Курс «Вычислительная математика»

Симаков Сергей Сергеевич
simakov.ss@phystech.edu

Кафедра вычислительной физики

Вычислительная математика. Введение, обзор курса.

МФТИ

О чём предмет?

О чём предмет?

Определение

Вычислительная математика изучает алгоритмы решения задач непрерывной математики

О чём предмет?

Определение

Вычислительная математика изучает алгоритмы решения задач непрерывной математики

- **Алгоритм** – последовательность элементарных операций для получения **числового ответа**.

О чём предмет?

Определение

Вычислительная математика изучает алгоритмы решения задач непрерывной математики

- **Алгоритм** – последовательность элементарных операций для получения **числового ответа**.
- **Непрерывная математика** – решаемые задачи содержат непрерывные переменные ($\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}^n$)

Примеры задач

Примеры задач

- Вычисление стандартных функций:

$$\sqrt{x}, sin(x), 1/x$$

Примеры задач

- Вычисление стандартных функций:

$$\sqrt{x}, sin(x), 1/x$$

- Дифференцирование/интегрирование $f'(x)$, $\int_a^b f(x)\,dx$

Примеры задач

- Вычисление стандартных функций:

$$\sqrt{x}, sin(x), 1/x$$

- Дифференцирование/интегрирование $f'(x)$, $\int_a^b f(x)\,dx$
- Решение нелинейных уравнений: $f(x) = 0$

Примеры задач

- Вычисление стандартных функций:

$$\sqrt{x}, sin(x), 1/x$$

- Дифференцирование/интегрирование $f'(x)$, $\int_a^b f(x)\,dx$
- Решение нелинейных уравнений: $f(x) = 0$
- Решение линейных систем $Ax = b$

Примеры задач

- Вычисление стандартных функций:

$$\sqrt{x}, sin(x), 1/x$$

- Дифференцирование/интегрирование $f'(x)$, $\int_a^b f(x)\,dx$
- Решение нелинейных уравнений: $f(x) = 0$
- Решение линейных систем $Ax = b$
- Вычисление собственных чисел и векторов: $Av = \lambda v$

Примеры задач

- Поиск экстремума функционала: $F(\boldsymbol{x}) \to \min$

Примеры задач

- Поиск экстремума функционала: $F(\mathbf{x}) \to \min$
- Решение нелинейных ОДУ:

$$u'(t) = f(t, u)$$

Примеры задач

- Поиск экстремума функционала: $F(\boldsymbol{x}) \to \min$
- Решение нелинейных ОДУ:

$$u'(t) = f(t, u)$$

- Решение уравнений в частных производных:

$$\Delta u(x, y) = f(x, y)$$

Области приложения методов вычислительной математики

Области приложения методов вычислительной математики

- Математическое моделирование
  - Физика
  - Химия
  - Биология
  - Экономика
  - ...

Области приложения методов вычислительной математики

- Математическое моделирование
  - Физика
  - Химия
  - Биология
  - Экономика
  - ...
- Математическая статистика

Области приложения методов вычислительной математики

- Математическое моделирование
  - Физика
  - Химия
  - Биология
  - Экономика
  - ...
- Математическая статистика
- Анализ данных, машинное обучение, оптимизация

Области приложения методов вычислительной математики

- Математическое моделирование
  - Физика
  - Химия
  - Биология
  - Экономика
  - ...
- Математическая статистика
- Анализ данных, машинное обучение, оптимизация
- Обработка сигналов и изображений

Области приложения методов вычислительной математики

- Математическое моделирование
  - Физика
  - Химия
  - Биология
  - Экономика
  - ...
- Математическая статистика
- Анализ данных, машинное обучение, оптимизация
- Обработка сигналов и изображений
- Потоки данных в компьютерных сетях, ...

