Вычислительная математика.

Обусловленность системы линейных уравнений, число обусловленности.

МФТИ

Число обусловленности

- Как сильно меняется $f(x)$ при малых изменениях x?

Число обусловленности

- Как сильно меняется $f(x)$ при малых изменениях x?
- Пусть f - функция, $f(x+\delta) \approx f(x) + f'\delta$.
  Если $f(x) \neq 0$ и $x \neq 0$:

Число обусловленности

- Как сильно меняется $f(x)$ при малых изменениях x?
- Пусть f - функция, $f(x+\delta) \approx f(x) + f'\delta$.
  Если $f(x) \neq 0$ и $x \neq 0$:

$$\frac{\|f(x+\delta) - f(x)\|}{\|f(x)\|}$$

Число обусловленности

- Как сильно меняется $f(x)$ при малых изменениях x?
- Пусть f - функция, $f(x+\delta) \approx f(x) + f'\delta$.
  Если $f(x) \neq 0$ и $x \neq 0$:

$$\frac{\|f(x+\delta) - f(x)\|}{\|f(x)\|} \approx \left(\frac{\|f'(x)\|}{\|f(x)\|}\|x\|\right)\frac{\|\delta\|}{\|x\|}$$

Число обусловленности

- Как сильно меняется $f(x)$ при малых изменениях x?
- Пусть f - функция, $f(x+\delta) \approx f(x) + f'\delta$.
  Если $f(x) \neq 0$ и $x \neq 0$:

$$\frac{\|f(x+\delta) - f(x)\|}{\|f(x)\|} \approx \left(\frac{\|f'(x)\|}{\|f(x)\|}\|x\|\right)\frac{\|\delta\|}{\|x\|}$$

- Мерой чувствительности является *число обусловленности* (*condition number*)

$$cond(f(x)) = \frac{\|f'(x)\|}{\|f(x)\|}\|x\|$$

Число обусловленности матрицы

Число обусловленности матрицы

- Чему равно число обусловленности для $f(A) = A^{-1}$?

Число обусловленности матрицы

- Чему равно число обусловленности для $f(A) = A^{-1}$?
- Пусть A и $A + \Delta$ - невырожденные матрицы, тогда:

Число обусловленности матрицы

- Чему равно число обусловленности для $f(A) = A^{-1}$?
- Пусть A и $A + \Delta$ - невырожденные матрицы, тогда:

$$(A + \Delta)^{-1} - A^{-1}$$

Число обусловленности матрицы

- Чему равно число обусловленности для $f(A) = A^{-1}$?
- Пусть A и $A + \Delta$ - невырожденные матрицы, тогда:

$$(A + \Delta)^{-1} - A^{-1} = \left[I - A^{-1}(A + \Delta)\right](A + \Delta)^{-1} =$$

Число обусловленности матрицы

- Чему равно число обусловленности для $f(A) = A^{-1}$?
- Пусть A и $A + \Delta$ - невырожденные матрицы, тогда:

$$(A + \Delta)^{-1} - A^{-1} = \left[I - A^{-1}(A + \Delta)\right](A + \Delta)^{-1} =$$
$$= -A^{-1}\Delta(A + \Delta)^{-1} \approx -A^{-1}\Delta A^{-1} \Rightarrow$$

Число обусловленности матрицы

- Чему равно число обусловленности для $f(A) = A^{-1}$?
- Пусть A и $A + \Delta$ - невырожденные матрицы, тогда:

$$(A+\Delta)^{-1} - A^{-1} = \left[I - A^{-1}(A+\Delta)\right](A+\Delta)^{-1} =$$
$$= -A^{-1}\Delta(A+\Delta)^{-1} \approx -A^{-1}\Delta A^{-1} \Rightarrow$$

$$\frac{\|(A+\Delta)^{-1} - A^{-1}\|}{\|A^{-1}\|} \leq\approx \left(\|A^{-1}\|\|A\|\right)\frac{\|\Delta\|}{\|A\|}$$

Число обусловленности матрицы

- Чему равно число обусловленности для $f(A) = A^{-1}$?
- Пусть A и $A + \Delta$ - невырожденные матрицы, тогда:

$$(A+\Delta)^{-1} - A^{-1} = \left[I - A^{-1}(A+\Delta)\right](A+\Delta)^{-1} =$$
$$= -A^{-1}\Delta(A+\Delta)^{-1} \approx -A^{-1}\Delta A^{-1} \Rightarrow$$

$$\frac{\|(A+\Delta)^{-1} - A^{-1}\|}{\|A^{-1}\|} \leq\approx \left(\|A^{-1}\|\|A\|\right)\frac{\|\Delta\|}{\|A\|}$$

- Величину $cond(A) = \|A^{-1}\|\|A\|$ называют *числом обусловленности матрицы* A

Число обусловленности матрицы

- Чему равно число обусловленности для $f(A) = A^{-1}$?
- Пусть A и $A + \Delta$ - невырожденные матрицы, тогда:

$$(A+\Delta)^{-1} - A^{-1} = \left[I - A^{-1}(A+\Delta)\right](A+\Delta)^{-1} =$$
$$= -A^{-1}\Delta(A+\Delta)^{-1} \approx -A^{-1}\Delta A^{-1} \Rightarrow$$

$$\frac{\|(A+\Delta)^{-1} - A^{-1}\|}{\|A^{-1}\|} \leq\approx \left(\|A^{-1}\|\|A\|\right)\frac{\|\Delta\|}{\|A\|}$$

- Величину $cond(A) = \|A^{-1}\|\|A\|$ называют *числом обусловленности матрицы* A
- при каких Δ матрица $(A + \Delta)$ будет невырожденной?

