) + h_k \left(\frac{1}{2} - \frac{(1-t)^2}{2}\right) u_{k-1} + h_k \frac{t^2}{2} u_k$$

$$S(x) = S(x_{k-1}) + h_k t S'(x_{k-1}) +$$

$$h_k^2 \left(\frac{t}{2} + \frac{(1-t)^3}{6} - \frac{1}{6}\right) u_{k-1} + h_k^2 \frac{t^3}{6} u_k$$

Вычисление сплайна (2)

$$S(x) = S(x_{k-1}) + h_k t S'(x_{k-1}) +$$
$$h_k^2 \left(\frac{t}{2} + \frac{(1-t)^3}{6} - \frac{1}{6} \right) u_{k-1} + h_k^2 \frac{t^3}{6} u_k$$

Вычисление сплайна (2)

$$S(x) = S(x_{k-1}) + h_k t S'(x_{k-1}) +$$
$$h_k^2 \left(\frac{t}{2} + \frac{(1-t)^3}{6} - \frac{1}{6} \right) u_{k-1} + h_k^2 \frac{t^3}{6} u_k$$

Обозначим $\delta f_k = (f_k - f_{k-1})/h_k$. При $t = 1$:

$$S'(x_{k-1}) = \delta f_k - \frac{h_k}{3} u_{k-1} - \frac{h_k}{6} u_k$$

Вычисление сплайна (2)

$$S(x) = S(x_{k-1}) + h_k t S'(x_{k-1}) +$$
$$h_k^2 \left(\frac{t}{2} + \frac{(1-t)^3}{6} - \frac{1}{6} \right) u_{k-1} + h_k^2 \frac{t^3}{6} u_k$$

Обозначим $\delta f_k = (f_k - f_{k-1})/h_k$. При $t = 1$:

$$S'(x_{k-1}) = \delta f_k - \frac{h_k}{3} u_{k-1} - \frac{h_k}{6} u_k$$

Учитывая это, полагаем $t = 1$ в выражении для $S'(x)$:

$$S'(x_k) = \delta f_k + \frac{h_k}{6} u_{k-1} + \frac{h_k}{3} u_k$$

Вычисление сплайна (2)

$$S(x) = S(x_{k-1}) + h_k t S'(x_{k-1}) +$$
$$h_k^2 \left(\frac{t}{2} + \frac{(1-t)^3}{6} - \frac{1}{6} \right) u_{k-1} + h_k^2 \frac{t^3}{6} u_k$$

Обозначим $\delta f_k = (f_k - f_{k-1})/h_k$. При $t = 1$:

$$S'(x_{k-1}) = \delta f_k - \frac{h_k}{3} u_{k-1} - \frac{h_k}{6} u_k$$

Учитывая это, полагаем $t = 1$ в выражении для $S'(x)$:

$$S'(x_k) = \delta f_k + \frac{h_k}{6} u_{k-1} + \frac{h_k}{3} u_k$$

Приравняем последние два выражения:

$$\delta f_k + \frac{h_k}{6} u_{k-1} + \frac{h_k}{3} u_k = \delta f_{k+1} - \frac{h_{k+1}}{3} u_k - \frac{h_{k+1}}{6} u_{k+1} \Rightarrow$$
$$h_k u_{k-1} + 2(h_k + h_{k+1}) u_k + h_{k+1} u_{k+1} = \rho_k \equiv 6(\delta f_{k+1} - \delta f_k)$$

Вычисление сплайна (3)

Вычисление сплайна (3)

- $u_0 = u_n = 0$, получаем систему линейных уравнений с трехдиагональной матрицей:

Вычисление сплайна (3)

- $u_0 = u_n = 0$, получаем систему линейных уравнений с трехдиагональной матрицей:

$$T \begin{bmatrix} u_1 \\ \dots \\ u_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho_1 \\ \dots \\ \rho_{n-1} \end{bmatrix}$$

$$T = \begin{bmatrix} 2(h_1 + h_2) & h_2 & & & \\ h_2 & 2(h_2 + h_3) & h_3 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & h_{n-1} & 2(h_{n-1} + h_n) \end{bmatrix}$$