Обзор курса

Обзор курса

1. Классификация погрешностей, машинная арифметика

Обзор курса

1. Классификация погрешностей, машинная арифметика
2. Вычислительная линейная алгебра

Обзор курса

1. Классификация погрешностей, машинная арифметика
2. Вычислительная линейная алгебра
3. Приближение функций

Обзор курса

1. Классификация погрешностей, машинная арифметика
2. Вычислительная линейная алгебра
3. Приближение функций
4. Численное дифференцирование, численное интегрирование

Обзор курса

1. Классификация погрешностей, машинная арифметика
2. Вычислительная линейная алгебра
3. Приближение функций
4. Численное дифференцирование, численное интегрирование
5. Методы решения нелинейных уравнений

Обзор курса

1. Классификация погрешностей, машинная арифметика
2. Вычислительная линейная алгебра
3. Приближение функций
4. Численное дифференцирование, численное интегрирование
5. Методы решения нелинейных уравнений
6. Методы решения ОДУ

Зачем изучать численные методы?

Зачем изучать численные методы?

Многие методы уже реализованы,
есть готовые программы,
зачем это изучать?

Вычисление производной

- Рассмотрим приближенную формулу для производной

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Вычисление производной

- Рассмотрим приближенную формулу для производной

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$\approx \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Вычисление производной

- Рассмотрим приближенную формулу для производной

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$\approx \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'(x) + \frac{1}{2} f''(\xi) \Delta x$$

Вычисление производной

- Рассмотрим приближенную формулу для производной

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$\approx \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'(x) + \frac{1}{2} f''(\xi) \Delta x$$

- Погрешность $\frac{1}{2} f''(\xi) \Delta x$ должна убывать с уменьшением шага

Плохая матрица

- Возьмём 2 линейные системы:
  1. $A_1 x_1 = b_1$, $A_1(i,j) = \dfrac{1}{i+j-1}, i,j = 1, \dots, n$
  2. $A_2 x_2 = b_2$, $A_2(i,j)$ – из равномерного распределения на $[0, 1]$
- Вычислим правые части, соответствующие решению $\boldsymbol{x} = [1, 1, \dots, 1]^T$
- Решим (прямым) методом Гаусса и вычислим относительные ошибки в решении

Неверная интерполяция

Неверная интерполяция

- Пусть даны точки $x_0, \ldots, x_n$ и значения в этих точках $y_0, \ldots, y_n$.

Неверная интерполяция

- Пусть даны точки $x_0, \ldots, x_n$ и значения в этих точках $y_0, \ldots, y_n$.
- В курсе мы докажем, что $\exists!$ многочлен степени $\leq n$ $p_n : p_n(x_k) = y_k, k = \overline{0, n}$

Неверная интерполяция

- Пусть даны точки $x_0, \dots, x_n$ и значения в этих точках $y_0, \dots, y_n$.
- В курсе мы докажем, что $\exists!$ многочлен степени $\leq n$ $p_n : p_n(x_k) = y_k, k = \overline{0, n}$
- Построим интерполяционный многочлен с помощью готовых функций и проверим, проходит ли многочлен через заданные точки

Расходимость интерполяционного процесса

- С помощью «правильной» реализации интерполяции построим графики многочленов на сгущающихся сетках разного типа:
  1. Равномерные сетки
  2. Неравномерные сетки вида:
     $$x_i = \cos\left(\pi \frac{2i+1}{2(n+1)}\right), \; i = 0, \ldots, n$$

Для кого этот курс?

Этот курс будет вам полезен, если вам придется:

Для кого этот курс?

Этот курс будет вам полезен, если вам придется:

Использовать готовые реализации стандартных методов для типовых задач

Для кого этот курс?

Этот курс будет вам полезен, если вам придется:

Использовать готовые реализации стандартных методов для типовых задач

Подбирать для конкретной задачи оптимальный метод с точки зрения числа операций/точности/...

Для кого этот курс?

Этот курс будет вам полезен, если вам придется:

Использовать готовые реализации стандартных методов для типовых задач

Подбирать для конкретной задачи оптимальный метод с точки зрения числа операций/точности/...

Разрабатывать или программировать методы, составными частями которых являются простые методы

Для кого этот курс?

Этот курс будет вам полезен, если вам придется:

Использовать готовые реализации стандартных методов для типовых задач

Подбирать для конкретной задачи оптимальный метод с точки зрения числа операций/точности/...