Матричные ряды

Матричные ряды

Определение 5.1 (сходящийся матричный ряд)

Ряд $\sum_{k=0}^{\infty} A_k$, где $A_k \in \mathbb{C}^{n\times n}$ называется сходящимся, если сходится последовательность его частичных сумм:

$$\|B - \sum_{k=0}^{N} A_k\| \to 0,\ N \to \infty \tag{1}$$

Матричные ряды

Определение 5.1 (сходящийся матричный ряд)

Ряд $\sum_{k=0}^{\infty} A_k$, где $A_k \in \mathbb{C}^{n\times n}$ называется сходящимся, если сходится последовательность его частичных сумм:

$$\|B - \sum_{k=0}^{N} A_k\| \to 0,\ N \to \infty \tag{1}$$

- Достаточное условие: сходимость ряда $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \|A_k\|$:

Матричные ряды

Определение 5.1 (сходящийся матричный ряд)

Ряд $\sum_{k=0}^{\infty} A_k$, где $A_k \in \mathbb{C}^{n\times n}$ называется сходящимся, если сходится последовательность его частичных сумм:

$$\|B - \sum_{k=0}^{N} A_k\| \to 0, \; N \to \infty \tag{1}$$

- Достаточное условие: сходимость ряда $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \|A_k\|$:

Определение 5.1 (сходящийся матричный ряд)

Ряд $\sum_{k=0}^{\infty} A_k$, где $A_k \in \mathbb{C}^{n\times n}$ называется сходящимся, если сходится последовательность его частичных сумм:

$$\|B - \sum_{k=0}^{N} A_k\| \to 0,\ N \to \infty \tag{1}$$

- Достаточное условие: сходимость ряда $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \|A_k\|$:

$$\|\sum_{k=N_1}^{N_2} A_k\| \le \sum_{k=N_1}^{N_2} \|A_k\| < \epsilon,\ \forall N_1, N_2 > M \quad \square$$

Степенной ряд

- Ряд $\sum_{k=0}^{\infty} F^k$, $F^0 = I$ называется *рядом Неймана*.

Степенной ряд

- Ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} F^k$, $F^0 = I$ называется *рядом Неймана*.
- Достаточное условие сходимости: $\|F\| < 1$.

Степенной ряд

- Ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} F^k$, $F^0 = I$ называется *рядом Неймана*.
- Достаточное условие сходимости: $\|F\| < 1$.

Определение 5.2 (спектральный радиус матрицы)

Спектральным радиусом матрицы A называется число $\rho(A) = \max_k |\lambda_k(A)|$

Степенной ряд

- Ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} F^k$, $F^0 = I$ называется *рядом Неймана*.
- Достаточное условие сходимости: $\|F\| < 1$.

Определение 5.2 (спектральный радиус матрицы)

Спектральным радиусом матрицы A называется число $\rho(A) = \max_k |\lambda_k(A)|$

- Матрицу A: $\rho(A) < 1$ называют *сходящейся* (*convergent*)

Степенной ряд

- Ряд $\sum_{k=0}^{\infty} F^k$, $F^0 = I$ называется *рядом Неймана*.
- Достаточное условие сходимости: $\|F\| < 1$.

Определение 5.2 (спектральный радиус матрицы)

Спектральным радиусом матрицы A называется число $\rho(A) = \max_k |\lambda_k(A)|$

- Матрицу A: $\rho(A) < 1$ называют *сходящейся* (*convergent*)

Теорема 5.1 Критерий сходимости степенного ряда

Ряд Неймана с матрицей F сходится $\iff$ $F^k \to 0$ $\iff$ $\rho(F) < 1$ (матрица F – сходящаяся).

Доказательство критерия ($\Rightarrow$)

Доказательство критерия ($\Rightarrow$)

- Если ряд сходится, то по критерию Коши:

$$\|F^k\| \to 0, \ k \to \infty$$

Доказательство критерия ($\Rightarrow$)

- Если ряд сходится, то по критерию Коши:

$$\|F^k\| \to 0, \;\; k \to \infty$$

- Пусть $Fu = \lambda u$

Доказательство критерия ($\Rightarrow$)

- Если ряд сходится, то по критерию Коши:

$$\|F^k\| \to 0,\ k \to \infty$$

- Пусть $Fu = \lambda u$

$$\|F^k\|$$

Доказательство критерия ($\Rightarrow$)

- Если ряд сходится, то по критерию Коши:

$$\|F^k\| \to 0, \ k \to \infty$$

- Пусть $Fu = \lambda u$

$$\|F^k\| \geq \frac{\|F^k u\|}{\|u\|}$$

Доказательство критерия ($\Rightarrow$)

- Если ряд сходится, то по критерию Коши:

$$\|F^k\| \to 0,\ k \to \infty$$

- Пусть $Fu = \lambda u$

$$\|F^k\| \geq \frac{\|F^k u\|}{\|u\|} = \frac{\|\lambda^k u\|}{\|u\|} = |\lambda|^k$$

Доказательство критерия ($\Rightarrow$)