Вычисление сплайна (3)

- $u_0 = u_n = 0$, получаем систему линейных уравнений с трехдиагональной матрицей:

$$T \begin{bmatrix} u_1 \\ \dots \\ u_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho_1 \\ \dots \\ \rho_{n-1} \end{bmatrix}$$

$$T = \begin{bmatrix} 2(h_1 + h_2) & h_2 & & & \\ h_2 & 2(h_2 + h_3) & h_3 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & h_{n-1} & 2(h_{n-1} + h_n) \end{bmatrix}$$

- Система невырожденная, т.к. T имеет диагональное преобладание.

Вычисление сплайна (3)

- $u_0 = u_n = 0$, получаем систему линейных уравнений с трехдиагональной матрицей:

$$T \begin{bmatrix} u_1 \\ \dots \\ u_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho_1 \\ \dots \\ \rho_{n-1} \end{bmatrix}$$

$$T = \begin{bmatrix} 2(h_1+h_2) & h_2 & & & \\ h_2 & 2(h_2+h_3) & h_3 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & h_{n-1} & 2(h_{n-1}+h_n) \end{bmatrix}$$

- Система невырожденная, т.к. T имеет диагональное преобладание.
- Естественный сплайн существует и единственен $\square$.

Погрешность сплайн-интерполяции

Погрешность сплайн-интерполяции

Теорема 12.4 Теорема

Пусть $f \in C^j[a, b]$, $1 \leq j \leq 4$, тогда

$$\|f - S_n\|_{C[a,b]} = \mathcal{O}(h^j), \;\; h = \max_k h_k$$

Погрешность сплайн-интерполяции

Теорема 12.4 Теорема

Пусть $f \in C^j[a,b]$, $1 \leq j \leq 4$, тогда

$$\|f - S_n\|_{C[a,b]} = \mathcal{O}(h^j),\ \ h = \max_k h_k$$

Последовательность сеток называется *квазиравномерной*, если h_{max}/h_{min} равномерно ограничено при $n \to \infty$.

Теорема 12.5 Теорема

Для любой $f \in C[a,b]$ последовательность $\{S_n\}$ на квазиравномерных сетках сходится к f равномерно.

Пример (демо)

Свойство квазилокальности

Свойство квазилокальности

- В обычной интерполяции при изменении значения в точке x_k весь многочлен «перестраивается»

Свойство квазилокальности

- В обычной интерполяции при изменении значения в точке x_k весь многочлен «перестраивается»
- мера чувствительности $|l_j(x)|$

Свойство квазилокальности

- В обычной интерполяции при изменении значения в точке x_k весь многочлен «перестраивается»
- мера чувствительности $|l_j(x)|$
- Зависимость сплайна на отрезке $[x_{k-1}, x_k]$ от значений f вне этого отрезка осуществляется через коэффициенты u_k.

Свойство квазилокальности

- В обычной интерполяции при изменении значения в точке x_k весь многочлен «перестраивается»
- мера чувствительности $|l_j(x)|$
- Зависимость сплайна на отрезке $[x_{k-1}, x_k]$ от значений f вне этого отрезка осуществляется через коэффициенты u_k.
- Как сильно изменится сплайн «вдали» от возмущения?

Элементы T^{-1} (демо)

Свойство квазилокальности

Теорема 12.6

Пусть $A = [a_{ij}]$ - невырожденная ленточная матрица порядка n, $a_{ii} \neq 0$, $a_{ij} = 0$ при $|i - j| > L$.
Пусть матричная норма $\|\cdot\|$ такова, что норма любой матрица не может быть меньше модуля каждого из её элементов (например, $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_\infty$). Тогда если

$$q \equiv \|(\mathrm{diag}A)^{-1}\mathrm{off}A\| < 1$$

то для элементов обратной матрицы $A^{-1} = [a_{ij}^{(-1)}]$:

$$|a_{ij}^{(-1)}| \leq \|(\mathrm{diag}A)^{-1}\| \frac{q^{|i-j|/L}}{1-q}, \; i, j = 1, \ldots, n$$