Разрабатывать или программировать методы, составными частями которых являются простые методы

Разрабатывать новые вычислительные методы, исследовать их свойства

Современные возможности

Современные возможности

- Высокая производительность компьютеров

Современные возможности

- Высокая производительность компьютеров
- Языки программирования высокого уровня

Современные возможности

- Высокая производительность компьютеров
- Языки программирования высокого уровня
- Готовые реализации основных методов

Современные возможности

- Высокая производительность компьютеров
- Языки программирования высокого уровня
- Готовые реализации основных методов

Можно самостоятельно и быстро
решать сложные задачи!

Типы погрешностей

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x) + \frac{h}{2} f''(\xi),\ \xi \in (x, x+h) \quad (1)$$

Типы погрешностей

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x) + \frac{h}{2} f''(\xi),\ \xi \in (x, x+h) \qquad (1)$$

- Ошибки входных данных:

$$f(x+h) \to f(x+h) + \Delta_1, f(x) \to f(x) + \Delta_2$$

Типы погрешностей

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x) + \frac{h}{2} f''(\xi),\ \xi \in (x, x+h) \qquad (1)$$

- Ошибки входных данных:

$$f(x+h) \to f(x+h) + \Delta_1, f(x) \to f(x) + \Delta_2$$

- Ошибки метода: $E = \dfrac{h}{2} f''(\xi)$

Типы погрешностей

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x) + \frac{h}{2} f''(\xi),\ \xi \in (x, x+h) \quad (1)$$

- Ошибки входных данных:

$$f(x+h) \to f(x+h) + \Delta_1, f(x) \to f(x) + \Delta_2$$

- Ошибки метода: $E = \dfrac{h}{2} f''(\xi)$
- Ошибки машинной арифметики
  - $x, f(x+h), f(x), h$ округляются
  - Вычитание и деление вычисляются неточно

Машинная арифметика. Числа с плавающей точкой

Машинная арифметика. Числа с плавающей точкой

Машинная арифметика. Числа с плавающей точкой

- Число называется *нормализованным*, если старший разряд мантиссы $\neq 0$.

Машинная арифметика. Числа с плавающей точкой

- Число называется *нормализованным*, если старший разряд мантиссы $\neq 0$.
  - $0.10101_2 \times 2^3$ нормализовано
  - $0.010101_2 \times 2^4$ не нормализовано

Относительная ошибка округления

- $\left|\dfrac{a - a_M}{a_M}\right| \leq ?$

Относительная ошибка округления

- $\left|\dfrac{a - a_M}{a_M}\right| \leq ?$
- Округление *до ближайшего машинного числа*

Относительная ошибка округления

- $\left|\dfrac{a - a_M}{a_M}\right| \leq ?$
- Округление *до ближайшего машинного числа*
- $a = 0.1\ldots d_p d_{p+1}\ldots \times 2^0$

Относительная ошибка округления

- $\left|\dfrac{a - a_M}{a_M}\right| \leq \,?$
- Округление *до ближайшего машинного числа*
- $a = 0.1\ldots d_p d_{p+1}\ldots \times 2^0$
- $|a - a_M| \leq \dfrac{1}{2} 2^{-p} = 2^{-p-1}$, p – длина мантиссы

Относительная ошибка округления

- $\left|\dfrac{a - a_M}{a_M}\right| \leq ?$
- Округление *до ближайшего машинного числа*
- $a = 0.1 \ldots d_p d_{p+1} \ldots \times 2^0$
- $|a - a_M| \leq \dfrac{1}{2} 2^{-p} = 2^{-p-1}$, p – длина мантиссы
- $\left|\dfrac{a - a_M}{a_M}\right| \leq \dfrac{2^{-p-1}}{2^{-1}} \leq 2^{-p} = \epsilon$

Относительная ошибка округления

- $\left|\dfrac{a - a_M}{a_M}\right| \leq ?$
- Округление *до ближайшего машинного числа*
- $a = 0.1 \ldots d_p d_{p+1} \ldots \times 2^0$
- $|a - a_M| \leq \dfrac{1}{2} 2^{-p} = 2^{-p-1}$, p – длина мантиссы
- $\left|\dfrac{a - a_M}{a_M}\right| \leq \dfrac{2^{-p-1}}{2^{-1}} \leq 2^{-p} = \epsilon$

Определение

Верхнюю границу относительной ошибки ϵ называют *машинным эпсилон*.