- Если ряд сходится, то по критерию Коши:

$$\|F^k\| \to 0,\ k \to \infty$$

- Пусть $Fu = \lambda u$

$$\|F^k\| \geq \frac{\|F^k u\|}{\|u\|} = \frac{\|\lambda^k u\|}{\|u\|} = |\lambda|^k$$

- если $|\lambda| \geq 1$, то $\|F^k\| \not\to 0$ $\square$

Доказательство критерия ($\Leftarrow$)

Доказательство критерия ($\Leftarrow$)

- сходимость ряда равносильна сходимости ряда с подобной матрицей $\tilde{F} = S^{-1}FS$:

Доказательство критерия ($\Leftarrow$)

- сходимость ряда равносильна сходимости ряда с подобной матрицей $\tilde{F} = S^{-1}FS$:

$$\sum_{k=N_1}^{N_2} \tilde{F}^k = \sum_{k=N_1}^{N_2} S^{-1}F^kS = S^{-1}\left(\sum_{k=N_1}^{N_2} F^k\right)S$$

Доказательство критерия ($\Leftarrow$)

- сходимость ряда равносильна сходимости ряда с подобной матрицей $\tilde{F} = S^{-1}FS$:

$$\sum_{k=N_1}^{N_2} \tilde{F}^k = \sum_{k=N_1}^{N_2} S^{-1}F^kS = S^{-1}\left(\sum_{k=N_1}^{N_2} F^k\right)S$$

- По теореме Шура: $T = U^{-1}FU$

Доказательство критерия ($\Leftarrow$)

- сходимость ряда равносильна сходимости ряда с подобной матрицей $\tilde{F} = S^{-1}FS$:

$$\sum_{k=N_1}^{N_2} \tilde{F}^k = \sum_{k=N_1}^{N_2} S^{-1}F^kS = S^{-1}\left(\sum_{k=N_1}^{N_2} F^k\right)S$$

- По теореме Шура: $T = U^{-1}FU$
- $D_\varepsilon = \operatorname{diag}(1, \varepsilon, \ldots, \varepsilon^{n-1})$,

Доказательство критерия ($\Leftarrow$)

- сходимость ряда равносильна сходимости ряда с подобной матрицей $\tilde{F} = S^{-1}FS$:

$$\sum_{k=N_1}^{N_2} \tilde{F}^k = \sum_{k=N_1}^{N_2} S^{-1}F^kS = S^{-1}\left(\sum_{k=N_1}^{N_2} F^k\right)S$$

- По теореме Шура: $T = U^{-1}FU$
- $D_\varepsilon = \operatorname{diag}(1, \varepsilon, \ldots, \varepsilon^{n-1})$, $\tilde{T} = D_\varepsilon^{-1}TD_\varepsilon$

Доказательство критерия ($\Leftarrow$)

- сходимость ряда равносильна сходимости ряда с подобной матрицей $\tilde{F} = S^{-1}FS$:

$$\sum_{k=N_1}^{N_2} \tilde{F}^k = \sum_{k=N_1}^{N_2} S^{-1}F^kS = S^{-1}\left(\sum_{k=N_1}^{N_2} F^k\right)S$$

- По теореме Шура: $T = U^{-1}FU$
- $D_\varepsilon = \mathrm{diag}\,(1, \varepsilon, \ldots, \varepsilon^{n-1}),\ \tilde{T} = D_\varepsilon^{-1}TD_\varepsilon : \tilde{T}_{ij} = \varepsilon^{j-i}t_{ij},\ i \le j$

Доказательство критерия ($\Leftarrow$)

- сходимость ряда равносильна сходимости ряда с подобной матрицей $\tilde{F} = S^{-1}FS$:

$$\sum_{k=N_1}^{N_2} \tilde{F}^k = \sum_{k=N_1}^{N_2} S^{-1}F^kS = S^{-1}\left(\sum_{k=N_1}^{N_2} F^k\right)S$$

- По теореме Шура: $T = U^{-1}FU$
- $D_\varepsilon = \operatorname{diag}(1, \varepsilon, \dots, \varepsilon^{n-1})$, $\tilde{T} = D_\varepsilon^{-1}TD_\varepsilon : \tilde{T}_{ij} = \varepsilon^{j-i}t_{ij}$, $i \le j$
- $\|\tilde{T}\|_1 = \max_j \left(\sum_{i\le j} |t_{ij}|\varepsilon^{j-i}\right)$

Доказательство критерия ($\Leftarrow$)

- сходимость ряда равносильна сходимости ряда с подобной матрицей $\tilde{F} = S^{-1}FS$:

$$\sum_{k=N_1}^{N_2} \tilde{F}^k = \sum_{k=N_1}^{N_2} S^{-1}F^kS = S^{-1}\left(\sum_{k=N_1}^{N_2} F^k\right)S$$

- По теореме Шура: $T = U^{-1}FU$
- $D_\varepsilon = \mathrm{diag}\,(1, \varepsilon, \ldots, \varepsilon^{n-1})$, $\tilde{T} = D_\varepsilon^{-1}TD_\varepsilon : \tilde{T}_{ij} = \varepsilon^{j-i}t_{ij}$, $i \le j$
- $\|\tilde{T}\|_1 = \max_j \left(\sum_{i\le j} |t_{ij}|\varepsilon^{j-i}\right) =$ $\max_j \left(|\lambda_j| + \varepsilon \sum_{i<j} |t_{ij}|\varepsilon^{j-i-1}\right)$