Доказательство

Доказательство

- $F = -(\operatorname{diag} A)^{-1} \operatorname{off} A$, $\|F\| = q < 1$

Доказательство

- $F = -(\text{diag } A)^{-1} \text{off } A$, $\|F\| = q < 1$
- Рассмотрим ряд Неймана:

$$(I - F)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} F^k = \left(I + (\text{diag } A)^{-1} \text{off } A \right)^{-1} =$$

$$\left((\text{diag } A)^{-1} (\text{diag } A + \text{off } A) \right)^{-1} = A^{-1} \text{diag } A$$

Доказательство

- $F = -(\text{diag } A)^{-1} \text{off } A$, $\|F\| = q < 1$
- Рассмотрим ряд Неймана:

$$(I - F)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} F^k = \left(I + (\text{diag } A)^{-1} \text{off } A \right)^{-1} =$$

$$\left((\text{diag } A)^{-1} (\text{diag } A + \text{off } A) \right)^{-1} = A^{-1} \text{diag } A$$

- $\|F^k (\text{diag } A)^{-1}\| \leq \|(\text{diag } A)^{-1}\| q^k$

Доказательство

- $F = -(\text{diag } A)^{-1} \text{off } A$, $\|F\| = q < 1$
- Рассмотрим ряд Неймана:

$$(I - F)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} F^k = \left(I + (\text{diag } A)^{-1} \text{off } A \right)^{-1} =$$

$$\left((\text{diag } A)^{-1} (\text{diag } A + \text{off } A) \right)^{-1} = A^{-1} \text{diag } A$$

- $\|F^k (\text{diag } A)^{-1}\| \le \|(\text{diag } A)^{-1}\| q^k$
- Ширина ленты $F^k \le kL$

Доказательство

- $F = -(\text{diag } A)^{-1} \text{off } A$, $\|F\| = q < 1$
- Рассмотрим ряд Неймана:

$$(I - F)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} F^k = \left(I + (\text{diag } A)^{-1} \text{off } A \right)^{-1} =$$

$$\left((\text{diag } A)^{-1} (\text{diag } A + \text{off } A) \right)^{-1} = A^{-1} \text{diag } A$$

- $\|F^k (\text{diag } A)^{-1}\| \leq \|(\text{diag } A)^{-1}\| q^k$
- Ширина ленты $F^k \leq kL$
- $[F^k]_{i,j} \neq 0$ при $k \geq \lceil |i - j| / L \rceil$

Доказательство

- $F = -(\text{diag } A)^{-1} \text{off } A$, $\|F\| = q < 1$
- Рассмотрим ряд Неймана:

$$(I - F)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} F^k = \left(I + (\text{diag } A)^{-1} \text{off } A\right)^{-1} =$$

$$\left((\text{diag } A)^{-1} (\text{diag } A + \text{off } A)\right)^{-1} = A^{-1} \text{diag } A$$

- $\|F^k (\text{diag } A)^{-1}\| \leq \|(\text{diag } A)^{-1}\| q^k$
- Ширина ленты $F^k \leq kL$
- $[F^k]_{i,j} \neq 0$ при $k \geq \lceil |i-j|/L \rceil$

$$|a_{ij}^{(-1)}| \leq \|(\text{diag } A)^{-1}\| \sum_{k=\lceil \frac{|i-j|}{L} \rceil}^{\infty} q^k \leq \|(\text{diag } A)^{-1}\| \frac{q^{|i-j|/L}}{1-q} \quad \square$$

Заключение

Заключение

- Сходимость интерполяционного процесса

Заключение

- Сходимость интерполяционного процесса
- Обусловленность задачи интерполяции

Заключение

- Сходимость интерполяционного процесса
- Обусловленность задачи интерполяции
- Сплайн-интерполяция

Заключение

- Сходимость интерполяционного процесса
- Обусловленность задачи интерполяции
- Сплайн-интерполяция
- Естественный кубический сплайн

Trefethen, Lloyd N. *Approximation Theory and Approximation Practice*. Philadelphia, PA, USA: SIAM, 2012. ISBN: 1611972396, 9781611972399.