IEEE-стандарт. Одинарная точность

IEEE-стандарт. Одинарная точность

Одинарная точность

1	**8**	**23**
знак	показатель	мантисса

IEEE-стандарт. Одинарная точность

Одинарная точность

1	8	23
знак	показатель	мантисса

- $a = (-1)^s \times 2^{e-127} \times (1 + f)$

IEEE-стандарт. Одинарная точность

Одинарная точность

1	8	23
знак	показатель	мантисса

- $a = (-1)^s \times 2^{e-127} \times (1+f)$
- $\epsilon = 2^{-24} \approx 6 \times 10^{-8}$

IEEE-стандарт. Одинарная точность

Одинарная точность

1	**8**	**23**
знак	показатель	мантисса

- $a = (-1)^s \times 2^{e-127} \times (1 + f)$
- $\epsilon = 2^{-24} \approx 6 \times 10^{-8}$
- Диапазон чисел $[10^{-38}, 10^{38}]$

IEEE-стандарт. Двойная точность

IEEE-стандарт. Двойная точность

Двойная точность

1	11	52
знак	показатель	мантисса

IEEE-стандарт. Двойная точность

Двойная точность

1	11	52
знак	показатель	мантисса

- $a = (-1)^s \times 2^{e-1023} \times (1 + f)$

IEEE-стандарт. Двойная точность

Двойная точность

1	**11**	**52**
знак	показатель	мантисса

- $a = (-1)^s \times 2^{e-1023} \times (1+f)$
- $\epsilon = 2^{-53} \approx \times 10^{-16}$

IEEE-стандарт. Двойная точность

Двойная точность

1	11	52
знак	показатель	мантисса

- $a = (-1)^s \times 2^{e-1023} \times (1+f)$
- $\epsilon = 2^{-53} \approx \times 10^{-16}$
- Диапазон чисел $[10^{-308}, 10^{308}]$

Анализ влияния ошибок округления

Анализ влияния ошибок округления

- Обозначим $*$ одну из операций $+, -, \times, /$

Анализ влияния ошибок округления

- Обозначим $*$ одну из операций $+, -, \times, /$
- $fl(a * b)$ – результат округления $a * b$

Анализ влияния ошибок округления

- Обозначим $*$ одну из операций $+, -, \times, /$
- $fl(a * b)$ – результат округления $a * b$

Определение

Если $a * b$ не выходит за пределы области допустимых показателей, то

$$fl(a * b) = a * b(1 + \delta), \quad |\delta| \leq \epsilon$$

Анализ влияния ошибок округления

- Обозначим $*$ одну из операций $+, -, \times, /$
- $fl(a * b)$ – результат округления $a * b$

Определение

Если $a * b$ не выходит за пределы области допустимых показателей, то

$$fl(a * b) = a * b(1 + \delta), \quad |\delta| \leq \epsilon$$

- IEEE-арифметика обеспечивает также

$$fl(\sqrt{a}) = \sqrt{a}(1 + \delta), |\delta| \leq \epsilon$$

Пример. Вычисление скалярного произведения

```
s = 0.
for i = 1,n
    s = s + x[i] * y[i]
```

Пример. Вычисление скалярного произведения

```
s = 0.
for i = 1,n
    s = s + x[i] * y[i]
```

- $s_1 = 0 + x_1 y_1 (1 + \delta_1) = x_1 y_1 (1 + \delta)$

Пример. Вычисление скалярного произведения

```
s = 0.
for i = 1,n
    s = s + x[i] * y[i]
```

- $s_1 = 0 + x_1 y_1 (1 + \delta_1) = x_1 y_1 (1 + \delta)$
- $s_2 = (s_1 + x_2 y_2 (1 + \delta_2))(1 + \delta_3) = x_1 y_1 (1 + \delta)^2 + x_2 y_2 (1 + \delta)^2$

Пример. Вычисление скалярного произведения

```
s = 0.
for i = 1,n
    s = s + x[i] * y[i]
```