Доказательство критерия ($\Leftarrow$)

- сходимость ряда равносильна сходимости ряда с подобной матрицей $\tilde{F} = S^{-1}FS$:

$$\sum_{k=N_1}^{N_2} \tilde{F}^k = \sum_{k=N_1}^{N_2} S^{-1}F^kS = S^{-1}\left(\sum_{k=N_1}^{N_2} F^k\right)S$$

- По теореме Шура: $T = U^{-1}FU$
- $D_\varepsilon = \operatorname{diag}(1, \varepsilon, \ldots, \varepsilon^{n-1})$, $\tilde{T} = D_\varepsilon^{-1}TD_\varepsilon : \tilde{T}_{ij} = \varepsilon^{j-i}t_{ij}, \; i \le j$
- $\|\tilde{T}\|_1 = \max_j \left(\sum_{i\le j} |t_{ij}|\varepsilon^{j-i}\right) = \max_j \left(|\lambda_j| + \varepsilon \sum_{i<j} |t_{ij}|\varepsilon^{j-i-1}\right)$
- подбором ε можно сделать $\|\tilde{T}\|_1 < 1$. $\Rightarrow$ сходится ряд для $\tilde{T}$ и для F $\square$.

Сходимость степенного ряда, следствия

Сходимость степенного ряда, следствия

- Если $\rho(F) < 1$, то $\exists\ (I - F)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} F^k$

Сходимость степенного ряда, следствия

- Если $\rho(F) < 1$, то $\exists\ (I - F)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} F^k$

  Док-во: $(I - F)\sum_{k=0}^{N} F^k = I - F^{N+1} \to I$ $\square$

Сходимость степенного ряда, следствия

- Если $\rho(F) < 1$, то $\exists\ (I - F)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} F^k$

  Док-во: $(I - F) \sum\limits_{k=0}^{N} F^k = I - F^{N+1} \to I$ $\square$
- Если $\|F\| < 1$, то: $\|(I - F)^{-1}\| \leq \|I\| \sum_{k=0}^{\infty} \|F\|^k = \frac{\|I\|}{1 - \|F\|}$

Сходимость степенного ряда, следствия

- Если $\rho(F) < 1$, то $\exists\ (I - F)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} F^k$

  Док-во: $(I - F)\displaystyle\sum_{k=0}^{N} F^k = I - F^{N+1} \to I$ $\square$
- Если $\|F\| < 1$, то: $\|(I - F)^{-1}\| \leq \|I\| \sum_{k=0}^{\infty} \|F\|^k = \frac{\|I\|}{1-\|F\|}$

Теорема 5.2 Обратная к возмущенной матрице

Если A - невырожденная и $\|A^{-1}\Delta\| < 1$, то
$A + \Delta = A(I + A^{-1}\Delta)$ – невырожденная и

Сходимость степенного ряда, следствия

- Если $\rho(F) < 1$, то $\exists\ (I - F)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} F^k$

  Док-во: $(I - F)\sum\limits_{k=0}^{N} F^k = I - F^{N+1} \to I$ $\square$
- Если $\|F\| < 1$, то: $\|(I - F)^{-1}\| \leq \|I\| \sum_{k=0}^{\infty} \|F\|^k = \frac{\|I\|}{1-\|F\|}$

Теорема 5.2 Обратная к возмущенной матрице

Если A - невырожденная и $\|A^{-1}\Delta\| < 1$, то
$A + \Delta = A(I + A^{-1}\Delta)$ – невырожденная и

$$(A+\Delta)^{-1} = \left[\sum_{k=0}^{\infty}(-A^{-1}\Delta)^k\right] A^{-1} = A^{-1}\sum_{k=0}^{\infty}(-\Delta A^{-1})^k$$

Сходимость степенного ряда, следствия

- Если $\rho(F) < 1$, то $\exists\ (I - F)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} F^k$

  Док-во: $(I - F)\sum\limits_{k=0}^{N} F^k = I - F^{N+1} \to I$ $\square$
- Если $\|F\| < 1$, то: $\|(I - F)^{-1}\| \le \|I\| \sum_{k=0}^{\infty} \|F\|^k = \frac{\|I\|}{1-\|F\|}$

Теорема 5.2 Обратная к возмущенной матрице

Если A - невырожденная и $\|A^{-1}\Delta\| < 1$, то
$A + \Delta = A(I + A^{-1}\Delta)$ – невырожденная и

$$(A + \Delta)^{-1} = \left[\sum_{k=0}^{\infty}(-A^{-1}\Delta)^k\right] A^{-1} = A^{-1}\sum_{k=0}^{\infty}(-\Delta A^{-1})^k$$

$$\frac{\|(A+\Delta)^{-1} - A^{-1}\|}{\|A^{-1}\|} \le \frac{\|A^{-1}\|\|\Delta\|}{1 - \|A^{-1}\Delta\|} = \boxed{\frac{\|A^{-1}\|\|A\|}{1 - \|A^{-1}\Delta\|}}\frac{\|\Delta\|}{\|A\|}$$

Обусловленность линейной системы (1)

Обусловленность линейной системы (1)

- $Ax = f,\ f \neq 0 \to (A + \Delta A)\tilde{x} = f + \Delta f$

Обусловленность линейной системы (1)

- $Ax = f$, $f \neq 0 \to (A + \Delta A)\tilde{x} = f + \Delta f$
- Как $\Delta x = \tilde{x} - x$ зависит от ΔA и Δf?

Обусловленность линейной системы (1)

- $Ax = f$, $f \neq 0 \to (A + \Delta A)\tilde{x} = f + \Delta f$
- Как $\Delta x = \tilde{x} - x$ зависит от ΔA и Δf?
- Рассмотрим случай $\Delta A = 0$, $A\Delta x = \Delta f$

Обусловленность линейной системы (1)

- $Ax = f$, $f \neq 0 \to (A + \Delta A)\tilde{x} = f + \Delta f$
- Как $\Delta x = \tilde{x} - x$ зависит от ΔA и Δf?
- Рассмотрим случай $\Delta A = 0$, $A\Delta x = \Delta f$

$$\left(\frac{\|A^{-1}\Delta f\|}{\|A^{-1}f\|}\right) \bigg/ \left(\frac{\|\Delta f\|}{\|f\|}\right)$$

Обусловленность линейной системы (1)

- $Ax = f$, $f \neq 0 \to (A + \Delta A)\tilde{x} = f + \Delta f$
- Как $\Delta x = \tilde{x} - x$ зависит от ΔA и Δf?
- Рассмотрим случай $\Delta A = 0$, $A\Delta x = \Delta f$

$$\left(\frac{\|A^{-1}\Delta f\|}{\|A^{-1}f\|}\right) \Big/ \left(\frac{\|\Delta f\|}{\|f\|}\right) = \frac{\|A^{-1}\Delta f\|}{\|\Delta f\|}\frac{\|f\|}{\|A^{-1}f\|} =$$

Обусловленность линейной системы (1)

- $Ax = f$, $f \neq 0 \to (A + \Delta A)\tilde{x} = f + \Delta f$
- Как $\Delta x = \tilde{x} - x$ зависит от ΔA и Δf?
- Рассмотрим случай $\Delta A = 0$, $A\Delta x = \Delta f$

$$\left(\frac{\|A^{-1}\Delta f\|}{\|A^{-1}f\|}\right) \Big/ \left(\frac{\|\Delta f\|}{\|f\|}\right) = \frac{\|A^{-1}\Delta f\|}{\|\Delta f\|}\frac{\|f\|}{\|A^{-1}f\|} =$$
$$= \frac{\|A^{-1}\Delta f\|}{\|\Delta f\|}\frac{\|Ax\|}{\|x\|}$$

Обусловленность линейной системы (1)

- $Ax = f,\ f \neq 0 \to (A + \Delta A)\tilde{x} = f + \Delta f$
- Как $\Delta x = \tilde{x} - x$ зависит от ΔA и Δf?
- Рассмотрим случай $\Delta A = 0,\ A\Delta x = \Delta f$

$$\left(\frac{\|A^{-1}\Delta f\|}{\|A^{-1}f\|}\right) \Big/ \left(\frac{\|\Delta f\|}{\|f\|}\right) = \frac{\|A^{-1}\Delta f\|}{\|\Delta f\|}\frac{\|f\|}{\|A^{-1}f\|} =$$

$$= \frac{\|A^{-1}\Delta f\|}{\|\Delta f\|}\frac{\|Ax\|}{\|x\|} \leq \|A^{-1}\|\|A\| = cond(A)$$

Обусловленность линейной системы (1)

- $Ax = f,\ f \neq 0 \to (A + \Delta A)\tilde{x} = f + \Delta f$
- Как $\Delta x = \tilde{x} - x$ зависит от ΔA и Δf?
- Рассмотрим случай $\Delta A = 0,\ A\Delta x = \Delta f$

$$\left(\frac{\|A^{-1}\Delta f\|}{\|A^{-1}f\|}\right) \Big/ \left(\frac{\|\Delta f\|}{\|f\|}\right) = \frac{\|A^{-1}\Delta f\|}{\|\Delta f\|}\frac{\|f\|}{\|A^{-1}f\|} =$$
$$= \frac{\|A^{-1}\Delta f\|}{\|\Delta f\|}\frac{\|Ax\|}{\|x\|} \leq \|A^{-1}\|\|A\| = cond(A)$$

- переходя к $\leq$, берём max по Δf и x (или f)

Обусловленность линейной системы (1)

- $Ax = f$, $f \neq 0 \to (A + \Delta A)\tilde{x} = f + \Delta f$
- Как $\Delta x = \tilde{x} - x$ зависит от ΔA и Δf?
- Рассмотрим случай $\Delta A = 0$, $A\Delta x = \Delta f$

$$\left(\frac{\|A^{-1}\Delta f\|}{\|A^{-1}f\|}\right) \Big/ \left(\frac{\|\Delta f\|}{\|f\|}\right) = \frac{\|A^{-1}\Delta f\|}{\|\Delta f\|}\frac{\|f\|}{\|A^{-1}f\|} =$$

$$= \frac{\|A^{-1}\Delta f\|}{\|\Delta f\|}\frac{\|Ax\|}{\|x\|} \leq \|A^{-1}\|\|A\| = cond(A)$$

- переходя к $\leq$, берём max по Δf и x (или f)
- Для фиксированной f:

$$\left(\frac{\|A^{-1}\Delta f\|}{\|A^{-1}f\|}\right) \Big/ \left(\frac{\|\Delta f\|}{\|f\|}\right) \leq \|A^{-1}\|\frac{\|f\|}{\|x\|} = \nu(A, f)$$