- $s_1 = 0 + x_1 y_1 (1 + \delta_1) = x_1 y_1 (1 + \delta)$
- $s_2 = (s_1 + x_2 y_2 (1 + \delta_2))(1 + \delta_3) = x_1 y_1 (1 + \delta)^2 + x_2 y_2 (1 + \delta)^2$
- $s_M = (x_1 y_1 + x_2 y_2)(1 + \delta)^n + x_3 y_3 (1 + \delta)^{n-1} + \dots$

Пример. Вычисление скалярного произведения

- При $n\epsilon < 1$:

$$\prod_{i=1}^{n}(1+\delta_i) \leq (1+\epsilon)^n = 1 + n\epsilon + O(\epsilon^2)$$

Пример. Вычисление скалярного произведения

- При $n\epsilon < 1$:

$$\prod_{i=1}^{n}(1+\delta_i) \leq (1+\epsilon)^n = 1 + n\epsilon + O(\epsilon^2)$$

$$\prod_{i=1}^{n}(1+\delta_i) \geq (1-\epsilon)^n \geq 1 - n\epsilon + O(\epsilon^2)$$

Пример. Вычисление скалярного произведения

- При $n\epsilon < 1$:

$$\prod_{i=1}^{n}(1+\delta_i) \leq (1+\epsilon)^n = 1 + n\epsilon + O(\epsilon^2)$$

$$\prod_{i=1}^{n}(1+\delta_i) \geq (1-\epsilon)^n \geq 1 - n\epsilon + O(\epsilon^2)$$

- $s_M = \sum_{i=1}^{n}(1+\Delta_i)x_i y_i$
  где с точностью до $O(\epsilon^2)$ $|\Delta_i| \leq n\epsilon$

Пример. Вычисление скалярного произведения

- При $n\epsilon < 1$:

$$\prod_{i=1}^{n}(1+\delta_i) \le (1+\epsilon)^n = 1 + n\epsilon + O(\epsilon^2)$$

$$\prod_{i=1}^{n}(1+\delta_i) \ge (1-\epsilon)^n \ge 1 - n\epsilon + O(\epsilon^2)$$

- $s_M = \sum_{i=1}^{n}(1+\Delta_i)x_i y_i$
  где с точностью до $O(\epsilon^2)$ $|\Delta_i| \le n\epsilon$
- $|s_M - s| = |\sum_{i=1}^{n} \Delta_i x_i y_i| \le n\epsilon\langle|x|, |y|\rangle$

Пример. Вычисление производной

$$f'(x) \approx \tilde{f}' = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \tag{2}$$

(6)

Пример. Вычисление производной

$$f'(x) \approx \tilde{f}' = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \tag{2}$$

$$\tilde{f}'_M = \frac{f(x+h)(1+\delta_1) - f(x)(1+\delta_2)}{h} = \tag{3}$$

$$\tag{6}$$

Пример. Вычисление производной

$$f'(x) \approx \tilde{f}' = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \tag{2}$$

$$\tilde{f}'_M = \frac{f(x+h)(1+\delta_1) - f(x)(1+\delta_2)}{h} = \tag{3}$$

$$= \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \frac{f(x+h)\delta_1 - f(x)\delta_2}{h} \tag{4}$$

(6)

Пример. Вычисление производной

$$f'(x) \approx \tilde{f}' = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \tag{2}$$

$$\tilde{f}'_M = \frac{f(x+h)(1+\delta_1) - f(x)(1+\delta_2)}{h} = \tag{3}$$

$$= \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \frac{f(x+h)\delta_1 - f(x)\delta_2}{h} \tag{4}$$

$$|\tilde{f}'_M - f'(x)| \leq \underbrace{\left|\frac{f(x+h) - f(x)}{h} - f'(x)\right|}_{\text{ошибка метода}} + \tag{5}$$

$$\tag{6}$$

Пример. Вычисление производной

$$f'(x) \approx \tilde{f}' = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \tag{2}$$

$$\tilde{f}'_M = \frac{f(x+h)(1+\delta_1) - f(x)(1+\delta_2)}{h} = \tag{3}$$

$$= \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \frac{f(x+h)\delta_1 - f(x)\delta_2}{h} \tag{4}$$

$$|\tilde{f}'_M - f'(x)| \le \underbrace{\left|\frac{f(x+h) - f(x)}{h} - f'(x)\right|}_{\text{ошибка метода}} + \tag{5}$$

$$\underbrace{\left|\frac{f(x+h)\delta_1 - f(x)\delta_2}{h}\right|}_{\text{ошибка округления}} \tag{6}$$