Обусловленность линейной системы (2)

Обусловленность линейной системы (2)

- Пусть $\|A^{-1}\Delta A\| < 1$:

Обусловленность линейной системы (2)

- Пусть $\|A^{-1}\Delta A\| < 1$:

$$\Delta x = \tilde{x} - x = (A + \Delta A)^{-1}(f + \Delta f) - A^{-1}f =$$

Обусловленность линейной системы (2)

- Пусть $\|A^{-1}\Delta A\| < 1$:

$$\Delta x = \tilde{x} - x = (A + \Delta A)^{-1}(f + \Delta f) - A^{-1}f =$$
$$\left[(A + \Delta A)^{-1} - A^{-1}\right] f + (A + \Delta A)^{-1}\Delta f =$$

Обусловленность линейной системы (2)

- Пусть $\|A^{-1}\Delta A\| < 1$:

$$\Delta x = \tilde{x} - x = (A + \Delta A)^{-1}(f + \Delta f) - A^{-1}f =$$

$$\left[(A + \Delta A)^{-1} - A^{-1}\right] f + (A + \Delta A)^{-1}\Delta f =$$

$$\left[\sum_{k=1}^{\infty}(-A^{-1}\Delta A)^k\right](A^{-1}f)$$

Обусловленность линейной системы (2)

- Пусть $\|A^{-1}\Delta A\| < 1$:

$$\Delta x = \tilde{x} - x = (A + \Delta A)^{-1}(f + \Delta f) - A^{-1} f =$$

$$\left[(A + \Delta A)^{-1} - A^{-1}\right] f + (A + \Delta A)^{-1} \Delta f =$$

$$\left[\sum_{k=1}^{\infty} (-A^{-1}\Delta A)^k\right] (A^{-1} f) + \left[\sum_{k=0}^{\infty} (-A^{-1}\Delta A)^k\right] (A^{-1}\Delta f)$$

Обусловленность линейной системы (2)

- Пусть $\|A^{-1}\Delta A\| < 1$:

$$\Delta x = \tilde{x} - x = (A + \Delta A)^{-1}(f + \Delta f) - A^{-1} f =$$
$$\left[(A + \Delta A)^{-1} - A^{-1}\right] f + (A + \Delta A)^{-1}\Delta f =$$
$$\left[\sum_{k=1}^{\infty}(-A^{-1}\Delta A)^k\right](A^{-1} f) + \left[\sum_{k=0}^{\infty}(-A^{-1}\Delta A)^k\right](A^{-1}\Delta f)$$

- Возьмем норму обеих частей

(2)

Обусловленность линейной системы (2)

- Пусть $\|A^{-1}\Delta A\| < 1$:

$$\Delta x = \tilde{x} - x = (A + \Delta A)^{-1}(f + \Delta f) - A^{-1}f =$$
$$\left[(A + \Delta A)^{-1} - A^{-1}\right] f + (A + \Delta A)^{-1}\Delta f =$$
$$\left[\sum_{k=1}^{\infty}(-A^{-1}\Delta A)^k\right](A^{-1}f) + \left[\sum_{k=0}^{\infty}(-A^{-1}\Delta A)^k\right](A^{-1}\Delta f)$$

- Возьмем норму обеих частей

$$\|\Delta x\| \leq \frac{\|A^{-1}\Delta A\|}{1 - \|A^{-1}\Delta A\|}\|A^{-1}f\| \qquad (2)$$

Обусловленность линейной системы (2)

- Пусть $\|A^{-1}\Delta A\| < 1$:

$$\Delta x = \tilde{x} - x = (A + \Delta A)^{-1}(f + \Delta f) - A^{-1}f =$$

$$\left[(A + \Delta A)^{-1} - A^{-1}\right] f + (A + \Delta A)^{-1}\Delta f =$$

$$\left[\sum_{k=1}^{\infty}(-A^{-1}\Delta A)^k\right](A^{-1}f) + \left[\sum_{k=0}^{\infty}(-A^{-1}\Delta A)^k\right](A^{-1}\Delta f)$$

- Возьмем норму обеих частей

$$\|\Delta x\| \le \frac{\|A^{-1}\Delta A\|}{1 - \|A^{-1}\Delta A\|}\|A^{-1}f\| + \frac{\|A^{-1}\Delta f\|}{1 - \|A^{-1}\Delta A\|} \le$$

(2)

Обусловленность линейной системы (2)

- Пусть $\|A^{-1}\Delta A\| < 1$:

$$\Delta x = \tilde{x} - x = (A + \Delta A)^{-1}(f + \Delta f) - A^{-1} f =$$
$$\left[(A + \Delta A)^{-1} - A^{-1}\right] f + (A + \Delta A)^{-1}\Delta f =$$
$$\left[\sum_{k=1}^{\infty}(-A^{-1}\Delta A)^k\right](A^{-1}f) + \left[\sum_{k=0}^{\infty}(-A^{-1}\Delta A)^k\right](A^{-1}\Delta f)$$

- Возьмем норму обеих частей

$$\|\Delta x\| \le \frac{\|A^{-1}\Delta A\|}{1 - \|A^{-1}\Delta A\|}\|A^{-1}f\| + \frac{\|A^{-1}\Delta f\|}{1 - \|A^{-1}\Delta A\|} \le$$
$$\|x\|\frac{\|A^{-1}\|\|A\|}{1 - \|A^{-1}\Delta A\|}\left(\frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}\right. \tag{2}$$

Обусловленность линейной системы (2)

- Пусть $\|A^{-1}\Delta A\| < 1$:

$$\Delta x = \tilde{x} - x = (A + \Delta A)^{-1}(f + \Delta f) - A^{-1} f =$$
$$\left[(A + \Delta A)^{-1} - A^{-1}\right] f + (A + \Delta A)^{-1} \Delta f =$$
$$\left[\sum_{k=1}^{\infty} (-A^{-1}\Delta A)^k\right] (A^{-1} f) + \left[\sum_{k=0}^{\infty} (-A^{-1}\Delta A)^k\right] (A^{-1}\Delta f)$$

- Возьмем норму обеих частей

$$\|\Delta x\| \leq \frac{\|A^{-1}\Delta A\|}{1 - \|A^{-1}\Delta A\|} \|A^{-1} f\| + \frac{\|A^{-1}\Delta f\|}{1 - \|A^{-1}\Delta A\|} \leq$$
$$\|x\| \frac{\|A^{-1}\| \|A\|}{1 - \|A^{-1}\Delta A\|} \left(\frac{\|\Delta A\|}{\|A\|} + \frac{\|\Delta f\|}{\|A\| \|x\|} \right) \Rightarrow$$

(2)

Обусловленность линейной системы (2)

- Пусть $\|A^{-1}\Delta A\| < 1$:

$$\Delta x = \tilde{x} - x = (A + \Delta A)^{-1}(f + \Delta f) - A^{-1}f =$$
$$\left[(A + \Delta A)^{-1} - A^{-1}\right] f + (A + \Delta A)^{-1}\Delta f =$$
$$\left[\sum_{k=1}^{\infty}(-A^{-1}\Delta A)^k\right](A^{-1}f) + \left[\sum_{k=0}^{\infty}(-A^{-1}\Delta A)^k\right](A^{-1}\Delta f)$$

- Возьмем норму обеих частей

$$\|\Delta x\| \le \frac{\|A^{-1}\Delta A\|}{1 - \|A^{-1}\Delta A\|}\|A^{-1}f\| + \frac{\|A^{-1}\Delta f\|}{1 - \|A^{-1}\Delta A\|} \le$$
$$\|x\|\frac{\|A^{-1}\|\|A\|}{1 - \|A^{-1}\Delta A\|}\left(\frac{\|\Delta A\|}{\|A\|} + \frac{\|\Delta f\|}{\|A\|\|x\|}\right) \Rightarrow$$
$$\boxed{\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \le \frac{\|A^{-1}\|\|A\|}{1 - \|A^{-1}\Delta A\|}\left(\frac{\|\Delta A\|}{\|A\|} + \frac{\|\Delta f\|}{\|f\|}\right)} \qquad (2)$$

Геометрический смысл обусловленности ($\mathbb{R}^2$)

- Решение системы 2×2 - точка пересечения 2-х прямых:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

$[a_{11}, a_{12}]^T, [a_{21}, a_{22}]^T -$ нормали к прямым , $b_1, b_2 -$ сдвиги

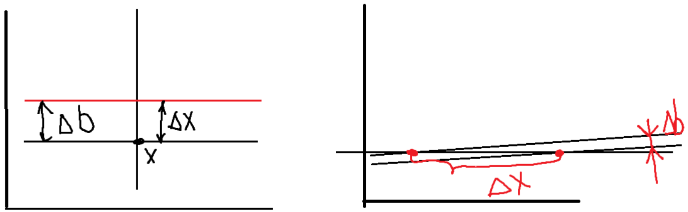

Рис. 1: *Слева – хорошая обусловленность, справа – плохая.*

Пример плохо обусловленной матрицы

Пример плохо обусловленной матрицы

- $x_0, \ldots, x_n$

Пример плохо обусловленной матрицы

- $x_0, \ldots, x_n$
- $y_0, \ldots, y_n$

Пример плохо обусловленной матрицы

- $x_0, \ldots, x_n$
- $y_0, \ldots, y_n$
- $p_n : p_n(x_k) = y_k$

Пример плохо обусловленной матрицы

- $x_0, \ldots, x_n$
- $y_0, \ldots, y_n$
- $p_n : p_n(x_k) = y_k$
- $$\begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \ldots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \ldots & x_1^n \\ \ldots & \ldots & \ddots & \ldots & \\ 1 & x_n & x_n^2 & \ldots & x_n^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

Обусловленность матрицы Вандермонда

Идея предобуславливания

- Часто можно перейти к эквивалентной системе с меньшим числом обусловленности:

$$Ax = b \Rightarrow P^{-1}Ax = P^{-1}b$$

- Матрица $P \approx A$ называется *предобуславливатель (preconditioner)*.

- Пример (код)

Диагональное преобладание

Диагональное преобладание

Определение 5.3 Диагональное преобладание

Матрица $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ имеет *строчное диагональное преобладание*, если

$$|a_{ii}| > r_i \equiv \sum_{j=1,\, j\neq i}^{n} |a_{ij}|,\ i = 1, \dots, n$$

и *столбцовое диагональное преобладание*, если

$$|a_{jj}| > c_j \equiv \sum_{i=1,\, i\neq j}^{n} |a_{ij}|,\ j = 1, \dots, n$$

Невырожденность матрицы с д.п.