Вычисление производной, ошибки

$$\left|\frac{f(x+h)-f(x)}{h}-f'(x)\right| =$$

Вычисление производной, ошибки

$$\left|\frac{f(x+h)-f(x)}{h}-f'(x)\right| =$$

$$\left|\frac{f(x)+f'(x)h+f''(\xi)h^2/2-f(x)}{h}-f'(x)\right| =$$

Вычисление производной, ошибки

$$\left|\frac{f(x+h)-f(x)}{h}-f'(x)\right| =$$

$$\left|\frac{f(x)+f'(x)h+f''(\xi)h^2/2-f(x)}{h}-f'(x)\right| =$$

$$= |f''(\xi)\frac{h}{2}| \leq \frac{M_2 h}{2}, \quad M_2 = \max_x |f''(x)|$$

Вычисление производной, ошибки

$$\left|\frac{f(x+h)-f(x)}{h}-f'(x)\right| =$$

$$\left|\frac{f(x)+f'(x)h+f''(\xi)h^2/2-f(x)}{h}-f'(x)\right| =$$

$$= |f''(\xi)\frac{h}{2}| \leq \frac{M_2 h}{2}, \quad M_2 = \max_x |f''(x)|$$

$$\left|\frac{f(x+h)\delta_1 - f(x)\delta_2}{h}\right| \leq \frac{2M_0\epsilon}{h}, \quad M_0 = \max_x |f(x)|$$

Вычисление производной, ошибки

$$\left|\frac{f(x+h)-f(x)}{h}-f'(x)\right|=$$

$$\left|\frac{f(x)+f'(x)h+f''(\xi)h^2/2-f(x)}{h}-f'(x)\right|=$$

$$=|f''(\xi)\frac{h}{2}|\leq\frac{M_2h}{2},\quad M_2=\max_x|f''(x)|$$

$$\left|\frac{f(x+h)\delta_1-f(x)\delta_2}{h}\right|\leq\frac{2M_0\epsilon}{h},\quad M_0=\max_x|f(x)|$$

$$E(h)=\frac{M_2h}{2}+\frac{2M_0\epsilon}{h}\to\min$$

Вычисление производной, ошибки

$$\left|\frac{f(x+h)-f(x)}{h} - f'(x)\right| =$$

$$\left|\frac{f(x)+f'(x)h+f''(\xi)h^2/2-f(x)}{h} - f'(x)\right| =$$

$$= |f''(\xi)\frac{h}{2}| \le \frac{M_2 h}{2}, \quad M_2 = \max_x |f''(x)|$$

$$\left|\frac{f(x+h)\delta_1 - f(x)\delta_2}{h}\right| \le \frac{2M_0\epsilon}{h}, \quad M_0 = \max_x |f(x)|$$

$$E(h) = \frac{M_2 h}{2} + \frac{2M_0\epsilon}{h} \to \min$$

$$E'(h) = \frac{M_2}{2} - \frac{2M_0\epsilon}{h^2} = 0 \Rightarrow h^* = \left(\frac{4M_0\epsilon}{M_2}\right)^{1/2}$$

Заключение

Заключение

- Задачи, решаемые методами вычислительной математики

Заключение

- Задачи, решаемые методами вычислительной математики
- Особенности вычислительных методов

Заключение

- Задачи, решаемые методами вычислительной математики
- Особенности вычислительных методов
- Типы ошибок

Заключение

- Задачи, решаемые методами вычислительной математики
- Особенности вычислительных методов
- Типы ошибок
- Машинная арифметика

Заключение

- Задачи, решаемые методами вычислительной математики
- Особенности вычислительных методов
- Типы ошибок
- Машинная арифметика
- Исследование влияния ошибок округления