Теорема 5.3

Матрица, имеющая диагональное преобладание, является невырожденной.

Невырожденность матрицы с д.п.

Теорема 5.3

Матрица, имеющая диагональное преобладание, является невырожденной.

- $\operatorname{diag}(A) = \operatorname{diag}(a_{11}, \ldots, a_{nn})$ - диагональная часть A

Невырожденность матрицы с д.п.

Теорема 5.3

Матрица, имеющая диагональное преобладание, является невырожденной.

- $\mathrm{diag}(A) = \mathrm{diag}(a_{11}, \ldots, a_{nn})$ - диагональная часть A
- $\mathrm{off}(A) = A - \mathrm{diag}(A)$ - внедиагональная часть A

Невырожденность матрицы с д.п.

Теорема 5.3

Матрица, имеющая диагональное преобладание, является невырожденной.

- $\mathrm{diag}(A) = \mathrm{diag}(a_{11}, \ldots, a_{nn})$ - диагональная часть A
- $\mathrm{off}(A) = A - \mathrm{diag}(A)$ - внедиагональная часть A
- Для строчного д.п. : $\|[\mathrm{diag}(A)]^{-1}\mathrm{off}(A)\|_\infty < 1 \Rightarrow$

Невырожденность матрицы с д.п.

Теорема 5.3

Матрица, имеющая диагональное преобладание, является невырожденной.

- $\mathrm{diag}(A) = \mathrm{diag}(a_{11}, \ldots, a_{nn})$ - диагональная часть A
- $\mathrm{off}(A) = A - \mathrm{diag}(A)$ - внедиагональная часть A
- Для строчного д.п. : $\|[\mathrm{diag}(A)]^{-1}\mathrm{off}(A)\|_\infty < 1 \Rightarrow$
- $I + [\mathrm{diag}(A)]^{-1}\mathrm{off}(A)$ - невырожденная

Невырожденность матрицы с д.п.

Теорема 5.3

Матрица, имеющая диагональное преобладание, является невырожденной.

- $\mathrm{diag}(A) = \mathrm{diag}(a_{11}, \dots, a_{nn})$ - диагональная часть A
- $\mathrm{off}(A) = A - \mathrm{diag}(A)$ - внедиагональная часть A
- Для строчного д.п. : $\|[\mathrm{diag}(A)]^{-1}\mathrm{off}(A)\|_\infty < 1 \Rightarrow$
- $I + [\mathrm{diag}(A)]^{-1}\mathrm{off}(A)$ - невырожденная
- Домножим на невырожденную матрицу $\mathrm{diag}(A)$:

$$\mathrm{diag}(A)\left(I + [\mathrm{diag}(A)]^{-1}\mathrm{off}(A)\right) = \mathrm{diag}(A) + \mathrm{off}(A) = A\square$$

Круги Гершгорина

Теорема 5.4 Круги Гершгорина

Для $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ рассмотрим круги

$$R_i \equiv \{z \in \mathbb{C} : |a_{ii} - z| \leq r_i\}$$
$$C_i \equiv \{z \in \mathbb{C} : |a_{ii} - z| \leq c_i\}$$
$$r_i \equiv \sum_{j=1,\, j\neq i}^{n} |a_{ij}|,\ c_j \equiv \sum_{i=1,\, i\neq j}^{n} |a_{ij}|,\ i,j = \overline{1, n}$$

Тогда для собственного числа λ матрицы A верно:

$$\lambda \in \bigcup_{i=1}^{n} R_i \text{ и } \lambda \in \bigcup_{i=1}^{n} C_i$$

Доказательство теоремы Гершгорина

- Если $\lambda \notin \bigcup_i R_i$, то
$$|\lambda - a_{ii}| > r_i$$

Доказательство теоремы Гершгорина

- Если $\lambda \notin \bigcup_i R_i$, то
$$|\lambda - a_{ii}| > r_i$$
- $\Rightarrow A - \lambda I$ имеет строчное д. п.

Доказательство теоремы Гершгорина

- Если $\lambda \notin \bigcup_i R_i$, то
$$|\lambda - a_{ii}| > r_i$$
- $\Rightarrow A - \lambda I$ имеет строчное д. п.
- $\Rightarrow A - \lambda I$ - невырождена – противоречие $\square$.

Доказательство теоремы Гершгорина

- Если $\lambda \notin \bigcup_i R_i$, то
$$|\lambda - a_{ii}| > r_i$$
- $\Rightarrow A - \lambda I$ имеет строчное д. п.
- $\Rightarrow A - \lambda I$ - невырождена – противоречие $\square$.

- С помощью кругов Гершгорина можно получить оценку на границы спектра A.

Доказательство теоремы Гершгорина

- Если $\lambda \notin \bigcup_i R_i$, то
$$|\lambda - a_{ii}| > r_i$$
- $\Rightarrow A - \lambda I$ имеет строчное д. п.
- $\Rightarrow A - \lambda I$ - невырождена – противоречие $\square$.

- С помощью кругов Гершгорина можно получить оценку на границы спектра A.
- Можно также доказать, что если m кругов не пересекаются с остальными, то в их объединении лежит ровно m с.ч.

Круги Гершгорина (демо)